УДК 519.87

НОВЫЕ СЕМЕЙСТВА МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ЦИРКУЛЯНТНЫХ СЕТЕЙ[1]

Э. А. Монахова

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Рассматривается задача оптимизации циркулянтных сетей, состоящая в максимизации числа вершин при заданных степени и диаметре графа. На основе изучения мультипликативных циркулянтов с образующими, представленными в виде степеней нечётных чисел $t \geqslant 5$, построены два новых семейства мультипликативных циркулянтов нечётных размерностей $k \geqslant 3$ и диаметров $d \equiv 0 \bmod k$ и чётных размерностей $k \geqslant 4$ и диаметров $d \equiv 0 \bmod k$ и $d \equiv 0 \bmod k/2$, графы которых превосходят по числу вершин при тех же размерностях и диаметрах известные семейства мультипликативных циркулянтов.

Ключевые слова: *мультипликативные циркулянтные сети, диаметр, максимальный порядок графа.*

DOI 10.17223/20710410/41/8

NEW FAMILIES OF MULTIPLICATIVE CIRCULANT NETWORKS

E. A. Monakhova

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

E-mail: emilia@rav.sscc.ru

For circulant networks, the problem of the maximal attainable number of nodes under given degree and diameter of their graphs is considered. A research of multiplicative circulant networks with generators in the form of $(1, t, t^2, \ldots, t^{k-1})$ for odd $t \geqslant 5$ is presented. On the base of this research, two new families of multiplicative circulant networks of orders $n = (t+1)(1+t+\ldots+t^{k-1})/2 + t^{k-1}$ for odd dimensions $k \geqslant 3$ and diameters $d \equiv 0 \bmod k$ and even dimensions $k \geqslant 4$ and diameters $d \equiv 0 \bmod k$ and $d \equiv 0 \bmod k/2$ are constructed. The orders of these graphs are larger than orders of graphs of all known families of multiplicative circulant networks under the same dimensions and diameters.

Keywords: *multiplicative circulant networks, diameter, maximum order of a graph.*

1. Введение и основные определения

Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_k, n$ — целые числа, такие, что $1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k < n$. Граф C с множеством вершин $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и множеством рёбер $E = \{(i,j) : i - j \equiv$ $\equiv s_l \bmod n,\ l = 1, \ldots, k\}$, называется *циркулянтным*, числа $S = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ — образующими, $(n; S)$ — его параметрическим описанием, k — размерностью, n — порядком

[1]Исследование выполнено в рамках проекта № 0315-2016-0006.

графа. Циркулянтные графы являются вершинно-транзитивными. Степень циркулянта равна $2k$, если $s_k \neq n/2$. При чётном n и $s_k = n/2$ циркулянт имеет степень $2k-1$. В данной работе рассматриваются только связные циркулянтные графы чётных степеней. Известно, что циркулянтный граф $C(n; s_1, s_2, \ldots, s_k)$ является связным, если и только если наибольший общий делитель чисел s_1, s_2, …, s_k, n равен 1.

Циркулянтные сети (графы) широко изучаются при проектировании и анализе вычислительных систем, в теории графов и дискретной математике, в качестве топологии мультипроцессорных систем и компьютерных сетей и для других применений [1–3]. Интересным представляется новое направление использования циркулянтных сетей в центрах обработки информации больших баз данных [4].

Циркулянтные сети $C(n; 1, t, t^2, \ldots, t^{k-1})$ с образующими, представленными в виде степеней натурального числа $t \geqslant 2$, называются *мультипликативными* циркулянтами. Следует отметить, что мультипликативные циркулянтные сети имеют простые коммуникационные алгоритмы, эффективны относительно трассировки интегральных схем, живучести и отказоустойчивости и поэтому могут использоваться в качестве структур сетей связи суперкомпьютерных систем.

Диаметром графа C называется $\mathrm{d}(C) = \max\limits_{i,j \in V} \mathrm{d}(i,j)$, где $\mathrm{d}(i,j)$ — длина кратчайшего пути из вершины i в вершину j графа C. Для любых натуральных d и k пусть $M(d,k)$ обозначает максимально возможное (достижимое) натуральное n, такое, что существует множество образующих $S = (1, s_2, \ldots, s_k)$, при котором $\mathrm{d}(C(n;S)) \leqslant d$. В [1, 2] можно найти обзоры результатов по оценкам диаметра и достижимого порядка k-мерных, $k \geqslant 2$, циркулянтных сетей.

