ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 18

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1977

2

ределение возможно по самому его характеру
ение, ибо непроизводственная сфера потребляет
едовательно, ей нечего реализовать в обмен на
Во-вторых, ценовое перераспределение не может
имости прибавочного продукта даже в сфере
тклонения цен от стоимостей в обменивающихся
для этого [2]. В-третьих, ценовое перераспределе-
го окончательного перемещения стоимости при-
занное с этим перераспределение так неравно-
стей и требовало бы столь частого и разнообраз-
ия, что это неизбежно пришло бы в острое про-
ности и устойчивостью плановых цен.

а перераспределения стоимости прибавочного
общественного воспроизводства, не позволяет ре
ия одними лишь методами отклонения цен от ст
х финансовых методов перераспределения. Но
ераспределения стоимости прибавочного прод
и методами?

оимостей должно было обслуживать тольк
ибавочного продукта от мест его создани
н вовсе не было бы нужды, так как наиб
кого перемещения, разумеется, было

88

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 18

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1977

Восемнадцатый выпуск «Геометрического сборника» содержит работы, обсуждавшиеся на городском Геометрическом семинаре им. Н. Г. Туганова при Томском университете и семинаре по теории функций научно-исследовательского института прикладной математики и механики.

Он содержит 10 работ, посвященных различным семействам многомерных плоскостей и парам m-поверхностей в проективном пространстве, задаче Бианки в проективной теории конгруэнции коник, распределениям на многообразии гиперплоских элементов центроаффинного пространства, некоторым вопросам неевклидовой геометрии, а также теории некоторых классов отображений.

Сборник предназначается для научных работников, интересующихся вопросами дифференциальной геометрии, геометрической теории функций и связанных с ними вопросов.

Редакторы выпуска:
профессор Р. Н. Щербаков, доценты
Л. З. Кругляков и Б. П. Куфарев

2-2-3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 18 1977

Л. З. КРУГЛЯКОВ

КАСАТЕЛЬНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГООБРАЗИЙ, АССОЦИИРОВАННЫХ С СЕМЕЙСТВОМ МНОГОМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Предлагаемая статья является продолжением работы [1]. С помощью разработанного в [1] аппарата в ней изучаются касательные подпространства $TL(\Psi_b)$ и характеристики $ChL(\Psi_b)$ d-плоскости L пфаффова подмногообразия $L(\Psi_b)$ a-семейства $L(a)$ d-плоскостей L в проективном N-пространстве. Решается вопрос об отыскании всех подмногообразий $L(\Psi_b)$ по заданному касательному подпространству или характеристике. В текущей плоскости L семейства $L(a)$ ищутся все k-плоскости L_k, для которых касательные подпространства $TL_k(m_1, a)$ плоскости L_k как элемента внутренне порожденного многообразия $L_k(m_1, a)$ всех плоскостей $L_k \subset L \subset L(a)$ (см. [1]) совпадают или инцидентны. Аналогичная задача решается для характеристик $Chl_t(m_2, a)$ внешне порожденного многообразия $l_t(m_2, a)$ всех t-плоскостей l_t, содержащих L и содержащихся в касательном n-подпространстве $TL(a)$ для плоскости L семейства $L(a)$. При $t = n - a$ совокупность характеристик $Chl_t(m_2, \Psi_1)$ для всех подсемейств $l_t(m_2, \Psi_1)$ семейства $l_t(m_2, a)$ образует гиперповерхность в L порядка a. Изучаются случаи, когда она распадается. Формулируются двойственные результаты.

В этой статье, как и в [1], индексы принимают следующие значения:

$$I, J, K = 0, 1, \dots, N; \quad \varkappa = 1, \dots, a;$$
$$i = 0, \dots, d; \quad p = d + 1, \dots, n; \quad \alpha = n + 1, \dots, N;$$
$$j = 0, \dots, k; \quad h = k + 1, \dots, d;$$
$$r = d + 1, \dots, t; \quad s = t + 1, \dots, n;$$
$$\tau = 1, \dots, b; \quad \nu = b + 1, \dots, a.$$

Все рассмотрение носит локальный характер и все функции предполагаются аналитическими. Так как все определения и результаты описаны геометрически, то вопрос о том, как изменяются те или иные величины при изменении репера, не рассматривается.

§ 1. Касательные подпространства и характеристики пфаффова подмногообразия

Присоединим к каждой d-плоскости L a-семейства $L(a)$ в N-мерном проективном пространстве P_N подвижный репер $\{A_I\}$ ($I, J=0, 1 \dots, N$) так, что его вершины A_i ($i = 0, 1, \dots, d$) лежат в плоскости L, а вер шины A_p $(p = d+1, ..., n)$ — в касательном n-подпространстве $TL(a)$ для плоскости L семейства $L(a)$. В остальном выбор репера произволен. Пусть, как и в [1], формы $\omega^\varkappa$ $(\varkappa = 1, ..., a)$ образуют базис пространства дифференциалов параметров семейства $L(a)$. В деривационных формулах

$$dA_I = \omega_I^J A_J \tag{1.1}$$

в силу произведенного выбора подвижного репера имеем

$$\omega_i^\alpha = 0 \ (\alpha = n+1, ..., N).$$

Положим

$$\omega_i^p = a_{i\varkappa}^p \omega^\varkappa. \tag{1.2}$$

Зададим 1-подсемейство $L(\Psi_1)$ семейства $L(a)$ в виде

$$\omega^1 : \omega^2 : ... : \omega^a = \lambda^1 : \lambda^2 : ... : \lambda^a, \tag{1.3}$$

а пфаффово подмногообразие $L(\Psi_b)$ — в виде

$$\omega^\nu = b_\tau^\nu \omega^\tau (\tau = 1, ..., b; \ \nu = b+1, ... a). \tag{1.4}$$

Каждому подмногообразию $L(\Psi_b)$, проходящему через фиксированную плоскость L семейства $L(a)$, на диаграмме Циндлера P^*_{a-1} [1] соответствует $(b-1)$ — плоскость z_{b-1}, причем b_τ^ν — линейные комбинации грассмановых координат плоскости z_{b-1} в пространстве P^*_{a-1}.

В работе [1] рассматривались касательное подпространство $TL(\Psi_b)$ и характеристика $ChL(\Psi_b)$ для плоскости L пфаффова подмногообразия $L(\Psi_b)$, заданного уравнениями (1.4). Их уравнения имеют вид

$$TL(\Psi_b) : x_i = 0, \ b_{i\tau}^p \ x_p = 0; \tag{1.5}$$

$$ChL(\Psi_b) : \ x^q = 0, \ b_{i\tau}^p \ x^i = 0, \tag{1.6}$$

где x^J — проективные координаты точки, x_J — тангенциальные координаты гиперплоскости относительно репера $\{A_J\}$ и

$$b_{i\tau}^p = a_{i\tau}^p + b_\tau^\nu a_{i\nu}^p. \tag{1.7}$$

Пусть некоторое подмногообразие $L(\Psi'_b)$ задано системой уравнений $\omega^\nu = 0$. Его касательное подпространство $l_t = TL(\Psi'_b)$ имеет размерность $t = d + R$, где $R = R_p \| a_{i\tau}^p \|$. Здесь и далее для трехиндексных величин, полученных из (1.2), R_β означает ранг матрицы, у которой индекс β является индексом строки, а остальные индексы являются индексами столбцов. Поместим вершины A_r $(r = d+1, ..., t)$ репера $\{A_J\}$ в подпространство l_t. Тогда

$$a_{i\tau}^s = 0 \ \ (s = t+1, ..., n). \tag{1.8}$$

Теорема 1. Все подмногообразия $L(\Psi_b)$ с касательными подпространствами, принадлежащими $l_t = TL(\Psi'_b)$, образуют подмногообразие $L(\Psi_{b_1})$, где $b_1 = a - R_\nu \| a_{i\nu}^s \|$.

Доказательство. В силу (1.7) и (1.8) требование принадлежности подпространства $TL(\Psi_b)$ подмногообразия $L(\Psi_b)$, определенного уравнениями (1.4), подпространству l_t приводит к системе уравнений

$$b_\tau^\nu \ a_{i\nu}^s = 0. \tag{1.9}$$

Для каждого фиксированного τ из (1.9) получаем систему уравнений относительно $a-b$ неизвестных b_τ^ν. Обозначим

$$R_\nu \| a_{i\nu}^s \| = q. \tag{1.10}$$

Если $a-q=b$, то система (1.9) имеет только нулевое решение и тогда все $L(\Psi_b)$ с касательным подпространством, принадлежащим l_t, совпадают с $L(\Psi'_b)$. Пусть теперь $a-q>b$. В [1] показано, что систему для нахождения всех подмногообразий, проходящих через плоскость L и имеющих касательное подпространство $l_t=(L, A_{d+1}, \ldots, A_t)$ можно записать в виде

$$a^s_{i\varkappa}\,\omega^\varkappa=0.$$

В силу (1.8) и (1.10) она имеет решением $L(\Psi_{b_1})\supset L(\Psi_b)$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если ранг $R_\nu\|a^s_{i\nu}\|$ максимален и если

$$\sigma_1\equiv a-b-(d+1)(n-t)>0, \tag{1.11}$$

то все подмногообразия $L(\Psi_b)$ с касательными подпространствами, принадлежащими l_t, образуют подмногообразие $L(\Psi_{b_1})$, где $b_1=b+\sigma_1$, а если $\sigma_1\leqslant 0$, то из совпадения касательных t-подпространств для двух подмногообразий $L(\Psi'_b)$ и $L(\Psi_b)$ следует совпадение самих подмногообразий.

Следствие 2. В общем случае в семействе $L(a)$ существуют различные подмногообразия $L(\Psi_b)$ с одним и тем же касательным t-подпространством тогда и только тогда, когда все подмногообразия $L(\Psi_b)$ с касательным t-подпространством отображаются на диаграмму P^*_{a-1} в семейство плоскостей z_{b-1}, зависящее от числа параметров большего, чем произвол t-плоскости, принадлежащей подпространству $TL(a)$ и проходящей через плоскость L.

Действительно, из теоремы 1 работы [1] следует, что

$$b\,\sigma_1+(n-t)(t-d)\geqslant 0, \tag{1.12}$$

где $t=\dim TL(\Psi_b)$. Через плоскость L проходит ∞^{m_2}, где

$$m_2=(n-t)(t-d), \tag{1.13}$$

t-плоскостей. Семейство плоскостей z_{b-1} зависит от $b\sigma_1+m_2$ параметров. Поэтому из неравенств (1.11) и (1.12) вытекает требуемое.

Пусть подмногообразие $L(\Psi'_b)$ имеет характеристику $L_k=ChL(\Psi'_b)$ размерности $k\geqslant 0$. Поместим в нее вершины A_j $(j=0,\ldots,k)$ и зададим подмногообразие $L(\Psi'_b)$ уравнениями $\omega^\nu=0$. Проведя рассуждения, двойственные предыдущим, получаем следующие результаты.

Теорема 2. Все подмногообразия $L(\Psi_b)$ с характеристиками, содержащими L_k, образуют подмногообразие $L(\Psi_{b_2})$, где $b_2=a-R_\nu\|a^p_{j\nu}\|$.

Следствие 1. Если ранг $R_\nu\|a^p_{j\nu}\|$ максимален и если

$$\sigma\equiv a-b-(k+1)(n-d)>0, \tag{1.14}$$

то все подмногообразия $L(\Psi_b)$, имеющие характеристики, содержащие плоскость $L_k=GhL(\Psi'_b)$, образуют подмногообразие $L(\Psi_{b_2})$, где $b_2=b+\sigma$, а если $\sigma\leqslant 0$, то из совпадения характеристик размерности k для двух подмногообразий $L(\Psi'_b)$ и $L(\Psi_b)$ следует совпадение самих подмногообразий.

Следствие 2. В общем случае в семействе $L(a)$ существуют различные подмногообразия $L(\Psi_b)$ с одной и той же характеристикой размерности k тогда и только тогда, когда все подмногообразия $L(\Psi_b)$ с характеристикой размерности k отображаются на диаграмму P^*_{a-1} в семейство плоскостей z_{b-1}, зависящее от числа параметров большего, чем произвол k-плоскости, принадлежащей плоскости L.

Заметим, что указанное в следствии 2 число суть

$$b\sigma + (k+1)(d-k). \tag{1.15}$$

Из (1.14) при $k=0$ получается $a > n - d + b$. Это значит, что для комплекса d-плоскостей индекса $\beta > b$ [1] имеет место совпадение характеристик у различных подмногообразий $L(\Psi_b)$.

В заключение заметим, что условия (1.11) и (1.14) эквивалентны только при $(d+1)(n-t) = (k+1)(n-d)$, в частности, при

$$n = 2d + 1, \; t = n - k - 1. \tag{1.16}$$

§ 2. Касательные подпространства и характеристики первого и второго типа

Пусть $L_k = ChL(\Psi_b)$ — характеристика плоскости L для подмногообразия $L(\Psi_b)$. При изменении всех параметров семейства $L(a)$ k-плоскость L_k описывает a-семейство $L_k(a)$, которое назовем ***характеристическим семейством.*** При $k=0$ характеристическое семейство есть a-поверхность, которую часто (например, для конгруэнции прямых в трехмерном пространстве) называют фокальной поверхностью [2].

Определение. Характеристику $L_k = ChL(\Psi_b)$ назовем ***характеристикой первого типа,*** если подпространство $TL_k(a)$ содержит плоскость L, и ***характеристикой второго типа*** в противном случае.

Заметим, что для конгруэнции прямых $L(2)$ в P_3 фокальная плоскость $TL_0(2)$, где $L_0 = ChL(\Psi_1)$ — фокус торса $L(\Psi_1)$, содержит прямую L.

Итак, пусть $L_k = ChL(\Psi_b)$. Поместим вершины A_j $(j = 0, \dots, k)$ репера $\{A_J\}$ в плоскость L_k и зададим подмногообразие $L(\Psi_b)$ уравнениями $\omega^\nu = 0$ $(\nu = b+1, \dots, a)$. Тогда из (1.6) и (1.7) получаем

$$a^p_{j\tau} = 0 \; (\tau = 1, \dots, b). \tag{2.1}$$

Положим

$$\omega^h_j = a^h_{j\varkappa}\, \omega^\varkappa \, (h = k+1, \dots, d). \tag{2.2}$$

Теорема 3. Если ранг $R_h \| a^h_{j\varkappa} \|$ максимален, то при $d \leqslant k + b(k+1)$ плоскость $L_k = ChL(\Psi_b)$ является характеристикой первого типа, а при $d > k + b(k+1)$ — характеристикой второго типа.

Доказательство. Так как точки $a^h_{j\nu} A_h + a^p_{j\nu} A_p$ в общем случае не лежат в L, то пересечение пространств $TL_k(a)$ и L в силу (2.1) и (2.2) задается уравнениями

$$x_j = 0, \; a^h_{j\tau} x_h = 0, \tag{2.3}$$

а его размерность равна $k + R_h \| a^h_{j\tau} \|$, где матрица $\|a^h_{j\tau}\|$ типа $(d-k) \times (k+1)b$. Здесь возможны два случая:

1) $b(k+1) \geqslant d - k$, тогда $R_h \| a^h_{j\tau} \| = d - k$ и $\dim [L \cap TL_k(a)] = d$, т. е. L_k — характеристика первого типа;

2) $b(k+1) < d - k$, тогда $R_h \| a^h_{j\tau} \| = b(k+1)$ и $\dim [L \cap TL_k(a)] = k + b(k+1) < d$, т. е. L_k — характеристика второго типа.

Следствие. Если ранг $R \| a^h_{0\tau} \|$ максимален и точка $X = ChL(\Psi_b)$, то при $d \leqslant b$ точка X — характеристика первого типа, а при $d > b$ —

второго типа (в этом случае пересечение $L \cap TX(a)$ имеет размерность b).

Заметим, что если $L_k = ChL(a)$, то $TL_k(a) \subset L$. В частности, при $k = 0$ имеем, что если $a < d$, то $L_0 = X$ — характеристика второго типа, а если $a \geqslant d$, то—первого типа. При $a > d$ точка X — особая для поверхности $X(a)$.

Пусть $l_t = TL(\Psi_b)$ — касательное t-подпространство для плоскости L подмногообразия $L(\Psi_b)$. Семейство $l_t(a)$ назовем *касательным* семейством. Пусть $Ch\, l_t(a)$ — характеристика плоскости l_t семейства $l_t(a)$.

Определение. Касательное подпространство $l_t = TL(\Psi_b)$ назовем касательным подпространством *первого типа,* если характеристика $Chl_t(a)$ содержится в плоскости L, и касательным подпространством *второго типа* в противном случае.

Поместим вершины A_r $(r = d+1, \ldots, t)$ репера $\{A_J\}$ в подпространство l_t и зададим подмногообразие $L(\Psi_b)$, как и выше, уравнениями $\omega^\nu = 0$. Тогда $a^s_{i\tau} = 0$ $(s = t+1, \ldots, n)$. Пусть $\omega^s_r = a^s_{r\varkappa}\,\omega^\varkappa$. Имеет место

Теорема 4. Если ранг $\mathrm{R}_r \| a^s_{r\tau} \|$ максимален, то при $d \geqslant t - b(n-t)$ плоскость $l_t = TL(\Psi_b)$ является касательным подпространством первого типа, а при $d < t - b(n-t)$ — касательным подпространством второго типа.

Доказательство легко получается по принципу двойственности с подпространстве $TL(a)$ или непосредственными рассуждениями, двойственным рассуждениям, проведенны мпри доказательстве теоремы 3.

Следствие. Если ранг $\mathrm{R} \| a^n_{r\tau} \|$ максимален и гиперплоскость Γ является касательным подпространством $TL(\Psi_b)$, то при $d \geqslant n - b - 1$ гиперплоскость Γ — первого типа, а при $d < n - b - 1$ — второго типа.

§ 3. Случай, когда число характеристик или касательных подпространств конечно

Из следствия к теореме 2 работы [1] получаем, что нефокальное семейство $L(a)$ имеет для каждой плоскости L конечное число фокальных порядка k подмногообразий $L(\Psi_b)$, если

$$m_1 + m_3 = b(k+1)(n-d), \tag{3.1}$$

где

$$m_3 = b(a-b). \tag{3.2}$$

Решим вопрос о числе характеристик $L_k = ChL(\Psi_b)$. Система (1.6) определяет характеристику $L_k = ChL(\Psi_b)$, если

$$\mathrm{R}_i \| b^p_{i\tau} \| = d - k. \tag{3.3}$$

Система $k^p_{j\varkappa}\,\omega^\varkappa = 0$ (ср. [1] § 6) определяет подмногообразие $L(\Psi_b)$, для которого $L_k = ChL(\Psi_b)$, если

$$\mathrm{R}_\varkappa \| k^p_{j\varkappa} \| = a - b, \tag{3.4}$$

где

$$k^p_{j\varkappa} = a^p_{j\varkappa} + k^h_j\, a^p_{h\varkappa}, \tag{3.5}$$

а коэффициенты k^h_j взяты из уравнений

$$x^h = k^h_j\, x^j; \quad x^q = 0 \tag{3.6}$$

k-плоскости $L_k \subset L$.

Из условия (3.3) получаем систему m_3 уравнений, каждое из которых степени $d-k+1$ относительно величин b_τ^ν, определяющих (см. (1.4)) подмногообразия $L(\Psi_b)$.

Из условия (3.4) получаем систему m_1 уравнений, каждое из которых степени $a-b+1$ относительно величин k_j^h, определяющих характеристику L_k. Переходя к однородным системам и применяя теорему Безу ([3], с. 174), получаем следующий результат.

Теорема 5. Если число характеристик $L_k = ChL(\Psi_b)$ плоскости L в семействе $L(a)$ конечно, то оно не превосходит

$$\min\{(a-b+1)^{m_1},\ (d-k+1)^{m_3}\}.$$

При $k=0$, $b=1$ имеем

$$\min\{a^d,\ (d+1)^{a-1}\} = \begin{cases} a^d & \textit{при}\ \ a \geqslant d+1, \\ (d+1)^{a-1} & \textit{при}\ \ a \leqslant d+1, \end{cases}$$

т. е. получается результат из работы [4] (с. 21).

Из следствия к теореме 1 работы [1] получаем, что семейство $L(a)$ имеет для каждой плоскости L конечное число подмногообразий $L(\Psi_b)$ с касательным t-подпространством, если

$$m_2 + m_3 = b(d+1)(n-t). \tag{3.7}$$

Система (1.5) определяет касательное t-подпространство $l_t = TL(\Psi_b)$, если

$$R_p \| b_{i\tau}^p \| = t - d. \tag{3.8}$$

Система $t_{i\varkappa}^s \omega^\varkappa = 0$ определяет подмногообразие $L(\Psi_b)$, для которого $TL(\Psi_b) = l_t$, если

$$R_\varkappa \| t_{i\varkappa}^s \| = a - b, \tag{3.9}$$

где

$$t_{i\varkappa}^s = a_{i\varkappa}^s + t_r^s a_{i\varkappa}^r, \tag{3.10}$$

а коэффициенты t_r^s взяты из уравнений в тангенциальных координатах

$$x_i = 0,\ \ x_r = t_r^s x_s \tag{3.11}$$

t-плоскости $l_t \supset L$.

Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, приходим к следующему результату.

Теорема 6. Если число касательных подпространств $l_t = TL(\Psi_b)$ для плоскости L в семействе $L(a)$ конечно, то оно не превосходит

$$\min\{(a-b+1)^{m_2},\ (t-d+1)^{m_3}\}.$$

При $t=n-1$, $b=1$ имеем

$$\min\{a^{n-d-1},\ (n-d)^{a-1}\} = \begin{cases} a^{n-d-1} & \textit{при}\ a \geqslant n-d, \\ (n-d)^{a-1} & \textit{при}\ a \leqslant n-d, \end{cases}$$

т. е. получается результат из работы [4] (с. 21).

§ 4. Торсальные плоскости, ассоциирующиеся с элементом семейств $L(a)$

Рассмотрим внутреннее порожденное многообразие $L_k(m_1, a)$, т. е. [1] совокупность всех k-плоскостей L_k, принадлежащих плоскостям L семейства $L(a)$, причем $m_1 = (k+1)(d-k)$. Касательное подпространство $TL_k(m_1, a)$ для плоскости L_k этого многообразия задается [1] в тангенциальных координатах системой

$$x_i = 0; \quad k^p_{j\varkappa} x_p = 0, \tag{4.1}$$

где величины $k^p_{j\varkappa}$ определяются по формуле (3.5).

Пусть плоскость $L'_k \subset L$ задана системой уравнений $x^h = 0$ $(h = k+1, \dots, d)$ и пусть касательное подпространство $l_t = TL'_k(m_1, a)$ имеет размерность $t = d + R$, где $R = \mathrm{R}_p \| a^p_{j\varkappa} \|$. Поместим вершины A $(r = d+1, \dots, t)$ репера $\{A_J\}$ в это подпространство l_t. Тогда

$$a^s_{j\varkappa} = 0 \, (s = t+1, \dots, n). \tag{4.2}$$

Теорема 7. Все плоскости L_k с касательными подпространствами $TL_k(m_1, a)$, принадлежащими l_t, образуют плоскость L_{k_1}, где $k_1 = d - \mathrm{R}_h \| a^s_{h\varkappa} \|$, $h = k+1, \dots, d$; $s = t+1, \dots, n$; $\varkappa = 1, \dots, a$.

Доказательство. В силу (3.5) и (4.2) требование принадлежности подпространства $TL_k(m_1, a)$ для плоскости L_k, заданной уравнениями (3.6), подпространству $TL'_k(m_1, a)$ приводит к системе уравнений

$$k^h_j \, a^s_{h\varkappa} = 0. \tag{4.3}$$

Для каждого фиксированного j из (4.3) получаем систему относительно $d-k$ неизвестных k^h_j. Обозначим

$$\mathrm{R}_h \| a^s_{h\varkappa} \| = q_1. \tag{4.4}$$

Если $d - q_1 = k$, то система (4.3) имеет только нулевое решение и тогда все L_k, для которых $TL_k(m_1, a) \subset l_t$, совпадают с L'_k. Пусть теперь $d - q_1 > k$.

В [1] показано, что систему для нахождения всех плоскостей $L_k \subset L$, для которых касательное подпространство внутреннего порожденного многообразия совпадает с l_t, можно записать в виде

$$x^i a^s_{i\varkappa} = 0.$$

В силу (4.2) и (4.4) она имеет решением $L_{k_1} \supset L_k$. Теорема доказана.

Определение. Плоскость $L^*_{k_1} \subset L \, (k_1 > k)$ назовем *k-торсальной k_1-плоскостью класса $d + a(k+1) - t$*, если существует хотя бы одна плоскость $L_k \subset L^*_{k_1}$, для которой t-подпространство $l_t = TL_k(m_1, a)$ совпадает с линейной оболочкой всех подпространств $TL_k(m_1, a)$ для $L_k \subset L^*_{k_1}$.

Заметим, что 0-торсальная k_1-плоскость класса нуль совпадает с торсальной плоскостью $L^*_{k_1}$ относительно семейства $L(a)$, введенной в [7].

Следствие 1. Если ранг $R_h \| a^s_{h\varkappa} \|$ максимален и если

$$\sigma_1 \equiv d - k - a(n-t) > 0, \tag{4.5}$$

то k-торсальная плоскость $L^*_{k_1}$ класса $d + a(k+1) - t$ имеет размерность $k_1 = k + \sigma_1$, а если $\sigma_1 \leqslant 0$, то из совпадения касательных t-подпространств $TL_k(m_1, a)$ и $TL'_k(m_1, a)$ следует совпадение плоскостей L_k и L'_k.

Следствие 2. В общем случае в плоскости L семейства $L(a)$ имеются k-торсальные плоскости класса $d + a(k+1) - t$ тогда и только тогда, когда для δ_1-семейства всех k-плоскостей плоскости L, имеющих касательные t-подпространства $TL_k(m_1, a)$, справедливо неравенство $\delta_1 > m_2$.

Действительно, из теоремы 4 работы [1] следует, что

$$\delta_1 \equiv (k+1)\sigma_1 + m_2 \geqslant 0. \tag{4.6}$$

Остается сравнить неравенство (4.2) и (4.6).

Заметим, что в общем случае $t = d + a(k+1)$.

Пусть $l_t(m_2, a)$ — внешне порожденное многообразие, т. е. [1] совокупность всех t-плоскостей $l_t \subset TL(a)$ и проходящих через плоскости L семейства $L(a)$, где $m_2 = (t-d)(n-t)$. Характеристика $Chl_t(m_2, a)$ для t-плоскости l_t этого многообразия задается уравнениями [1]

$$x^q = 0; \; x^i t^s_{i\varkappa} = 0, \tag{4.7}$$

где величины $t^s_{i\varkappa}$ определяются по формуле (3.10). Пусть $L_k = Chl'_t(m_2, a)$ — характеристика для некоторой плоскости l'_t, которую зададим в тангенциальных координатах системой $x_i = x_r = 0$ $(i = 0,\ldots, d;\; r = d+1,\ldots, t)$.

Поместим вершины репера A_j в плоскость L_k. Проводя рассуждения, двойственные предыдущим, получаем следующие результаты.

Теорема 8. Все t-плоскости l_t с характеристиками $Chl_t(m_2, a)$, содержащими L_k, пересекаются по плоскости l_{t_1}, где $t_1 = d + R_r \| a^r_{j\varkappa} \|$, $j = 0,\ldots, k$; $r = d+1,\ldots, t$; $\varkappa = 1,\ldots, a$.

Определение. Плоскость $l^*_{t_1} \supset L$ $(t_1 < t)$ назовем *t-торсальной t_1-плоскостью порядка* $k + a(n-t) - d$, если существует хотя бы одна плоскость $l_t \supset l^*_{t_1}$, для которой характеристика $L_k = Chl_t(m_2, a)$ совпадает с пересечением всех характеристик $Chl_t(m_2, a)$ для $l_t \supset l^*_{t_1}$.

Следствие 1. Если ранг $R_r \| a^r_{j\varkappa} \|$ максимален и если

$$\sigma \equiv t - d - a(k+1) > 0, \tag{4.8}$$

то t-торсальная плоскость $l^*_{t_1}$ порядка $k + a(n-t) - d$ имеет размерность $t_1 = t - \sigma$, а если $\sigma \leqslant 0$, то из совпадения характеристик $Chl_t(m_2, a)$ и $Chl'_t(m_2, a)$ размерности k следует совпадение плоскостей l_t и l'_t.

Следствие 2. В общем случае через плоскость L семейства $L(a)$ проходят t-торсальные плоскости $l^*_{t_1}$ порядка $k + a(n-t) - d$ тогда и только тогда, когда для δ-семейства всех t-плоскостей, проходящих через L и имеющих характеристику $Chl_t(m_2, a)$ размерности k, справедливо неравенство $\delta > m_1$.

Заметим, что из теоремы 5 работы [1] имеем

$$\delta \equiv (n-t)\sigma + m_1 \geqslant 0. \tag{4.9}$$

Если $m_1 = m_2$, то условия (4.5) и (4.8) эквивалентны, в частности, эквивалентность имеет место при $n = 2d+1$, $t = n - k - 1$ (ср. с (1.16)).

§ 5. Случай, когда число характеристик внешне порожденного многообразия конечно

Пусть плоскость L_k является характеристикой $Chl_t(m_2, a)$. Тогда, как следует из § 6 работы [1],

$$R_i \| t^s_{i\varkappa} \| = d - k \tag{5.1}$$

и система (4.7) определяет искомое L_k.

Из условия (5.1) получаем систему $a(k+1)(n-t)-m_1$ уравнений, каждое из которых степени $d-k+1$ относительно величин t_r^s, определяющих t-плоскости l_t, имеющие характеристики $L_k=Chl_t(m_2, a)$. Таких плоскостей l_t будет конечное число, если

$$m_1+m_2=a(k+1)(n-t), \tag{5.2}$$

причем это число не более $(d-k+1)^{m_2}$.

Пусть t-плоскость l_t является касательным подпространством $TL_k(m_1, a)$ для плоскости L_k. Тогда из § 6 работы [1] следует

$$R_p\|k^p_{j\varkappa}\|=t-d, \tag{5.3}$$

и система (4.1) определяет искомое l_t. Из условия (5.3) получаем систему $a(k+1)(n-t)-m_2$ уравнений, каждое из которых степени $t-d+1$ относительно величин k_j^h, определяющих k-плоскости L_k, имеющие касательные t-подпространства $TL_k(m_1, a)$. При условии (5.2) таких k-плоскостей будет конечное число не более $(t-d+1)^{m_1}$.

Так как при условии (5.2) в общем случае выполняются неравенства $\sigma_1<0$ и $\sigma<0$ из § 4, то приходим к следующему результату.

Теорема 9. Если число характеристик $L_k=Chl_t(m_2, a)$ в плоскости L семейства $L(a)$ конечно, то оно не превосходит $\min\{(t-d+1)^{m_1}, (d-k+1)^{m_2}\}$.

При $k=0$, $t=n-1$ имеем

$$\min\{(n-d)^d,\ (d+1)^{n-d-1}\}=\begin{cases}(n-d)^d & \text{при } n\geqslant 2d+1;\\ (d+1)^{n-d-1} & \text{при } n\leqslant 2d+1.\end{cases}$$

Заметим, что в этом случае из (5.2) получаем $n=a+1$ при любом $d<n$.

§ 6. Характеристическая гиперповерхность плоскости L многообразия $l_{n-a}(m_2, a)$

Каждое подсемейство $L(\Psi_1)$ порождает многообразие $l_t(m_2, \Psi_1)$ всех плоскостей l_t, для которых плоскости $L\subset L(\Psi_1)$ являются осями. Характеристика $Chl_t(m_2, \Psi_1)$ определяется системой (см. [1], § 6)

$$x^i t^s_{i\varkappa}\lambda^\varkappa=0.$$

Эта система имеет решение относительно $\lambda^\varkappa$, если

$$R\|x^i t^s_{i\varkappa}\|=a-1. \tag{6.1}$$

Условие (6.1) при $d\geqslant n-t-a+1$ определяет поверхность, которую назовем *характеристической поверхностью для плоскости* l_t и обозначим $S(l_t)$. Эта поверхность состоит из характеристик $Chl_t(m_2, \Psi_1)$ для всех $L(\Psi_1)\subset L(a)$.

Рассмотрим случай $t=n-a$, при котором характеристическая поверхность (6.1) является гиперповерхностью порядка a. Обозначим ее $S^a(l_{n-a})$ и рассмотрим некоторые ее свойства. Поместим вершины A_r $(r=d+1,\ldots, t=n-a)$ репера $\{A_I\}$ в плоскость l_{n-a}. Тогда уравнение гиперповерхности $S^a(l_{n-a})$ в силу (6.1) и (3.10) примет вид

$$\det\|x^i a^s_{i\varkappa}\|=0. \tag{6.2}$$

Пусть

$$TX(d, \Psi_1)=(L,\ x^i a^p_{i\varkappa}\lambda^\varkappa A_p) \tag{6.3}$$

— касательное подпространство в точке $X \subset L$ к порожденной плоскостной $(d+1)$-поверхности $X(d, \Psi_1)$ подсемейством $L(\Psi_1)$, заданным уравнениями (1.3). Потребуем, чтобы $TX(d, \Psi_1) \subset l_{n-a}$. Тогда имеем

$$x^i a^s_{i\varkappa} \lambda^\varkappa = 0 \, (s = n - a + 1, \ldots, n). \tag{6.4}$$

Эта система, как и следовало ожидать, имеет единственное решение относительно $\lambda^\varkappa$ только для точек, принадлежащих гиперповерхности (6.2).