Приведём известные результаты, касающиеся оценок диаметра и достижимого порядка k-мерных, $k \geqslant 2$, циркулянтных сетей.

В [5] показано, что $M(d,k) \leqslant 1 + \sum\limits_{i=0}^{k-1} \mathrm{C}_k^i \mathrm{C}_d^{k-i} 2^{k-i}$, получена нижняя граница диаметра для любых n и k порядка $\dfrac{1}{2}(k!)^{1/k} n^{1/k}$ и доказана

Теорема 1. Циркулянтные сети вида $C(n; 1, t, t^2, \ldots, t^{k-1})$, где $n = t^k$ и $t \geqslant 3$ — нечётное число, имеют диаметр $d = k\lfloor t/2 \rfloor$.

Для $k = 2$ задача построения семейств двумерных циркулянтов с единичной образующей и максимально возможным порядком при любом диаметре d решена (см., например, обзор в [1]). Найдена [6, 7] функция $M(d,k)$ для $k = 3$ и любого диаметра d и аналитически построены семейства трёхмерных циркулянтов с порядком, совпадающим с $M(d,3)$. Для $k = 4$ наилучшие известные оценки функции $M(d,4)$ аналитически найдены с помощью компьютерного поиска в [8]. В [9, 10] авторы представили таблицу, содержащую свод самых больших известных циркулянтных сетей, найденных в литературе для ряда значений степеней и диаметров. Таблица рекордных циркулянтов включает в том числе ряд значений порядков графов, полученных на основании перечисленных аналитических результатов для размерностей 2, 3 и 4, а также результаты для нечётных степеней, найденные в [7, 8, 10]. В настоящее время таблица рекордных циркулянтных сетей для $k \leqslant 8$ и $d \leqslant 10$ представлена в Интернете [11] и постоянно обновляется.

Изучение мультипликативных циркулянтов, начатое в работе [5], продолжалось в последующие годы. Результаты теоремы 1 улучшены в [12]:

Теорема 2. Пусть d и k — натуральные числа, $d \geqslant k \geqslant 3$ и $p = \lfloor (d-k+3)/k \rfloor$. Тогда

$$M(d,k) \geqslant n = 2p\sum_{i=0}^{k-1}(4p)^i = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{k}\right)^k d^k + \mathrm{O}(d^{k-1}).$$

На основе теоремы 2 в [12] построены семейства мультипликативных циркулянтов с большим числом вершин, чем в [5], при тех же размерностях и диаметрах.

В [13, 14] рассмотрены свойства мультипликативных циркулянтных сетей вида $C(n;1,t,\ldots,t^{k-1})$ с нечётным $t \geqslant 3$ и $2t^{k-1} < n \leqslant t^k$ и получена общая формула для верхней оценки диаметра:

$$d(n;1,t,t^2,\ldots,t^{k-1}) \leqslant (k-1)\lfloor t/2 \rfloor + \lceil (n-t^{k-1})/(2t^{k-1}) \rceil.$$

В [15] исследованы свойства мультипликативных циркулянтов вида $C(n;1,t,\ldots,t^{k-1})$ с $n = t^k$ и чётным $t \geqslant 2$ и получен их диаметр:

$$d(t^k;1,t,t^2,\ldots,t^{k-1}) = kt/2 - \lfloor k/2 \rfloor.$$

Показано также, что мультипликативные циркулянтные сети как графы с образующими, представленными в виде степеней целого числа, имеют простые алгоритмы парного [13, 15] и трансляционного обменов [15], эффективны относительно трассировки интегральных схем, живучести и отказоустойчивости [13, 14].

В [16] получены новые улучшенные оценки для $M(d,k)$:

Теорема 3. Пусть $p = \left\lfloor \dfrac{d - \lfloor k/4 \rfloor}{k} \right\rfloor$, где d и $k > 4$ — целые числа, такие, что $d \geqslant k + \lfloor k/4 \rfloor$. Тогда

$$M(d,k) \geqslant n = \begin{cases} 2p\sum\limits_{i=0}^{k-1}(4p)^i, & \text{если } kp + \lfloor k/4 \rfloor \leqslant d < kp + \lfloor k/2 \rfloor, \\ (2p+1)\sum\limits_{i=0}^{k-1}(4p+1)^i, & \text{если } kp + \lfloor k/2 \rfloor \leqslant d < k(p+1), \\ (2p+2)\sum\limits_{i=0}^{k-1}(4p+3)^i, & \text{если } k(p+1) \leqslant d < k(p+1) + \lfloor k/4 \rfloor. \end{cases}$$

В настоящей работе продолжено исследование нижних оценок экстремальной функции $M(d,k)$ и получение их аналитических выражений при любых размерностях $k > 4$. На основе изучения циркулянтов с образующими, представленными в виде степеней нечётных чисел $t \geqslant 5$, получены аналитически новые нижние оценки достижимого числа вершин циркулянтных сетей размерностей $k > 4$ и построены соответствующие семейства мультипликативных циркулянтов, реализующих эти оценки.

2. Новые семейства мультипликативных циркулянтных сетей

Для мультипликативных циркулянтов размерностей $k = 4$ и 5 проведены дальнейшие исследования сетей, рассмотренных в работах [5, 15, 16]. С помощью компьютерного поиска исследованы диапазоны их существования и определено максимальное значение порядка графа, при котором значения диаметров и образующих совпадают с найденными в [5, 15, 16]. Полученный результат позволил улучшить порядки графов по сравнению с известными результатами [5, 12, 15, 16]. Анализ значений подмножеств найденных максимально возможных порядков графов мультипликативных циркулянтов размерности 5 (табл. 1) послужил основой теоретического обобщения полученных результатов для любых размерностей.

В табл. 1 использованы следующие обозначения: d — диаметры найденных мультипликативных циркулянтов; n — их порядки; t — параметр, порождающий соответствующие множества образующих графа $S = (1, t, t^2, t^3, t^4)$.

Таблица 1

Новые циркулянтные графы размерности 5

$k=5$								
d	n	t	d	n	t	d	n	t
6	682	4	15	111271	11	24	1245289	19
7	2343	5	16	137598	12	25	1505931	19
8	4399	7	17	216587	13	26	1692610	20
9	8803	7	18	282053	15	27	2246255	21
10	13605	7	19	383303	15	28	2671209	23
11	22820	8	20	484553	15	29	3230891	23
12	36905	9	21	563592	16	30	3790573	23
13	52707	11	22	798669	17	31	4168812	24
14	81989	11	23	984647	19	32	5289713	25

Рассмотрим множество мультипликативных циркулянтных сетей вида $C(n; 1, t, t^2, \ldots, t^{k-1})$, $k \geqslant 3$, с нечётным $t \geqslant 5$. В теореме 4 представлены два новых бесконечных семейства рассматриваемых сетей, которые улучшают известные оценки достижимого порядка циркулянтных графов. Далее $D(x)$, $0 \leqslant x < n$, обозначает длину кратчайшего пути из вершины 0 в вершину x.

Теорема 4. Пусть $k \geqslant 3$, $t \geqslant 5$ — нечётное число, $S = (1, t, t^2, \ldots, t^{k-1})$. Если

$$n = \lceil t/2 \rceil \sum_{i=0}^{k-1} t^i + t^{k-1}, \tag{1}$$

то

$$d(n; S) = \frac{k(t+1)}{4} \tag{2}$$

при следующих условиях:

$$k \geqslant 3 \text{ — нечётное число и } t \equiv 3 \bmod 4 \tag{3}$$

или

$$k \geqslant 4 \text{ — чётное число.} \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим циркулянтный граф $C(n; 1, t, t^2, \ldots, t^{k-1})$, где $t \geqslant 5$ — нечётное число и значение n удовлетворяет (1). Заметим, что все вершины графа образуют замкнутый цикл $0, 1, \ldots, n-1, 0$.