Заметим, что все гиперповерхности $S^a(l_t)$ при различных $l_t \supset L$ $(t = n - a)$ содержат характеристическую поверхность $S[ChL(\Psi_1)]$ плоскости L семейства $L(a)$ [1]. Действительно, если точка X является характеристикой для некоторого подсемейства $L(\Psi_1)$, то

$$x^i a^p_{i\varkappa} \lambda^\varkappa = 0 \, (p = d + 1, \ldots, n), \tag{6.5}$$

т. е. условия (6.4) выполняются.

Имеет место

Теорема 10. Если подмногообразие $L(\Psi_b)$ имеет характеристику $L_k = ChL(\Psi_b)$, плоскость l_{n-a}, содержащая L, принадлежит касательному подпространству $TL(\Psi_b)$ размерности $n - a + b$, то гиперповерхность $S^a(l_{n-a})$ распадается на гиперконус K^b порядка b с вершиной L_k и гиперповерхность S^{a-b} порядка $a - b$.

Доказательство. Зададим подмногообразие $L(\Psi_b)$ уравнениями $\omega^\nu = 0$. Поместим вершины A_j в характеристику L_k, вершины $A_{d+1}, \ldots, A_{n-a}$ — в плоскость l_{n-a}, а вершины $A_{n-a+1}, \ldots, A_{n-a+b}$ — в подпространство $TL(\Psi_b)$, содержащее l_{n-a}. Тогда из (1.4)—(1.7) получаем

$$a^p_{j\tau} = 0, \ a^{\bar{p}}_{i\tau} = 0 \, (\bar{p} = n - a + b + 1, \ldots, n). \tag{6.6}$$

В силу (6.6) уравнение (6.2) гиперповерхности $S^a(l_{n-a})$ примет вид

$$\det \| x^h a^{n-a+\tau_1}_{h\tau} \| \cdot \det \| x^i a^{\bar{p}}_{i\nu} \| = 0, \tag{6.7}$$

где $\tau, \tau_1 = 1, \ldots, b$; $\nu = b + 1, \ldots, a$; $\bar{p} = n - a + b + 1, \ldots, n$. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Заметим, что если $\dim ChL(\Psi_b) = k$, то $\dim TL(\Psi_b) \leqslant d + b(d - k)$ (см. теорему 3 из [1]). В общем случае, когда $\dim TL(\Psi_b) = d + b(d - k)$, из теоремы 10 получаем

$$n = d + a + b(d - k - 1). \tag{6.8}$$

Семейство $L(a)$ в общем случае обладает подмногообразиями $L(\Psi_b)$, имеющими характеристику $ChL(\Psi_b)$ размерности k тогда и только тогда, когда (ср. (1.15)) $m_1 + m_3 - b(k+1)(n-d) \geqslant 0$. Внося сюда (6.8), получаем $k = 0$, $b = 1$. Таким образом, в общем случае конус K^b вырождается в гиперплоскость L_{d-1} плоскости L, проходящую через характеристику $L_0 = ChL(\Psi_1)$. Уравнение этой гиперплоскости имеет вид

$$x^h a^{n-a+1}_{h1} = 0; \ x^p = x^\alpha = 0. \tag{6.9}$$

Случай $d = 2$, $a = 3$, $n = 6$ рассмотрен в работе [5].

Пусть теперь $n = d + a + 1$. Имеет место

Теорема 11. Если $n = d + a + 1$ и подсемейство $L(\Psi_1)$ имеет характеристику размерности $d - 2$, то гиперповерхность S^{a-1}, на которую распадается поверхность $S^a(l_{d+1})$ для плоскости l_{d+1}, принадлежащей касательному $(d+2)$-подпространству $TL(\Psi_1)$ этого подсемейства $L(\Psi_1)$, состоит из точек X, в которых $TX(d, a) \supset TL(\Psi_1)$.

Доказательство. Поместим вершину A_{d+1} в плоскость $l_{d+1} \supset L$, вершину A_{d+2} в подпространство $TL(\Psi_1)$ подмногообразия $L(\Psi_1)$, которое зададим уравнениями $\omega^2 = \ldots \omega^a = 0$, а вершины $A_0, \ldots, A_{d-2}$ в характеристику $L_{d-2} = ChL(\Psi_1)$. Тогда, как и при доказательстве предыдущей теоремы, получаем $a^p_{j1} = 0$, $a^{\bar{p}}_{i1} = 0$ ($j = 0, \ldots, d-2$; $\bar{p} = d+3, \ldots, n$). Касательное подпространство $TX(d, a)$ в точке X плоскостной $(d+a)$-поверхности $X(d, a)$ в тангенциальных координатах задается уравнениями $x_i = 0$, $x^i a^p_{i\varkappa} x_p = 0$. В силу выбора репера $\{A_j\}$ условие $TX(d, a) \supset TL(\Psi_1)$ примет вид

$$\det \| x^h a^r_{h1} \delta^r_m \| \cdot \det \| x^i a^{\bar{p}}_{i\nu} \| = 0, \tag{6.10}$$

где δ^r_m — символ Кронекера, m, $r = d+1$, $d+2$; $h = d-1$, d; $\bar{p} = d+3, \ldots, d+a+1$; $\nu = 2, \ldots, a$. Определители $\det \| x^h a^r_{h1} \delta^r_m \|$ при $m = d+1$, $d+2$ одновременно не обращаются в нуль, иначе характеристика $ChL(\Psi_1)$ имеет размерность больше $d-2$, что противоречит условию теоремы. Поэтому из (6.10) следует $\det \| x^i a^{\bar{p}}_{i\nu} \| = 0$, т. е. уравнение поверхности S^{a-1}, в точках которой $TX(d, a) \supset TL(\Psi_1)$.

Из теоремы 10 и 11 для поверхности $X(d, a)$ при $n = d+a+1$ имеют место следствия.

Следствие 1. Если $L_{d-2} = ChL(\Psi_1)$ — характеристика подмногообразия $L(\Psi_1)$ плоскости L семейства $L(a)$, то в L имеется пучок $(d-1)$-плоскостей, проходящих через характеристику L_{d-2} и одна и та же поверхность S^{a-1}, на которые распадаются поверхности $S^a(l_{d+1})$, соответствующие всем плоскостям $l_{d+1} \supset L$, принадлежащим касательному $(d+2)$-подпространству $TL(\Psi_1)$.

Следствие 2. Если $L_{d-2} = ChL(\Psi_1)$, то поверхность S^{a-1}, на которую распадается поверхность $S^a(l_{d+1})$ для плоскости l_{d+1} инцидентной $(d+2)$-подпространству $TL(\Psi_1)$, содержит все особые точки [1], кроме особых точек характеристики L_{d-2}.

Действительно, все особые точки принадлежат поверхности $S^a(l_{d+1})$, а плоскость L_{d-1}, на которую распадается поверхность $S^a(l_{d+1})$, содержит характеристику L_{d-2}.

Заметим, что при $d = 2$, $b = 1$, $k = 0$ поверхность S^{a-1} становится кривой, найденной в [6].

§ 7. Касательный гиперконус для плоскости L многообразия $L_{a-1}(m_1, a)$

Каждое подсемейство $L(\Psi_1)$ порождает многообразие $L_k(m_1, \Psi_1)$ всех плоскостей L_k, принадлежащих плоскостям L подсемейства $L(\Psi_1)$. Касательное подпространство $TL_k(m_1, \Psi_1)$ определяется системой (см. [1], § 6)

$$x_i = 0, \; k^p_{j\varkappa} \lambda^\varkappa x_p = 0.$$

Эта система имеет решение относительно $\lambda^\varkappa$, если

$$R \| k^p_{j\varkappa} x_p \| = a - 1. \tag{7.1}$$

Условие (7.1) при $n - d - 1 \geqslant k - a + 2 > 0$ определяет конус с вершиной L гиперплоскостей, который назовем *касательным конусом для плоскости* L_k и обозначим $K(L_k)$. Он содержит касательные подпространства $TL_k(m_1, \Psi_1)$ для всех $L(\Psi_1) \subset L(a)$.

Рассмотрим случай $k=a-1$, при котором касательный конус (7.1) является гиперконусом класса a. Обозначим его $K_a(L_{a-1})$ и рассмотрим некоторые его свойства, которые являются двойственными по отношению к результатам § 6. Поместим вершины $A_0,\ldots, A_{a-1}$ в плоскость L_{a-1}. Тогда уравнение гиперконуса $K_a(L_{a-1})$ в силу (7.1) и (3.5) примет вид

$$x_i=0;\ \det\| a^p_{j\varkappa} x_p \| = 0$$

$$(j=0,\ldots,\ k=a-1;\ \varkappa=1,\ldots,\ a;\ p=d+1,\ldots,\ n). \tag{7.2}$$

Заметим, что для любых $L_{a-1}\subset L$ конус $K_a(L_{a-1})$ содержится в касательном конусе $K[TL(\Psi_1)]$ для плоскости L [1].

Теорема 12. Если подмногообразие $L(\Psi_b)$ имеет касательное подпространство $l_t=TL(\Psi_b)$, причем $t<n$, плоскость L_{a-1}, содержащаяся в L, проходит через характеристику $ChL(\Psi_b)$, размерность которой равна $a-b-1$, то конус $K_a(L_{a-1})$ распадается на два конуса гиперплоскостей с вершиной L: конус K_b класса b, огибающий конус $(t-1)$-плоскостей, погруженных в подпространство l_t, и некоторый конус K_{a-b} класса $a-b$.

Доказательство. Зададим подмногообразие $L(\Psi_b)$ уравнениями $\omega^\nu=0$. Поместим вершины $A_{d+1},\ldots, A_t$ в подпространство l_t, вершины $A_0,\ldots, A_{a-b-1}$ в характеристику $ChL(\Psi_b)$, а вершины $A_{a-b},\ldots, A_{a-1}$ в плоскость L_{a-1}. Тогда получим

$$a^s_{\bar{i}\tau}=a^p_{\bar{j}\tau}=0\ \ (\bar{j}=0,\ \ldots,\ a-b-1). \tag{7.3}$$

В силу (7.3) уравнение (7.2) примет вид

$$x_i=\det\| a^r_{\bar{h}\tau} x_r \| \cdot \det\| a^p_{\bar{j}\nu} x_p \|=0, \tag{7.4}$$

где $\bar{h}=a-b,\ \ldots,\ a-1,\ \tau=1,\ \ldots,\ b;\ \nu=b+1,\ \ldots,\ a.$

Заметим, что если $\dim TL(\Psi_b)=t$, то $\dim ChL(\Psi_b)\geqslant d-b(t-d)$ (см. теорему 3 из [1]). В общем случае, когда $\dim ChL(\Psi_b)=d-b(t-d)$, из теоремы 12 получаем

$$a=d-b(t-d-1)+1. \tag{7.5}$$

В общем случае $b=1,\ t=n-1$, а конус K_b вырождается в гиперплоскости, пересекающиеся по $(d+1)$-плоскости, уравнение которой

$$x_i=0;\quad a^r_{a-1,1}x_r=0. \tag{7.6}$$

Пусть теперь $a=d$. Имеет место двойственная теореме 11

Теорема 13. Если $a=d$ и подсемейство $L(\Psi_1)$ имеет касательное $(d+2)$-подпространство, то конус K_{a-1}, на который распадается конус $K_a(L_{d-1})$ для плоскости L_{d-1}, содержащей характеристику $ChL(\Psi_1)$ размерности $d-2$, состоит из гиперплоскостей Γ подпространства $TL(a)$, для которых $Ch\Gamma(n-d-1,\ a)\subset ChL(\Psi_1)$.

Из теорем 12 и 13 при $a=d$ имеют место следствия.

Следствие 1. Если $l_{d+2}=TL(\Psi_1)$ — касательное подпространство подмногообразия $L(\Psi_1)$ плоскости L семейства $L(a)$, то через L проходит пучок $(d+1)$-плоскостей $l_{d+1}\subset l_{d+2}$ и один и тот же конус K_{d-1}, на которые распадаются конусы $K_d(L_{d-1})$, соответствующие всем плоскостям $L_{d-1}\subset L$, содержащим характеристику $ChL(\Psi_1)$.

Следствие 2. Если $l_{d+2}=TL(\Psi_1)$, то конус K_{d-1}, на который распадается конус $K_d(L_{d-1})$ для плоскости $L_{d-1}\supset ChL(\Psi_1)$, содержится в каждой особой гиперплоскости, кроме тех, которые проходят через плоскость l_{d+2}.

Пусть теперь одновременно имеют место условия теорем 11 и 13; т. е.

$$n = 2d + 1; \quad a = d; \quad k = d - 2, \quad t = d + 2. \tag{7.7}$$

Теорема 14. Если выполняются условия (7.7), то имеет место взаимооднозначное соответствие между $L_{d-1} \supset ChL(\Psi_1)$ и $l_{d+1} \subset TL(\Psi_1)$, определяемое следующим образом: конус $K_d(L_{d-1})$ распадается на конус K_{d-1} и плоскость l_{d+1}, а поверхность $S^d(l_{d+1})$ распадается на поверхность S^{d-1} и плоскость L_{d-1}.

Доказательство. Указанное в теореме соответствие получается применением теорем 10 и 12 при условиях (7.7). Тогда конус K^b является гиперплоскостью $L_{d-1} \supset L_{d-2} = ChL(\Psi_1)$, определяемой уравнениями (6.9), а конус K_b — совокупностью гиперплоскостей, пересекающихся по плоскости $l_{d+1} \subset l_{d+2} = TL(\Psi_1)$, определяемой уравнениями (7.6). Остается показать, что это соответствие взаимооднозначное. Поместим в плоскость l_{d+1} вершину A_{d+1} репера $\{A_I\}$, а в плоскость соответствующую ей L_{d-1} — вершины $A_0, \ldots, A_{d-1}$. Тогда из уравнений (6.9) получаем

$$a^{d+2}_{d-1,1} = 0; \quad a^{d+2}_{d1} \neq 0. \tag{7.8}$$

Для плоскости L_{d-1} получаем соответствующую плоскость $l'_{d+1} \subset \subset TL(\Psi_1)$ и заданную уравнением (7.6), которое в силу (7.8) примет вид $a^{d+1}_{d-1,1} x_{d+1} = 0$, т. е. при $a^{d+1}_{d-1,1} \neq 0$ плоскость l'_{d+1} совпадает с l_{d+1} (при $a^{d+1}_{d-1,1} = 0$ указанное в теореме соответствие вырождается). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кругляков Л. З. К дифференциальной геометрии семейств подпространств в проективном пространстве. — Геометрический сб., 16 («Труды Томск. ун-та», 263), 1975, 42—57.

2. Гейдельман Р. М. Дифференциальная геометрия семейств подпространств в многомерных однородных пространствах.— «Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия 1965». М., 1967, 323—374.

3. Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии. Т. 2, ИЛ., М., 1954.

4. Карапетян С. Е. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (1). — «Известия АН Арм. ССР. Серия физ.-матем.», 1963, 16, 3, 3—22.

5. Сушников Б. С. Псевдоконгруэнции 2-плоскостей в P_6.— Геометрический сб., 14 («Труды Томск. ун-та», 255), 1974, 91—113.

6. Кругляков Л. З., Чупахин Н. П. О псевдофокальных а-семействах 2-плоскостей в P_{a+3} .— Геометр. сб., 16, («Труды Томск. ун-та», 263), 1975, 58—64.

7. Кругляков Л. З. О плоскостных поверхностях, обладающих торсальными плоскостями. — Данный сб., 16—24.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 18 1977

Л. З. КРУГЛЯКОВ

О ПЛОСКОСТНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ, ОБЛАДАЮЩИХ ТОРСАЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

В заметке [1] изучается класс плоскостных поверхностей типа σ в проективном N-пространстве, т. е. таких поверхностей, которые описываются a-параметрическим семейством $L(a)$ d-плоскостей L, обладающим σ подсемействами торсов. Такие поверхности в общем случае расслаиваются на тангенциально вырожденные поверхности ранга σ [2].

В предлагаемой работе изучаются плоскостные поверхности, не обязательно являющиеся поверхностями типа σ, вводятся понятия торсальной k-плоскости относительно пфаффова подмногообразия $L(\Psi_b)$ семейства $L(a)$ и поверхности типа σ по $L_k \subset L$, которые при $k=d$ совпадают с поверхностями типа σ [1]. Устанавливается связь между типом σ по L_k, индексом плоскостной поверхности [1] и пересечением плоскости L_k с характеристической поверхностью плоскости L подмногообразия $L(\Psi_\sigma)$, относительно которого плоскость L_k — торсальная. Некоторые из результатов данной работы для случая $d=2$, $k=1$ аноксированы в [3], а для случая $k=1$, $N=2d+2$, $a=d+1$ получены в [4].

§ 1. Регулюсы d-плоскостей

Рассмотрим a-семейство $L(a)$ d-плоскостей L в N-мерном пространстве P_N. Присоединим к каждой плоскости L a-семейства некоторый подвижный репер $\{A_I\}$ $(I, J, K = 0, \ldots, N)$, так что его вершины A_i $(i=0, \ldots, d)$ лежат в плоскости L, а вершины A_p $(p=d+1, \ldots, n \leqslant N)$ — в касательном n-подпространстве $TL(a)$ для плоскости L семейства $L(a)$. В остальном выбор репера произволен.

Семейство $L(a)$ в заметке [11] названо регулюсом индекса $\rho = n - d - a$, если $\rho > 0$. Регулюсы образуют плоскостные $(d+a)$-поверхности $X(d, a)$, не являющиеся тангенциально вырожденными (последние получаются при $\rho = 0$, $n < N$).

Пусть

$$dA_I = \omega_I^J A_J \tag{1.1}$$

— деривационные формулы подвижного репера, причем формы ω_I^J удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J. \tag{1.2}$$

Обращение форм ω_i^p и ω_i^α $(p=d+1, \ldots, n;\ \alpha=n+1, \ldots, N)$ в нуль фиксирует плоскость L в семействе $L(a)$. Учитывая выбор подвижного репера, запишем основные соотношения [6] для семейства $L(a)$ в виде

$$\omega_i^p = a_{i\varkappa}^p \omega^\varkappa, \quad \omega_i^\alpha = 0 \ (\varkappa = 1, \ldots, a), \tag{1.3}$$

где $\omega^\varkappa$ — некоторый базис пространства дифференциалов параметров семейства $L(a)$.

Пусть уравнения

$$\omega^1 : \omega^2 : \ldots : \omega^a = \lambda^1 : \lambda^2 : \ldots : \lambda^a \tag{1.4}$$

задают 1-подсемейство $L(\Psi_1)$ семейства $L(a)$, а уравнения

$$\omega^\nu = b_\tau^\nu \omega^\tau \ (\tau = 1, \ldots, b; \ \nu = b+1, \ldots, a) \tag{1.5}$$

— пфаффово (неголономное [6]) подмногообразие*) $L(\Psi_b)$ семейства $L(a)$, т. е. совокупность всех 1-подсемейств (1.4), для которых $\lambda^\nu = b_\tau^\nu \lambda^\tau$.

Каждое подмногообразие $L(\Psi_b)$ порождает подмногообразие плоскостной поверхности $X(d, a)$, которое обозначим $X(d, \Psi_b)$, а касательную к нему $(d+b)$-плоскость в неособой точке $X \in L$ обозначим $TX(d, \Psi_b)$.

Пусть $ChL(\Psi_b)$ — характеристика плоскости L для подмногообразия $L(\Psi_b)$, т. е. все такие точки, которые вдоль 1-подсемейств

$$L(\Psi_1) \subset L(\Psi_b)$$

описывают линии с касательными, инцидентными плоскостям L. Уравнение характеристики $ChL(\Psi_b)$ имеет вид

$$x^i b_{i\tau}^p = 0, \tag{1.6}$$

где

$$b_{i\tau}^p = a_{i\tau}^p + b_\tau^\nu a_{i\nu}^p. \tag{1.7}$$

Совокупность характеристик $ChL(\Psi_b)$ для всех $L(\Psi_b) \subset L(a)$ образует поверхность, которую назовем b-характеристической и обозначим $S[ChL(\Psi_b)]$.

Теорема 1. В каждой плоскости L регулюса $L(a)$ индекса ρ при $d \geqslant b(b+\rho)$ существует b-характеристическая поверхность $S[ChL(\Psi_b)]$ размерности $t \geqslant d - b(b+\rho)$ и порядка не выше $(a-b+1)^{b(b+\rho)}$.

Доказательство. Систему уравнений (1.6) для характеристики подмногообразия $L(\Psi_b)$, заданного уравнениями (1.5), запишем в виде

$$x^i (a_{i\tau}^p + b_\tau^\nu a_{i\nu}^p) = 0 \ (i = 0, \ldots, d).$$

Она имеет решение относительно b_τ^ν, если

$$\mathrm{R} \, \| x^i a_{i\tau_0}^p \quad x^i a_{i\nu}^p \| = a - b$$

(τ_0 — фиксированно), что дает $b(b+\rho)$ однородных уравнений степени $a-b+1$ относительно x^i. Применяя теорему Безу (см. [10], с. 174), получаем размерность и порядок поверхности $S[ChL(\Psi_b)]$. Теорема доказана.

Заметим, что если ранг R_i по i матрицы $\| b_{i\tau}^p \|$ не больше d, то для любого $L(\Psi_b)$ имеется характеристика $ChL(\Psi_b)$ размерности не менее $d - R_i$. В общем случае это имеет место, если $d \geqslant b(a+\rho)$. Отсюда при $b=1$ получаем известный результат [8]: если $n \leqslant 2d$, то каждое $L(\Psi_1)$ имеет характеристику $ChL(\Psi_1)$.

Заметим также, что если $(k+1)[a+\rho+k-d] \leqslant a-1$, то имеется подсемейство $L(\Psi_1)$, обладающее плоскостью $L_k = ChL(\Psi_1)$, ко-

*) Далее под $L(\Psi_b)$ будем понимать всегда пфаффово подмногообразие, опуская для краткости слово «пфаффово».

торая принадлежит характеристической поверхности $S[ChL(\Psi_1)]$ размерности $d-\rho-1$ и порядка не выше $a^{\rho+1}$.
Отметим также, что касательные подпространства могут быть заданы так:

$$TX(d, a) = (L,\ x^i a^p_{i1} A_p, \ldots, x^i a^p_{ia} A_p) \tag{1.8}$$

и

$$TX(d, \Psi_b) = (L,\ x^i b^p_{i1} A_p, \ldots, x^i b^p_{ib} A_p), \tag{1.9}$$

но в особой точке X эти подпространства определяют контингенцию касательных $TX(d, \Psi_1)$ для всех $L(\Psi_1) \subset L(a)$ и $L(\Psi_1) \subset L(\Psi_b)$ соответственно.

Теорема 2. Если $(k-1)$-плоскость L_{k-1} является характеристикой $ChL(\Psi_b)$, а k-плоскость $L_k \supset L_{k-1}$, то во всех неособых точках $X \subset L_k$ подпространство $TX(d, \Psi_b)$ одно и то же.

Доказательство. Поместим в плоскость L_{k-1} вершины репера $A_f\,(f = 1, \ldots, k)$. Тогда уравнения плоскости $L_k \supset L_{k-1}$ примут вид $x^h = k^h_0 x^0$ $(h = k+1, \ldots, d)$. Из условия теоремы в силу (1.6) получаем $b^p_{f\tau} = 0$. Для неособых точек $X \subset L_k$ теперь имеем

$$TX(d, \Psi_b) = (L,\ k^p_{01} A_p, \ldots, k^p_{0b} A_p), \tag{1.10}$$

где

$$k^p_{0\tau} = a^p_{0\tau} + k^h_0 a^p_{h\tau}. \tag{1.11}$$

Теорема доказана.

Заметим, что для случая $b = 1$ этот результат получен в работе [8].

Многообразие всех $L_k \subset L \subset L(\Psi_b)$ образует внутреннее порожденное пфаффово многообразие [5], которое обозначается $L_k(m_1, \Psi_b)$, где $m_1 = (k+1)(d-k)$. Правая часть выражения (1.10) дает касательное подпространство $TL_k(m_1, \Psi_b) = \sum TX(d, \Psi_b)$ для всех $X \in L_k$, где $\sum$ — знак линейной оболочки.

§ 2. Торсальные k-плоскости

Пусть подмногообразие $L(\Psi_b)$ задано уравнениями (1.5). Оно порождает подмногообразие $X(d, \Psi_b)$ поверхности $X(d, a)$.

Определение 1. Плоскость $L^*_k \subset L$ при $k \geqslant 1$ назовем *торсальной относительно подмногообразия* $L(\Psi_b)$, если для всех неособых точек $X \in L^*_k$ $(d+b)$-подпространства $TX(d, \Psi_b)$ совпадают, и *торсальной относительно семейства* $L(a)$, если для всех неособых точек $X \in L^*_k$ совпадают $(d+a)$-подпространства $TX(d, a)$.

Из определения следует, что для такой плоскости

$$\dim TL^*_k(m_1, \Psi_b) = d + b. \tag{2.1}$$

Теорема 3. Регулюс $L(a)$ обладает в каждой плоскости L торсальной плоскостью L^*_k относительно подмногообразия $L(\Psi_b)$, если

$$\sigma \equiv m_1 + m_3 - bk(n-d-b) \geqslant 0, \tag{2.2}$$

где

$$m_1 = (k+1)(d-k), \quad m_3 = b(a-b). \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть L^*_k задана системой

$$x^h = k^h_j x^j \ (j = 0, \ldots, k;\ h = k+1, \ldots, d), \tag{2.4}$$

т. е. репер $\{A_I\}$ выбран так, что минор K при неизвестном x^h отличен от нуля. Имеем (см. [5])

$$TL_k(m_1, \Psi_b) = (L, (bk)^p_{j\tau} A_p), \tag{2.5}$$

где

$$(bk)^p_{j\tau} = b^p_{j\tau} + k^h_j b^p_{h\tau}. \tag{2.6}$$

Плоскость L_k является торсальной относительно $L(\Psi_b)$, если (см. (2.1))

$$R_p \| (bk)^p_{j\tau} \| = b. \tag{2.7}$$

Условие (2.7) дает систему из $bk(n-d-b)$ неоднородных алгебраических уравнений относительно $m_1 + m_3$ неизвестных k^h_j и b^ν_τ. Переходя к однородным уравнениям, получаем (см. [10], с. 172), что при условии (2.2) всегда имеются решения, определяющие торсальные относительно $L(\Psi_b)$ плоскости L^{**}_k).

Следствие 1. В общем случае*) при $\sigma_1 = 0$ в плоскости L имеется конечное число не более $(b+1)^{m_1+m_3}$ торсальных L^*_k относительно подмногообразий $L(\Psi_b)$.

Замечание. При $b = a$ из (2.2) получим условие для торсальных $L^*_k \subset L$ относительно семейства $L(a)$.

Следствие 2. Если $\sigma_1 = m_1$, то для каждого $L(\Psi_b)$ имеется конечное число таких плоскостей L_k, что L_k — торсальная относительно $L(\Psi_b)$, т. е. устанавливается соответствие $L(\Psi_b) \to L_k$.

Следствие 3. Если $\sigma_1 = m_3$, то для каждой плоскости L_k имеется конечное число таких подмногообразий $L(\Psi_b)$, что L_k — торсальная относительно $L(\Psi_b)$, т. е. устанавливается соответствие $L_k \to L(\Psi_b)$.

Если подмногообразие $L(\Psi_b)$ содержит фокальные [9] подсемейства $L(\Psi_1)$, то характеристики последних образуют в плоскости L алгебраическую поверхность, которую назовем характеристической поверхностью для плоскости L подмногообразия $L(\Psi_b)$ и обозначим $S[L(\Psi_b)]$.

Теорема 4. Если плоскость $L_k \subset L$ пересекает характеристическую поверхность $S[L(\Psi_b)]$ плоскости L подмногообразия $L(\Psi_b)$ семейства $L(a)$ по поверхности размерности $k-1$ и порядка b, то L_k — торсальная плоскость относительно подмногообразия $L(\Psi_b)$.

Доказательство. Поместим точки $A_0, \ldots, A_k$ в плоскость L_k и зададим подмногообразие $L(\Psi_b)$ уравнениями (1.5). Тогда характеристика $ChL(\Psi_1)$ для $L(\Psi_1) \subset L(\Psi_b)$ находится из системы $x^i b^p_{i\tau} \lambda^\tau = 0$, а поверхность $L_k \cap S[L(\Psi_b)]$ определяется из условия

$$R \| x^j b^p_{j\tau} \| = b - 1.$$

Чтобы ее размерность была равна $k-1$ и порядок был равен b при любых x^j, необходимо $R_p \| b^p_{j\tau} \| = b$. Касательное подпространство $TL_k(m_1, \Psi_b)$ в тангенциальных координатах имеет уравнения $x_i = 0$, $b^p_{j\tau} x_p = 0$ и размерность $\dim TL_k(m_1, \Psi_b) = d + R_p \| b^p_{j\tau} \| = d + b$. Так как плоскость L_k содержит неособые точки, то в силу (2.1) теорема доказана.

Следствие. Если пересечение поверхности $S[L(\Psi_b)]$ и плоскости L_k распадается на b характеристик $L^\tau_{k-1} = ChL(\Psi^\tau_1)$, то L_k является торсальной не только относительно $L(\Psi_b) \supset L(\Psi^\tau_1)$, но и относительно каждого $L(\Psi^\tau_1)$.

Последнее непосредственно следует из теоремы 2 при $b=1$.

**) Здесь и в дальнейшем под «общим случаем» будем понимать, что никаких ограничений на величины $a^p_{i\varkappa}$, кроме ранее указанных, нет.

Теорема 5. Если $\overset{*}{L}_k$ — торсальная относительно подмногообразия $L(\Psi_b)$ семейства $L(a)$ плоскость, то она сечет характеристическую поверхность $S[L(\Psi_b)]$ по поверхности размерности $k-1$ и порядка не выше b.

Доказательство. Поместим вершины $A_0, \ldots, A_k$ в плоскость $\overset{*}{L}_k$, вершины $A_{d+\tau}$ $(\tau = 1, \ldots, b)$ в подпространство $T\overset{*}{L}_k(m_1, \Psi_b)$. Тогда из (2.5) получим

$$b^q_{j\tau} = 0 \quad (q = d + b + 1, \ldots, n). \tag{2.8}$$

В силу (2.8) точки пересечения плоскости $\overset{*}{L}_k$ с характеристической поверхностью $S[L(\Psi_b)]$ находятся из уравнения

$$\det \| x^j b^{d+\tau}_{j1} \ldots x^j b^{d+\tau}_{jb} \| = 0, \tag{2.9}$$

которое задает гиперповерхность в $\overset{*}{L}_k$ порядка не выше b.

Следствие. В общем случае каждая прямая L_1 плоскости $\overset{*}{L}_k$, торсальной относительно $L(\Psi_b)$, является торсальной относительно $L(\Psi_b)$.

Действительно, в общем случае прямая $L_1 \subset \overset{*}{L}_k$ пересекает поверхность (2.9) в b точках и в силу теоремы 4 является торсальной относительно $L(\Psi_b)$.

Заметим, что при $k = d$ поверхность (2.9) в общем случае распадается на b гиперплоскостей L^{τ}_{d-1} [1].

§ 3. Плоскостные поверхности типа σ по L_k

В работе [1] под плоскостной поверхностью ${}_\sigma V_{d+a}$ типа σ понимается такая $(d+a)$-поверхность $X(d, a)$, для которой касательные $(d+a)$-плоскости $TX(d, a)$ во всех неособых точках $X \in L$ имеют $(d+\sigma)$-мерное пересечение $l_{d+\sigma}$, названное ассоциированной $(d+\sigma)$-плоскостью для L.

Определение 2. Плоскостную поверхность $X(d, a)$ назовем *поверхностью типа σ по L_k* и обозначим ${}_\sigma V_{d+a}(L_k)$, если в каждой ее образующей L существует такая плоскость L_k, что во всех неособых точках $X \in L_k$ касательные плоскости $TX(d, a)$ имеют $(d+\sigma)$-мерное пересечение $l_{d+\sigma}(L_k)$. Последнее назовем *ассоциированной плоскостью для $L_k \subset L$.*

Теорема 6. Если поверхность $X(d, a)$ является поверхностью типа σ по $L_k \subset L$, то в общем случае существует такое единственное подмногообразие $L(\Psi_\sigma)$ семейства $L(a)$, относительно которого L_k является торсальной плоскостью.

Сначала докажем лемму.

Лемма. Если для всех неособых точек прямой $L_1 \subset L$ подпространства $TX(d, a)$ содержат одну и ту же $(d+1)$-плоскость l_{d+1} и подсемейства $L(\Psi^1_1)$ и $L(\Psi^2_1)$, для которых

$$TX_0(d, \Psi^1_1) \equiv TX_1(d, \Psi^2_1) \equiv l_{d+1}, \; X_0, X_1 \in L_1$$

различны, то все такие подпространства $TX(d, a)$ содержат и $(d+2)$-плоскость $TX_1(d, \Psi_2)$, где $L(\Psi_2)$ определено подсемействами $L(\Psi^1_1)$ и $L(\Psi^2_1)$.

Доказательство.*) Поместим вершины A_j ($j=0,\ 1$) репера в точки X_j, а вершину A_{d+1} в плоскость l_{d+1}. Тогда в силу (1.8) условие $TX(d,a)\supset A_{d+1}$ примет вид

$$\mathrm{R}\,\| x^j a_{j\varkappa}^{d+2} \ldots x^j a_{j\varkappa}^{n} \| = a-1 \tag{3.1}$$

и является тождеством относительно x^j. Зададим подсемейство $L(\Psi_1^1)$ системой $\omega^{\nu_1}=0$ ($\nu_1=2, \ldots, a$), а подсемейство $L(\Psi_1^2)$ системой $\omega^{\nu_2}=0$ ($\nu_2=1, 3, 4, \ldots, a$). Тогда в силу условий теоремы имеем

$$a_{01}^{d+1}\cdot a_{12}^{d+1}\neq 0, \quad a_{01}^{s}=a_{12}^{s}=0 \ (s=d+2, \ldots, n) \tag{3.2}$$

Так как точка A_1 неособая, то можно поместить вершину A_{d+2} в подпространство $TA_1(d,\Psi_1^1)$. Тогда получим

$$a_{11}^{d+2}\neq 0, \quad a_{11}^{r}=0 \ (r=d+1,\ d+3, \ldots, n). \tag{3.3}$$

Теперь условие (3.1) примет вид

$$\mathrm{R}\left\| \begin{matrix} x^j a_{j2}^{d+3} \ldots x^j a_{j2}^{n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x^j a_{ja}^{d+3} \ldots x^j a_{ja}^{n} \end{matrix} \right\| = a-2. \tag{3.4}$$

Точка A_{d+2} принадлежит подпространству $TX(d,a)$ в некоторой точке X прямой L_1, если

$$\mathrm{R}\,\| x^j a_{j\varkappa}^{r} \| = a-1 \ (r=d+1,\ d+3, \ldots, n) \tag{3.5}$$

В силу (3.2), (3.3) и (3.4) условие (3.5) выполняется для всех неособых точек прямой L_1, т. е. $TX(d,a)$ содержит $(d+2)$-плоскость $(L,\ A_{d+1},\ A_{d+2})=TA_1(d,\Psi_2)$, где $L(\Psi_2)$ задано системой $\omega^3=\ldots=\omega^a=0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 6 сначала проведем для $k=1$. Поместим вершины A_j в две неособые точки прямой L_1 поверхности $X(d,a)$. Тогда подпространства $TA_j(d,a)$ в силу условия теоремы содержат ассоциированную плоскость $l_{d+\sigma}=l_{d+\sigma}(L_k)$. Очевидно, существуют такие подмногообразия $L(\Psi_\sigma^1)$ и $L(\Psi_\sigma^2)$, что

$$TA_0(d,\Psi_\sigma^1)\equiv TA_1(d,\Psi_\sigma^2)\equiv l_{d+\sigma}.$$

Если $L(\Psi_\sigma^1)\equiv L(\Psi_\sigma^2)$, то $TX(d,\Psi_\sigma^1)$ одно и то же для неособых $X\in L_1$ и теорема доказана. Предположим, что эти подмногообразия различны. Тогда существует такое подсемейство $L(\Psi_1^2)\subset L(\Psi_\sigma^2)$, что $L(\Psi_1^2)\subset L(\Psi_\sigma^1)$, причем $l_{d+1}=TA_1(d,\Psi_1^2)\subset l_{d+\sigma}$. Так как существует $L(\Psi_1^1)$, что $TA_0(d,\Psi_1^1)=l_{d+1}$, то условия леммы выполнены и $TA_0(d,\Psi_1^2)$, принадлежит пересечению $l_{d+\sigma}$. Но тогда точка A_0 — особая для поверхности $X(d,a)$. Это противоречит выбору точки A_0. Следовательно, $L(\Psi_\sigma^1)$ и $L(\Psi_\sigma^2)$ совпадают.

Пусть теперь $k>1$. Вдоль каждой прямой $A_0X\subset L_k$ подпространства $TX(d,a)$ имеют пересечением в общем случае плоскость $l_{d+\sigma}$, т. е. A_0X является торсальной относительно некоторого $L(\Psi_\sigma)$ одного и того же для всех прямых, так как $TA_0(d,\Psi_\sigma)=l_{d+\sigma}$. Следовательно, существует единственное $L(\Psi_\sigma)$, относительно которого L_k — торсальная плоскость. Теорема доказана.

Теорема 7. Если в каждой плоскости L регулюса $L(a)$ имеется торсальная относительно подмногообразия $L(\Psi_b)$ плоскость L_k^*, то описываемая плоскостью L поверхность $X(d,a)$ является плоскостной поверхностью типа $\sigma\geqslant b$ по L_k^*.

*) Проводится по аналогии с леммой, доказанной Б. С. Сушниковым в [4].

Действительно, в этом случае подпространство $TX(d, \Psi_b)$ во всех неособых точках X плоскости $\overset{*}{L}_k$ одно и то же. Но

$$TX(d, \Psi_b) \subset TX(d, a).$$

Поэтому подпространство $l_{d+b} = TX(d, \Psi_b)$ содержится в подпространствах $TX(d, a)$ для всех неособых точек $X \in \overset{*}{L}_k$.

Заметим, что если не существует подмногообразия $L(\Psi_{b_1}) \supset L(\Psi_b)$, относительно которого $\overset{*}{L}_k$ является торсальной плоскостью, то $\sigma = b$.

Замечание. Из теорем 4—7 следует эквивалентность (в общем случае) следующих свойств плоскости L_k:

1) плоскость $L_k \subset L$ является торсальной относительно $L(\Psi_b) \subset L(a)$;

2) плоскость $L_k \subset L$ сечет характеристическую поверхность $S[L(\Psi_b)]$ плоскости L подмногообразия $L(\Psi_b)$ по поверхности размерности $k-1$ и порядка b;

3) семейство $L(a)$ описывает поверхность типа $\sigma = b$ по плоскости $L_k \subset L$.

При $k = 1$ характеристическая поверхность $S[L(\Psi_b)]$ пересекает прямую $\overset{*}{L}_1$ в b точках $X^\tau = ChL(\Psi_1^\tau)$ $(\tau = 1, \ldots, b)$. Случай $d=2$, $k=1$ указанной выше эквивалентности отмечен в [3], а случай $a = d+1$, $k = 1$, $n = N = 2d+2$ рассмотрен в [4].

Найдем связь между индексом $\rho = n - d - a$ и типом поверхности ${}_\sigma V_{d+a}(L_k)$.

Теорема 8. Для поверхности ${}_\sigma V_{d+a}(L_k)$ имеет место соотношение

$$\rho \leqslant k(a - \sigma) + a(d - k). \tag{3.6}$$

Доказательство. Поместим вершины $A_j (j = 0, \ldots, k)$ в плоскость L_k, а вершины $A_{d+\tau}$ — в ассоциированную плоскость $L_{d+\sigma}(L_k)$. Тогда

$$\dim \sum TA_j(d, a) \leqslant d + \sigma + (a - \sigma)(k + 1) = d + a + k(a - \sigma),$$

где $\sum$ — знак линейной оболочки. Осталось $d - k$ базисных точек $A_h \in L$ $(h = k+1, \ldots, d)$, причем $\dim \sum TA_h(d, a) \leqslant d + a(d - k)$. Теперь для касательного n-подпространства $TL(a)$ имеем $n \leqslant d + a + k(a - \sigma) + a(d - k)$, откуда и следует (3.6).

§ 4. Некоторые частные случаи

Рассмотрим теперь такие поверхности ${}_\sigma V_{d+a}(L_k)$, для которых поверхность (2.9) распадается на σ плоскостей L^τ_{k-1}. Обозначим такие поверхности через ${}_\sigma \overset{*}{V}_{d+a}(L_k)$ и заметим, что при $k = 1$ и при $k = d$ (см. [1]) поверхности ${}_\sigma V_{d+a}(L_1)$ и ${}_\sigma V_{d+a}$ всегда обладают указанным свойством. Зададим подмногообразие $L(\Psi_\sigma)$ уравнениями $\omega^\nu = 0$ $(\nu = \sigma + 1, \ldots, a)$. Тогда (2.9) примет вид

$$\det \| x^j a^{d+\tau}_{j1} \ldots x^j a^{d+\tau}_{j\sigma} \| = 0. \tag{4.1}$$

Плоскость L^τ_{k-1} является характеристической для подсемейства $L(\Psi_1^\tau)$, которое зададим системой

$$\omega^1 = \ldots = \omega^{\tau-1} = \omega^{\tau+1} = \ldots = \omega^\sigma = \omega^\nu = 0. \tag{4.2}$$

Тогда из уравнений характеристики для $L(\Psi_1^\tau): x^i a^p_{i\tau} = 0$ получаем

$$a_{j\tau}^{d+\tau_1} = b_{j\tau} c_{\tau}^{d+\tau_1} \ (\tau_1 = 1, \ldots, \sigma; \ \tau — \text{фиксировано}), \tag{4.3}$$

т. е. матрица $a_{j\tau}^{d+\tau_1}$ при каждом τ разложима.

Теорема 9. Для поверхности ${}_\sigma\overset{*}{V}_{d+a}(L_k)$ типа $\sigma \geqslant 2$ по L_k касательное подпространство $TL_{k-1}^{\tau}(\overline{m}_1, a)$ содержит все касательные подпространства $TL_k(m_1, \Psi_1^{\tau_1})$, где $\tau_1 \neq \tau$, $\overline{m}_1 = k(d-k+1)$.

Доказательство. Пусть как и ранее

$$\omega_i^p = a_{i\varkappa}^p \omega^\varkappa. \tag{4.4}$$

Поместим вершины $A_j(j = 0, \ldots, k)$ в плоскость L_k, вершины $A_{j_1}(j_1 = 0, \ldots, k-1)$ в плоскость L_{k-1}^1, а вершины $A_{j_2}(j_2 = 1, \ldots, k)$ в плоскость L_{k-1}^2. Подсемейство $L(\Psi_1^{\tau})$ зададим уравнениями (4.2). Тогда

$$a_{j_1 1}^p = a_{j_2 2}^p = 0. \tag{4.5}$$

Уравнения для подпространств $TL_{k-1}^1(\overline{m}_1, a)$ и $TL_k(m_1, \Psi_1^2)$ в тангенциальных координатах имеют соответственно вид

$$x_i = 0, \quad a_{j_1 2}^p x_p = \ldots = a_{j_1 a}^p x_p = 0; \tag{4.6}$$

$$x_i = 0; \quad a_{02}^p x_p = 0. \tag{4.7}$$

Так как L_{k-1}^1 и L_{k-1}^2 — любые две различные плоскости из L_{k-1}^{τ} то в силу (4.6) и (4.7) теорема доказана.

Следствие. Если $\overset{*}{L}_k$ — торсальная относительно $L(\Psi_\sigma)$ плоскость и пересечение $\overset{*}{L}_k \cap S[L(\Psi_\sigma)]$ распадается на σ плоскостей $L_{k-1}^{\tau} = \overset{*}{L}_k \cap ChL(\Psi_1^{\tau})$, то

$$TL_{k-1}^{\tau}(\overline{m}_1, \Psi_\sigma) = \sum_{\tau_1} T\overset{*}{L}_k(m_1, \Psi_1^{\tau_1}),$$

где $\tau, \tau_1 = 1, \ldots, \sigma$; $\tau_1 \neq \tau$.

Обозначим через ${}^{\tau}l_{d+1}$ подпространство $TL_k(m_1, \Psi_1^{\tau})$ и используем понятие внешне порожденного многообразия [5].

Теорема 10. Если для поверхности ${}_\sigma\overset{*}{V}_{d+a}(L_k)$ типа $\sigma \geqslant 2$ по L_k имеется характеристика $Ch^{\tau}l_{d+1}(m_2, a)$, то она содержится во всех плоскостях $L_{k-1}^{\tau_1}$, кроме L_{k-1}^{τ} $(\tau_1 \neq \tau)$.

Доказательство. Проведем фиксацию (4.5) и поместим вершину A_{d+1} в подпространство ${}^1l_{d+1}$. Тогда

$$a_{j1}^s = 0; \quad a_{j1}^{d+1} \neq 0 \ (s = d+2, \ldots, n). \tag{4.8}$$

Пусть $\dim Ch^1 l_{d+1}(m_2, a) = m \geqslant 0$. Тогда система

$$a_{i\varkappa}^s x^i = 0 \tag{4.9}$$

имеет решением m-плоскость L_m. В силу (4.5) и (4.8) из (4.9) получаем $x^0 = x^h = 0$, т. е. $L_m \subset L_{k-1}^2$. Теорема доказана.

Следствие. Если $\overset{*}{L}_k$ — торсальная относительно $L(\Psi_\sigma)$ плоскость, то характеристика $Ch^{\tau} L_{d+1}(m_2, \Psi_\sigma)$ совпадает с пересечением $\overset{*}{L}_k$, и всех характеристик $ChL(\Psi_1^{\tau_1})$, где $\tau_1 \neq \tau$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гейдельман Р. М., Кругляков Л. З. О плоскостных поверхностях.— «ДАН СССР», 1974, 219, 1, 19—22.

2. Акивис М. А. Фокальные образы поверхностей ранга r.— «Известия вузов. Математика», 1957, 1, 9-19.

3. Кругляков Л. З., Сушников Б. С., Чупахин Н. П. О регулюсах 2-плоскостей в P_n .— Материалы четвертой научн. конф. по матем. и мех., 1, Томск, 1974, 74—75.

4. Кругляков Л. З., Сушников Б. С. Псевдоконгруэнции d-плоскостей в P_{2d+2}.— Геометр. сб., 15 («Труды Томск. ун-та», 258), 1975, 57—74.

5. Кругляков Л. З. К дифференциальной геометрии семейств подпространств в проективном пространстве.— Геометр. сб., 16 («Труды Томск. ун-та», 263), 1975, 42—57.

6. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск, 1973.

7. Кругляков Л. З. К проективно-дифференциальной геометрии семейств многомерных плоскостей. — «ДАН СССР», 1971, 196, 2, 282—284.

8. Карапетян С. Е. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (1). — «Изв. АН Арм. ССР». 1963, 16, 3, 3—22.

9. Гейдельман Р. М. Дифференциальная геометрия семейств подпространств в многомерных однородных пространствах.— «Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965». М., 1967, 323—374.

10. Ходж В. и Пидо Д. Методы алгебраической геометрии, т. II, ИЛ., М., 1954.

11. Кругляков Л. З. К вопросу о проективной классификации семейств многомерных плоскостей.— Геометр. сб., 15 («Труды Томск. ун-та», 258), 1975, 50—56.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 18 1977

Н. Р. ЩЕРБАКОВ

О k-ПСЕВДОФОКАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВАХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Понятие k-псевдофокального класса ρ a-семейства d-плоскостей $L(a)$ в N-мерном проективном пространстве, то есть семейства, обладающего Π_b^k-соответствием между k-плоскостями $L_k \subset L$ и пфаффовыми подмногообразиями $L(\Psi_b)$, введено Л. З. Кругляковым в работе [1]. Для такого семейства

$$1 \leqslant \rho = n - d - a(k+1) \leqslant \frac{a}{d+1}; \quad \frac{a(k+1)}{d+1} \leqslant b \leqslant a - \rho(d-k). \quad (1)$$

В данной статье найдены характеристические свойства Π_b^k-соответствия в произвольном k-псевдофокальном семействе. Рассмотрен случай $\rho = a - b$.

Присоединим к каждой плоскости L семейства $L(a)$ один подвижной репер $\{A_I\}$ ($I, J = 0, \ldots, N$) так, чтобы вершины A_i ($i = 0, \ldots, d$) были инцидентны плоскости L, а вершины A_p ($p = d+1, \ldots, n \leqslant N$) поместим в касательное пространство $TL(a)$ [1] плоскости L семейства $L(a)$. Деривационные формулы репера имеют вид

$$dA_I = \omega_I^J A_J,$$

причем формы $\omega_I^J = \Lambda_{I\varkappa}^J du^\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, a$), где $u^\varkappa$ — параметры семейства, удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства. Возьмем фиксированный базис $\omega^\varkappa$ ($\omega^\varkappa = u_{\varkappa_1}^\varkappa du^{\varkappa_1}$ ($\varkappa, \varkappa_1 = 1, \ldots, a$), где $u_{\varkappa_1}^\varkappa$ — функции от $u^1, \ldots, u^a$, удовлетворяющие условию $\det\|u_{\varkappa_1}^\varkappa\| \neq 0$ в рассматриваемой области изменения параметров $u^\varkappa$). Формы ω_i^q ($q = d+1, \ldots, N$), обращение в нуль которых фиксирует плоскость L на $L(a)$, выразятся через базис так [2]

$$\omega_i^p = a_{i\varkappa}^p \omega^\varkappa; \quad \omega_i^{\tilde{p}} = 0 \ (\tilde{p} = n+1, \ldots, N). \quad (2)$$

Будем, как и в [3], задавать пфаффово подмногообразие $L(\Psi_b)$ [4] семейства $L(a)$ уравнениями

$$\omega^\nu = b_\tau^\nu \omega^\tau \ (\tau = 1, \ldots, b; \ \nu = b+1, \ldots, a), \quad (3)$$

а k-плоскость $L_k \subset L$ — уравнениями

$$x^h = k_j^h x^j \ (j = 0, \ldots, k; \ h = k+1, \ldots, d). \quad (4)$$

1. Рассмотрим k-псевдофокальное семейство класса $\rho = 1$. Пусть $b = a - \rho(d-k)$. В этом случае, как показано в [1], каждая неосо-

бая k-плоскость $L_k \subset L$ является k-псевдофокусом единственного подмногообразия $L(\Psi_b)$, то есть

$$TL_k(m_1, a) \equiv (L, k^p_{j\varkappa} A_p) = (L, b^p_{i\tau} A_p) \equiv TL(\Psi_b),$$

где

$$m_1 = (k+1)(d-k), \quad k^p_{j\varkappa} = a^p_{j\varkappa} + k^h_j a^p_{h\varkappa}, \quad b^p_{i\tau} = a^p_{i\tau} + b^\nu_\tau a^p_{i\nu}.$$

Так как $\rho = 1$, то касательное подпространство $TL_k(m_1, a)$ является гиперплоскостью в касательном пространстве $TL(a)$, и если $Y(y^p)$ — ее произвольная точка, то уравнение подпространства $TL_k(m_1, a)$ имеет вид

$$y^p D_p = 0, \tag{5}$$

где D_p — определители порядка $a(k+1)$, получающиеся из матрицы $(k^p_{j\varkappa})$ вычеркиванием строки с номером p и умножением на $(-1)^p$. Обозначим характеристику касательного подпространства $TL_k(m_1, a)$, задаваемую системой уравнений

$$\begin{aligned} y^p D_p &= 0, \\ y^p \frac{\partial D_p}{\partial k^h_j} &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

через $Ch\{TL_k(m_1, a)\}(m_1)$. Размерность этой характеристики равна $n - m_1 - 1$. Заметим, что при $b = a - d + k$ касательное подпространство внутреннего порожденного многообразия [5] пфаффова подмногообразия $L(\Psi_b)$, то есть $TL_k(m_1, \Psi_b)$, имеет размерность $d + b(k+1) = n - m_1 - 1$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. В k-псевдофокальном класса ρ a-семействе d-плоскостей $L(a)$ плоскость $L_k \subset L$ является k-псевдофокусом подмногообразия $L(\Psi_b)$ $(b = a - \rho(d-k))$ тогда и только тогда, когда

$$Ch\{TL_k(m_1, a)\}(m_1) = TL_k(m_1, \Psi_b).$$

Доказательство. Для упрощения выкладок докажем теорему сначала для случая $\rho = 1$.

Необходимость. Пусть плоскость $L_k \subset L$ есть k-псевдофокус подмногообразия $L(\Psi_b)$. Поместим в нее вершины репера $A_0, \ldots, A_k$. Тогда уравнения (4) примут вид $x^h = 0$. Подмногообразие $L(\Psi_b)$, k-псевдофокусом которого является плоскость L_k, зададим уравнениями $\omega^\nu = 0$. Вершины $A_{d+1}, \ldots, A_{d+b(k+1)}$ поместим в касательное подпространство $TL_k(m_1, \Psi_b)$, то есть положим

$$a^{n-m_1}_{j\tau} = \ldots = a^n_{j\tau} = 0. \tag{7}$$

Тогда подпространство $TL_k(m_1, \Psi_b)$ будет задаваться уравнениями

$$y^{n-m_1} = \ldots = y^n = 0. \tag{8}$$

Так как $TL_k(m_1, \Psi_b) \subset TL_k(m_1, a)$, то вершины $A_{n-m_1}, \ldots, A_{n-1}$ естественно поместить в касательное подпространство $TL_k(m_1, a)$, которое по условию теоремы совпадает с касательным подпространством $TL(\Psi_b)$. Для этого достаточно положить

$$a^n_{j\varkappa} = a^n_{i\tau} = 0; \quad a^n_{h\nu} \neq 0. \tag{9}$$

Обозначим определители, получающиеся из D_p при $k^h_j = 0$, через d_p. Тогда в силу (9)

$$d_{d+1} = \ldots = d_{n-1} = 0$$

и уравнение (5) примет вид

$$y^n = 0. \tag{10}$$

По правилу дифференцирования определителей получим частную производную определителя D_p по $k_{j_0}^{h_0}$ при $k_j^h = 0$ в виде

$$\frac{\partial D_p}{\partial k_{j_0}^{h_0}}\Bigg|_{k_j^h=0} = \sum_{\varkappa} D_p^{h_0 j_0 \varkappa}\Bigg|_{k_j^h=0} = \sum_{\varkappa} d_p^{h_0 j_0 \varkappa},$$

где определители $D_p^{h_0 j_0 \varkappa}$ отличаются от D_p тем, что в них вместо столбца $k_{j_0\varkappa}^{\overline{p}}$ $(\overline{p} \neq p)$ стоит столбец $\frac{\partial}{\partial k_{j_0}^{h_0}}(k_{j_0\varkappa}^{\overline{p}}) = a_{h_0\varkappa}^{\overline{p}}$. Покажем теперь, что

$$d_{p''}^{hj\varkappa} = 0 \ (p'' = d+1, \ldots, n-m_1-1).$$

Для этого рассмотрим одну из производных $(h = h_0,\ j = j_0)$ определителя $D_{p_0''}$:

$$\frac{\partial D_{p_0''}}{\partial k_{j_0}^{h_0}}\Bigg|_{k_j^h=0} = \sum_{\varkappa} d_{p_0''}^{h_0 j_0 \varkappa} = \|a_{01}^{\overline{p}} \ldots a_{0a}^{\overline{p}}, \ldots, a_{h_0 1}^{\overline{p}} \ldots a_{j_0 b}^{\overline{p}} \ldots a_{j_0 a}^{\overline{p}}, \ldots, a_{k1}^{\overline{p}} \ldots a_{ka}^{\overline{p}}\| + \cdots$$

$$\cdots + \|a_{01}^{\overline{p}} \ldots a_{0a}^{\overline{p}}, \ldots, a_{j_0 1}^{\overline{p}} \ldots a_{h_0 b}^{\overline{p}} \ldots a_{j_0 a}^{\overline{p}}, \ldots, a_{k1}^{\overline{p}} \ldots a_{ka}^{\overline{p}}\| + \tag{11}$$

$$+ \|a_{01}^{\overline{p}} \ldots a_{0a}^{\overline{p}}, \ldots, a_{j_0 1}^{\overline{p}} \ldots a_{h_0 b+1}^{\overline{p}} \ldots a_{j_0 a}^{\overline{p}}, \ldots, a_{k1}^{\overline{p}} \ldots a_{ka}^{\overline{p}}\| + \cdots$$

$$\cdots + \|a_{01}^{\overline{p}} \ldots a_{0a}^{\overline{p}}, \ldots, a_{j_0 1}^{\overline{p}} \ldots a_{j_0 b}^{\overline{p}} \ldots a_{h_0 a}^{\overline{p}}, \ldots, a_{k1}^{\overline{p}} \ldots a_{ka}^{\overline{p}}\|.$$

В силу (9) последняя строка первых b определителей состоит из нулей. Разлагая последние $a-b$ определителей по единственному отличному от нуля элементу последней строки — $a_{h_0\nu}^n$, получим определители, у каждого из которых в последних $m_1 = (k+1)(d-k)$ строках на одних и тех же местах стоят отличные от нуля элементы, а остальные элементы этих строк в силу (7) равны нулю. Так как ненулевых элементов—$(k+1)(a-b)-1 = (k+1)(d-k)-1 = m_1-1$, то есть меньше, чем строк, в которых они расположены, то все последние $a-b$ определителей равны нулю. Сказанное имеет место, очевидно, при любых h, j, p''. Следовательно $d_{p''}^{hik} = 0$, то есть во всех уравнениях системы (6) коэффициенты при $y^{p''}$ равны нулю. Поэтому, считая

$$\det \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 1 \\ \sum\limits_{\varkappa} \mathrm{d}_{n-m_1}^{hj\varkappa} & \ldots & \sum\limits_{\varkappa} d_n^{hj\varkappa} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{12}$$

получим уравнение характеристики $Ch\{TL_k(m_1, a)\}(m_1)$ в виде (8), то есть если плоскость L_k является k-псевдофокусом подмногообразия $L(\Psi_b)$, то характеристика $Ch\{TL_k(m_1, a)\}(m_1)$ совпадает с касательным подпространством $TL_k(m_1, \Psi_b)$.

Достаточность. Пусть $Ch\{TL_k(m_1, a)\}(m_1) = TL_k(m_1, \Psi_b)$. Поместим вершины репера $A_0, \ldots, A_k$ в плоскость L_k, а подмногообразие $L(\Psi_b)$, для которого $TL_k(m_1, \Psi_b) = Ch\{TL_k(m_1, a)\}(m_1)$ зададим в виде $\omega^\nu = 0$. Будем считать, что проведена фиксация (7), то есть что $TL_k(m_1, \Psi_b) = (A_0, \ldots, A_{n-m_1-1})$, Вершины $A_{n-m_1}, \ldots, A_{d+a(k+1)}$ поместим в касательное подпространство $TL_k(m_1, a)$. Тогда

$$a_{j\varkappa}^n = 0. \tag{13}$$

Так как $Ch(TL_k(m_1, a)\}(m_1) = (A_0, \dots, A_{n-m_1-1})$, то в уравнениях (6) отсутствуют коэффициенты при $y^{p''}$:

$$\left.\frac{\partial D_{p'}}{\partial k_j^h}\right|_{k_j^h=0} = \sum_{\varkappa} d_{p''}^{hj\varkappa} = 0, \tag{14}$$

причем выполняется условие (12). После фиксаций (7) и (13) имеем

$$TL_k(m_1, a) = (L, A_{d+1}, \dots, A_{n-1});$$

$$TL(\Psi_b) = (L, A_{d+1}, \dots, A_{n-m_1-1}, a_{h\tau}^{p'} A_{p'}),$$

$$p' = n - m_1, \dots, n.$$

Теперь достаточно показать, что в силу (12) и (14) эти пространства совпадают, то есть что $a_{h\tau}^n = 0$.

Рассмотрим одно из уравнений системы (14). Оно имеет вид (11). Пусть $h = k+1$, $j = 0$, $p'' = d+1$. При доказательстве необходимости условий теоремы было показано, что если имеет место (7), то последние $a - b$ слагаемых в (11) равны нулю. Сумма первых b слагаемых с учетом (7) и (13) может быть записана в виде

$$\sum_{\tau} d_{d+1}^{k+1,0,\tau} =$$

$$= \begin{Vmatrix}
a_{0,b+1}^{d+2} & \dots & a_{k,a}^{d+2}, & a_{k+1,1}^{d+2}, & a_{0,2}^{d+2} & \dots & a_{0,b}^{d+2}, & \dots, & a_{k,b}^{d+2} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{0,b+1}^{n-m-1} & \dots & a_{k,a}^{n-m-1}, & a_{k+1,1}^{n-m-1}, & a_{0,2}^{n-m-1} & \dots & a_{0,b}^{n-m-1}, & \dots, & a_{k,b}^{n-m-1} \\
a_{0,b+1}^{n-m} & \dots & a_{k,a}^{n-m}, & a_{k+1,1}^{n-m}, & 0 & \dots & 0, & \dots, & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{0,b+1}^{n-1} & \dots & a_{k,a}^{n-1}, & a_{k+1,1}^{n-1}, & 0 & \dots & 0, & \dots, & 0 \\
0 & \dots & 0, & a_{k+1,1}^{n}, & 0 & \dots & 0, & \dots, & 0
\end{Vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{Vmatrix}
a_{0,b+1}^{d+2} & \dots & a_{k,a}^{d+2}, & a_{0,1}^{d+2}, & a_{0,2}^{d+2} & \dots & a_{k+1,b}^{d+2}, & \dots, & a_{k,b}^{d+2} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{0,b+1}^{n-m-1} & \dots & a_{k,a}^{n-m-1}, & a_{0,1}^{n-m-1}, & a_{0,2}^{n-m-1} & \dots & a_{k+1,b}^{n-m-1}, & \dots, & a_{k,b}^{n-m-1} \\
a_{0,b+1}^{n-m} & \dots & a_{k,a}^{n-m}, & 0, & 0 & \dots & a_{k+1,b}^{n-m}, & \dots, & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
a_{0,b+1}^{n-1} & \dots & a_{k,a}^{n-1}, & 0, & 0 & \dots & a_{k+1,b}^{n-1}, & \dots, & 0 \\
0 & \dots & 0, & 0, & 0 & \dots & a_{k+1,b}^{n}, & \dots, & 0
\end{Vmatrix}$$

(здесь переобозначено $m_1 = m$) или, обозначая через $\Delta_\tau^{k+1,\,d+1}$ — алгебраическое дополнение минора

$$\delta_{\tau}^{k+1} = \begin{Vmatrix} a_{0,\, b+1}^{n-m} & \ldots & a_{k,\, a}^{n-m}, & a_{k+1,\, \tau}^{n-m} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{0,\, b+1}^{n-1} & \ldots & a_{k,\, a}^{n-1}, & a_{k+1,\, \tau}^{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & , a_{k+1,\, \tau}^{n} \end{Vmatrix}$$

в соответствующем определителе, в виде

$$\sum_{\tau} d_{d+1}^{k+1,\, 0,\, \tau} = \sum_{\tau=1}^{b} (-1)^{\tau} \delta_{\tau}^{k+1} \Delta_{\tau}^{k+1,\, d+1},$$

причем δ_{τ}^{h} будут одни и те же для любых p'' и j. Таким образом, при фиксированном $h = h_0$ получаем систему из $(k+1)(n - m_1 - d - 1) = b\,(k+1)^2$ однородных уравнений на b миноров $\delta_{\tau}^{h_0}$. В силу (12) она имеет только нулевое решение. Рассуждая аналогично для любого h, получим, что если имеют место (12) и (14), то $\delta_{\tau}^{h} = 0$. Так как каждое δ_{τ}^{h} может быть представлено в виде

$$\delta_{\tau}^{h} = a_{h\tau}^{n} \begin{vmatrix} a_{0,\, b+1}^{n-m_1} & \ldots & a_{k,\, a}^{n-m_1} \\ a_{0,\, b+1}^{n-1} & \ldots & a_{k,\, a}^{n-1} \end{vmatrix},$$

а плоскость L_k — неособая $\mathrm{Rang}\,(a_{j\varkappa}^{p}) = a\,(k+1))$, то из того, что $\delta_{\tau}^{h} = 0$, следует $a_{h\tau}^{n} = 0$.

Все эти рассуждения проходят при любом ρ. В самом деле, в [3] показано, что и в этом случае каждой неособой k-плоскости L_k соответствует единственное подмногообразие, для которого эта k-плоскость является k-псевдофокусом. Для этих k-плоскостей и подмногообразий рассмотрим касательное подпространство $TL_k(m_1,\ \Psi_b)$. Его размерность равна $d + b\,(k+1) = n - \rho\,(m_1 + 1)$ (считаем $b = a - \rho\,(d - k)$), то есть это пространство задается $\rho\,(m_1 + 1)$ уравнениями. Но так как теперь $\dim TL_k(m_1,\ a) = d + a\,(k+1) = n - \rho$, то пространство задается ρ уравнениями, а его характеристика — $\rho\,(m_1+1)$ уравнениями на неизвестные $y^{d+1}, \ldots, y^{n-\rho}, y^{n-\rho+1}, \ldots, y^{n}$. Проведем те же фиксации, что и при доказательстве необходимости при $\rho = 1$ условий теоремы 1. Для произвольного ρ условия (7) и (9) примут, соответственно, вид

$$a_{j\tau}^{\alpha} = 0 \quad (\alpha = n - \rho\,(m_1 + 1) + 1, \ldots, n)$$

и

$$a_{i\tau}^{\beta} = a_{j\varkappa}^{\beta} = 0 \; (\beta = n - \rho + 1, \ldots, n).$$

Рассуждая далее так же, как и при $\rho = 1$, получим, что коэффициенты при $y^{d+1}, \ldots, y^{n-\rho\,(m_1+1)}$ в системе, задающей характеристику $Ch\{TL_k(m_1,\ a)\}\,(m_1)$, равны нулю, то есть эта система состоит из $\rho\,(m_1+1)$ однородных уравнений на $\rho\,(m_1+1)$ неизвестных $y^{n-\rho\,(m_1+1)+1}, \ldots, y^{n}$; таким образом, при произвольном ρ искомая характеристика совпадает с касательным подпространством $TL_k(m_1\ \Psi_b)$, если плоскость L_k — k-псевдофокус подмногообразия $L\,(\Psi_b)$.