Возьмём любую вершину $0 \leqslant x < n$ рассматриваемого графа. Определим c_0, такое, что $c_0 \equiv x \bmod t$ и $|c_0| \leqslant \lfloor t/2 \rfloor$. Для любых $i = 1, \ldots, k-1$ определим c_i, такие, что

$$c_i \equiv \frac{1}{t^i} \left(x - \sum_{j=0}^{i-1} c_j t^j \right) \bmod t,$$

$|c_i| \leqslant \lfloor t/2 \rfloor$ для $i = 0, \ldots, k-2$ и $0 \leqslant c_{k-1} \leqslant \lceil t/2 \rceil + 1$. Тогда

$$x = \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i = c_0 s_1 + c_1 s_2 + \ldots + c_{k-1} s_k.$$

Вычисленные таким образом коэффициенты c_i, $i = 0, \ldots, k-1$, являются координатами пути из вершины 0 в x, а именно: $|c_i|$ определяет, сколько раз в пути из вершины 0 в x использовалась соответствующая образующая, а знак (+ или −) у c_i указывает направление движения по соответствующей образующей. Обозначим длину этого пути через $D^+(x)$. Имеем $D^+(x) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} |c_i|$.

Второй возможный путь из 0 в x определим, взяв разность $x - n$. Учитывая (1), имеем $x - n = \sum\limits_{i=0}^{k-1} c'_i t^i$, где $c'_i = c_i - \lceil t/2 \rceil$ для $i = 0, \ldots, k-2$ и $c'_{k-1} = c_{k-1} - \lceil t/2 \rceil - 1$.

В дальнейшем с помощью алгоритма 1 преобразуем коэффициенты c'_i в c''_i таким образом, чтобы выполнялось условие $|c''_i| \leqslant \lfloor t/2 \rfloor$, $i = 0, \ldots, k-2$. Преобразованные коэффициенты c''_i, $i = 0, \ldots, k-1$, являются координатами второго возможного пути из вершины 0 в x. Обозначим длину этого пути через $D^-(x)$. Она равна $D^-(x) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} |c''_i|$.

Для любой вершины $0 \leqslant x < n$ длина кратчайшего пути

$$D(x) \leqslant \min\{D^+(x), D^-(x)\}.$$

Пусть значение выполнено (1). Покажем, что диаметр d графа $C(n; 1, t, t^2, \ldots, t^{k-1})$ удовлетворяет (2). Для этого докажем, что для любой вершины $0 \leqslant x < n$ при выполнении как условия (3), так и условия (4)

$$D^+(x) + D^-(x) \leqslant k\lceil t/2 \rceil + 1 = 2d + 1.$$

Далее последовательно для $i = 0, 1, \ldots, k-1$ выполняем преобразование коэффициентов c'_i в c''_i и подсчитываем суммы $|c_i| + |c''_i|$ (алгоритм 1).

На рис. 1 приведена граф-схема алгоритма 1, где $T = \lceil t/2 \rceil$.

Суммируя результаты выполнения алгоритма 1 и анализируя все возможности k обходов по данной граф-схеме (соответственно k образующим), получаем для любой вершины $0 \leqslant x < n$

$$\sum_{i=0}^{k-1} (|c_i| + |c''_i|) \leqslant k\lceil t/2 \rceil + 1 = kT + 1 = 2d + 1.$$

Следовательно, или $D^+(x) \leqslant d$, или $D^-(x) \leqslant d$. Покажем, что в данном графе существует хотя бы одна такая вершина x, что $D(x) = d$. Рассмотрим два возможных варианта.

С л у ч а й (3). Пусть $k \geqslant 3$ — нечётное число и $t \equiv 3 \bmod 4$. В качестве искомой вершины возьмём $x_0 = \dfrac{t+1}{4} \sum\limits_{i=0}^{k-1} t^i$. Имеем $x_0 - n = -\dfrac{t+1}{4} \sum\limits_{i=0}^{k-2} t^i - \dfrac{t+5}{4} t^{k-1}$. Таким образом, $\sum\limits_{i=0}^{k-1} |c_i| = \dfrac{t+1}{4} k = d$ и $\sum\limits_{i=0}^{k-1} |c''_i| = \dfrac{t+1}{4}(k-1) + \dfrac{t+5}{4} = \dfrac{t+1}{4} k + 1 = d + 1$. Рассмотрение длин альтернативных путей из 0 в x_0 показывает, что они не меньше d. Следовательно, $D(x_0) = d$.

Алгоритм 1. Алгоритм преобразования коэффициентов

Вход: параметр t; коэффициенты c_i и c'_i для $i = 0, \ldots, k-1$.
Выход: суммы $|c_i| + |c''_i|$, $i = 0, \ldots, k-1$.