Если же наоборот дано, что $Ch\,\{TL_k(m_1,\ a)\}\,(m_1) = TL_k(m_1,\ \Psi_b)$, то проведя фиксации $TL_k(m_1,\ \Psi_b) = A_0, \ldots, A_{n-\rho\,(m_1+1)}$ и $TL_k(m_1,\ a) = A_0, \ldots, A_{d+a\,(k+1)}$, то есть положив $a_{j\tau}^{\beta} = 0$ и $a_{j\varkappa}^{\beta} = 0$ и рассуждая аналогично доказательству достаточности условия теоремы 1 при $\rho = 1$, получим, что из того, что коэффициенты при $y^{d+1}, \ldots, y^{n-\rho(m_1+1)}$ в системе уравнений, задающих характеристику, равны нулю, следует, что $a^{\beta}_{i\tau}=0$, а это и означает, что плоскость L_k — k-псевдофокус подмногообразия $L(\Psi_b)$. Теорема доказана.

Заметим, что необходимость условия теоремы 1 для случая $k=0$ показана в [6].

2. Напомним понятие характеристической поверхности [7].

Пусть t-плоскость $l_t (t=d+1, \ldots, n-1)$, принадлежащая касательному подпространству $TL(a)$ и проходящая через плоскость L, задана в тангенциальных координатах уравнениями

$$x_i=0;\ x_r=t^s_r\, x_s\ \ (r=d+1, \ldots, t;\ \ s=t+1, \ldots, n).$$

Совокупность всех $l_t \supset L$ образует семейство $l_t(m_2)$, где $m_2 = (t-d)(n-t)$ — число параметров t^s_r. Характеристика совокупности $l_t(m_2, \Psi_1)$ всех $l_t(m_2)$ 1-семейства $L(\Psi_1)$ есть $Chl_t\,(m_2, \Psi_1) = L \cap Chl_t(\Psi_1)$. Уравнения этой характеристики имеют вид

$$x^i\ t^s_{i\varkappa}\,\omega^{\varkappa}=0,$$

где $t^s_{i\varkappa}=a^s_{i\varkappa}+t^s_r\ a^r_{i\varkappa}$.

Характеристической поверхностью плоскости l_t многообразия $l_t(m_2, a)$ называется [7] совокупность всех характеристик $l_t(m_2, \Psi_1)$ для всех $L(\Psi_1)\subset L(a)$:

$$S^a(l_t)=S\,[Ch_t(m_2,\ \Psi_1)]\subset L.$$

Уравнения характеристической поверхности получаются из условия

$$\mathrm{Rang}\,\|\,x^i\ t^{\,s}_{i\varkappa}\,\|=a-1.$$

Отсюда видно, что при $t=n-a$ $(s=n-a+1, \ldots, n)$ уравнение характеристической поверхности имеет вид

$$\det\|\,x^i\ t^s_{i\varkappa}\,\|=0, \tag{15}$$

а поверхность $S^a(l_{n-a})$ является гиперповерхностью порядка a в L.

Пусть $\rho=a-b$. Из (1) следует, что для k-псевдофокального семейства такого класса $k=d-1$.

Теорема 2. Пусть в $(d-1)$-псевдофокальном a-семействе d-плоскостей $L(a)$ класса $\rho=a-b$ плоскость L_{d-1} является $(d-1)$-псевдофокусом подмногообразия $L(\Psi_b)$. Тогда для $(n-a)$-плоскости l_{n-a}, проходящей через L и принадлежащей касательному подпространству $TL_{d-1}(m_1, a)=TL(\Psi_b)$, гиперповерхность $S^a(l_{n-a})$ распадается на гиперповерхность S^b порядка b и на $(a-b)$ раз взятую плоскость L_{d-1}.

Доказательство. Зададим плоскость L_{d-1} уравнением $x^d=0$ $(L_{d-1}=(A_0, \ldots, A_{d-1}))$, а подмногообразие $L(\Psi_b)$, у которого $(d-1)$-псевдофокусом является плоскость L_{d-1}, — уравнениями $\omega^{\nu}=0$. Произвольная плоскость $l_{n-a}\supset L$ в тангенциальных координатах может быть задана уравнениями

$$x_i=0;\ x_r=t^s_r\, x_s\,(r=d+1, \ldots, n-a;\ s=n-a+1, \ldots, n). \tag{16}$$

Тогда уравнение (15) гиперповерхности $S^a(l_{n-a})$ примет вид

$$\|\,x^i\ (a^s_{i\varkappa}+t^s_r\ a^r_{i\varkappa})\|=0. \tag{17}$$

Поместим вершины репера $A_0, \ldots, A_{d(a+1)}$ в пространство $TL_{d-1}\times(m_1,\ a)=TL(\Psi_b)$. Тогда

$$a^{\bar{s}}_{i\tau}=a^{\bar{s}}_{j\varkappa}=0\ \ (s=n-\rho+1, \ldots, n), \tag{18}$$

а так как $l_{n-a}\subset TL_{d-1}(m_1,\ a)$, то в (16) имеем

$$t_r^{\bar{s}} = 0, \tag{19}$$

и уравнения (16) плоскости l_{n-a} примут вид

$$x_\iota = 0;\ x_r = t_r^{\bar{s}}\, x_{\bar{s}}\ (\bar{s} = n - a + 1, .., n - \rho). \tag{20}$$

Внеся (18) и (19) в (17) с учетом того, что $\rho = a - b$, получим уравнение гиперповерхности $S^a(l_{n-a})$ в виде

$$\| x^i (a_{i\tau}^{\bar{s}} + t_r^{\bar{s}} a_{i\tau}^r) \| \cdot \| x^d a_{d\nu}^{\bar{s}} \| = 0, \tag{21}$$

откуда и следует требуемое распадение гиперповерхности $S^a(l_{n-a})$. Теорема доказана.

Из всех плоскостей $l_{n-a} \subset TL_{d-1}(m_1, a)$ особый интерес представляет та, которая совпадает с касательным подпространством $TL_{d-1}(m_1, \Psi_b)$. Заметим, что для неособых плоскостей L_{d-1} [3] это возможно только, если $a = \rho(d+1)$, тогда как в общем случае $a \geqslant \rho(d+1)$. В самом деле, для неособой плоскости L_{d-1} dim $TL_{d-1} \times (m_1, \Psi_b) = d(b+1)$. Если же $d(b+1) = n - a$, то при $\rho = a - b$ имеем $n = d(1-\rho) + a(d+1)$. Но из (1) следует, что в $(d-1)$-псевдофокальном семействе $n = \rho + d(a+1)$, то есть должно быть $a = \rho(d+1)$.

Итак, пусть $L_{d-1} = (A_0, .., A_{d-1})$, а подмногообразие $L(\Psi_b)$ задается уравнениями $\omega^\nu = 0$. Тогда $TL_{d-1}(m_1, \Psi_b) = (L, a_{j\tau}^p A_p)$, а коэффициенты в уравнении (20) имеют вид

$$t_r^{\bar{s}} = \frac{D_r}{D},$$

где $D = \| a_{j\tau}^r \|$, а определитель D_r отличается от D тем, что вместо r-го столбца стоит столбец $a_{j\tau}^{\bar{s}}$. Внося эти значения коэффициентов $t_r^{\bar{s}}$ в (17) и учитывая, что

$$a_{j\tau}^{\bar{s}} + \sum_r \frac{D_r}{D} \cdot a_{j\tau}^r = 0,$$

а $\rho = a - b$, получаем уравнение характеристической гиперповерхности $S^a[TL_{d-1}(m_1, \Psi_b)]$ для случая, когда плоскость L_{d-1} является $(d-1)$-псевдофокусом подмногообразия $L(\Psi_b)$, в виде

$$\| x^d (a_{d\tau}^{\bar{s}} + t_r^{\bar{s}} a_{dr}^r) \| \cdot \| x^d a_{d\nu}^{\bar{s}} \| = 0,$$

откуда следует, что гиперповерхность $S^a[TL_{d-1}(m_1, \Psi_b)]$ есть a раз взятая плоскость L_{d-1}.

Если же напротив, дано, что $S^a[TL_{d-1}(m_1, \Psi_b)] = L_{d-1}$, то поместив вершины $A_0, \dots, A_{n-a}$ в плоскость l_{n-a}, получим, что в (17)

$$a_{j\tau}^{s} = 0,\ t_r^{s} = 0\ (j = 0, \dots, d-1). \tag{22}$$

Поместив вершины $A_{n-a+1}, .., A_{d(a+1)}$ в касательное подпространство $TL_{d-1}(m_1, a)$, то есть положив

$$a_{j\varkappa}^{\bar{s}} = 0, \tag{23}$$

получим уравнение характеристической гиперповерхности (17) в виде

$$\begin{vmatrix} a_{d\tau}^{\bar{s}} & x^i a_{i\nu}^{\bar{s}} \\ a_{d\tau}^{\bar{s}} & x^d a_{d\nu}^{\bar{s}} \end{vmatrix} = 0. \tag{24}$$

Из (24) видно, что вырождение этой поверхности в a раз взятую плоскость L_{d-1} возможно в двух случаях:

а) $a_{j_\nu}^{\bar{s}} = 0$,

б) $a_{d\tau}^{\bar{s}} = 0$.

Если выполняются условия а), то плоскость L_{d-1} является особой класса $d(a+1) - n + a = a - \rho = b$, так как при этих условиях в силу фиксации (22) имеем $a_{j\varkappa}^{s} = 0$, то есть $\dim TL_{d-1}(m_1, a) = n - a$, в то время как для неособой плоскости L_{d-1} эта размерность равна $d(a+1)$. Мы считаем плоскость L_{d-1} неособой. Следовательно, указанное вырождение гиперповерхности (24) возможно только в случае б), что и означает в силу (23), что плоскость L_{d-1} есть $(d-1)$-псевдофокус подмногообразия $L(\Psi_b)$.

Эти рассуждения можно резюмировать так:

Теорема 3. Если для $(d-1)$-псевдофокального класса $\rho = a - b$ a-семейства d-плоскостей $L(a)$ имеем

$$\dim TL_{d-1}(m_1, \Psi_b) = n - a,$$

то плоскость L_{d-1} является $(d-1)$-псевдофокусом подмногообразия $L(\Psi_b)$ тогда и только тогда, когда характеристическая поверхность $S^a[TL_{d-1}(m_1, \Psi_b)]$ вырождается в a раз взятую плоскость L_{d-1}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кругляков Л. З. Обобщенные псевдофокальные семейства d-плоскостей в P_N.— «Известия вузов. Математика». 1971, 11, 78—84.

2. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм Картана и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск, 1973.

3. Щербаков Н. Р., Кругляков Л. З. К геометрии k-псевдофокального семейства d-плоскостей в проективном пространстве.— Геом. сб., 13 («Труды Томского ун-та», 246), 1973, 43—51.

4. Щербаков Р. Н., Слухаев В. В. Репераж и расслоения. — Геом. сб., 9 («Труды Томского ун-та», 212), 1972, 5—9.

5. Кругляков Л. З. К дифференциальной геометрии семейств подпространств в проективном пространстве.— Геом. сб., 16 («Труды Томского ун-та», 263), 1975, 42—57.

6. Чупахин Н. П. Об одном свойстве псевдофокального класса ρ a-семейства d-плоскостей.— Геом. сб., 15 («Труды Томского ун-та», 258), 1975, 76—82.

7. Кругляков Л. З. Касательные подпространства и характеристики многообразий, ассоциированных с семейством многомерных плоскостей. Данный сб., 3—15.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 18 1977

А. А. ЛУЧИНИН

О ГЕОМЕТРИИ ПАРЫ m-ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P_n

При изучении пары поверхностей и точечного соответствия между ними возможны две точки зрения. Первая предполагает, что две поверхности, между точками которых установлено точечное соответствие, не являются жестко связанными и их можно считать расположенными в разных проективных пространствах. Геометрия этой пары поверхностей изучается по отношению к группе, являющейся прямым произведением групп проективных преобразований пространств, в которых расположены поверхности. Этот подход к изучению пары поверхностей использует В. С. Болодурин [1].

Другая точка зрения предполагает, что обе поверхности расположены в одном пространстве. Геометрия этой пары поверхностей изучается по отношению к группе проективных преобразований, действующих на пару поверхностей, как на единое целое. С этой точки зрения пара поверхностей изучалась С. П. Финиковым [2], Л. С. Ермолаевым [3], В. В. Гольдбергом [4], Е. Е. Вересовой [5] и др.

С этой же точки зрения мы изучаем пару m-поверхностей в n-мерном проективном пространстве. Изучение ведется с использованием инвариантного метода, разработанного Г. Ф. Лаптевым [6]. Строится аналитически инвариантное оснащение пары m-поверхностей, рассматриваются некоторые геометрические образы, связанные с оснащением. Рассмотрения всюду имеют локальный характер. Все рассматриваемые в данной работе функции предполагаются аналитическими.

§ 1. Фундаментальные геометрические объекты пары m-поверхностей в P_n

Пусть S_m^1 и S_m^2 две m-мерные поверхности, погруженные в n-мерное проективное пространство P_n, между точками которых установлено взаимно однозначное соответствие. Присоединим к рассматриваемой паре m-поверхностей некоторый проективный репер $R=\{A_I\}$ с деривационными формулами

$$dA_I=\omega_I^J A_J \tag{1}$$

и структурными уравнениями

$$D\omega_I^J=\omega_I^K\wedge\omega_K^J, \tag{2}$$

причем

$$\omega_I^I=0. \tag{3}$$

$$(I,\ J,\ K = 1,\ 2, \ldots,\ n+1)$$

Проведем следующую частичную канонизацию репера: точки A_1 и A_{n+1} поместим в соответствующие точки рассматриваемых поверхностей пары, точки $A_2, \ldots, A_{m+1}$ — в касательной m-плоскости L^1_m к m-поверхности S^1_m в точке A_1, а точки $A_{n-m+1}, \ldots, A_n$ — в касательной m-плоскости L^2_m к m-поверхности S^2_m в точке A_{n+1}. Тогда уравнения, определяющие пару m-поверхностей, принимают вид

$$\Omega^J = 0;\ \Omega^A = 0;\ \Omega^\alpha = A^\alpha_i\,\Omega^i;$$

$$\omega^I_{i+1} = \Lambda^I_{ij}\,\Omega^j;\quad \omega^A_\alpha = \Lambda^A_{\alpha\beta}\,\Omega^\beta; \tag{4}$$

$$\nabla A^\alpha_i + A^\alpha_i(\omega^1_1 - \omega^{n+1}_{n+1}) = A^\alpha_{ij}\,\Omega^j; \tag{5_1}$$

$$\nabla\Lambda^I_{ij} + \Lambda^I_{ij}\,\omega^1_1 = \Lambda^I_{ijk}\,\Omega^k; \tag{5_2}$$

$$\nabla\Lambda^A_{\alpha\beta} + \Lambda^A_{\alpha\beta}\,\omega^{n+1}_{n+1} = \Lambda^A_{\alpha\beta\gamma}\,\Omega^\gamma, \tag{5_3}$$

где обозначено

$$\nabla A^\alpha_i = dA^\alpha_i + A^\beta_i\,\omega^\alpha_\beta - A^\alpha_j\,\omega^{j+1}_{i+1}; \tag{6_1}$$

$$\nabla\Lambda^I_{ij} = d\Lambda^I_{ij} + \Lambda^J_{ij}\,\omega^I_J - \Lambda^I_{kj}\,\omega^{k+1}_{i+1} - \Lambda^I_{ik}\,\omega^{k+1}_{j+1}; \tag{6_2}$$

$$\nabla\Lambda^A_{\alpha\beta} = d\Lambda^A_{\alpha\beta} + \Lambda^B_{\alpha\beta}\,\omega^A_B - \Lambda^A_{\gamma\beta}\,\omega^\gamma_\alpha - \Lambda^A_{\alpha\gamma}\,\omega^\gamma_\beta. \tag{6_3}$$

Здесь и в дальнейшем индексы будут принимать следующие значения:

$$\begin{aligned} &I,\ J,\ K, \ldots = m+2, \ldots,\ n+1;\\ &i,\ j,\ k, \ldots = 1, \ldots,\ m;\\ &A,\ B, \ldots = 1, \ldots,\ n-m;\\ &\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots = n-m+1, \ldots,\ n. \end{aligned} \tag{7}$$

Так как между поверхностями S^1_m и S^2_m установлено взаимно однозначное соответствие, то $\det\|A^\alpha_i\| \neq 0$, то мы можем ввести в рассмотрение величины $\overset{*}{A}{}^i_\alpha$ по формулам

$$\overset{*}{A}{}^i_\alpha\,A^\alpha_j = \delta^i_j;\quad \overset{*}{A}{}^i_\beta\,A^\alpha_i = \delta^\alpha_\beta. \tag{8}$$

Из (5) и (8) получаем

$$\nabla\overset{*}{A}{}^i_\alpha - \overset{*}{A}{}^i_\alpha(\omega^1_1 - \omega^{n+1}_{n+1}) = \overset{*}{A}{}^i_{\alpha\beta}\,\Omega^\beta, \tag{9}$$

где

$$\overset{*}{A}{}^i_{\alpha\beta} = -A^\gamma_{jk}\,\overset{*}{A}{}^i_\gamma\,\overset{*}{A}{}^j_\alpha\,\overset{*}{A}{}^k_\beta.$$

Фундаментальным геометрическим объектом второго порядка пары m-поверхностей является объект

$$\Gamma_2 = (A^\alpha_i,\ \Lambda^I_{ij},\ \Lambda^A_{\alpha\beta},\ A^\alpha_{ij}).$$

Последовательное продолжение уравнений (5) приводит к последовательности фундаментальных геометрических объектов пары m-поверхностей

$$A^\alpha_i;\ \Lambda^I_{ij},\ \Lambda^A_{\alpha\beta},\ A^\alpha_{ij};\ \ldots;\ \Lambda^I_{i_1\ldots i_s},\ \Lambda^A_{\alpha_1\ldots\alpha_s},\ A^\alpha_{i_1\ldots i_s}.$$

Очевидно, что совокупности величин

$$\Gamma'_2 = (\Lambda^I_{ij});\ \Gamma''_2 = (\Lambda^A_{\alpha\beta})$$

образуют подобъекты объекта Γ_2. Последовательное продолжение дифференциальных уравнений (5_2) и (5_3) подобъектов Γ'_2 и Γ''_2 приводит к последовательности фундаментальных геометрических объектов m-поверхностей S_m^1 и S_m^2, соответственно

$$\Lambda_{ij}^J, \ldots, \Lambda_{i_1 \ldots i_s}^J, \ldots$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{A}, \ldots, \Lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}^{A}, \ldots$$

Дифференциальные уравнения последовательности этих фундаментальных объектов можно записать с помощью рекуррентных формул, полученных Н. М. Остиану [7].

§ 2. Обращенный фундаментальный объект

В дальнейшем будем предполагать, что соприкасающаяся плоскость второго порядка m-поверхности S_m^1, а следовательно и S_m^2, заполняет все пространство $\left(\text{следовательно, } n \leqslant \dfrac{m(m+3)}{2}\right)$. Тогда для каждой из m-поверхностей S_m^1 и S_m^2 существует относительный инвариант, охваченный фундаментальным геометрическим объектом порядка два (см. [7]). Обозначим эти инварианты (их строение указано в [7])

$$I' = I'(\Lambda_{ij}^J); \quad I'' = I''(\Lambda_{\alpha\beta}^{A}) \tag{10}$$

и будем рассматривать только такую пару m-поверхностей, для которой они не равны тождественно нулю. Тогда мы можем ввести в рассмотрение объекты второго порядка V_I^{ij} и $V_{A}^{\alpha\beta}$ следующим образом:

$$V_I^{ij} = \frac{\partial \ln I'}{\partial \Lambda_{ij}^I}; \quad V_{A}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \ln I''}{\partial \Lambda_{\alpha\beta}^{A}}. \tag{11}$$

Величины V_I^{ij} и $V_A^{\alpha\beta}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla V_I^{ij} - V_I^{ij}\omega_1^1 = V_{Ik}^{ij}\,\Omega^k; \tag{12$_1$}$$

$$\nabla V_{A}^{\alpha\beta} - V_{A}^{\alpha\beta}\omega_{n+1}^{n+1} = V_{A\gamma}^{\alpha\beta}\,\Omega^\gamma. \tag{12$_2$}$$

Полученные тензоры [6] V_I^{ij} и $V_A^{\alpha\beta}$ называются обращенными фундаментальными объектами второго порядка (ср. [7]) соответственно для m-поверхностей S_m^1 и S_m^2.

Так же, как в [7] получаем, что инварианты (10) удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$d\ln I' = -m(n-m)\,\omega_1^1 + 2(n-m)\,\omega_{i+1}^{i+1} - m\,\omega_I^I + I_i'\,\Omega^i;$$

$$d\ln I'' = -m(n-m)\,\omega_{n+1}^{n+1} + 2(n-m)\,\omega_\alpha^\alpha - m\omega_{A}^{A} + I_\alpha''\,\Omega^\alpha,$$

где

$$I_k' = V_I^{ij}\,\Lambda_{ijk}^I; \quad I_\gamma'' = V_{A}^{\alpha\beta}\,\Lambda_{\alpha\beta\gamma}^{A}.$$

Продолжая уравнения (12), получаем

$$\begin{aligned}\nabla V_{Ik}^{ij} &= V_I^{ij}\,\omega_{k+1}^1 + \delta_k^i\,V_I^{lj}\,\omega_{l+1}^1 + \delta_k^j\,V_I^{il}\,\omega_{l+1}^1 - \\ &- V_J^{ij}\,\Lambda_{lk}^J\,\omega_I^{l+1} - V_I^{lj}\,\Lambda_{lk}^J\,\omega_J^{i+1} - V_I^{il}\,\Lambda_{lk}^J\,\omega_J^{j+1} + V_{I,kl}^{ij}\,\Omega^l;\end{aligned} \tag{13$_1$}$$

$$\begin{aligned}\nabla V_{A\gamma}^{\alpha\beta} &= V_{A}^{\alpha\beta}\,\omega_\gamma^{n+1} + \delta_\gamma^\alpha\,V_{A}^{\alpha_1\beta}\,\omega_{\alpha_1}^{n+1} + \delta_\gamma^\beta\,V_{A}^{\alpha\alpha_1}\,\omega_{\alpha_1}^{n+1} - \\ &- V_B^{\alpha\beta}\,\Lambda_{\alpha_1\gamma}^B\,\omega_{A}^{\alpha_1} - V_{A}^{\alpha_1\beta}\,\Lambda_{\alpha_1\gamma}^B\,\omega_B^\alpha - V_{A}^{\alpha\alpha_1}\,\Lambda_{\alpha_1\gamma}^B\,\omega_B^\beta + V_{A\gamma\alpha_1}^{\alpha\beta}\,\Omega^{\alpha_1}.\end{aligned} \tag{13$_2$}$$

§ 3. Оснащение пары m-поверхностей

Одной из основных задач дифференциальной геометрии m-поверхности является построение инвариантного оснащения [9]. Обозначим через L_{2m+1} $(2m+1)$-мерную плоскость, натянутую на касательные m-плоскости обеих поверхностей пары.

Задача оснащения пары m-поверхностей сводится к нахождению $(n-2m-2)$-мерной плоскости L_{n-2m-2}, инвариантно присоединенной к паре m-поверхностей и не имеющей с $(2m+1)$-плоскостью L_{2m+1} ни одной общей точки. Заметим, что L_{2m+1} является касательным $(2m+1)$-мерным подпространством m-параметрического многообразия, элементом которого является прямая $A_1 A_{n+1}$, т. е. содержит прямую A_1 A_{n+1} и всю ее первую дифференциальную окрестность. Плоскость L_{n-2m-2} можно рассматривать как пересечение оснащающих плоскостей каждой из поверхностей пары.

Оснащающие плоскости поверхностей $\overset{1}{S}_m$ и $\overset{2}{S}_m$ мы можем задать соответственно точками

$$M_I = A_I + \nu_I^1 A_1 + \nu_I^i A_{i+1}; \tag{14$_1$}$$

$$M_{\rm A} = A_{\rm A} + \nu_{\rm A}^{n+1} A_{n+1} + \nu_{\rm A}^{\alpha} A_{\alpha}, \tag{14$_2$}$$

где величины (ν_I^1, ν_I^i) и $(\nu_{\rm A}^{n+1}, \nu_{\rm A}^{\alpha})$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla \nu_I^1 = -\nu_I^1 \omega_1^1 - \nu_I^i \omega_{i+1}^1 - \omega_I^1 + \nu_{Ii}^1 \Omega^i; \tag{15$_1$}$$

$$\nabla \nu_I^i = -\omega_I^{i+1} + \nu_{Ij}^i \Omega^j;$$

$$\nabla \nu_{\rm A}^{n+1} = -\nu_{\rm A}^{\alpha} \omega_{\alpha}^{n+1} - \omega_{\rm A}^{n+1} - \nu_{\rm A}^{n+1} \omega_{n+1}^{n+1} + \nu_{{\rm A}\alpha}^{n+1} \Omega^{\alpha}; \tag{15$_2$}$$

$$\nabla \nu_{\rm A}^{\alpha} = -\omega_{\rm A}^{\alpha} + \nu_{{\rm A}\beta}^{\alpha} \Omega^{\beta}.$$

Объект $(\nu_I^1, \nu_I^i)\{(\nu_{\rm A}^{n+1}, \nu_{\rm A}^{\alpha})\}$ определяет инвариантное оснащение поверхности $\overset{1}{S}_m (\overset{2}{S}_m)$. Компоненты $\nu_I^i (\nu_{\rm A}^{\alpha})$ объекта оснащения образуют самостоятельный подобъект, который определяет поле инвариантных $(n-m)$-мерных плоскостей таких, что плоскость, определяемая им, имеет с касательной плоскостью $\overset{1}{L}_m$ $(\overset{2}{L}_m)$ поверхности $\overset{1}{S}_m (\overset{2}{S}_m)$ только одну общую точку $A_1 (A_{n+1})$. Такое поле инвариантных плоскостей называется полем нормалей первого рода поверхности $\overset{1}{S}_m (\overset{2}{S}_m)$ (ср. [10]).

Нормаль первого рода поверхностей $\overset{1}{S}_m$ и $\overset{2}{S}_m$ мы можем задать соответственно уравнениями

$$x^{i+1} - \nu_I^i x^I = 0; \tag{16}$$

$$x^{\alpha} - \nu_{\rm A}^{\alpha} x^{\rm A} = 0, \tag{17}$$

а оснащающие плоскости поверхностей $\overset{1}{S}_m$ и $\overset{2}{S}_m$—соответственно уравнениями

$$x^1 - \nu_I^1 x^I = 0; \quad x^{i+1} - \nu_I^i x^I = 0; \tag{18}$$

$$x^{n+1} - \nu_{\rm A}^{n+1} x^{\rm A} = 0; \quad x^{\alpha} - \nu_{\rm A}^{\alpha} x^{\rm A} = 0. \tag{19}$$

Тогда $(n-2m-2)$-плоскость L_{n-2m-2} задается уравнениями (18), (19) а $(n-2m)$-плоскость L_{n-2m}, инвариантно присоединенная к паре и имеющая с $(2m+1)$-плоскостью L_{2m+1} общие точки A_1 и A_{n+1}, задается уравнениями (16), (17).

Нашей задачей будет являться охват объекта оснащения (ν^1_I, ν^i_I), $(\nu^{n+1}_A, \nu^\alpha_A)$ фундаментальным геометрическим объектом пары m-поверхностей.

§ 4. Объект оснащения пары m-поверхностей

Продолжая уравнения (6_2), (6_3), получаем

$$\nabla \Lambda^I_{ijk} = -2\Lambda^I_{ijk}\,\omega^1_1 + \frac{1}{2}\Lambda^J_{(ij}\,\Lambda^I_{|l|\,k)}\,\omega^{l+1}_J - \\ - \frac{1}{2}\Lambda^I_{(ij}\,\omega^1_{k)+1} + \Lambda^I_{ijkl}\,\Omega^l; \tag{20}$$

$$\nabla \Lambda^A_{\alpha\beta\gamma} = -2\Lambda^A_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^{n+1}_{n+1} + \frac{1}{2}\Lambda^B_{(\alpha\beta}\,\Lambda^A_{|\alpha_1|\,\gamma)}\,\omega^{\alpha_1}_B - \\ - \frac{1}{2}\Lambda^A_{(\alpha\beta}\,\omega^{n+1}_{\gamma)} + \Lambda^A_{\alpha\beta\gamma\alpha_1}\,\Omega^{\alpha_1}. \tag{21}$$

Положим

$$M^i_I = \frac{(2n-m)^2}{n(m+2)} V^{ij}_{Ij} + \Lambda^J_{jkl}\left(V^{jk}_I V^{il}_J + \frac{2n-m}{n(m+2)} V^{kl}_J V^{ji}_I\right). \tag{22}$$

Тогда в силу уравнений (6), (13), получаем

$$\nabla M^i_I = -K^{iJ}_{Ij}\,\omega^{j+1}_J + M^i_{Ij}\,\Omega^j, \tag{23}$$

где

$$K^{iJ}_{Ij} = \left[\frac{(2n-m)^2}{m+2} - m(n-m)\right]\delta^i_j\,\delta^J_I - 2\Lambda^J_{lk}\,\Lambda^L_{js}\,V^{sl}_J\,V^{ik}_L, \tag{24}$$

причем

$$\nabla K^{iJ}_{Ij} = K^{iJ}_{Ijk}\,\Omega^k. \tag{25}$$

Так же, как в [11], можно показать, что $\det\|K^{iJ}_{Ij}\| \neq 0$, и мы можем ввести обращенный тензор $\overset{*}{K}{}^{iJ}_{Ij}$

$$K^{iJ}_{Ij}\,\overset{*}{K}{}^{kI}_{Li} = \delta^k_j\,\delta^J_L\,; \quad K^{iJ}_{Ij}\,\overset{*}{K}{}^{jL}_{Jk} = \delta^i_k\,\delta^L_I\,, \tag{26}$$

компоненты которого удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \overset{*}{K}{}^{iJ}_{Ij} = \overset{*}{K}{}^{iJ}_{Ijk}\,\Omega^k. \tag{27}$$

Рассмотрим величины

$$l^j_I = M^i_J\,\overset{*}{K}{}^{jJ}_{Ii}, \tag{28}$$

охваченные фундаментальным геометрическим объектом третьего порядка. Из (22) и (23) получаем

$$\nabla l^j_I + \omega^{j+1}_I = l^j_{Ji}\,\Omega^i. \tag{29}$$

Сравнивая (29) с (15), видим, что квазитензор [6] l^j_I можно взять в качестве подобъекта оснащения ν^i_I.

Рассмотрим величины

$$l^1_i = \frac{2n-m}{(n-m)(m+2)}\Lambda^I_{ij}\,l^j_I - \frac{1}{(n-m)(m+2)} V^{lj}_{Ij}\,\Lambda^I_{il}\,. \tag{30}$$

В силу (5), (15), (29) имеем

$$\nabla l_i^1 + l_i^1 \omega_1^1 + \omega_{i+1}^1 = l_{ij}^1 \Omega^j . \qquad (31)$$

Следовательно, совокупность величин l_i^1 образует квазитензор, охваченный фундаментальным геометрическим объектом третьего порядка. Этот квазитензор определяет инвариантную $(m-1)$-плоскость L_{m-1}^1, принадлежащую касательной m-плоскости L_m^1 поверхности S_m^1 и не проходящую через точку A_1. Следуя [10], мы эту $(m-1)$-плоскость будем называть нормалью второго рода поверхности S_m^1. Эту нормаль второго рода можно задать либо точками

$$P_{i+1} = l_i^1 A_1 + A_{i+1}, \qquad (32)$$

либо уравнениями

$$x^1 - l_i^1 x^{i+1} = 0; \;\; x^I = 0 \qquad (33)$$

относительно локального репера R.

Продолжая уравнения (31), получаем

$$\nabla l_{ij}^1 = -2 l_{ij}^1 \omega_1^1 - l_i^1 \omega_{j+1}^1 - l_j^1 \omega_{i+1}^1 + + \Lambda_{ij}^I l_k^1 \omega_I^k - \Lambda_{ij}^I \omega_I^1 + l_{ijk}^1 \Omega^k. \qquad (34)$$

Рассмотрим совокупность величин

$$l_I^1 = \frac{1}{m} (V_I^{ij} l_{ij}^1 - V_I^{ij} l_i^1 \; l_j^1) + l_I^i \, l_i^1, \qquad (35)$$

удовлетворяющую следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\nabla l_I^1 = - l_I^1 \omega_1^1 - l_I^i \omega_{i+1}^1 - \omega_I^1 + l_{Ii}^1 \Omega^i . \qquad (36)$$

Сравнивая (29), (36) с (15_1), мы можем сделать вывод, что объект оснащения для m-поверхности S_m^1, охваченный фундаментальным геометрическим объектом четвертого порядка, имеет компоненты l_I^1 и l_I^i.