1: $i = -1$.
2: Увеличить i на 1. Положить $c''_i = c'_i$.
3: **Если** $i < k-1$ и $c_i \leqslant 0$, **то**
заменяем c'_i на $c''_i = c''_i + t$. Очевидно, при такой замене сумма $|c''_i| + |c''_{i+1}|$ не увеличивается по сравнению с суммой $|c'_i|+|c'_{i+1}|$ (соответственно в последующем будет замена c'_{i+1} на $c''_{i+1} = c'_{i+1}-1$). При этом $0 \leqslant c''_i \leqslant \lfloor t/2 \rfloor$ и $|c_i|+|c''_i| = \lceil t/2 \rceil - 1$, перейти в п. 8.
4: **Если** $i = k-1$, **то**
5: из условия $0 \leqslant c_{k-1} \leqslant \lceil t/2 \rceil + 1$ следует $-\lceil t/2 \rceil - 1 \leqslant c''_{k-1} = c'_{k-1} \leqslant 0$ и $|c_{k-1}| + |c''_{k-1}| = \lceil t/2 \rceil + 1$, перейти в п. 15.
6: **Если** $i < k-1$ и $c_i > 0$, **то**
7: $|c'_i| = |c_i - \lceil t/2 \rceil| \leqslant \lfloor t/2 \rfloor$. Тогда $|c_i| + |c''_i| = \lceil t/2 \rceil$, перейти в п. 2.
8: Увеличим i на 1 и положим $c''_i = c'_i - 1$.
9: **Если** $i = k-1$, **то**
10: $|c_{k-1}| + |c''_{k-1}| = \lceil t/2 \rceil + 2$, перейти в п.15.
11: **Если** $c_i > 1$, **то**
12: $|c_i| + |c''_i| = \lceil t/2 \rceil + 1$, перейти в п. 2.
13: **Если** $c_i \leqslant 1$, **то**
14: заменяем c''_i на новое значение $c''_i = c''_i + t$ (соответственно в последующем будет замена c'_{i+1} на $c''_{i+1} = c'_{i+1} - 1$). При этом $-1 \leqslant c''_i \leqslant \lfloor t/2 \rfloor$ и

$$|c_i| + |c''_i| = \begin{cases} \lceil t/2 \rceil - 2, & \text{если } -\lceil t/2 \rceil + 2 \leqslant c_i \leqslant 0, \\ \lceil t/2 \rceil, & \text{если } c_i \in \{-\lceil t/2 \rceil + 1, 1\}, \end{cases}$$

перейти в п.8.
15: Конец алгоритма.

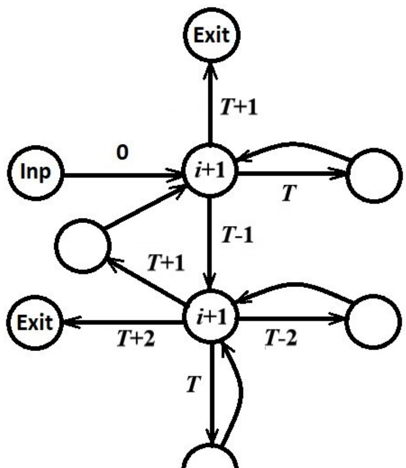

Рис. 1

С л у ч а й (4). Пусть $k \geqslant 4$ — чётное число и $t \equiv 1 \bmod 4$. В качестве искомой вершины возьмём

$$x_0 = \frac{t-1}{2} + t + \frac{t-1}{2}t^2 + t^3 + \ldots + \frac{t-1}{2}t^{k-2} + t^{k-1}.$$

Имеем

$$x_0 - n = -1 - \frac{t-1}{2}t - t^2 - \frac{t-1}{2}t^3 - \ldots - t^{k-2} - \frac{t+1}{2}t^{k-1}.$$

Таким образом, $\sum\limits_{i=0}^{k-1} |c_i| = k/2((t-1)/2+1) = d$ и $\sum\limits_{i=0}^{k-1} |c_i''| = k/2((t-1)/2+1)+1 = d+1$. Длины всех других возможных путей из 0 в x_0 не меньше d. Следовательно, $D(x_0) = d$.