Используя объекты, построенные для m-поверхностей S_m^1 и S_m^2 и объект отображения A_i^α, найдем объект оснащения для m-поверхности S_m^1.

Рассмотрим совокупность величин

$$T_i = \overset{*}{A}{}_{\alpha i}^{j} A_j^\alpha + \frac{1}{2n-m} (V_I^{jk} \Lambda_{ijk}^I - V_\Lambda^{\alpha\beta} \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^\Lambda A_i^\gamma). \qquad (37)$$

В силу (5), (8), (12), (15) имеем

$$\nabla T_i = - T_i \omega_1^1 + \frac{m(n+1)}{2n-m} \omega_{i+1}^1 - \frac{m(n+1)}{2n-m} A_i^\alpha \omega_\alpha^{n+1} + T_{ij} \Omega^j, \qquad (38)$$

т. е. совокупность величин (A_i^α, T_i) образует геометрический объект.

Рассмотрим совокупность величин

$$l_\alpha^{n+1} = \frac{2n-m}{m(n+1)} T_i \overset{*}{A}{}_\alpha^i + \overset{*}{A}{}_\alpha^i l_i^1 , \qquad (39)$$

которая удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\nabla l_\alpha^{n+1} + l_\alpha^{n+1} \omega_{n+1}^{n+1} + \omega_\alpha^{n+1} = l_{\alpha\beta}^{n+1} \Omega^\beta . \qquad (40)$$

Следовательно, совокупность величин (39) образует квазитензор, который определяет $(m-1)$-мерную плоскость L_{m-1}^2, принадлежащую

m-плоскости L^2_m и не проходящую через точку A_{n+1}. Эту $(m-1)$-плоскость можно задать уравнениями

$$x^{n+1} - l^{n+1}_\alpha x^\alpha = 0; \; x^A = 0 \tag{41}$$

или точками

$$P_\alpha = l^{n+1}_\alpha A_{n+1} + A_\alpha. \tag{42}$$

Будем называть $(m-1)$-плоскость L^2_{m-1} нормалью второго рода m-поверхности S^2_m.

Продолжая уравнения (40), получаем

$$\nabla l^{n+1}_{\alpha\beta} = -2 l^{n+1}_{\alpha\beta} \omega^{n+1}_{n+1} - l^{n+1}_\alpha \omega^{n+1}_\beta - l^{n+1}_\beta \omega^{n+1}_\alpha + \\ + \Lambda^A_{\alpha\beta} l^{n+1}_\gamma \omega^\gamma_A - \Lambda^A_{\alpha\beta} \omega^{n+1}_A + l^{n+1}_{\alpha\beta\gamma} \Omega^\gamma. \tag{43}$$

Построим величины

$$l^\alpha_A = \frac{1}{m} (\Lambda^l_{ij} \overset{*}{A}{}^i_\gamma l^k_l - \overset{*}{A}{}^k_{\gamma j}) V^{\gamma\beta}_A \overset{*}{A}{}^j_\beta A^\alpha_k + \frac{2(2n-m)}{m^2(n+1)} V^{\alpha\beta}_A \overset{*}{A}{}^l_\beta T_l, \tag{44}$$

которые образуют квазитензор, так как

$$\nabla l^\alpha_A + \omega^\alpha_A = l^\alpha_{A\beta} \Omega^\beta. \tag{45}$$

Рассмотрим совокупность величин

$$l^{n+1}_A = \frac{1}{m} V^{\alpha\beta}_A (l^{n+1}_{\alpha\beta} - l^{n+1}_\alpha l^{n+1}_\beta) + l^{n+1}_\alpha l^\alpha_A, \tag{46}$$

которая удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\nabla l^{n+1}_A + l^{n+1}_A \omega^{n+1}_{n+1} + l^\alpha_A \omega^{n+1}_\alpha + \omega^{n+1}_A = l^{n+1}_{A\alpha} \Omega^\alpha. \tag{47}$$

Сравнивая (45), 46) с (15_2), мы видим, что геометрический объект (l^{n+1}_A, l^α_A) является объектом оснащения поверхности S^2_m.

Таким образом, $(n-2m)$-плоскость L_{n-2m} задается в локальных координатах уравнениями

$$x^{i+1} - l^i_l x^l = 0; \; x^\alpha - l^\alpha_A x^A = 0, \tag{48}$$

а $(2m-1)$-плоскость L_{2m-1}, принадлежащая $(2m+1)$-плоскости L_{2m+1} и не проходящая через точки A_1 и A_{n+1}, задается в локальных координатах уравнениями

$$x^1 - l^1_k x^{k+1} = 0; \; x^{n+1} - l^{n+1}_\alpha x^\alpha = 0; \; x^\xi = 0 \quad (\xi = m+2, \ldots, n-m) \tag{49}$$

или точками

$$P_{i+1} = l^1_i A_1 + A_{i+1}; \; P_\alpha = l^{n+1}_\alpha A_{n+1} + A_\alpha. \tag{50}$$

$(n-2m-2)$-плоскость L_{n-2m-2} задается в локальных координатах уравнениями

$$x^1 - l^1_l x^l = 0; \; x^{n+1} - l^{n+1}_A x^A = 0; \; x^{i+1} - l^i_l x^l = 0; \\ x^\alpha - l^\alpha_A x^A = 0. \tag{51}$$

§ 5. Соприкасающиеся гиперквадрики m-поверхностей S^1_m и S^2_m пары

Присоединим к m-поверхности S^1_m поле многообразий второго порядка, заданных уравнениями (ср. [7])

$$C^I_{uv}\, x^u x^v = 0 \quad (u,\ v = 1,\ 2, \ldots,\ n+1). \tag{52}$$

Потребуем, чтобы каждое из многообразий (52), присоединенное к точке A_1 поверхности S^1_m имело с поверхностью S^1_m в этой точке соприкосновение второго порядка; тогда получаем

$$C^I_{11} = C^I_{1,\,i+1} = 0;\ C^I_{i+1,\,j+1} = -\Lambda^J_{ij}\, C^I_{1J}. \tag{53}$$

Пронормируем коэффициенты в (52) так, чтобы

$$C^I_{1J} = \delta^I_J, \tag{54}$$

тогда уравнения поля многообразий (52) запишутся в виде

$$\Lambda^I_{ij}\, x^{i+1} x^{j+1} - 2x^1 x^I + 2C^I_{i+1,\,J}\, x^{i+1} x^J + C^I_{JL}\, x^J x^L = 0. \tag{55}$$

Аналогично для m-поверхности S^2_m получаем

$$\Lambda^A_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta - 2x^{n+1} x^A + 2C^A_{\alpha B}\, x^\alpha x^B + C^A_{BB_1}\, x^B x^{B_1} = 0. \tag{56}$$

Свернув (55) и (56) соответственно с тензорами

$$b_I = l^i_{Ii} + m l^1_I - \Lambda^J_{ij}\, l^i_J\, l^j_I; \tag{57}$$

$$b_A = l^\alpha_{A\alpha} + m l^{n+1}_A - \Lambda^B_{\alpha\beta}\, l^\alpha_B\, l^\beta_A, \tag{58}$$

получаем поля инвариантно присоединенных к поверхности S^1_m и S^2_m гиперквадрик, имеющих с поверхностями S^1_m и S^2_m соприкосновение второго порядка

$$a_{ij}\, x^{i+1} x^{j+1} - 2b_I\, x^1 x^I + 2b_I\, C^I_{i+1,\,J}\, x^{i+1} x^J + b_I\, C^I_{JL}\, x^J x^L = 0; \tag{59}$$

$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta - 2b_A\, x^{n+1} x^A + 2b_A\, C^A_{\alpha B} x^\alpha x^B + b_A\, C^A_{BB_1}\, x^B x^{B_1} = 0, \tag{60}$$

где

$$a_{ij} = b_I\, \Lambda^I_{ij};\ a_{\alpha\beta} = b_A\, \Lambda^A_{\alpha\beta}. \tag{61}$$

Положив

$$\begin{aligned} C^I_{i+1,\,J} &= \Lambda^I_{ij}\, l^j_J - \delta^I_J\, l^1_i; \\ C^I_{JL} &= \Lambda^I_{ij}\, l^i_J\, l^j_L - l^1_{(J}\, \delta^I_{L)} + C^I_{i+1,\,(J}\, l^i_{L)}; \\ C^A_{\alpha B} &= \Lambda^A_{\alpha\beta}\, l^\beta_B - \delta^A_B\, l^{n+1}_\alpha; \\ C^A_{BB_1} &= \Lambda^A_{\alpha\beta}\, l^\alpha_B\, l^\beta_{B_1} - l^{n+1}_{(B}\, \delta^A_{B_1)} + C^A_{\alpha(B}\, l^\alpha_{B_1)}, \end{aligned} \tag{62}$$

из (59) и (60) получаем единственные соприкасающиеся гиперквадрики поверхностей S^1_m и S^2_m, соответственно.

Эти гиперквадрики обладают следующим свойством: поляра первой (второй) нормали поверхности S^1_m (S^2_m) относительно гиперквадрики (59) ((60)) проходит через вторую (первую) нормаль поверхности S^1_m (S^2_m). Следовательно, между нормалями поверхности S^1_m (S^2_m) гиперквадрика (59) ((60)) устанавливает квазиполярное соответствие [11].

Из уравнений (59), (60) сразу следует, что тензоры b_I и b_A определяют инвариантные гиперплоскости, задаваемые соответственно уравнениями

$$b_I x^I = 0; \tag{63}$$

$$b_A x^A = 0, \tag{64}$$

которые проходят через касательные m-плоскости L^1_m и L^2_m и являются полярами точек A_1 и A_{n+1} относительно гиперквадрик (59) и (60), соответственно.

Полярами точек A_{n+1} и A_1 относительно гиперквадрик (59) и (60) являются соответственно гиперплоскости

$$b_{n+1}\, x^1 - b_I C^I_{i+1,\,n+1}\, x^{i+1} - b_I C^I_{n+1,\,J}\, x^J = 0; \tag{65}$$

$$b_1 x^{n+1} - b_A\, C^A_{\alpha 1}\, x^\alpha - b_A\, C^A_{1B}\, x^B = 0. \tag{66}$$

Отсюда сразу получаем, что геометрические объекты $(b_{n+1},\ b_I C^I_{i+1,\,n+1})$ и $(b_1,\ b_A\, C^A_{\alpha 1})$ определяют две инвариантные $(m-1)$-плоскости, принадлежащие касательным m-плоскостям L^1_m и L^2_m и являющиеся пересечениями гиперплоскостей (65) и (66) с L^1_m и L^2_m соответственно. Уравнения этих $(m-1)$-плоскостей имеют соответственно вид

$$b_{n+1}\, x^1 - b_I C^I_{i+1,\,n+1}\, x^{i+1} = 0;\ x^I = 0; \tag{67}$$

$$b_1 x^{n+1} - b_A C^A_{\alpha 1}\, x^\alpha = 0;\ x^A = 0. \tag{68}$$

Находя характеристики гиперплоскостей (63) и (64), получаем соответственно

$$a_{ij}\, x^{i+1} - b_{Ij}\, x^I = 0;\ b_I x^I = 0; \tag{69}$$

$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha - b_{A\beta}\, x^A = 0;\ b_A\, x^A = 0, \tag{70}$$

т. е. они определяются объектами $(\Lambda^I_{ij},\ b_I,\ b_{Ij})$ и $(\Lambda^A_{\alpha\beta},\ b_A,\ b_{A\alpha})$ соответственно.

В m-плоскостях L^1_m и L^2_m тензоры a_{ij}, $a_{\alpha\beta}$ и квазитензоры l^1_i, l^{n+1}_α определяют соответственно квадрики

$$(a_{ij} + l^1_i\, l^1_j)\, x^{i+1}\, x^{j+1} - 2 l^1_i\, x^{i+1}\, x^1 + (x^1)^2 = 0; \tag{71}$$
$$x^I = 0;$$

$$(a_{\alpha\beta} + l^{n+1}_\alpha\, l^{n+1}_\beta)\, x^\alpha x^\beta - 2 l^{n+1}_\alpha\, x^\alpha x^{n+1} + (x^{n+1})^2 = 0; \tag{72}$$
$$x^A = 0.$$

Полярой точки $A_1\,(A_{n+1})$ относительно квадрики (71) ((72)) является вторая нормаль m-поверхности $S^1_m\,(S^2_m)$.

§ 6. Некоторые проективные преобразования линейных подпространств, ассоциированных с парой m-поверхностей

Для упрощения дальнейших вычислений воспользуемся репером C, который определим следующим образом:

$$\begin{aligned} &C_1 = A_1;\ C_{i+1} = A_{i+1} + l^1_i A_1; \\ &C_I = A_I + l^1_I\, A_1 + l^i_I\, A_{i+1}, \end{aligned} \tag{73}$$

где 1-формы Θ^η_ξ из деривационных формул $dC_\xi = \Theta^\eta_\xi C_\eta$ связаны с 1-формами ω^η_ξ следующими соотношениями $(\xi,\ \eta = 1, \ldots,\ n+1)$:

$$\begin{aligned} &\Theta^1_1 = \omega^1_1 - l^1_i\, \Omega^i;\ \Theta^{i+1}_1 = \Omega^i;\ \Theta^I_1 = 0; \\ &\Theta^1_{i+1} = (l^1_{ij} - l^1_i\, l^1_j - \Lambda^I_{ij}\, l^1_I + \Lambda^I_{ij}\, l^k_I\, l^1_k)\Omega^j; \\ &\Theta^{j+1}_{i+1} = \omega^{j+1}_{i+1} - l^j_I \omega^I_{i+1} + l^1_i \Omega^j,\ \Theta^I_{i+1} = \omega^I_{i+1}; \\ &\Theta^1_I = (l^1_{Ij} - l^1_I\, l^1_j - l^1_i\, l^i_{Ij})\, \Omega^j + (l^1_i\, l^j_I\, l^i_J - l^j_I\, l^1_J)\, \omega^J_{j+1}; \\ &\Theta^{i+1}_I = l^1_I\, \Omega^i + l^i_{Ij}\, \Omega^j - l^j_I\, l^i_J\, \omega^J_{j+1},\ \Theta^J_I = \omega^J_I + l^i_I \omega^J_{i+1}. \end{aligned} \tag{74}$$

1. Рассмотрим уравнение 1-семейства

$$\Omega^i = t^{i+1}\,\Theta;\ D\Theta = \Theta \wedge \Theta_1;$$
$$dt^{i+1} - t^{i+1}\,\omega_1^1 + t^{j+1}\,\omega_{j+1}^{i+1} = t_j^{i+1}\Omega^j. \tag{75}$$

Ему на m-поверхности $S_m^1\,(S_m^2)$ соответствует линия, описываемая точкой $A_1\,(A_{n+1})$.

Точка $X = x^{i+1}\,C_{i+1}$, принадлежащая второй нормали L_{m-1}^1 m-поверхности S_m^1, вдоль (75) описывает линию с касательной $TX\,(t)$. Имеем

$$\frac{dX}{\Theta} = (\ldots)^i\,C_{i+1} + x^{i+1}\,\{l_{ij}^1 - l_i^1\,l_j^1 - \Lambda_{ij}^I\,l_I^1 + \\ + \Lambda_{ij}^I\,l_I^k\,l_k^1\}\,t^{j+1}\,C_1 + x^{i+1}\,\Lambda_{ij}^I\,t^{j+1}\,C_I. \tag{76}$$

Линейное пространство, натянутое на L_{m-1}^1 и $TX\,(t)$, пересекается с L_{n-m}^1 в точке

$$Y = (L_{m-1}^1,\ TX\,(t)) \cap L_{n-m}^1 = y^1 C_1 + y^I C_I, \tag{77}$$

где

$$y^1 = (l_{ij}^1 - l_i^1\,l_j^1 - \Lambda_{ij}^I\,l_I^1 + \Lambda_{ij}^I\,l_I^k\,l_k^1)\,x^{i+1}\,t^{j+1},$$
$$y^I = \Lambda_{ij}^I\,x^{i+1}\,t^{j+1}. \tag{78}$$

Вдоль (75) точка Y описывает линию с касательной $TY(t)$. Имеем

$$\frac{dY}{\Theta} = (\ldots)\,C_1 + (\ldots)^I\,C_I + \{y^1 t^{j+1} + y^I\,(l_I^1\,\delta_k^j + \\ + l_{Ik}^j - \Lambda_{ik}^J\,l_I^i\,l_J^j)\,t^{k+1}\}\,C_{j+1}. \tag{79}$$

Линейное пространство, натянутое на L_{n-m}^1 и $TY\,(t)$, пересекается с L_{m-1}^1 в точке

$$X^* = (L_{n-m}^1,\ TY\,(t)) \cap L_{m-1}^1 = \overset{*}{x}{}^{i+1}\,C_{i+1}, \tag{80}$$

где

$$\overset{*}{x}{}^{l+1} = \{\delta_j^l\,(l_{kp}^1 - l_k^1\,l_p^1 + \Lambda_{kp}^I\,l_I^q\,l_q^1) + \Lambda_{kp}^I\,(l_{Ij}^l - \Lambda_{qj}^J\,l_I^q\,l_J^l)\}\,t^{j+1}\,t^{p+1}\,x^{k+1}. \tag{81}$$

Соотношения (81) определяют проективное преобразование $(m-1)$--плоскости L_{m-1}^1 в себя, которое определяется матрицей (Π_{j+1}^{i+1}), где

$$\Pi_{j+1}^{i+1} = \{\delta_p^i\,(l_{jq}^1 - l_j^1\,l_q^1 + \Lambda_{jq}^I\,l_I^k\,l_k^1) + \Lambda_{jq}^I\,(l_{Ip}^i - \Lambda_{kp}^J\,l_I^k\,l_J^i)\}\,t^{p+1}\,t^{q+1}. \tag{82}$$

Это преобразование будет преобразованием W [12], если $\Pi_{i+1}^{i+1} = 0$, т. е.

$$\{l_{ij}^1 - l_j^1\,l_i^1 + \Lambda_{ij}^I\,l_I^k\,l_k^1 + \Lambda_{pj}^I\,(l_{Ii}^p - \Lambda_{ki}^J\,l_I^k\,l_J^p)\}\,t^{i+1}\,t^{j+1} = 0. \tag{83}$$

Таким образом, в $(m-1)$-плоскости L_{m-1}^1 мы получаем квадрику, каждой точке которой соответствует преобразование W плоскости L_{m-1}^1 в себя. Эту квадрику в репере R можно задать уравнениями

$$\{l_{ij}^1 - l_i^1\,l_j^1 + \Lambda_{ij}^I\,l_I^k\,l_k^1 + \Lambda_{pj}^I\,(l_{Ii}^p - \Lambda_{ki}^J\,l_I^k\,l_J^p)\}\,x^{i+1}\,x^{j+1} = 0;$$
$$x^I = 0;\ x^1 - l_i^1\,x^{i+1} = 0. \tag{84}$$

Квадрике (84) в m-плоскости L_m^1 соответствует конус

$$\{l_{ij}^1 - l_i^1\,l_j^1 + \Lambda_{ij}^I\,l_I^k\,l_k^1 + \Lambda_{pj}^I\,(l_{Ii}^p - \Lambda_{ki}^J\,l_I^k\,l_J^p)\}\,x^{i+1}\,x^{j+1} = 0;$$
$$x^I = 0. \tag{85_1}$$

Аналогично в m-плоскости L^2_m получаем конус

$$\{l^{n+1}_{\alpha\beta} - l^{n+1}_{\alpha}\, l^{n+1}_{\beta} + \Lambda^A_{\alpha\beta}\, l^{\gamma}_A\, l^{n+1}_{\gamma} + \Lambda^A_{\gamma\beta}\,(l^{\gamma}_{A\alpha} - \Lambda^B_{\beta_1\alpha}\, l^{\beta_1}_A\, l^{\gamma}_B)\}\, x^{\alpha} x^{\beta} = 0;\ \ x^A = 0. \tag{85$_2$}$$

2. Пусть дана точка $X = x^I C_I$, принадлежащая оснащающей плоскости L^1_{n-m-1} m-поверхности S^1_m. Имеем вдоль (75)

$$\frac{dX}{\Theta} = (\ldots)^I C_I + x^I \{l^1_{Ij} - l^1_I\, l^1_j - l^1_i\, l^i_{Ij} + \Lambda^J_{kj}\,(l^1_i\, l^k_I\, l^i_J -$$

$$- l^k_I\, l^1_J)\}\, t^{j+1} C_1 + x^I\,(l^1_I\, \delta^i_j + l^i_{Ij} - \Lambda^J_{kj}\, l^k_I\, l^i_J)\, t^{j+1} C_{i+1}.$$

Пространство, натянутое на L^1_{n-m-1} и $TX(t)$, пересекается с L^1_m в точке

$$Y = (L_{n-m-1},\ TX(t)) \cap L^1_m = y^1 C_1 + y^{i+1} C_{i+1}, \tag{86}$$

где

$$y^1 = \{l^1_{Ij} - l^1_j\, l^1_I - l^1_i\, l^i_{Ij} + \Lambda^J_{kj}\,(l^1_i\, l^k_I\, l^i_J - l^k_I\, l^1_J)\}\, x^I t^{j+1};$$

$$y^{i+1} = (l^1_I\, \delta^i_j + l^i_{Ij} - \Lambda^J_{kj}\, l^k_I\, l^i_J)\, x^I t^{j+1}.$$

Из

$$\frac{dY}{\Theta} = (\ldots)\, C_1 + (\ldots)^i C_{i+1} + y^{i+1}\, \Lambda^J_{ij}\, t^{j+1} C_J$$

получаем, что

$$X^* = (L^1_m,\ TY(t)) \cap L^1_{n-m-1} = \overset{*}{x}{}^I C_I, \tag{87}$$

где

$$\overset{*}{x}{}^I = \Lambda^I_{ip}\,(l^1_J\, \delta^i_j + l^i_{Jj} - \Lambda^L_{kj}\, l^k_J\, l^i_L)\, t^{j+1}\, t^{p+1}\, x^J \tag{88}$$

Следовательно, мы получаем преобразование (88) $(n-m-1)$-плоскости L^1_{n-m-1} в себя, которое определяется матрицей (Π^J_I), где

$$\Pi^J_I = \Lambda^J_{ij}\,(l^1_I\, \delta^i_k + l^i_{Ik} - \Lambda^L_{pk}\, l^p_I\, l^i_L)\, t^{k+1}\, t^{j+1}. \tag{89}$$

Если преобразование (88) является преобразованием W, то

$$\Lambda^I_{ij}\,(l^1_I\, \delta^i_k + l^i_{Jk} - \Lambda^J_{pk}\, l^p_I\, l^i_J)\, t^{k+1}\, t^{j+1} = 0. \tag{90}$$

Таким образом, мы получаем в m-плоскости L^1_m конус

$$\Lambda^I_{ij}\,(l^1_I\, \delta^i_k + l^i_{Ik} - \Lambda^J_{pk}\, l^p_I\, l^i_J)\, x^{j+1}\, x^{k+1} = 0;$$

$$x^I = 0, \tag{91$_1$}$$

образующим которого соответствуют 1-семейства (75), дающие преобразования W $(n-m-1)$-плоскости L^1_{n-m-1} в себя.

Аналогично в m-плоскости L^2_m получаем конус

$$\Lambda^A_{\alpha\beta}\,(l^{n+1}_A\, \delta^{\alpha}_{\gamma} + l^{\alpha}_{A\gamma} - \Lambda^B_{\gamma\alpha_1}\, l^{\alpha_1}_A\, l^{\alpha}_B)\, x^{\beta} x^{\gamma} = 0;$$

$$x^A = 0, \tag{91$_2$}$$

образующим которого соответствуют преобразования W $(n-m-1)$-плоскости L^2_{n-m-1} в себя.

3. Рассмотрим точку $X = x^1 C_1 + x^I C_I$, принадлежащую $(n-m)$-плоскости L^1_{n-m}. Имеем вдоль (75)

$$\frac{dX}{\Theta} = (\ldots)\, C_1 + (\ldots)^I C_I + \{x^1 t^{i+1} + x^I\,(l^1_I\, \delta^i_j +$$

$$+ l^i_{Ij} - \Lambda^J_{jk}\, l^k_I\, l^i_J)\, t^{j+1}\}\, C_{i+1}, \tag{92}$$

тогда

$$Y = (L^1_{n-m},\ TX(t)) \cap L^1_{m-1} = y^{i+1} C_{i+1}, \tag{93}$$

где

$$y^{i+1} = x^1 t^{i+1} + x^I (l_I^1 \delta_j^i + l_{Ij}^i - \Lambda_{jk}^J l_I^k l_J^i) t^{j+1}.$$

Из

$$\frac{dY}{\Theta} = (\ldots)^i C_{i+1} + y^{i+1} (l_{ij}^1 - l_i^1 l_j^1 - \Lambda_{ij}^I l_I^1 + \Lambda_{ij}^I l_I^k l_k^1) t^{j+1} C_1 + y^{i+1} \Lambda_{ij}^I t^{j+1} C_I \tag{94}$$

получаем

$$X^* = (L_{m-1}^1,\ TX(t)) \cap L_{n-m}^1 = \overset{*}{x}{}^1 C_1 + \overset{*}{x}{}^I C_I, \tag{95}$$

где

$$\overset{*}{x}{}^1 = (l_{ij}^1 - l_i^1 l_j^1 - \Lambda_{ij}^I l_I^1 + \Lambda_{ij}^I l_I^k l_k^1) t^{i+1} t^{j+1} x^1 + (l_I^1 \delta_k^i + l_{Ik}^i - \Lambda_{jk}^J l_I^j l_J^i)(l_{ip}^1 - l_i^1 l_p^1 - \Lambda_{ip}^J l_J^1 + \Lambda_{ip}^J l_J^k l_k^1) t^{k+1} t^{p+1} x^I, \tag{96$_1$}$$

$$\overset{*}{x}{}^I = \Lambda_{ij}^I t^{i+1} t^{j+1} x^1 + \Lambda_{ij}^I (l_J^1 \delta_k^i + l_{Jk}^i - \Lambda_{pk}^L l_J^p l_L^i) t^{j+1} t^{k+1} x^J.$$

Следовательно, (96$_1$) определяет проективное преобразование $(n-m)$-плоскости L_{n-m}^1 в себя, задаваемое матрицей $(\Pi_{\bar I}^{\bar J})$ ($\bar I, \bar J = 1, m+2, \ldots, n+1$), где

$$\Pi_1^1 = (l_{ij}^1 - l_i^1 l_j^1 - \Lambda_{ij}^I l_I^1 + \Lambda_{ij}^I l_I^k l_k^1) t^{i+1} t^{j+1};$$
$$\Pi_I^1 = (l_I^1 \delta_j^i + l_{Ij}^i - \Lambda_{jk}^J l_I^k l_J^i)(l_{ip}^1 - l_i^1 l_p^1 - \Lambda_{ip}^J l_J^1 + \Lambda_{ip}^J l_J^k l_k^1) t^{j+1} t^{p+1},\quad \Pi_1^I = \Lambda_{ij}^I t^{i+1} t^{j+1};$$
$$\Pi_I^J = \Lambda_{ij}^J (l_I^1 \delta_k^i + l_{Ik}^i - \Lambda_{pk}^L l_I^p l_L^i) t^{j+1} t^{k+1}. \tag{97}$$

Это преобразование будет преобразованием W, если

$$\{l_{ij}^1 - l_i^1 l_j^1 + \Lambda_{ij}^I l_I^k l_k^1 + \Lambda_{ik}^I (l_{Ij}^k - \Lambda_{pj}^J l_I^p l_J^k)\} t^{i+1} t^{j+1} = 0$$

Следовательно, мы получаем в m-плоскости L_m^1 конус

$$\{l_{ij}^1 - l_i^1 l_j^1 + \Lambda_{ij}^I l_I^k l_k^1 + \Lambda_{ik}^I (l_{Ij}^k - \Lambda_{pj}^J l_I^p l_J^k)\} x^{i+1} x^{j+1} = 0;\quad x^I = 0, \tag{98$_1$}$$

образующим которого соответствуют 1-семейства (75), дающие преобразования W $(n-m)$-плоскости L_{n-m}^1 в себя. Аналогично получается преобразование $(n-m)$-плоскости L_{n-m}^2 в себя:

$$\overset{*}{x}{}^{n+1} = (l_{\alpha\beta}^{n+1} - l_\alpha^{n+1} l_\beta^{n+1} - \Lambda_{\alpha\beta}^A l_A^{n+1} + \Lambda_{\alpha\beta}^A l_A^\gamma l_\gamma^{n+1}) t^\alpha t^\beta x^{n+1} + (l_A^{n+1} \delta_\gamma^\alpha + l_{A\gamma}^\alpha - \Lambda_{\gamma\beta}^B l_A^\beta l_B^\alpha)(l_{\alpha\alpha_1}^{n+1} - l_\alpha^{n+1} l_{\alpha_1}^{n+1} + \Lambda_{\alpha\alpha_1}^B l_B^{n+1} + \Lambda_{\alpha\alpha_1}^B l_B^{\beta_1} l_{\beta_1}^{n+1}) t^\gamma t^{\alpha_1} x^A;$$

$$\overset{*}{x}{}^A = \Lambda_{\alpha\beta}^A t^\alpha t^\beta x^{n+1} + \Lambda_{\alpha\beta}^A (l_B^{n+1} \delta_\gamma^\alpha + l_{B\gamma}^\alpha - \Lambda_{\gamma\alpha_1}^{B_1} l_B^{\alpha_1} l_{B_1}^\alpha) t^\beta t^\gamma x^B \tag{98$_2$}$$

и конус

$$\{l_{\alpha\beta}^{n+1} - l_\alpha^{n+1} l_\beta^{n+1} + \Lambda_{\alpha\beta}^A l_A^\gamma l_\gamma^{n+1} + \Lambda_{\gamma\alpha}^A (l_{A\beta}^\gamma - \Lambda_{\alpha_1\beta}^B l_A^{\alpha_1} l_B^\gamma)\} x^\alpha x^\beta = 0;\ x^A = 0 \tag{98$_3$}$$

в m-плоскости L_m^2, образующим которого соответствуют преобразования W $(n-m)$-плоскости L_{n-m}^2 в себя.

4. Возьмем точку $X = x^1 C_1 + x^{i+1} C_{i+1}$, принадлежащую касательной m-плоскости m-поверхности S_m^1. Имеем вдоль (75)

$$\frac{dX}{\Theta} = (\ldots.) C_1 + (\ldots)^i C_{i+1} + x^{i+1} \Lambda_{ij}^I t^{j+1} C_I, \tag{99}$$

тогда

$$Y = (L_m^1,\ TX(t)) \bigcap L_{n-m-1}^1 = y^I C_I, \tag{100}$$

где

$$y^I = \Lambda_{ij}^I x^{i+1} t^{j+1}.$$

Из

$$\frac{dY}{\Theta} = (\dots)^I C_I + y^I \{l_{Ij}^1 - l_I^1 l_j^1 - l_i^1 l_{Ij}^i + \Lambda_{pj}^J (l_i^1 l_I^p l_J^i - l_I^p l_J^1)\} t^{j+1} C_1 + \\ + y^I (l_I^1 \delta_j^i + l_{Ij}^i - \Lambda_{pj}^J l_I^p l_J^i) t^{j+1} C_{i+1} \tag{101}$$

получаем

$$\overset{*}{X} = (L_{n-m}^1,\ TY(t)) \bigcap L_m^1 = \overset{*}{x}{}^1 C_1 + \overset{*}{x}{}^{i+1} C_{i+1}, \tag{102}$$

где

$$\overset{*}{x}{}^1 = \{l_{Ij}^1 - l_I^1 l_j^1 - l_i^1 l_{Ij}^i + \Lambda_{pj}^J (l_i^1 l_I^p l_J^i - l_I^p l_J^1)\} \Lambda_{kq}^I t^{j+1} t^{q+1} x^{k+1}; \\ \overset{*}{x}{}^{i+1} = \Lambda_{kj}^I (l_I^1 \delta_p^i + l_{Ip}^i - \Lambda_{pq}^J l_I^q l_J^i) t^{p+1} t^{j+1} x^{k+1}. \tag{103_1}$$

Следовательно, (103_1) определяет проективное преобразование m-плоскости L_m^1 в себя, которое задается матрицей (Π_η^ξ) $(\xi, \eta = 1, 2, \dots, m)$, где

$$\Pi_{k+1}^1 = \{l_{Ij}^1 - l_I^1 l_j^1 - l_i^I l_{Ij}^i + \Lambda_{pj}^J (l_I^p l_i^1 l_J^i - l_I^p l_J^1)\} \Lambda_{kq}^I t^{j+1} t^{q+1}; \\ \Pi_{k+1}^{i+1} = \Lambda_{kj}^I (l_I^1 \delta_p^i + l_{Ip}^i - \Lambda_{pq}^J l_I^q l_J^i) t^{p+1} t^{j+1};\ \Pi_1^1 = \Pi_1^{i+1} = 0. \tag{104}$$

Рассмотрим преобразование, для которого $\Pi_{i+1}^{i+1} = 0$ (такое преобразование будем называть преобразованием W'); тогда

$$\Lambda_{ij}^I (l_I^1 \delta_p^i + l_{Ip}^i - l_I^k l_J^i \Lambda_{kp}^J) t^{p+1} t^{j+1} = 0. \tag{105}$$

Следовательно, мы получаем в m-плоскости L_m^1 конус

$$\Lambda_{pj}^I (l_I^1 \delta_i^p + l_{Ii}^p - l_I^k l_J^p \Lambda_{ik}^J) x^{i+1} x^{j+1} = 0; \\ x^I = 0, \tag{106_1}$$

образующим которого соответствуют 1-семейства, дающие преобразования W' m-плоскости L_m^1 в себя. Аналогично получается проективное преобразование m-плоскости L_m^2 в себя

$$\overset{*}{x}{}^{n+1} = \{l_{A\alpha}^{n+1} - l_A^{n+1} l_\alpha^{n+1} - l_\beta^{n+1} l_{A\alpha}^\beta + \Lambda_{\beta\alpha}^B (l_\gamma^{n+1} l_A^\beta l_B^\gamma - \\ - l_A^\beta l_B^{n+1})\} \Lambda_{\beta\gamma}^A t^\alpha t^\beta x^\gamma; \\ \overset{*}{x}{}^\alpha = \Lambda_{\beta\gamma}^A (l_A^{n+1} \delta_{\alpha_1}^\alpha + l_{A\alpha_1}^\alpha - \Lambda_{\alpha_1\beta_1}^B l_A^{\beta_1} l_B^\alpha) t^{\alpha_1} t^\gamma x^\beta \tag{103_2}$$

и конус

$$\Lambda_{\alpha\beta}^A (l_A^{n+1} \delta_\gamma^\alpha + l_{A\gamma}^\alpha - \Lambda_{\gamma\alpha_1}^B l_A^{\alpha_1} l_B^\alpha) x^\gamma x^\beta = 0; \\ x^A = 0 \tag{106_2}$$

в m-плоскости L_m^2, образующим которого соответствуют преобразования W' m-плоскости L_m^2 в себя.

Теорема. Если преобразование (81) $((96_1))$ является преобразованием W плоскости $L_{m-1}^1 (L_{n-m}^1)$ в себя, то и преобразование (96_1) ((81)) является преобразованием W плоскости $L_{n-m}^1 (L_{m-1}^1)$ в себя. Если преобразование (88) является преобразованием W плоскости L_{n-m-1}^1 в себя, то преобразование (103_1) является преобразованием W' плоскости L_m^1 в себя и наоборот, если преобразование (103_1) является преобразованием W' плоскости L_m^1, то (88) является преобразованием W плоскости L_{n-m-1}^1.

Доказательство непосредственно следует из (105_1), (98_1) и (91_1), (106_1).

Аналогичная теорема имеет место и для m-поверхности S_m^2.

Замечание. Каждому из конусов (85_1), (91_1), (99_1) или (106_1) плоскости L_m^1, образующие которых дают преобразование W или W', соответствует в силу $\Omega^\alpha = A_i^\alpha \Omega^i$ в плоскости L_m^2 также некоторый конус, определяющий соответствующие преобразования плоскостей, присоединенных к m-поверхности S_m^2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болодурин В. С. О точечных соответствиях между многомерными поверхностями проективных пространств.— «Изв. высших учебных заведений. Математика», 1975, 3, 11—23.

2. Фиников С. П. О сети двойных линий в точечном соответствии двух поверхностей.— Матем. сб., 1939, 6 (46), 475—560.

3. Ермолаев Л. С. Классификация взаимно однозначных точечных соответствий аналитических поверхностей. — «ДАН СССР», 31, 5, 425—427.

4. Гольдберг В. В. Пара поверхностей в точечном соответствии, сохраняющем линии Дарбу. — «Докл. на научн. конференциях». Ярослав. пед. ин-т, 1964, 2, 3, 21—24.

5. Вересова Е. Е. О паре многомерных поверхностей, находящихся в точечном асимптотическом соответствии.— «Уч. зап. МГПИ им. В. И. Ленина», 271, 1967, 55—66.

6. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.— «Тр. Моск. матем. об-ва», 1953, 2, 275—382.

7. Остиану Н. М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства.— «Тр. геом. семинара», 1, М., ВИНИТИ АН СССР, 1966, 239—264.

8. Лаптев Г. Ф. Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности.— «ДАН СССР», 1959, 126, 3, 490—493.

9. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей.— «Итоги науки. Геометрия». 1963. ВИНИТИ АН СССР, М., 1965, с. 5—64.

10. Норден А. П. Пространства аффинной связности. ГИТТЛ, М.-Л., 1950.

11. Остиану Н. М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II.— «Тр. геом. семинара», 3, М., ВИНИТИ АН СССР, 1971, 95—114.

12. Ивлев Е. Т. К геометрической интерпретации операции свертывания некоторых тензоров.— Материалы итоговой научной конф. по матем. и механ. за 1970 г. 1, Томск, 1970, 121—123.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 18 1977

Л. З. КРУГЛЯКОВ, А. Г. МИЗИН, Е. С. НИКИТИНА

КОМПЛЕКСЫ ИНДЕКСА ОДИН ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ P_5

Введение

Комплексом индекса один двумерных плоскостей L в пятимерном проективном пространстве P_5 называется [1] 4-семейство $L(4)$. Как показано в работе [2], такие семейства обладают соответствием (обобщающим одно из свойств комплекса прямых трехмерного пространства — см., например, [3]) между точками плоскости L и гиперплоскостями, проходящими через L. Однако в плоскости L комплекса $L(4)$ имеются в общем случае особые точки [5], для которых однозначность этого соответствия нарушается.

В данной работе устанавливается соответствие между особыми точками и фокальными класса нуль пфаффовыми подмногообразиями $L(\Psi_2)$ [4], вводится понятие торсальной класса один прямой, доказывается, что их три и что на каждой из них не более двух особых точек. Далее исследуются введенные в [5] точки прикосновения плоскости комплекса с подмногообразиями $L(\Psi_1)$ и $L(\Psi_2)$. Обозначения и терминология соответствуют работе [4].

§ 1. Некоторые предварительные сведения

К каждой плоскости L комплекса $L(4)$ в пространстве P_5 присоединим подвижной репер $\{A_I\}$ $(I, J, K = 0, \dots, 5)$ так, что его вершины A_i $(i = 0, 1, 2)$ лежат в плоскости L. Пусть, как и в [4], формы $\omega^\varkappa$ $(\varkappa = 0, 1, 2, 3)$ образуют базис форм ω_i^p $(p = 3, 4, 5)$, входящих в деривационные формулы

$$dA_I = \omega_I^J A_J \tag{1.1}$$

подвижного репера, т. е.

$$\omega_i^p = a_{i\varkappa}^p \omega^\varkappa. \tag{1.2}$$

Зададим подмногообразие $L(\Psi_1)$ комплекса $L(4)$ в виде

$$\omega^0 : \omega^1 : \omega^2 : \omega^3 = \lambda^0 : \lambda^1 : \lambda^2 : \lambda^3, \tag{1.3}$$

а пфаффово подмногообразие $L(\Psi_b)$ $(b = 2, 3)$ — в виде

$$\omega^\nu = b_\tau^\nu \omega^\tau \quad (\tau = 0, \dots, b-1;\ \nu = b, \dots, 3). \tag{1.4}$$

Характеристика $ChL(\Psi_1)$ плоскости L подмногообразия $L(\Psi_1)$ находится из системы

$$x^p = 0; \quad x^i a_{i\varkappa}^p \lambda^\varkappa = 0, \tag{1.5}$$

а касательное подпространство $TL(\Psi_1)$ — из системы

$$x_i = 0; \quad a^p_{i\varkappa} \lambda^\varkappa x_p = 0, \tag{1.6}$$

где x^i — точечные, а x_i — тангенциальные координаты точки X и гиперплоскости Γ соответственно. Если

$$\det \| a^p_{i\varkappa} \lambda^\varkappa \| = 0, \tag{1.7}$$

то системы (1.5) и (1.6) одновременно имеют ненулевые решения, определяющие точку $X \subset L$ и гиперплоскость $\Gamma \supset L$. Если для точек $X(x^i)$ и гиперплоскостей $\Gamma(x_p)$

$$\mathrm{R} \| x^i a^p_{i\varkappa} \| = \mathrm{R} \| a^p_{i\varkappa} x_p \| = 3, \tag{1.8}$$

то между такими точками $X \subset L$ и гиперплоскостями $\Gamma \supset L$ устанавливается взаимнооднозначное соответствие, которое в [2] называется основным соответствием. Будем обозначать соответствующие элементы через $\Gamma(X)$ и $X(\Gamma)$, а подмногообразие, для которого точка X является характеристикой, — через $L(\Psi_1^X)$.

Однако существуют точки $\overline{X}$, для которых нарушается условие (1.8). Такие точки называются в [5] *особыми* точками плоскости L комплекса (для внутренне порожденного многообразия X (2, 4) они являются особыми точками класса два [4], а все остальные точки — особыми класса один). Из (1.5) следует, что каждая особая точка $\overline{X}$ является характеристикой $ChL(\overline{\Psi}_2)$ для некоторого подмногообразия $L(\overline{\Psi}_2)$. Гиперплоскость $\Gamma(\overline{X})$ не определена (каждому $L(\Psi_1) \subset L(\overline{\Psi}_2)$ соответствует своя гиперплоскость).

Заметим, что всюду далее исключается частный случай комплексов $L(4)$, обладающих торсами, т. е. случай, когда ранг матрицы определителя в (1.7) равен единице, т. е. предполагается, что

$$\mathrm{R} \| a^p_{i\varkappa} \lambda^\varkappa \| = 2. \tag{1.9}$$

§ 2. Особые точки и фокальные класса нуль подмногообразия

Пусть $\overline{X} = x^i A_i$ — особая точка плоскости L. В общем случае в каждой плоскости L комплекса имеется не более 3^2 особых точек $\overline{X}$ так как для них

$$\mathrm{R} \| x^i a^p_{i\varkappa} \| = 2. \tag{2.1}$$

В силу (2.1) касательное подпространство внутренне порожденного многообразия $\overline{X}(2, 4)$ в особой точке $\overline{X}$ является гиперплоскостью, которую обозначим $\overline{\Gamma}$ и назовем особой гиперплоскостью (для внешне порожденного многообразия $\Gamma(2, 4)$ она является особой порядка два [4]). Ее уравнения имеют вид

$$x_i = 0; \quad x^i a^p_{i\varkappa} x_p = 0, \tag{2.2}$$

причем выполняется условие

$$\mathrm{R} \| x_p a^p_{i\varkappa} \| = 2. \tag{2.3}$$

В силу следствия из теоремы 1 работы [4] через плоскость L проходит конечное число (не более 3^4) фокальных класса нуль подмногообразий $L(\Psi_2)$ комплекса, которые будем обозначать через $L(\Psi_2^*)$.

Теорема 1. Между особыми точками $\overline{X}$ и фокальными класса нуль подмногообразиями $L(\Psi_2^*)$ имеет место взаимнооднозначное соответствие, определенное условием

$$T\overline{X}(2,4) \equiv TL(\Psi_2^*).$$

Доказательство. Особые гиперплоскости $\overline{\Gamma}$ находятся из условия (2.3). Уравнения касательного подпространства $\Gamma^* = TL(\Psi_2^*)$ для подмногообразия $L(\Psi_2^*)$, заданного системой (1.4), имеют вид

$$x_i = 0; \quad (a_{i\tau}^p + b_\tau^\nu a_{i\nu}^p)\, x_p = 0. \tag{2.4}$$

Совокупность всех гиперплоскостей Γ^* удовлетворяет [4] условиям

$$\mathrm{R}\, \| \, x_p a_{i\tau}^p \ \ x_p a_{i\nu}^p \, \| = 2; \tag{2.5}$$

$$\mathrm{R}\, \| \, x_p a_{i\nu}^p \, \| = 2 \tag{2.6}$$

$\tau = 0,1$; $\nu = 2,3$; τ — фиксировано). Поэтому совокупность гиперплоскостей Γ^* совпадает с совокупностью особых гиперплоскостей $\overline{\Gamma}$. Теперь покажем, что указанное в теореме соответствие взаимно однозначно. Пусть $\overline{X} = ChL(\overline{\Psi}_2)$. Совместим вершину A_0 с точкой $\overline{X}$, зададим подмногообразие $L(\overline{\Psi}_2)$ уравнениями $\omega^2 = \omega^3 = 0$ и поместим вершины A_3 и A_4 в подпространство $TA_0(2,4)$. Тогда из уравнений (2.2) получаем

$$a_{0\tau}^p = a_{0\nu}^p = 0 \quad (\tau = 0,1;\ \nu = 2,3). \tag{2.7}$$

Требование $TL(\Psi_2^*) = (L, A_3, A_4)$ в силу (2.4) и (2.7) дает

$$a_{1\tau}^5 + b_\tau^\nu a_{1\nu}^5 = 0; \quad a_{2\tau}^5 + b_\tau^\nu a_{2\nu}^5 = 0. \tag{2.8}$$

При $\tau = 0$ и $\tau = 1$ из (2.5), (2.6) и (2.7) следует, что система (2.8) имеет единственное в общем случае ненулевое решение относительно b_τ^ν, определяющее искомое $L(\Psi_2^*)$, причем $L(\Psi_2^*) \neq L(\overline{\Psi}_2)$.

Пусть теперь подмногообразие $L(\Psi_2^*)$ задано уравнениями $\omega^0 = \omega^1 = 0$. Поместим вершины A_4 и A_5 в подпространство $TL(\Psi_2^*)$. Тогда

$$a_{i\nu}^3 = 0 \ (\nu = 2,\ 3). \tag{2.9}$$

Требование $T\overline{X}(2.\ 4) \equiv (L, A_4, A_5)$ в силу (2.2) и (2.9) приводит к условиям

$$x^i a_{i\tau}^3 = 0 \ (\tau = 0,\ 1). \tag{2.10}$$

Система (2.10) в силу (2.3) имеет единственное ненулевое решение, определяющее искомую точку $\overline{X}$. Теорема доказана.

В § 3 будет показано, что на каждой плоскости комплекса имеется не более шести особых точек.

Теорема 2. Совокупность всех подмногообразий $L(\Psi_1^X)$, соответствующих неособым точкам X прямой, проходящей через две особые точки, есть подмногообразие $L(\Psi_2)$.

Доказательство. Совместим вершины A_j ($j = 0,\ 1$) с особыми точками и зададим подмногообразие $L(\overline{\Psi}_2^j)$, для которого $A_j = ChL(\overline{\Psi}_2^j)$ уравнениями $\omega^j = \omega^{j+2} = 0$. Тогда

$$a_{01}^p = a_{03}^p = a_{10}^p = a_{12}^p = 0.$$

Теперь для точки $X = x^j A_j$ уравнения (1.5) примут вид

$$x^0 (a_{00}^p \lambda^0 + a_{02}^p \lambda^2) + x^1 (a_{11}^p \lambda^1 + a_{13}^p \lambda^3) = 0.$$

Исключая из них $x^0 : x^1$ для неособых точек $(x^0 x^1 \neq 0)$ прямой $A_0 A_1$, получаем

$$\Delta_2 \lambda^0 - \Delta_0 \lambda^2 = 0; \qquad \Delta_3 \lambda^1 - \Delta_1 \lambda^3 = 0, \tag{2.11}$$

где

$$\Delta_0 = |a_{11}^p \, a_{02}^p \, a_{13}^p|; \quad \Delta_1 = |a_{00}^p \, a_{02}^p \, a_{13}^p|;$$

$$\Delta_2 = |a_{00}^p \, a_{11}^p \, a_{13}^p|; \quad \Delta_3 = |a_{00}^p \, a_{11}^p \, a_{02}^p|.$$

В силу (1.3) система (2.11) эквивалентна двум уравнениям Пфаффа.

§ 3. Торсальные прямые класса один

В работе [6] прямая L_1 названа *торсальной* относительно подмногообразия $L(\Psi_2)$, если касательное 4-подпространство $TX(2, \Psi_2)$ во всех неособых точках X прямой L_1 одно и то же. Из теоремы 2 этой же работы следует, что любая прямая, проходящая через особую точку $\overline{X}$, является торсальной относительно подмногообразия $L(\overline{\Psi}_2)$, для которого $\overline{X} = ChL(\overline{\Psi}_2)$.

Определение. Прямая $L_1^* \subset L$ называется *торсальной прямой класса один*, если существуют такие $L(\Psi_2)$, что касательное подпространство $TL_1^*(2, \Psi_2)$ трехмерно.

В этом случае подмногообразие $L(\Psi_2)$ будем обозначать $L(\widetilde{\Psi}_2)$.

Теорема 3. В общем случае в плоскости L комплекса имеется конечное число торсальных прямых класса один.

Доказательство. Зададим прямую $L_1 \subset L$ уравнениями

$$x^2 = h_j^2 \, x^j \ (j = 0, 1), \tag{3.1}$$

а подмногообразие $L(\Psi_2)$ уравнениями (1.4). Тогда она будет торсальной класса один, если подпространство $TL_1(2, \Psi_2)$ имеет размерность, равную трем, т. е. [4]

$$\mathrm{R}_p \, \| (bh)_{j\tau}^p \| = 1, \ (\tau = 0,1; \nu = 2,3; j = 0,1), \tag{3.2}$$

где

$$(bh)_{j\tau}^p = a_{j\tau}^p + b_\tau^\nu a_{j\nu}^p + h_j^2 a_{2\tau}^p + b_\tau^\nu h_j^2 a_{2\nu}^p.$$

Матрица в (3.2) имеет размеры 3×4. Поэтому условие (3.2) дает систему из шести уравнений второй степени относительно шести неизвестных h_j^2 и b_τ^ν, которая в общем случае имеет конечное число решений.

Теорема 4. На торсальной прямой L_1^* класса один имеется не более двух особых точек, а для всех остальных точек X этой прямой гиперплоскости $\Gamma(X)$ образуют пучок с вершиной $l_3 = TL_1^*(2, \widetilde{\Psi}_2)$.

Доказательство. Поместим точки A_0 и A_1 на прямую L_1^*, а точку A_3 в подпространство $TL_1^*(2, \widetilde{\Psi}_2)$ и зададим подмногообразие $L(\widetilde{\Psi}_2)$ уравнениями $\omega^2 = \omega^3 = 0$. Тогда

$$a_{j\tau}^4 = a_{j\tau}^5 = 0 \ (j = 0, 1; \ \tau = 0, 1). \tag{3.4}$$

Условие (2.1) для нахождения особых точек прямой $A_0 A_1$ примет вид

$$\mathrm{R} \begin{Vmatrix} x^j a_{j0}^3 & x^j a_{j1}^3 & x^j a_{j2}^3 & x^j a_{j3}^3 \\ 0 & 0 & x^j a_{j2}^4 & x^j a_{j3}^4 \\ 0 & 0 & x^j a_{j2}^5 & x^j a_{j3}^5 \end{Vmatrix} = 2. \tag{3.5}$$

Так как система $x^j a^3_{j\tau} = 0$ не имеет решений в силу (1.9), то условие (3.5) выполняется только для точек, удовлетворяющих уравнению

$$x^j a^{[4}_{j2} \cdot x^j a^{5]}_{j3} = 0,$$

которое имеет не более двух действительных решений.

Найдем теперь гиперплоскости $\Gamma(X)$ для точек $X \subset L^*_1$. Уравнения (1.5) для подмногообразия $L(\Psi^X_1)$ примут вид

$$x^j a^3_{j\varkappa} \lambda^\varkappa = 0; \quad x^j a^4_{j\nu} \lambda^\nu = x^j a^5_{j\nu} \lambda^\nu = 0.$$

Эта система для неособых точек эквивалентна следующей:

$$\lambda^2 = \lambda^3 = 0; \quad x^j a^3_{j\tau} \lambda^\tau = 0. \tag{3.6}$$

Гиперплоскость $\Gamma(X) = TL(\Psi^X_1)$ в силу (3.4) и (3.6) имеет вид

$$(L,\ A_3,\ a^s_{20} \lambda^0 A_s + a^s_{21} \lambda^1 A_s) \ (s = 4,\ 5), \tag{3.7}$$

т. е. содержит 3-плоскость $TL^*_1(2, \widetilde{\Psi}_2)$ для всех $X \subset L^*_1$. Теорема доказана.

Следствие. Подмногообразие $L(\widetilde{\Psi}_2)$, соответствующее торсальной прямой L^*_1, совпадает с подмногообразием $L(\Psi_2)$, состоящим из всех $L(\Psi^X_1)$.

Определение. Подмногообразие $L(\Psi_2)$ называется (ср. [7]) *торсальным класса один относительно прямой* L_1, если для всех $L(\Psi_1) \subset L(\Psi_2)$ 3-плоскость $TL_1(2, \Psi_1)$ одна и та же.

Теорема 5. Подмногообразие $L(\widetilde{\Psi}_2)$, соответствующее торсальной класса один прямой L^*_1, является торсальным класса один относительно L^*_1.

Доказательство. В силу (3.4) и (3.6) для каждого подмногообразия $L(\Psi^X_1)$ имеем $TL^*_1(2, \Psi^X_1) = (L, A_3)$. Теорема доказана.

Теорема 6. Прямая L_1 является торсальной класса один тогда и только тогда, когда для любых неособых точек X и Y прямой L_1 3-плоскость $TY(2, \Psi^X_1)$ одна и та же. При этом все $L(\Psi^X_1)$ образуют торсальное относительно L_1 подмногообразие $L(\Psi_2)$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 5. Пусть теперь 3-плоскость $TY(2, \Psi^X_1)$ — одна и та же для всех $X,\ Y \in L_1$. Поместим вершины A_0 и A_1 на прямую L_1, вершину A_3 — в 3-плоскость $TY(2, \Psi^X_1)$ и зададим подмногообразие $L(\Psi^X_1)$ уравнениями (1.3). Тогда из уравнений касательного подпространства $TX(2, \Psi_1)$

$$x^i a^p_{i\varkappa} \lambda^\varkappa x_p = 0; \quad x_i = 0 \tag{3.8}$$

получаем

$$a^4_{j\varkappa} \lambda^\varkappa = a^5_{j\varkappa} \lambda^\varkappa = 0.$$

Так как $X = ChL(\Psi^X_1)$, то в силу (1.5) получаем

$$x^j a^3_{j\varkappa} \lambda^\varkappa = 0. \tag{3.9}$$

Из (3.9) следует, что совокупность всех $L(\Psi^X_1)$ образует $L(\widetilde{\Psi}_2)$ и что $TY(2, \widetilde{\Psi}_2)$ одно и то же для всех $Y \subset L_1$. Теорема доказана.

Следствие. Характеристическим свойством торсальной класса один прямой L^*_1 является совпадение подпространств $TX(2, \Psi^Y_1)$ и $TY(2, \Psi^X_1)$ хотя бы для одной пары неособых точек $X,\ Y \in L^*_1$.

Произведем частичную канонизацию репера. Выберем за базисное формы $\omega_1^3 = \omega^0$, $\omega_0^3 = \omega^1$, $\omega_0^4 = \omega^2$, $\omega_0^5 = \omega^3$. Тогда A_0 — заведомо неособая точка и в (1.2) имеем

$$a_{01}^3 = a_{02}^4 = a_{03}^5 = a_{10}^3 = 1;$$

$$a_{02}^3 = a_{03}^3 = a_{00}^3 = a_{01}^4 = a_{03}^4 = a_{00}^4 = a_{01}^5 = a_{00}^5 = a_{11}^3 = a_{02}^5 = a_{12}^3 = a_{13}^3 = 0. \tag{3.10}$$

Дифференцируя (1.2) внешним образом с учетом (3.10) и применяя лемму Картана, обычным путем [3] можно найти вариации величин a_{ik}^p при изменении вторичных параметров и произвести фиксацию

$$a_{11}^4 = a_{11}^5 = a_{22}^p = a_{10}^4 = a_{10}^5 = a_{20}^3 = a_{20}^5 = a_{12}^4 = a_{21}^3 = a_{21}^4 = 0. \tag{3.11}$$

Эта фиксация возможна только при условиях

$$a_{23}^3 \neq 0; \quad a_{13}^4 \neq 0; \quad a_{12}^5 a_{20}^4 + a_{21}^5 \neq 0. \tag{3.12}$$

При этом обращаются в нуль вторичные формы

$$\pi_0^1,\ \pi_0^2,\ \pi_1^0,\ \pi_1^2,\ \pi_2^0,\ \pi_2^1,\ \pi_3^4,\ \pi_3^5,\ \pi_4^3,\ \pi_4^5,\ \pi_5^3,\ \pi_5^4.$$

Произведенная фиксация геометрически означает, что прямые A_0A_1, A_0A_2 и A_1A_2 являются торсальными класса один, а подмногообразия

$$\omega^2 = \omega^3 = 0; \quad \omega^1 = \omega^3 = 0; \quad \omega^0 = \omega^3 = 0 \tag{3.13}$$

являются торсальными для этих прямых соответственно. Обозначим их $L(\widetilde{\Psi}_2^{01})$, $L(\widetilde{\Psi}_2^{02})$ и $L(\widetilde{\Psi}_2^{12})$. Вершины пучков гиперплоскостей $\Gamma(X)$ для точек X прямых A_0A_1, A_0A_2 и A_1A_2 совпадают, соответственно, с 3-плоскостями (L, A_3), (L, A_4), (L, A_5) и $\Gamma(A_0) = (L, A_3, A_4)$, $\Gamma(A_1) = (L, A_3, A_5)$, $\Gamma(A_2) = (L, A_4, A_5)$. Для продолжения фиксации выпишем вариации:

$$\begin{aligned} &\delta a_{20}^4 + a_{20}^4(\pi_1^1 - \pi_2^2 - \pi_3^3 + \pi_4^4) = 0; && \delta a_{23}^4 + a_{23}^4(\pi_0^0 + \pi_4^4 - \pi_2^2 - \pi_5^5) = 0; \\ &\delta a_{12}^5 + a_{12}^5(\pi_0^0 - \pi_1^1 - \pi_4^4 + \pi_5^5) = 0; && \delta a_{23}^5 + a_{23}^5(\pi_0^0 - \pi_2^2) = 0; \\ &\delta a_{21}^5 + a_{21}^5(\pi_0^0 - \pi_2^2 - \pi_3^3 + \pi_5^5) = 0; && \delta a_{13}^5 + a_{13}^5(\pi_0^0 - \pi_1^1) = 0; \\ &\delta a_{23}^3 + a_{23}^3(\pi_0^0 - \pi_2^2 - \pi_5^5 + \pi_3^3) = 0; && \delta a_{13}^4 + a_{13}^4(\pi_0^0 - \pi_1^1 - \pi_5^5 + \pi_4^4) = 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Проведем нормирование

$$a_{12}^5 = a_{21}^5 = a_{23}^3 = a_{13}^4 = 1; \quad \pi_0^0 = \pi_1^1 = \pi_2^2; \quad \pi_3^3 = \pi_4^4 = \pi_5^5. \tag{3.15}$$

Тогда величины

$$a_{13}^5 = a; \quad a_{23}^4 = b; \quad a_{23}^5 = c; \quad a_{20}^4 = e \neq -1 \tag{3.16}$$

станут абсолютными инвариантами. Теперь основные соотношения (1.2) для комплекса запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\omega_1^4 = \omega_2^3 = \omega^3; \quad \omega_1^5 = \omega^2 + a\omega^3; \\ &\omega_2^4 = e\omega^0 + b\omega^3; \quad \omega_2^5 = \omega^1 + c\omega^3. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Нормировкой (3.15) исключается случай, когда две из трех точек A_i — особые, а условием $e \neq -1$ — случай, когда имеется ∞^1 особых точек.

Далее репером R^* называется репер, который получается при некотором (произвольном) завершении проведенной канонизации. Оговорка „в общем случае" будет означать выполнение условия (1.9) и исключение случаев (3.12).

Теорема 7. В каждой плоскости комплекса в общем случае имеется не более шести особых точек.

Доказательство. В терминах репера R^* матрица $\| x^i a^p_{i\varkappa} \|$ примет вид

$$\left\| \begin{matrix} x^1 & x^0 & 0 & x^2 \\ ex^2 & 0 & x^0 & x^1 + bx^2 \\ 0 & x^2 & x^1 & x^0 + ax^1 + cx^2 \end{matrix} \right\|. \tag{3.18}$$

Из (2.1) следует равенство нулю минора

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^0 & 0 \\ ex^2 & 0 & x^0 \\ 0 & x^2 & x^1 \end{vmatrix} = -(1+e)\, x^0 x^1 x^2 = 0,$$

то есть в силу $e \neq -1$

$$x^0\, x^1\, x^2 = 0,$$

откуда следует, что все особые точки находятся на координатных прямых L^*_i. В силу теоремы 4 их будет не более $2 \times 3 = 6$. Теорема доказана.

Обозначим особые точки через $\overline{X}_I$ $(I = 0, \ldots, 5)$, а подмногообразия, для которых они являются характеристиками — $L(\overline{\Psi}{}^I_2)$. Подставляя в (3.18) $x^2 = 0$, $x^1 = 0$, $x^0 = 0$, в силу (2.1) получаем, что особые точки $\overline{X}_j$ $(j = 0, 1)$, $\overline{X}_t$ $(t = 2, 3)$, $\overline{X}_s$ $(s = 4, 5)$ удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$x^2 = 0;\ (x^0)^2 + ax^0x^1 - (x^1)^2 = 0; \tag{3.19}$$

$$x^1 = 0;\ (x^0)^2 + cx^0x^2 - (x^2)^2 = 0; \tag{3.20}$$

$$x^0 = 0;\ (x^1)^2 + bx^1x^2 - e\,(x^2)^2 = 0. \tag{3.21}$$

Подмногообразия $L(\overline{\Psi}{}^j_2)$, $L(\overline{\Psi}{}^t_2)$ и $L(\overline{\Psi}{}^s_2)$ задаются уравнениями

$$\lambda^2 + \alpha_j \lambda^3 = \lambda^1 + \alpha_j \lambda^0 = 0; \tag{3.22}$$

$$\lambda^1 + \gamma_t \lambda^3 = \lambda^2 + \gamma_t\,(b\lambda^3 + e\lambda^0) = 0; \tag{3.23}$$

$$\lambda^1 + \beta_s\,(\lambda^2 + a\lambda^3) + c\lambda^3 = \lambda^3 + \beta_s \lambda^0 = 0, \tag{3.24}$$

где α_j, γ_t, β_s — корни уравнений (3.19), (3.20), (3.21) соответственно.

§ 4. Основное соответствие комплекса. Единственность тройки торсальных прямых класса один

Из системы (1.5) при условиях (1.8) в терминах репера R^* получаем уравнение подмногообразия $L(\Psi^X_1)$ в виде

$$\begin{aligned} \lambda^0 : \lambda^1 : \lambda^2 : \lambda^3 = x^0 \{(x^0)^2 + ax^0x^1 + cx^0x^2 - (x^2)^2 - (x^1)^2 - \\ - bx^1x^2\} : - x^1\,(x^0)^2 + ax^0x^1 + cx^0x^2 + e\,(x^2)^2 - (x^1)^2 - \\ - bx^1x^2\} : x^2\,\{e\,(x^2)^2 - e\,(x^0)^2 - aex^0x^1 - cex^0x^2 - (x^1)^2 - \\ - bx^1x^2\} : (1+e)\, x^0x^1x^2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Подставляя (4.1) в (1.6), получаем

$$
\begin{aligned}
x_i &= 0;\\
x_3 &= -x^2\{e^2(x^0)^4 + e^2(x^2)^4 + (x^1)^4 + ae(e-1)(x^0)^3x^1 + 2ce^2(x^0)^3x^2 +\\
&\quad + a(e-1)x^0(x^1)^3 - 2ce^2(x^2)^3x^0 - (1+e^2+a^2e)(x^0)^2(x^1)^2 - 2bex^1(x^2)^3 +\\
&\quad + 2b(x^1)^3x^2 + e^2(c^2-2)(x^0)^2(x^2)^2 + (b^2-2e)(x^1)^2(x^2)^2 + (2be - ace +\\
&\quad + ace^2)(x^0)^2x^1x^2 + (abe + 2ce - ab)x^0(x^1)^2x^2 +\\
&\quad + (2bce + ae - ae^2)x^0x^1(x^2)^2\};\\
x_4 &= x^1\{-(x^0)^4 - (x^1)^4 - e^2(x^2)^4 - 2a(x^0)^3x^1 + c(e-1)(x^0)^3x^2 +\\
&\quad + (2-a^2)(x^0)^2(x^1)^2 + (1+e+c^2e)(x^0)^2(x^2)^2 + 2ax^0(x^1)^3 +\\
&\quad + ce(e-1)x^0(x^2)^3 - 2b(x^1)^3x^2 + (2e-b^2)(x^1)^2(x^2)^2 +\\
&\quad + (2b + ace - ac)(x^0)^2x^1x^2 + (2ab + c - ce)x^0(x^1)^2x^2 +\\
&\quad + 2bex^1(x^2)^3 + (bc - 2ae - bce)x^0x^1(x^2)^2\};\\
x_5 &= -x^0\{e(x^0)^4 + e(x^2)^4 + e(x^1)^4 + 2ae(x^0)^3x^1 + 2ec(x^0)^3x^2 -\\
&\quad - b(1-e)x^1(x^2)^3 + b(e-1)x^2(x^1)^3 - 2ecx^0(x^2)^3 - 2aex^0(x^1)^3 +\\
&\quad + e(a^2-2)(x^0)^2(x^1)^2 + (c^2-2)e(x^0)^2(x^2)^2 - (1+e^2+b^2)(x^1)^2(x^2)^2 +\\
&\quad + (b - eb + 2ace)(x^0)^2x^1x^2 + (ab - abe - 2ce)x^0(x^1)^2x^2 +\\
&\quad + (bc - bce - 2ae)x^0x^1(x^2)^2\}.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Отсюда следует, что неособым точкам координатных прямых соответствуют гиперплоскости

$$
(L,\ A_3,\ ex^0A_4 - x^1A_5),\quad (L,\ A_4,\ ex^2A_5 - x^0A_3),
$$
$$
(L,\ A_5,\ x^1A_3 - x^2A_4). \tag{4.3}
$$

Определение. Основное соответствие, распространенное с помощью формул (4.3) на особые точки, будем называть *расширенным основным соответствием.*

Дадим геометрическую характеристику гиперплоскостей $\Gamma(\overline{X})$. Особая точка $\overline{X}$ является характеристикой для всех $L(\Psi_1) \subset L(\overline{\Psi}_2)$. Среди всех таких $L(\Psi_1)$ имеется единственное $L(\overline{\Psi}_1)$, принадлежащее подмногообразию $L(\widetilde{\Psi}_2)$ (см., например, (3.9)), соответствующему торсальной прямой, содержащей эту особую точку. Назовем подмногообразие $L(\overline{\Psi}_1)$ *основным подмногообразием*, соответствующим точке $\overline{X}$.