Случай, когда $k \geqslant 4$ — чётное число и $t \equiv 3 \bmod 4$, доказывается аналогично случаю (3). ■

В табл. 2 показан результат сравнения известных семейств мультипликативных циркулянтов с полученными в работе. Здесь n_1, n_2 и n — порядки графов, найденных соответственно посредством теорем 2 [12], 3 [16] и 4.

Т а б л и ц а 2

Сравнение семейств мультипликативных циркулянтов

$k=5$					$k=6$				
d	n_1	n_2	n	t	d	n_1	n_2	n	t
10	682	11 204	13 605	7	9	2 730	11 718	14 843	5
15	18 724	96 630	111 271	11	12	2 730	78 432	95 239	7
20	135 726	433 928	484 553	15	15	149 796	332 150	391 199	9
25	559 240	1 375 610	1 505 931	19	18	149 796	1 062 936	1 223 987	11
30	244 210	3 510 732	3 790 573	23	21	1 628 718	2 815 638	3 186 931	13

Поясним на примерах результат сравнения двух новых семейств с известными семействами мультипликативных циркулянтов.

1. Пусть $k = 5$ и $d = 25$. Тогда в силу теоремы 2 имеем $M(d,5) \geqslant n = 559\,240$. Теорема 3 даёт следующую оценку: $M(d,5) \geqslant n = 1\,375\,610$. Новое семейство при том же диаметре даёт оценку $M(d,5) \geqslant n = 1\,505\,931$. Данный порядок циркулянта достигается при образующих $S = (1, t, t^2, t^3, t^4)$, где $t = 19$.

2. Пусть $k = 6$ и $d = 18$. Тогда в силу теоремы 2 $M(d,5) \geqslant n = 149\,796$. Теорема 3 даёт следующую оценку: $M(d,5) \geqslant n = 1\,062\,936$. Новое семейство при диаметре $d = 18$ даёт оценку $M(d,5) \geqslant n = 1\,223\,987$. Данный порядок циркулянта достигается при образующих $S = (1, t, t^2, t^3, t^4, t^5)$, где $t = 11$.

С помощью специально разработанной компьютерной программы показано, что порядки графов новых семейств мультипликативных циркулянтов являются максимально возможными для исследуемых типов образующих при диаметрах $d \leqslant 22$ и 20 и размерностях соответственно $k = 4$ и 5. Для дальнейшей работы представляет интерес возможность доказательства обобщения данного результата для любых размерностей и диаметров.

Таким образом, полученная в настоящей работе оценка функции $M(d,k)$, подтверждённая конструктивно построением семейств мультипликативных циркулянтных сетей, для размерностей $k \geqslant 5$ (чётных степеней 10 и более) остается пока лучшей известной оценкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахова Э. А.* Структурные и коммуникативные свойства циркулянтных сетей // Прикладная дискретная математика. 2011. №3. С. 92–115.
2. *Monakhova E. A.* A survey on undirected circulant graphs // Discr. Math., Algorithms and Appl. 2012. No. 4(1). P. 17–47.
3. *Perez-Roses H.* Algebraic and computer-based methods in the undirected degree/diameter problem — a bief survey // Electronic J. Graph Theory and Appl. 2014. No. 2(2). P. 166–190.
4. *Erickson A., Stewart I. A., Navaridas J., and Kiasari A. E.* The stellar transformation: From interconnection networks to datacenter networks // Comput. Networks. 2017. No. 113. P. 29–45.
5. *Wong C. K. and Coppersmith D.* A combinatorial problem related to multimodule memory organizations // J. Assoc. Comput. Mach. 1974. No. 21. P. 392–402.
6. *Monakhova E.* Optimal triple loop networks with given transmission delay: Topological design and routing // Intern. Network Optimization Conf. (INOC'2003), Evry/Paris, France, 2003. P. 410–415.
7. *Dougherty R. and Faber V.* The degree-diameter problem for several varieties of Cayley graphs, 1: The Abelian case // SIAM J. Discrete Math. 2004. No. 17(3). P. 478–519.
8. *Lewis R.* The degree-diameter problem for circulant graphs of degree 8 and 9 // arXiv:1404.3948v1, 2014.
9. *Feria-Puron R., Ryan J., and Perez-Roses H.* Searching for large multi-loop networks // Elec. Notes Disc. Math. 2014. No. 46. P. 233–240.
10. *Feria-Puron R., Perez-Roses H., and Ryan J.* Searching for large circulant graphs // arXiv:1503.07357v1 [math.CO] (25 Mar 2015). P. 31.
11. The Degree/Diameter Problem For Circulant Graphs. `http://combinatoricswiki.org/wiki/The_Degree_Diameter_Problem_for_Circulant_Graphs`.
12. *Chen S. and Jia X. -D.* Undirected loop networks // Networks. 1993. No. 23. P. 257–260.
13. *Parhami B.* Chordal rings based on symmetric odd-radix number systems // Proc. Intern. Conf. on Communications in Computing (Las Vegas, NV, June 27–30). Los Alamitos: IEEE Press, 2005. P. 196–199.
14. *Parhami B.* A class of odd-radix chordal ring networks // The CS'J J. Comput. Sci. Eng. 2006. Vol. 4. No. 2–4. P. 1–9.
15. *Stojmenovic I.* Multiplicative circulant networks. Topological properties and communication algorithms // Discr. Appl. Math. 1997. Vol. 77. P. 281–305.
16. *Monakhova E. A.* On an extremal family of circulant networks // J. Appl. Industr. Math. 2011. No. 5(4). P. 1–7.