Из (3.22) — (3.24) и (3.13) получаем, что основные подмногообразия $L(\overline{\Psi}{}_1^j)$, $L(\overline{\Psi}{}_1^t)$ и $L(\overline{\Psi}{}_1^s)$ задаются соответственно уравнениями

$$
\lambda^1 + \alpha_j\lambda^0 = \lambda^2 = \lambda^3 = 0; \tag{4.4}
$$
$$
\lambda^2 + \gamma_t e\lambda^0 = \lambda^1 = \lambda^3 = 0; \tag{4.5}
$$
$$
\lambda^1 + \beta_s\lambda^2 = \lambda^0 = \lambda^3 = 0. \tag{4.6}
$$

Отсюда и из (1.6) следует, что $TL(\overline{\Psi}{}_1^I) = \Gamma(\overline{X}_I)$.

Теорема 6′. Особые точки $\overline{X}_I$ и $\overline{X}_J$ торсальной класса один прямой характеризуются условием

$$
T\overline{X}_I(2,\ \overline{\Psi}{}_1^I) \equiv T\overline{X}_J(2,\ \overline{\Psi}{}_1^I)\ \ (I \neq J). \tag{4.7}
$$

Доказательство получается непосредственной проверкой.

Теорема 8. В каждой плоскости L комплекса в общем случае имеется единственная тройка торсальных класса один прямых.

Доказательство. В силу теоремы 4 торсальные класса один прямые следует искать среди 15 прямых, проходящих через пары особых точек. Для доказательства теоремы достаточно проверить условие (4.7). Из (3.19), (3.21), (3.22) и (3.24) находим

$$T\overline{X}_j(2, \overline{\Psi}_1^s) = (L, A_4 - \beta_s A_3 + \alpha_j A_5); \tag{4.8}$$

$$T\overline{X}_s(2, \overline{\Psi}_1^j) = (L, eA_4 + \beta_s A_3 - \alpha_j A_5). \tag{4.9}$$

Так как $e \neq -1$, то 3-плоскости (4.8) и (4.9) не совпадают, и прямые $(\overline{X}_j \overline{X}_s)$ в силу теоремы 6′ не являются торсальными класса один. Аналогично проверяется условие (4.7) и для остальных 8 прямых. Таким образом, из 15 прямых 12 условиям теоремы 6′ не удовлетворяют, а остальные три стали торсальными класса один при построении репера R^*. Теорема доказана.

§ 5. Точки прикосновения подмногообразия $L(\Psi_1)$

Пусть $X = ChL(\Psi_1^X)$ и подмногообразие $L(\Psi_1)$ задается уравнениями (1.3) при

$$\lambda^x = \lambda_0^x. \tag{5.1}$$

По определению из [5] точка $X \subset L$ является *точкой прикосновения* $L(\Psi_1)$ с плоскостью L комплекса, если $TX(2, \Psi_1) \subset \Gamma(X) = TL(\Psi_1^X)$ или в силу (1.6) и (3.8)

$$x^i a_{i x}^p \lambda_0^x = c^j a_{j x}^p \lambda^x \quad (j = 0, 1), \tag{5.2}$$

где λ^x определяются по формулам (4.1). Три уравнения (5.2) имеют решение относительно c^j только при условии

$$\begin{aligned} &\lambda_0^0 (x^1 x_3 + e x^2 x_4) + \lambda_0^1 (x^0 x_3 + x^2 x_5) + \\ &+ \lambda_0^2 (x^0 x_4 + x^1 x_5) + \lambda_0^3 [x^2 x_3 + (x^1 + b x^2) x_4 + \\ &+ (x^0 + a x^1 + c x^2) x_5] = 0, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где значения x_3, x_4, x_5 взяты из (4.2). Таким образом, доказана

Теорема 9. Совокупность всех точек прикосновения подмногообразия $L(\Psi_1)$ в общем случае есть кривая шестого порядка.

Обозначим эту кривую через $K^6(\Psi_1)$.

Следствие. Если $L(\Psi_1^X)$ — фокальное подмногообразие, то точка X принадлежит кривой $K^6(\Psi_1^X)$.

Теорема 10. Каждая особая точка $\overline{X}$ является двукратной точкой прикосновения для любого подмногообразия $L(\Psi_1)$.

Доказательство. Рассмотрим прямую $L_1 \subset L$, проходящую через особую точку, например, $\overline{X}_0(\alpha, 1, 0)$ и точку A_2. Пусть $X = t^1\overline{X}_0 + t^2 A_2$ — текущая точка этой прямой $\left(\text{здесь } \alpha = \dfrac{\sqrt{a^2+4} - a}{2}\right)$. Тогда тангенциальные координаты гиперплоскости $\Gamma(X)$ примут вид

$$\begin{aligned} x_3 &= (t^2)^2 F_3(t^1, t^2); \\ x_4 &= (t^2)^2 F_4(t^1, t^2); \\ x_5 &= (t^2)^2 F_5(t^1, t^2), \end{aligned} \tag{5.4}$$

где F_p — многочлены третьей степени относительно t^1, t^2. Внося (5.4) в (5.3), получаем

$$(t^2)^2 F(t^1, t^2) = 0, \tag{5.5}$$

где $F(t^1, t^2)$ — многочлен четвертой степени относительно t^1, t^2. Теорема доказана.

Следствие. Если подмногообразие $L(\Psi_1)$ имеет характеристику X, принадлежащую прямой L_1^*, то любая точка этой прямой является точкой прикосновения.

Действительно, если X принадлежит L_1^*, то в силу теоремы 4 подпространство $TY(2, \Psi_1^X) \equiv l_3$, где $Y \subset L_1^*$ и все $\Gamma(Y)$ проходят через l_3. Поэтому $TY(2, \Psi_1^X) \subset \Gamma(Y)$ при любых Y.

Теорема 11. Кривая $K^6(\Psi_1^i)$ для подмногообразий $L(\Psi_1^i)$, соответствующих точкам A_i пересечения двух торсальных класса один прямых, распадается на эти прямые и кривую четвертого порядка, для которой особые точки третьей торсальной прямой являются двойными точками.

Доказательство. Из (5.3) следует, что для подмногообразия $L(\Psi_1^0)$ точки прикосновения удовлетворяют уравнению

$$x^1 x_3 + e x^2 x_4 = 0,$$

или в силу (4.2)

$$x^1 x^2 \{[(x^1)^2 + b x^1 x^2 - e (x^2)^2]^2 + q x^0\} = 0,$$

где q — многочлен третьей степени относительно x^i. Отсюда и из (3.21) следует утверждение теоремы.

Обозначим кривую четвертого порядка, на которую распадается кривая $K^6(\Psi_1^i)$ через $K^4(\Psi_1^i)$.

§ 6. Точки прикосновения подмногообразия $L(\Psi_2)$

Пусть подмногообразие $L(\Psi_2)$ задано уравнениями (1.4). Точка $X \subset L$ является [5] точкой прикосновения подмногообразия $L(\Psi_2)$ с плоскостью L комплекса, если

$$TX(2, \Psi_2) \equiv \Gamma(X) = TL(\Psi_1^X). \tag{6.1}$$

Теорема 12. Если для подмногообразия $L(\Psi_2)$ число точек прикосновения конечно, то их не более 36.

Доказательство. Уравнения касательного подпространства $TX(2, \Psi_2)$ порожденного пфаффова многообразия $X(2, \Psi_2)$ в точке X имеет вид [4]

$$x_i = 0; \quad x^i b^p_{i\tau} x_p = 0, \tag{6.2}$$

где $b^p_{i\tau} = a^p_{i\tau} + b^\nu_\tau a^p_{i\nu}$. Условие (6.1) принимает вид

$$x^i b^p_{i\tau} = c^j_\tau a^p_{j\varkappa} \lambda^\varkappa \ (j = 0, 1), \tag{6.3}$$

где $\lambda^\varkappa$ определяются по формулам (4.1). Уравнения (6.3) имеют решение относительно c^j_τ для фиксированного τ только при условии

$$\det \| x^i b^p_{i\tau} a^p_{j\varkappa} \lambda^\varkappa \| = 0. \tag{6.4}$$

Из (6.4) и (4.1) при $\tau = 0,1$ в терминах репера R^* получаем

$$(x^1 + x^2 b^3_0) x_3 + [x^2 e + x^0 b^2_0 + (x^1 + x^2 b) b^3_0] x_4 +$$

$$+ [x^1 b_0^2 + (x^0 + x^1 a + x^2 c)\, b_0^3]\, x_5 = 0;$$
$$(x^0 + x^2 b_1^3)\, x_3 + [x^0 b_1^2 + (x^1 + x^2 b)\, b_1^3]\, x_4 + \tag{6.5}$$
$$+ [x^2 b_1^2 + (x^0 + a x^1 + c x^2)\, b_1^3 + x^2]\, x_5 = 0.$$

Внося сюда x_3, x_4, x_5 из (4.2), получаем утверждение теоремы.

Найдем точки прикосновения торсального подмногообразия $L(\widetilde{\Psi}_2^{01})$ относительно прямой $A_0 A_1$.

Для нее система (6.5) в силу (4.2) принимает вид

$$x^1 x^2 \{[(x^1)^2 + b x^1 x^2 - e (x^2)^2]^2 + q x^0\} = 0;$$
$$x^0 x^2 \{[(x^0)^2 + c x^0 x^2 - (x^2)^2]^2 + r x^1\} = 0,$$

где q и r — многочлены третьей степени относительно x^i. Отсюда получаем следующий результат.

Теорема 13. Совокупность точек прикосновения подмногообразия $L(\widetilde{\Psi}_2^{ik})$ $(i, k = 0, 1, 2;\ i \neq k)$ состоит из точек торсальной класса один прямой $A_i A_k$, особых точек двух других торсальных класса один прямых и точек пересечения кривых $K^4(\Psi_1^i)$ и $K^4(\Psi_1^k)$.

§ 7. Диаграмма Циндлера

Рассмотрим диаграмму Циндлера (ср. [3]), то есть проективное пространство P_3^*, однородные координаты точки которого суть

$$\lambda^0 : \lambda^1 : \lambda^2 : \lambda^3 = \omega^0 : \omega^1 : \omega^2 : \omega^3.$$

Уравнения (1.7) в пространстве P_3^* задает поверхность третьего порядка, которую обозначим через Q. Ее точки изображают фокальные подмногообразия $L(\Psi_1)$. В нашем репере R^* уравнение поверхности Q имеет вид

$$Q \equiv \begin{vmatrix} \lambda^1 & \lambda^0 & \lambda^3 \\ \lambda^2 & \lambda^3 & e\lambda^0 + b\lambda^3 \\ \lambda^3 & \lambda^2 + a\lambda^3 & \lambda^1 + c\lambda^3 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.1}$$

Теорема 14. Линия на поверхности Q, изображающая все такие $L(\Psi_1^X)$, у которых X есть точка прикосновения некоторого подмногообразия $L(\Psi_1)$, есть линия пересечения поверхности Q с первой полярой точки, соответствующей $L(\Psi_1)$.

Доказательство. Решая системы (1.5) и (1.6) относительно x и x_p, в терминах репера R^* получим

$$x^0 : x^1 : x^2 = \{(c - ab)(\lambda^3)^2 + \lambda^1\lambda^3 - e\lambda^0\lambda^2 -$$
$$- ae\lambda^0\lambda^3 - b\lambda^2\lambda^3\} : \{b(\lambda^3)^2 + e\lambda^0\lambda^3 - \lambda^1\lambda^2 - c\lambda^2\lambda^3\} :$$
$$: \{(\lambda^2)^2 - (\lambda^3)^2 + a\lambda^2\lambda^3\}; \tag{7.2}$$
$$x_3 : x_4 : x_5 = \{(\lambda^2)^2 - (\lambda^3)^2 + a\lambda^2\lambda^3\} : \{\lambda^0\lambda^3 - \lambda^1\lambda^2 - a\lambda^1\lambda^3\} : \{\lambda^1\lambda^3 - \lambda^0\lambda^2\} \tag{7.3}$$

и поэтому в силу (5.3) имеем

$$x^1 x_3 + e x^2 x_4 = \{(\lambda^2)^2 - (\lambda^3)^2 + a\lambda^2\lambda^3\}\{b(\lambda^3)^2 +$$
$$+ 2\lambda^0\lambda^3 e - (1 + e)\lambda^1\lambda^2 - ae\lambda^1\lambda^3 - c\lambda^2\lambda^3\} = M\frac{\partial Q}{\partial\lambda^0};$$

$$x^0x_3 + x^2x_5 = \{(\lambda^2)^2 - (\lambda^3)^2 + a\lambda^2\lambda^3\}\{2\lambda^1\lambda^3 + (c - ab)(\lambda^3)^2 - (1 + e)\lambda^0\lambda^2 - ae\lambda^0\lambda^3 - b\lambda^2\lambda^3\} = M\frac{\partial Q}{\partial\lambda^1};$$

$$x^0x_4 + x^1x_5 = \{(\lambda^3)^2(c - ab) + \lambda^1\lambda^3 - e\lambda^0\lambda^2 - ae\lambda^0\lambda^3 - b\lambda^2\lambda^3\}\{\lambda^0\lambda^3 - \lambda^1\lambda^3 - a\lambda^1\lambda^3\} + [b(\lambda^3)^2 + e\lambda^0\lambda^3 - \lambda^1\lambda^2 - c\lambda^2\lambda^3](\lambda^1\lambda^3 - \lambda^0\lambda^2) = M\frac{\partial Q}{\partial\lambda^2} - (2\lambda^2 + a\lambda^3)Q; \quad (7.4)$$

$$x^2x_3 + (x^1 + x^2b)x_4 + (x^0 + ax^1 + cx^2)x_5 = [(\lambda^2)^2 - (\lambda^3)^2 + a\lambda^2\lambda^3]^2 + [b(\lambda^3)^2 + e\lambda^0\lambda^3 - \lambda^1\lambda^2 - c\lambda^2\lambda^3 + b(\lambda^2)^2 - b(\lambda^3)^2 + ab\lambda^2\lambda^3](\lambda^0\lambda^3 - \lambda^1\lambda^2 - a\lambda^1\lambda^3) + [(c - ab)(\lambda^3)^2 + \lambda^1\lambda^3 - \lambda^1\lambda^2 - c\lambda^2\lambda^3 + ab(\lambda^3)^2 + ae\lambda^0\lambda^3 - a\lambda^1\lambda^2 - ac\lambda^2\lambda^3 + c(\lambda^2)^2 - c(\lambda^3)^2 - ac\lambda^2\lambda^3](\lambda^1\lambda^3 - \lambda^0\lambda^2) = M\frac{\partial Q}{\partial\lambda^3} - (a\lambda^2 - 2\lambda^3)Q,$$

где $M = (\lambda^2)^2 - (\lambda^3)^2 + a\lambda^2\lambda^3 \neq 0$ (если $M \equiv 0$, то те же выражения можно получить, введя какой-либо другой отличный от нуля минор второго порядка матрицы Q, которая в силу (1.9) имеет ранг 2). Внося (7.4) в (5.3), получим уравнение поляры

$$M\sum_{\varkappa=0}^{3}\lambda_0^{\varkappa}\frac{\partial Q}{\partial\lambda^{\varkappa}} = 0.$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 15. В общем случае совокупность всех подмногообразий $L(\Psi_1)$, для которых X одна из точек прикосновения, изображается на диаграмме P_3^* касательной плоскостью к поверхности Q в точке, изображающей фокальное подмногообразие $L(\Psi_1^X)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кругляков Л. З. К вопросу о проективной классификации семейств многомерных плоскостей.— Геометрический сб., 15 («Труды Томского ун-та», 258), 1975, 50—56.

2. Карапетян С. Е. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (II). — «Известия АН Арм. ССР. Серия физ.-матем.», 1963, 16, 5, 3-22.

3. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск, 1973.

4. Кругляков Л. З. К дифференциальной геометрии семейств подпространств в проективном пространстве.— Геометрический сб., 16 («Труды Томского ун-та», 263), 1975, 42—57.

5. Кругляков Л. З. Геометрия семейств d-мерных плоскостей в проективном пространстве.— Материалы четвертой научной конференции по математике и механике. 1, Томск, 1974, 70—74.

6. Кругляков Л. З. О плоскостных поверхностях, обладающих торсальными плоскостями. Геометрический сб., 18. Изд-во Томского ун-та, 1977, 16—24.

7. Кругляков Л. З., Сушников Б. С. Псевдоконгруэнции d-плоскостей в P_{2d+2}. Геометрический сб., 15 («Труды Томского ун-та», 258), 1975, 57—74.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 18 1977

Н. М. ОНИЩУК

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ Δ_m НА МНОГООБРАЗИИ ВСЕХ ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ n-МЕРНОГО ЦЕНТРОАФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА ($m<n$)

Гиперплоский элемент (или вырожденная нуль-пара [2]) CH есть гиперплоскость H с фиксированной на ней точкой C. В данной работе изучаются локальные центроаффинные свойства m-мерных распределений [1] Δ_m на аналитическом многообразии Φ_{2n-1} размерности $(2n-1)$ гиперплоских элементов CH n-мерного пространства и определяемых ими пфаффовых многообразий Ψ_m [3]. Предполагается, что плоскость H не проходит через центр пространства и $m<n$.

Распределение Δ_m на Φ_{2n-1} можно задать системой из $2n-m-1$ линейно-независимых уравнений Пфаффа вида

$$\Omega_j(u^s,\ du^s)=0,$$

где u^s — координаты элемента (главные параметры) CH на Φ_{2n-1}, $s=1, 2, \ldots, 2n-1$; $j=1, 2, \ldots, 2n-m-1$.

Присоединим к каждому элементу CH все реперы $\{O;\ e_\alpha\}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots =0, 1, \ldots, n-1)$, где O — центр пространства, $\boldsymbol{e}_0=\overline{OC}$, $\boldsymbol{e}_i$ — векторы, параллельные плоскости H $(i, j, k=1, 2, \ldots, n-1)$. Деривационные формулы репера имеют вид

$$d\boldsymbol{e}_\alpha=\omega_\alpha^\beta \boldsymbol{e}_\beta; \tag{1}$$

формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры центроаффинного пространства

$$D\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta$$

и зависят как от параметров центроаффинной группы, так и от главных параметров. Формы $\omega\equiv\omega_0^0$, $\omega^i\equiv\omega_0^i$, $\omega_i\equiv\omega_i^0$ являются главными формами многообразия Φ_{2n-1}.

§ 1. Основные k-плоскости одномерных многообразий элементов CH

Одномерное многообразие Φ_1 элементов CH зададим системой уравнений:

$$\frac{\omega^1}{\lambda^1}=\cdots=\frac{\omega^{n-1}}{\lambda^{n-1}}=\frac{\omega_1}{\lambda_1}=\cdots=\frac{\omega_{n-1}}{\lambda_{n-1}}=\frac{\omega}{\lambda}, \tag{2}$$

где λ, λ^i, λ_i суть компоненты геометрического объекта [4], задание которого эквивалентно заданию касательной в точке C линии $C(\Phi_1)$ и характеристики плоскости H. Вектор

$$\lambda e_0 + \lambda^i e_i \tag{3}$$

является направляющим вектором касательной, характеристика плоскости H имеет уравнения

$$x^0 = 1; \quad \lambda x^0 + \lambda_i x^i = 0. \tag{4}$$

Теорема 1. В плоскости H всякого элемента $CH \in \Phi_1$, для которого касательная к линии $C(\Phi_1)$ в каждой точке C не проходит через центр пространства, существует единственная прямая L_1', такая, что характеристика плоскости, определяемой этой прямой и центром пространства, проходит через точку C.

Доказательство. Будем искать уравнение прямой L_1' в виде

$$x_0 = 1; \quad x^i = \mu^i t. \tag{5}$$

Характеристика

$$\frac{x^1}{\mu^1} = \cdots = \frac{x^{n-1}}{\mu^{n-1}}$$

плоскости, проходящей через прямую (5) и центр пространства, содержит точку $C(1, 0, \ldots, 0)$ лишь при $\mu^i = \tau\lambda^i$. Поэтому существует единственная прямая L_1'

$$x^0 = 1; \quad x^i = \lambda^i t. \tag{6}$$

Определение 1. Прямая L_1' ($L_1' \subset H$, $C \in L_1'$), для которой характеристика плоскости, определяемой этой прямой и центром пространства, проходит через точку C, называется *основной* прямой элемента CH многообразия Φ_1.

Очевидно, что когда касательная к линии $C(\Phi_1)$ в точке C не проходит через центр пространства, основная прямая элемента CH есть проекция из центра пространства касательной к линии $C(\Phi_1)$ в точке C на плоскость H. Если же касательная к линии $C(\Phi_1)$ в точке C проходит через центр пространства, то всякая прямая, принадлежащая H и проходящая через C, является основной прямой элемента CH.

Определение 2. *Основной k-плоскостью* элемента $CH(t)$ многообразия Φ_1 с единственной основной прямой называется k-плоскость L_k, являющаяся предельным положением k-плоскости L_k^*, проходящей через основную прямую элемента $CH(t)$ параллельно основным прямым элементов $CH(t_1)$, $CH(t_2)$, ..., $CH(t_k)$, при стремлении $t_1, t_2, \ldots, t_k$ к t.

§ 2. Геометрический объект, определяющий распределение Δ_m на Φ_{2n-1}

Распределение Δ_m на Φ_{2n-1} можно задать системой линейно-независимых уравнений Пфаффа

$$a_{iA}\,\omega^i + a_A^i\,\omega_i + a_A\,\omega = 0 \tag{7}$$

$$(A = 1, 2, \ldots, 2n - m - 1, \ m < n),$$

где формы Пфаффа $a_{iA}\,\omega^i + a_A^i\,\omega_i + a_A\,\omega$ являются относительно инвариантными. Так как ранг матрицы системы (7) равен $2n - m - 1$ и система содержит $2n - 1$ форм ω_i, ω^i, ω, то среди них имеется m базисных форм. Рассмотрим случай, когда среди форм ω^i имеется m

линейно-независимых форм, примем их за базисные и обозначим ω^{i_1} $(i_1 = 1, \ldots, m)$. Тогда систему (7) можно представить в виде

$$\begin{gathered} \omega = b_{j_1} \omega^{j_1}; \\ \omega_i = b_{ij_1} \omega^{j_1}; \\ \omega^{i_2} = b^{i_2}_{j_1} \omega^{j_1} \end{gathered} \tag{8}$$

$$(i_1, j_1, \ldots = 1, 2, \ldots, m; \quad i_2, j_2, \ldots = m + 1, \ldots, n - 1).$$

Выполнение условий инвариантности системы (8) относительно подгруппы стационарности элемента CH обеспечивается заданием на Φ_{2n-1} поля геометрического объекта $\Gamma_0 = \{b_{j_1}, b_{ij_1}, b^{i_2}_{j_1}\}$, определяемого вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа

$$\begin{gathered} db_{j_1} - \omega^{k_1}_{j_1} b_{k_1} - b^{k_2}_{j_1} b_{m_1} \omega^{m_1}_{k_2} = A^k_{j_1} \omega_k + A_{j_1 k} \omega^k + A_{j_1} \omega, \\ db_{ij_1} - b_{ik_1} \omega^{k_1}_{j_1} - b_{kj_1} \omega^k_i - b_{im_1} b^{k_2}_{j_1} \omega^{m_1}_{k_2} = B^k_{ij_1} \omega + \\ + Б_{ij_1 k} \omega^k + B_{ij_1} \omega; \\ db^{i_2}_{j_1} - b^{i_2}_{k_1} \omega^{k_1}_{j_1} + b^{k_2}_{j_1} \omega^{i_2}_{k_2} - b^{i_2}_{k_1} b^{j_2}_{j_1} \omega^{k_1}_{j_2} + \omega^{i_2}_{j_2} = \\ = C^{i_2 k}_{j_1} \omega_k + C^{i_2}_{j_1 k} \omega^k + C^{i_2}_{j_1} \omega. \end{gathered} \tag{9}$$

Найдем геометрическую характеристику объекта Γ_0. Непосредственными вычислениями проверяется, что в общем случае

$$\left(\mathrm{Rang} \left\| \begin{matrix} b_{11}\, b_{21} \ldots b_{n-1\,1}\, b_1 \\ b_{1m}\, b_{2m} \ldots b_{n-1\,m}\, b_m \end{matrix} \right\| = m \right)$$

при выполнении условий (9) на Φ_{2n-1} становится инвариантным поле m-пар [2] $\{L_m, L_{n-m-1}\}$, где L_m-плоскость размерности m, проходящая через точку C и параллельная векторам

$$b_{j_1} e_0 + e_{j_1} + b^{i_2}_{j_1} e_{i_2}, \tag{10}$$

а L_{n-m-1} — плоскость размерности $(n - m - 1)$, принадлежащая гиперплоскости H и определяемая уравнениями

$$x_0 = 1; \quad b_{j_1} + b_{ij_1} x^i = 0. \tag{11}$$

Кроме того, становится инвариантным отображение h

$$h : t^{j_1} (b_{j_1} e_0 + e_{j_1} + b^{i_2}_{j_1} e_{i_2}) \rightarrow \begin{matrix} x^0 = 1 \\ t^{j_1} (b_{j_1} + b_{ij_1} x^i) = 0 \end{matrix} \tag{12}$$

между направлениями плоскости L_m и $(n-2)$-плоскостями, содержащими плоскость L_{n-m-1}. Верно и обратное: задание на Φ_{2n-1} поля m-пар $\{L_m \ni C, L_{n-m-1} \subset H\}$ и отображения (12) влечет за собой выполнение условий инвариантности системы (8). Таким образом, в рассматриваемом общем случае объект Γ_0 можно интерпретировать как m-пару $\{L_m, L_{n-m-1}\}$ и отображение h. В общем случае, т. е. когда $\mathrm{Rang} \| b_{ij_1}, b_{j_1} \| \text{-} m$, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Многообразие $\Phi_1 \subset \Phi_{2n-1}$ является интегральным многообразием системы уравнений (8) тогда и только тогда, когда касательная L_1 к линии $C(\Phi_1)$ принадлежит плоскости L_m, характеристика L_{n-2} плоскости H содержит L_{n-m-1} и $h(L_1) = L_{n-2}$.

Доказательство. Пусть система уравнений (2) определяет Φ_1, у которого касательная

$$r = e_0 + t (\lambda e_0 + \lambda^i e_i) \tag{13}$$

к линии $C(\Phi_1)$ принадлежит плоскости L_m, а характеристика (4) содержит L_{n-m-1}. Касательная (13) принадлежит L_m тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1^{m+1} & \dots & b_1^{n-1} \\ b_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & b_2^{m+1} & \dots & b_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_m & 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n-1}^{m+1} & \dots & b_{n-1}^{n-1} \\ \lambda & \lambda^1 & \lambda^2 & \dots & \lambda^m & \lambda^{m-1} & \dots & \lambda^{n-1} \end{matrix} \right\|$$

равен m, т. е., когда

$$\begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_m & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \lambda & \lambda^1 & \lambda^2 & \dots & \lambda^m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1^{m+1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2^{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n-1}^{m+1} \\ \lambda^1 & \lambda^2 & \dots & \lambda^m & \lambda^{m+1} \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1^{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n-1}^{n-1} \\ \lambda^1 & \lambda^2 & \dots & \lambda^m & \lambda^{n-1} \end{vmatrix} = 0. \qquad (14)$$

Вычисляя определители (14), получаем

$$\lambda = b_{i_1}\lambda^{i_1}; \quad \lambda^{i_2} = b_{j_1}^{i_2}\lambda^{j_1}. \qquad (15)$$

Характеристика (4) содержит плоскость L_{n-m-1}, определяемую системой уравнений (11), лишь тогда, когда ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n-1} & \lambda \\ b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n-1\,1} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1m} & b_{2m} & \dots & b_{n-1\,m} & b_m \end{matrix} \right\|$$

равен m. Так как ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n-1\,1} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1m} & b_{2m} & \dots & b_{n-1\,1} & b_m \end{matrix} \right\|$$

равен m, то

$$\lambda_i = \mu^{j_1} b_{ij_1}; \quad \lambda = \mu^{j_1} b_{j_1}. \qquad (16)$$

Используя (4), (13), (15) и (16), находим, что вектор

$$\lambda^{j_1}(b_{j_1} e_0 + e_{j_1} + b_{j_1}^{i_2} e_{i_2})$$

является направляющим вектором касательной L_1, а уравнения

$$x^0 = 1; \quad \mu^{j_1}(b_{j_1} + b_{ij_1} x^i) = 0$$

определяют характеристику L_{h-2} плоскости H (соответствующие одному и тому же Φ_1). Отсюда видно, что соответствие (12) выполняется только тогда, когда $\mu^{j_1} = \lambda^{j_1}$.

Итак мы показали, что для рассматриваемого Φ_1 имеем

$$\lambda = b_{i_1}\lambda^{i_1}; \quad \lambda^{i_2} = b_{j_1}^{i_2}\lambda^{j_1}; \quad \lambda_i = b_{ij_1}\lambda^{j_1}.$$

С другой стороны, только при выполнении этих условий многообразие Φ_1, определяемое системой уравнений (2), является интегральным многообразием системы (8). Теорема доказана.

Всякое интегральное одномерное многообразие системы (8) обозначается Ψ_1. Множество всех интегральных одномерных многообразий Ψ_1 данного распределения Δ_m обозначается Ψ_m и называется пфаффовым многообразием [3].

Выше мы исключили случай, когда ранг системы форм ω^i меньше m; геометрически это соответствует тому, что мы не рассматриваем Ψ_m, имеющее хотя бы одно Ψ_1, для которого линия $C(\Psi_1)$ является прямой, проходящей через центр пространства. Мы предполагали также, что $\mathrm{Rang}\|b_{ij_1} b_{j_1}\| = m$. Случай, когда $\mathrm{Rang}\|b_{ij_1} b_{j_1}\| < m$, возможен лишь тогда, когда среди Ψ_1 имеется хотя бы одно, для которого плоскость H неподвижна. Кроме того, мы будем считать, что $\mathrm{Rang}\|b_{ij_1}\| = m$, т. е. Ψ_m не имеет Ψ_1 с параллельными плоскостями H.