REFERENCES

1. *Monakhova E. A.* Strukturnye i kommunikativnye svojstva cirkulyantnyh setej [Structural and communicative properties of circulant networks]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2011, no. 3, pp. 92–115. (in Russian)
2. *Monakhova E. A.* A Survey on undirected circulant graphs. Discr. Math., Algorithms and Appl., 2012, no. 4(1), pp. 17–47.
3. *Perez-Roses H.* Algebraic and computer-based methods in the undirected degree/diameter problem — a bief survey. Electronic J. Graph Theory and Appl., 2014, no. 2(2), pp. 166–190.
4. *Erickson A., Stewart I. A., Navaridas J., and Kiasari A. E.* The stellar transformation: From interconnection networks to datacenter networks. Comput. Networks, 2017, no. 113, pp. 29–45.

5. *Wong C. K. and Coppersmith D.* A combinatorial problem related to multimodule memory organizations. J. Assoc. Comput. Mach., 1974, no. 21, pp. 392–402.
6. *Monakhova E.* Optimal triple loop networks with given transmission delay: Topological design and routing. Intern. Network Optimization Conf. (INOC'2003), Evry/Paris, France, 2003, pp. 410–415.
7. *Dougherty R. and Faber V.* The degree-diameter problem for several varieties of Cayley graphs, 1: The Abelian case. SIAM J. Discrete Math., 2004, no. 17(3), pp. 478–519.
8. *Lewis R.* The degree-diameter problem for circulant graphs of degree 8 and 9. arXiv:1404.3948v1, 2014.
9. *Feria-Puron R., Ryan J., and Perez-Roses H.* Searching for large multi-loop networks. Elec. Notes Disc. Math., 2014, no. 46, pp. 233–240.
10. *Feria-Puron R., Perez-Roses H., and Ryan J.* Searching for large circulant graphs. arXiv:1503.07357v1 [math.CO] (25 Mar 2015), p. 31.
11. The Degree/Diameter Problem For Circulant Graphs. `http://combinatoricswiki.org/wiki/The_Degree_Diameter_Problem_for_Circulant_Graphs`.
12. *Chen S. and Jia X. -D.* Undirected loop networks. Networks, 1993, no. 23, pp. 257–260.
13. *Parhami B.* Chordal rings based on symmetric odd-radix number systems. Proc. Intern. Conf. on Communications in Computing (Las Vegas, NV, June 27–30). Los Alamitos, IEEE Press, 2005, pp. 196–199.
14. *Parhami B.* A class of odd-radix chordal ring networks. The CS'J J. Comput. Sci. Eng., 2006, vol. 4, no. 2–4, pp. 1–9.
15. *Stojmenovic I.* Multiplicative circulant networks. Topological properties and communication algorithms. Discr. Appl. Math., 1997, vol. 77, pp. 281–305.
16. *Monakhova E. A.* On an extremal family of circulant networks. J. Appl. Industr. Math., 2011, no. 5(4), pp. 1–7.