§ 3. Аналоги сопряженности и асимптотических

Через L'_m обозначим плоскость, являющуюся проекцией из центра пространства плоскости L_m на плоскость H. Поместим векторы e_{j_1} в плоскость L'_m, тогда $b^{i_2}_{j_1} = 0$. Это можно сделать, положив $\pi^{i_2}_{j_1} = 0$. Формулы (8) и (9) при этом принимают соответственно вид

$$\begin{aligned} \omega &= b_{i_1} \omega^{i_1}; \\ \omega_i &= b_{ij_1} \omega^{j_1}; \\ \omega^{i_2} &= 0; \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} db_{j_1} - \omega^{k_1}_{j_1} b_{k_1} &= A^k_{j_1} \omega_k + A_{j_1 k} \omega^k + A_{j_1} \omega; \\ db_{ij_1} - b_{ik_1} \omega^{k_1}_{j_1} - b_{kj_1} \omega^k_i &= B^k_{ij_1} \omega_k + B_{ij_1 k} \omega^k + B_{ij_1} \omega; \\ \omega^{i_2}_{j_1} &= C^{i_2 k}_{j_1} \omega_k + C^{i_2}_{j_1 k} \omega^k + C^{i_2}_{j_1} \omega. \end{aligned} \tag{18}$$

Отсюда заключаем, что величины $\Gamma = \{b_{i_1}, b_{ij_1}\}$ образуют геометрический объект, подобъекты b_{i_1}, b_{ij_1}, $b_{i_1 j_1}$ которого суть тензоры. Плоскость L'_m относительно выбранного репера определяется уравнениями

$$x^0 = 1; \quad x^{i_2} = 0, \tag{19}$$

произвольное Ψ_1 — уравнениями

$$\begin{aligned} \omega &= b_{j_1} \omega^{j_1}; \\ \omega_i &= b_{ij_1} \omega^{j_1}; \\ \omega^{i_2} &= 0; \end{aligned} \tag{20}$$

$$\frac{\omega^1}{\lambda^1} = \frac{\omega^2}{\lambda^2} = \cdots = \frac{\omega_m}{\lambda^m}$$

(где $\lambda^{i_1} e_{i_1}$ — направляющий вектор основной прямой), а характеристика плоскости H для рассматриваемого Ψ_1 — уравнениями

$$x^0 = 1; \quad b_{j_1} \lambda^{j_1} + b_{ij_1} x^i \lambda^{j_1} = 0. \tag{21}$$

Так как $\mathrm{Rang}\, \| b_{ij_1} \| = m$, то характеристика плоскости H для всякого φ_1 есть $(n-2)$-мерная плоскость.

Через точку C проведем плоскость L_{n-2}, параллельную плоскости (21). В общем случае $(b_{i_1 j_1} \lambda^{j_1} \neq 0)$ плоскость $L_{n-2} \cap L'_m$ имеет размерность $m-1$ и определяется системой уравнений

$$x^0 = 1;$$

$$b_{i_1j_1}x^{i_1}\lambda^{j_1}=0;$$
$$x^{i_2}=0. \tag{22}$$

Если

$$b_{i_1j_1}\lambda^{j_1}=0, \tag{23}$$

то $L'_m \subset L_{n-2}$. Только при $\det\|b_{i_1j_1}\|=0$ существуют Ψ'_1, для которых характеристика плоскости H параллельна плоскости L'_m.

Определение 3. Будем говорить, что плоскость L *квазисопряжена* прямой $d \subset L'_m$ $(C \in d)$ в элементе CH, если для одного и того же Ψ_1 прямая d является основной прямой, а плоскость L — пересечением плоскости L'_m с плоскостью, проходящей через точку C и параллельной характеристике плоскости H.

Для всякой прямой $d \subset L'_m$ $(C \in d)$ существует в общем случае единственная квазисопряженная ей плоскость L_{m-1} размерности $m-1$. Все плоскости, квазисопряженные всем прямым, принадлежащим плоскости L_{m-1}, пересекаются по одной прямой d_1. Эту прямую d_1 будем называть *квазисопряженной* для плоскости L_{m-1}.

Прямая d_1 совпадает с прямой d тогда и только тогда, когда тензор $b_{i_1j_1}$ симметричен. Действительно, пусть d имеет направляющий вектор $\lambda^{i_1}e_{i_1}$, тогда плоскость L имеет уравнения (22). Найдем уравнения прямой d_1, сопряженной с L. Уравнения произвольной прямой из (21) можно записать в виде

$$x^1=t\,\frac{-b_{2j_1}\mu^2\lambda^{j_1}-\dots-b_{mj_1}\mu^m\lambda^{j_1}}{b_{1j_1}\lambda^{j_1}};$$
$$x^2=t\mu^2;\quad x^m=t\mu^m. \tag{24}$$

Плоскость, сопряженная прямой (24), определяется уравнениями

$$x^0=1;$$
$$x^{i_2}=0;$$
$$b_{i_11}x^{i_1}(-b_{2j_1}\mu^2\lambda^{j_1}-\dots-b_{mj_1}\mu^m\lambda^{j_1})+b_{1j_1}x^{j_1}(b_{i_12}x^{i_1}\mu^2+\dots+b_{i_1m}x^{i_1}\mu^m)=0$$

Отсюда следует, что прямая d_1, сопряженная плоскости L, имеет уравнения

$$x^0=1;$$
$$x^{i_2}=0;$$
$$(b_{1j_1}b_{i_12}-b_{i_11}b_{2j_1})\,x^{i_1}\lambda^{j_1}=0;$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$(b_{1j_1}b_{i_1m}-b_{i_11}b_{mj_1})\,x^{i_1}\lambda^{j_1}=0.$$

Потребовав, чтобы прямая d_1 совпадала с прямой d, получим

$$b_{1j_1}b_{i_12}-b_{i_11}b_{2j_1}+b_{1i_1}b_{j_12}-b_{j_11}b_{2i_1}=0;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$b_{1j_1}b_{i_1m}-b_{i_11}b_{mj_1}+b_{1i_1}b_{j_1m}-b_{j_11}b_{mi_1}=0. \tag{25}$$

Отсюда при $i_1=j_1=1$ получаем $b_{12}=b_{21}$, $b_{13}=b_{31}$, ..., $b_{1m}=b_{m1}$, т. е. $b_{1i_1}=b_{i_11}$. Теперь из (25) при $i_1=j_1$ получаем $b_{2i_1}=b_{i_12}$, $b_{3i_1}=b_{i_13}$, ... $b_{mi_1}=b_{i_1m}$, т. е. $b_{i_1j_1}=b_{j_1i_1}$.

Определение 4. Прямая $d \subset L'_m$ $(C \in d_1)$ называется *квазиасимптотической*, если она принадлежит квазисопряженной ей плоскости

L_{m-1}. Многообразие Ψ_1, у которого в каждом элементе основная прямая является квазиасимптотической, называется квазиасимптотическим.

Совокупность всех квазиасимптотических прямых в элементе CH есть $(m-1)$-мерный конус второго порядка (быть может и мнимый), принадлежащий плоскости L'_m, определяемый уравнениями:

$$x^0 = 1;$$
$$b_{i_1 j_1} x^{i_1} x^{j_1} = 0; \tag{26}$$
$$x^{i_2} = 0.$$

Совокупность всех квазиасимптотических Ψ_1 является совокупностью интегральных 1-семейств системы, состоящей из уравнений (17) и уравнения

$$b_{i_1 j_1} \omega^{i_1} \omega^{j_1} = 0. \tag{27}$$

Теорема 3. Многообразие Ψ_1 является квазиасимптотическим лишь тогда, когда в каждом элементе $CH \in \Psi_1$ основная 2-плоскость принадлежит плоскости H.

Доказательство. Потребуем, чтобы основная 2-плоскость некоторого Ψ_1 принадлежала плоскости H

$$(d(\lambda^{i_1} e_{i_1}), e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}) = 0.$$

Отсюда, пользуясь уравнениями (1) и (20), получаем

$$b_{i_1 j_1} \omega^{i_1} \omega^{j_1} = 0.$$

§ 4. О бисекантах

Определение 5. *Бисекантной* называется такая m-пара $\{L_m, L_{n-m-1}\}$, для которой существует единственная прямая (бисеканта), проходящая через центр пространства и пересекающая каждую из плоскостей L_m и L_{n-m-1}. В противном случае m-пара называется небисекантной (ср. [5]).

Найдем необходимые и достаточные условия, при которых m-пара L_m, L_{n-m-1} является бисекантной. Бисеканта определяется системой уравнений

$$b_{j_1} x^0 + b_{i j_1} x^i = 0; \quad x^{i_2} = 0. \tag{28}$$

Так как ранг $\| b_{i j_1} \| = m$, то система (28) определяет единственную прямую. Остается потребовать, чтобы эта прямая пересекала каждую из плоскостей L_m и L_{n-m-1}. Ищем точку пересечения бисеканты (28) и плоскости L_m, определяемой системой уравнений

$$x^0 = 1 + u^{j_1} b_{j_1}; \quad x^{j_1} = u^{j_1}; \quad x^{i_2} = 0. \tag{29}$$

Подставляя (29) в (28), получаем

$$(b_{i_1 j_1} + b_{i_1} b_{j_1}) u^{i_1} + b_{j_1} = 0. \tag{30}$$

Следовательно, бисеканта (28) имеет единственную точку пересечения с плоскостью L_m тогда и только тогда, когда

$$\det \| b_{i_1 j_1} + b_{i_1} b_{j_1} \| \neq 0.$$

Координаты точки пересечения бисеканты (28) с плоскостью L_{n-m-1} определяются системой уравнений

$$x^0 = 1; \quad b_{j_1} + b_{i_1 j_1} x^{i_1} = 0; \quad x^{i_2} = 0. \tag{31}$$

Эта система имеет единственное решение лишь при условии

$$\det \| b_{i_1 j_1} \| \neq 0.$$

Итак, m-пара $\{L_m, L_{n-m-1}\}$ бисекантна тогда и только тогда, когда

$$\det \| b_{i_1 j_1} \| \neq 0; \quad \det \| b_{i_1 j_1} + b_{i_1} b_{j_1} \| \neq 0.$$

Очевидно, что если m-пара $\{L_m, L_{n-m-1}\}$ бисекантна, то плоскость L'_m пересекается с плоскостью L_{n-m-1} лишь в одной точке и эта точка M есть точка пересечения бисеканты с плоскостью L_{n-m-1}. Координаты точки M суть $(1, -b^1, -b^2, \ldots, -b^m, 0, \ldots, 0)$, где

$$b^{k_1} = b^{j_1 k_1} b_{j_1} \tag{32}$$

— тензор [4] и $b_{i_1 j_1} b^{j_1 k_1} = \delta^{k_1}_{i_1}$, $\delta^{j_1}_{i_1}$ — символ Кронекера.

Теорема 4. Прямая CM квазисопряжена в элементе CH $(m-1)$-мерной плоскости, являющейся пересечением плоскостей H и L_m.

Доказательство. Уравнения плоскости $L_m \cap H$ имеют вид

$$x^0 = 1; \quad b_{i_1} x^{i_1} = 0; \quad x^{i_2} = 0. \tag{33}$$

Пользуясь уравнениями (22), получаем, что $(m-1)$-плоскость, квазисопряженная произвольной прямой плоскости (33), имеет уравнения

$$x^0 = 1; \quad x^{i_2} = 0;$$

$$b_1 (b_{i_1 2} x^{i_1} \lambda^2 + \cdots + b_{i_1 m} x^{i_1} \lambda^m) - b_{i_1 1} x^{i_1} (b_2 \lambda^2 + \cdots + b_m \lambda^m) = 0.$$

Отсюда получаем, что прямая d_1, сопряженная плоскости $L_m \cap H$, определяется системой

$$x^0 = 1; \quad x^{i_2} = 0;$$

$$(-b_{i_1 1} b_2 + b_1 b_{i_1 2}) x^{i_1} = 0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-b_{i_1 1} b_m + b_1 b_{i_1 m}) x^{i_1} = 0.$$

Точка $C(1, 0, \ldots, 0)$ принадлежит прямой d_1. Пользуясь формулами (31), убеждаемся, что и точка $M(1, -b^1, \ldots, -b^m, 0, \ldots, 0)$ принадлежит прямой d_1. Т. е. прямые CM и d_1 совпадают. Теорема доказана.

Из (29), (30), (32) находим точку $M_1\left(\frac{1}{1+b}, \frac{-b^1}{1+b}, \ldots, \frac{-b^m}{1+b}, 0, \ldots, 0\right)$, пересечения бисеканты (28) с плоскостью L_m, величина $b = b_{i_1} b^{i_1}$ является абсолютным инвариантом. Для всякой бисекантной m-пары определим центроаффинное расстояние, обобщающее понятие центроаффинного расстояния между двумя прямыми трехмерного пространства. Пусть M_1 и M — точки пересечения бисеканты с L_m и L_{n-m-1} бисекантной m-пары и O — центр пространства. Центроаффинным расстоянием от плоскости L_m до плоскости L_{n-m-1} называется отношение, в котором точка M_1 делит отрезок MO.

Инвариант b равен центроаффинному расстоянию от плоскости L_m до плоскости L_{n-m-1} распределения Δ_m.

Для двух k-мерных плоскостей P_k и P'_k, пересекающихся по $(k-1)$-мерной плоскости $P_k \cap P'_k$ введем понятие величины центроаффинного угла. Величиной центроаффинного угла между упорядоченной парой плоскостей P_k и P'_k называется отношение, в котором плоскость P_k делит пару плоскостей: P'_k и плоскость, натянутую на $P_k \cap P'_k$ и центр пространства.

Инвариант b равен центроаффинному углу между парой плоскостей L_m, L'_m. Также очевидно, что b есть отношение, в котором точка M делит отрезок KC, где K — точка пересечения прямой MC с плоскостью, проведенной через центр пространства, параллельно L_m.

Теорема 5. Совокупность основных прямых в элементе CH всех тех Ψ_1, для которых центроаффинное расстояние от касательной к линии $C(\Psi_1)$ до характеристики плоскости H равно инварианту $b \neq -1$ есть $(m-1)$-мерный конус второго порядка.

Доказательство. Найдем центроаффинное расстояние от касательной к линии $C(\Psi_1)$ до характеристики плоскости H. Для этого найдем точку пересечения плоскости

$$x^{i_1} = t\lambda^{i_1}; \quad x^{i_2} = 0, \tag{34}$$

определяемой касательной к линии $C(\varphi_1)$ и центром пространства, с характеристикой

$$x^0 = 1; \quad b_{j_1}\lambda^{j_1} x^0 + b_{ij_1}\lambda^{j_1} x^i = 0 \tag{35}$$

плоскости H, и найдем точку пересечения гиперплоскости

$$b_{j_1}\lambda^{j_1} x^0 + b_{ij_1}\lambda^{j_1} x^i = 0, \tag{36}$$

определяемой характеристикой (35) и центром пространства, с прямой

$$x^0 = 1 + tb_{j_1}\lambda^{j_1}; \quad x^{i_1} = t\lambda^{i_1}; \quad x^{i_2} = 0, \tag{37}$$

касающейся линии $C(\Psi_1)$. Вычисляя искомое центроаффинное расстояние и приравнивая его инварианту b, получаем

$$(b_{i_1} b_{j_1} - bb_{i_1 j_1})\lambda^{i_1}\lambda^{j_1} = 0 \tag{38}$$

или в координатах

$$x^0 = 1; \quad x^{i_2} = 0; \quad (b_{i_1} b_{j_1} - bb_{i_1 j_1}) x^{i_1} x^{j_1} = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 6. Совокупность основных прямых всех тех Ψ_1, для которых касательная к линии $C(\Psi_1)$ и характеристика плоскости H составляют небисекантную 1-пару, образует два конуса, один из которых является конусом квазиасимптотических прямых.

Доказательство. Для каждого Ψ_1 с небисекантной 1-парой, состоящей в CH из касательной к $C(\Psi_1)$ и характеристики плоскости H, должно быть выполнено хотя бы одно из условий: 1) плоскость (34) не должна иметь единственную точку пересечения с (35); 2) гиперплоскость (36) не должна иметь единственную точку пересечения с прямой (37). Первое условие выполняется лишь тогда, когда

$$b_{i_1 j_1}\lambda^{i_1}\lambda^{j_1} = 0,$$

второе — лишь тогда, когда

$$(b_{i_1 j_1} + b_{i_1} b_{j_1})\lambda^{i_1}\lambda^{j_1} = 0,$$

где $\lambda^{i_1} b_{i_1}$ — направляющий вектор основной прямой многообразия Ψ_1. В первом случае получаем уравнение квазиасимптотического конуса (26), во втором —

$$x^0 = 1; \quad x^{i_2} = 0; \quad (b_{i_1 j_1} + b_{i_1} b_{j_1}) x^{i_1} x^{j_1} = 0. \tag{39}$$

Теорема доказана.

§ 5. О некоторых геометрических объектах

Условия полной интегрируемости системы (18) имеют вид

$$(dA^k_{j_1} + \omega^k_p A^p_{j_1} - \omega^{p_1}_{j_1} A^k_{p_1} - b_{p_1} C^{p_2 k}_{j_1} \omega^{p_1}_{p_2} - A^k_{j_1} \omega) \wedge \omega_k +$$
$$+ (dA_{j_1 k} - \omega^{p_2}_{j_1} A_{p_2 k} - \omega^p_k A_{i_1 p} - b_{p_1} C^{p_2}_{j_1 k} \omega^{p_1}_{p_2} + A_{j_1 k} \omega) \wedge \omega^k +$$
$$+ (dA_{j_1} - \omega^{k_1}_{j_1} A_{k_1} - b_{p_1} C^{k_2}_{j_1} \omega^{p_1}_{k_2}) \wedge \omega + A_{j_1} \omega^k \wedge \omega_\kappa + b_{k_1} \omega_{j_1} \wedge \omega^{k_1} = 0;$$
$$(dB^k_{ij_1} + \omega^\kappa_p B^p_{ij_1} - \omega^p_i B^k_{pj_1} - \omega^{p_1}_{j_1} B^k_{ip_1} - B^k_{ij_1} \omega - b_{ip_1} C^{p_2}_{j_1 k} \omega^{p_1}_{p_2}) \wedge \omega_k +$$
$$+ (B_{ij_1 k} - \omega^p_i B_{pj_1 k} - \omega^{p_1}_{j_1} B_{ip_1 k} - B_{ij_1 p} \omega^p_k - b_{ip_1} C^{p_2 \kappa}_{j_1} \omega^{p_1}_{p_2} + B_{ij_1 k} \omega) \wedge \omega^k +$$
$$+ (dB_{ij_1} - \omega^k_i B_{kj_1} - \omega^{k_1}_{j_1} B_{ik_1} - b_{ip_1} C^{k_2}_{j_1} \omega^{p_1}) \wedge \omega +$$
$$+ B_{ij_1} \omega^k \wedge \omega_k + b_{ik_1} \omega_{j_1} \wedge \omega^{k_1} + b_{kj_1} \omega_i \wedge \omega^k = 0; \tag{40}$$
$$(dC^{i_2 k}_{j_1} + \omega^{i_2}_{p_1} C^{p_1 k}_{j_1} + \omega^k_p C^{i_2 m}_{j_1} - \omega^{p_1}_{j_1} C^{i_2 k}_{p_1} - C^{i_2 k}_{j_1} \omega) \wedge \omega_k +$$
$$+ (dC^{i_2}_{j_1 k} + \omega^{i_2}_{p_2} C^{p_2}_{j_1 k} - \omega^{p_1}_{j_1} C^{i_2}_{p_1 k} - \omega^p_k C^{i_2}_{j_1 p} + C^{i_2}_{j_1 k} \omega) \wedge \omega^k +$$
$$+ (dC^{j_2}_{j_1} + \omega^{i_2}_{p_2} C^{p_2}_{j_1} - \omega^{p_1}_{j_1} C^{i_2}_{p_1} \wedge \omega + C^{i_2}_{j_1} \omega^k \wedge \omega_\kappa - \omega_{j_1} \wedge \omega^{i_2} = 0.$$

Введем обозначения

$$\overline{A}_{j_1 k_1} = A_{j_1 k_1} + A_{j_1} b_{k_1} + A^p_{j_1} b_{pk_1} + b_{j_1 k_1};$$
$$\overline{B}_{ij_1 k_1} = B_{ij_1 k_1} + B_{ij_1} b_{k_1} + B^p_{ij_1} b_{pk_1} + 2b_{ij_1} b_{k_1};$$
$$\overline{C}^{i_2}_{j_1 k_1} = C^{i_2}_{j_1 k_1} + C^{i_2}_{j_1} b_{k_1} + C^{i_2 p}_{j_1} b_{pk_1}. \tag{41}$$

Величины b_i, b_{ij_1}, $\overline{A}_{j_1 k_1}$, $\overline{B}_{ij_1 k_1}$, $\overline{C}^{i_2}_{j_1 k_1}$ образуют геометрический объект Г, а величины $\Gamma_1 = \{b_i, b_{ij_1}, \overline{A}_{j_1 k_1}, \overline{C}^{i_2}_{j_1 k_1}\}$ и $\Gamma_2 = (b_i, b_{ij_1}, \overline{B}_{ij_1 k_1}, \overline{C}^{i_2}_{j_1 k_1}\}$ суть подобъекты геометрического объекта Г. Найдем геометрическую характеристику объектов Γ_1 и Γ_2.

Линия $C(\Psi_1)$ называется *асимптотической*, если ее соприкасающаяся 2-плоскость в точке C принадлежит плоскости L_m. Многообразий Ψ_1, для которых $C(\Psi_1)$ суть асимптотические линии, определяются системой, состоящей из уравнений (17) и уравнений

$$\overline{A}_{i_1 j_1} \omega^{i_1} \omega^{j_1} = 0; \quad \overline{C}^{k_2}_{i_1 j_1} \omega^{i_1} \omega^{j_1} = 0. \tag{42}$$

Таким образом, геометрический объект Γ_1 определяет те Ψ_1, на которых линии $C(\Psi_1)$ являются асимптотическими.

Определение 8. Квазиасимптотическое Ψ_1 называется *основным квазиасимптотическим*, если в каждом элементе CH его основная 2-плоскость принадлежит $(m-1)$-плоскости, касающейся квазиасимптотического конуса по основной прямой этого Ψ_1.

Основные квазиасимптотические Ψ_1 являются интегральными одномерными многообразиями следующей системы уравнений

$$\omega = b_{j_1} \omega^{j_1};$$
$$\omega_i = b_{ij_1} \omega^{j_1};$$
$$\omega^{i_2} = 0;$$
$$b_{ij_1} \omega^i \omega^{j_1} = 0;$$
$$\overline{C}^{i_2}_{j_1 k_1} \omega^{j_1} \omega^{k_1} = 0;$$
$$\overline{B}_{ij_1 k_1} \omega^i \omega^{j_1} \omega^{k_1} = 0. \tag{43}$$

Таким образом, геометрический объект Γ_2 определяет основные квазиасимптотические многообразия Ψ_1.

Величины $\Gamma_3 = (b_i, b_{ij_1}, \overline{C}^{i_2}_{j_1k_1})$ образуют подобъект геометрического объекта Г. Геометрическая характеристика объекта Γ_3 выяснилась после того, как мы обнаружили, что система, состоящая из уравнений (17) и уравнений

$$\overline{C}^{k_2}_{j_1 i_1} \omega^{j_1} \omega^{i_1} = 0, \tag{44}$$

определяет те Ψ_1, для каждого из которых основная прямая принадлежит характеристике плоскости, проходящей через L'_m и центр пространства. Такие Ψ_1 будем называть квазиасимптотическими 2-го рода в отличие от квазиасимптотических, определенных в § 4, которые мы теперь будем называть квазиасимптотическими 1-го рода. Если многообразие Ψ_1 является одновременно квазиасимптотическим и первого, и второго рода, то такое Ψ_1 назовем квазиасимптотическим 3-го рода. Все квазиасимптотические Ψ_1 3-го рода определяются уравнениями (17) и уравнениями

$$x b_{i_1 j_1} \omega^{i_1} \omega^{j_1} = 0; \quad \overline{C}^{k_2}_{i_1 j_1} \omega^{i_1} \omega^{j_1} = 0 \tag{45}$$

и характеризуются, с другой стороны, тем, что для каждого из них в каждом элементе CH основная прямая принадлежит плоскости L'_m.

Величины $\Gamma'_1 = (b_i, b_{ij_1}, \overline{A}_{(j_1k_1)}, \overline{B}_{i(j_1k_1)}, \overline{C}^{i_2}_{(j_1k_1)})$, $\Gamma'_2 = (b_i, b_{ij_1}, \overline{A}_{[j_1k_1]}, \overline{B}_{i[j_1k_1]}, \overline{C}^{i_2}_{[j_1k_1]})$ суть геометрические объекты.

Теорема 7. Пфаффово многообразие Ψ_m голономно тогда и только тогда, когда обращаются в нуль компоненты $\overline{A}_{[j_1k_1]}$, $\overline{B}_{i[j_1k_1]}$, $\overline{C}^{i_2}_{[j_1k_1]}$ геометрического объекта Γ'_2.

Доказательство. Пусть Ψ_m голономно, тогда система (17) вполне интегрируема, т. е. выполняются условия

$$(db_{j_1} - \omega^{k_1}_{j_1} b_{k_1} + b_{j_1k_1} \omega^{k_1}) \wedge \omega^{j_1} = 0;$$

$$(db_{ij_1} + 2b_{ij_1} b_{k_1} \omega^{k_1} - b_{ik_1} \omega^{k_1}_{j_1} - b_{kj_1} \omega^{k}_{i}) \wedge \omega^{j_1} = 0;$$

$$\omega^{i_2}_{k_1} \wedge \omega^{k_1} = 0.$$

Отсюда, используя (18) и (41), получаем

$$\overline{A}_{[j_1k_1]} = 0; \quad \overline{B}_{i[j_1k_1]} = 0; \quad \overline{C}^{i_2}_{[j_1k_1]} = 0. \tag{46}$$

Наоборот, если условия (46) выполнены, то система (17) вполне интегрируема и Ψ_m — голономно. Теорема доказана.

Дадим геометрическую характеристику условию голономности пфаффова многообразия Ψ_m. В общем случае свойство сопряженности в плоскости L_m не является взаимным. Оно взаимно тогда и только тогда, когда $\overline{A}_{[j_1k_1]} = \overline{C}^{i_2}_{[j_1k_1]}$. Действительно, касательная к линии $C(\Psi_1)$ и характеристика плоскости L_m для этого Ψ_1, определяемого системой (20), имеют соответственно уравнения

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_0 + t\lambda^{i_1} (b_{i_1} \boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_{i_1});$$

$$b_{i_1} x^{i_1} + 1 - x^0 = 0;$$

$$x^{i_2} = 0; \tag{47}$$

$$\overline{A}_{j_1k_1} x^{j_1} \lambda^{k_1} = 0;$$

$$\overline{C}^{i_2}_{j_1k_1} x^{j_1} \lambda^{k_1} = 0. \tag{48}$$

Возьмем теперь некоторую прямую

$$r = e_0 + t\mu^{i_1}(b_{i_1} e_0 + e_{i_1}), \tag{49}$$

принадлежащую характеристике (48); для нее выполняются условия

$$\bar{A}_{j_1 k_1} \mu^{j_1} \lambda^{k_1} = 0; \quad \bar{C}^{i_2}_{j_1 k_1} \mu^{j_1} \lambda^{k_1} = 0. \tag{50}$$

Потребовав, чтобы характеристика плоскости L_m, соответствующая прямой (49), содержала прямую (47), получим условия

$$\bar{A}_{j_1 k_1} \lambda^{j_1} \mu^{k_1} = 0; \quad \bar{C}^{i_2}_{j_1 k_1} \lambda^{j_1} \mu^{k_1} = 0. \tag{51}$$

Сравнивая (50) и (51), заключаем, что $\bar{A}_{[j_1 k_1]} = 0$, $\bar{C}^{i_2}_{[j_1 k_1]} = 0$.

Пусть Ψ_1 и Ψ'_1 два произвольных одномерных многообразия из Ψ_m, а L_{n-2} и L'_{n-2} суть характеристики плоскости H, полученные при смещениях по Ψ_1 и Ψ'_1 соответственно. Пользуясь формулами (9), (11), (19), (4), находим, что пересечение плоскости L_{n-m-1} с характеристикой плоскости L_{n-2}, полученной при смещении по Ψ'_1, совпадает с пересечением плоскости L_{n-m-1} с характеристикой плоскости L'_{n-2}, полученной при смещении по Ψ_1, лишь тогда, когда имеют место равенства

$$\bar{A}_{[i_1 j_1]} = 0; \quad \bar{B}_{i[j_1 k_1]} = 0.$$

Итак, мы закончили геометрическую характеристику условию голономности пфаффова многообразия Ψ_m.

§ 6. Частные виды распределений Δ_m

I. Рассмотрим распределение Δ_m, для которого $b_{i_1} = 0$. Геометрически оно характеризуется каждым из свойств: а) $L_m \subset H$, б) $C \in L_{n-m-1}$.

Таким образом, в случае $b_{i_1} = 0$ обе плоскости L_m и L_{n-m-1} распределения Δ_m принадлежат плоскости H и пересекаются в точке C. Основная прямая всякого Ψ_1 касается линии $C(\Psi_1)$, а основная k-плоскость совпадает с соприкасающейся k-плоскостью линии $C(\Psi_1)$.

При $b_{i_1} = 0$ из уравнений (18) следует $A_{j_1 k_1} = 0$, $A^k_{j_1} = 0$, $A_{j_1} = 0$, т. е. $\bar{A}_{j_1 k_1} = b_{j_1 k_1}$ (см. (41) и уравнения (42) совпадают с уравнениями (45), т. е. линия $C(\Psi_1)$ для квазиасимптотического Ψ_1 3-го рода является асимптотической и, наоборот, всякое Ψ_1 с асимптотической линией $C(\Psi_1)$ является квазиасимптотическим 3-го рода. Основные прямые всех Ψ_1, для которых касательная к линии $C(\Psi_1)$ и характеристика плоскости H не бисекантны при $b_{i_1} = 0$ образуют лишь один конус — конус квазиасимптотических прямых (см. (39)).

Такое распределение Δ_m существует и определяется с произволом $m(n-m) - (1-m)(n-1)$ функций $(2n-1)$ аргументов.

II. Распределение Δ_m, для которого обращается в нуль инвариант b, т. е. для которого равно нулю центроаффинное расстояние от плоскости L_m до плоскости L_{n-m-1} характеризуется тем, что для него плоскости L_m и L_{n-m-1} пересекаются в точке M_1 (см. § 4). Точка M_1 принадлежит квазиасимптотическому конусу.

III. Распределение Δ_m, для которого тензор $b_{i_1 j_1}$ — антисимметричен, т. е. для которого $b_{(i_1 j_1)} = 0$, характеризуется тем, что для него квазиасимптотический конус не определен, т. е. всякая прямая $d \subset L'_m$ $(C \in d)$ является квазиасимптотической, а всякое Ψ_1 является квазиасимптотическим. Такое распределение определяется с произволом $m(2n-m-1)-\frac{m(m+1)}{2}$ функций $2n-1$ аргумента.

IV. Рассмотрим распределение Δ_m, для которого $b_{i_1j_1}=0$. При $m>\frac{n-1}{2}$ требование $b_{i_1j_1}=0$ влечет за собой снижение ранга матрицы $\| b_{ij_1} \|$, последнее означает (см. § 2), что через данный элемент CH проходит Ψ_1 с параллельными плоскостями H. При $m\leqslant\frac{n-1}{2}$ размерность плоскости L_{n-m-1} не меньше размерности плоскости L_m и обращение в нуль тензора $b_{i_1j_1}$ означает, что плоскость L'_m параллельна плоскости L_{n-m-1} (см. (11). Такое распределение определяется с произволом $m(2n-2m-1)$ функций $2n-1$ аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевалле К. Теория групп Ли. 1, М., 1948.
2. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. «Наука», М., 1966.
3. Синцов Д. М. Работы по неголономной геометрии. Киев, 1972.
4. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.— «Труды Московского математического общества», 1953, 2, 275—382.
5. Магазинников Л. И. Небисекантные пары центроаффинно наложимых конгруэнций.— Материалы итоговой научной конференции по математике и механике за 1970 год. Изд-во Томского ун-та, Томск, 1970, 144—145.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 18 1977

Г. В. ШУЛЕНИНА

О ЗАДАЧЕ БИАНКИ В ПРОЕКТИВНОЙ ТЕОРИИ КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК

В настоящей работе для конгруэнций коник, плоскости которых образуют двупараметрическое семейство, в трехмерном проективном пространстве решается задача, аналогичная „задаче Бианки" теории поверхностей (см. [1], с. 330, [2], [3] с. 157). Г. Д. Толстовой [4] решена подобная задача для конгруэнций коник в эквиаффинном пространстве. Роль нормали в нашем случае играет инвариантная ось канонического репера [5]. Получено общее решение задачи, исследованы некоторые частные классы конгруэнции коник, дающие решение задачи. В работе используется аппарат статьи [5], теоремы существования доказываются с помощью теории стандартных систем [8].

§ 1. Постановка задачи

Невырожденная [6] конгруэнция коник отнесена к полуканоническому реперу, построенному в [5]. Вершина репера B_0 помещена в характеристическую точку плоскости коники, вершины B_1 и B_2 находятся на поляре точки B_0 и гармонически делят точки A_1 и A_2 (точки пересечения поляры с коникой). Линия $v_1+(-1)^j v_2=0$ ($j=1, 2$) на поверхности (B_0) геометрически характеризуется тем, что касательной к ней в точке B_0 есть прямая B_0A_j, которая в точке A_j является касательной к конике. Вершина B_3 находится на линии l пересечения плоскостей Π_j, где Π_j проведена через прямую B_0A_j и касательную l_j к линии $v_1+(-1)^j v_2=0$ в точке A_j поверхности (A_j). Вместе с B_0 они гармонически делят точки пересечения прямой l с l_j.

Нормировка вершин проведена так, что локальное уравнение коники имеет вид

$$(x_0)^2+(x_1)^2-(x_2)^2=0,\ x_3=0. \tag{1}$$

Деривационные формулы репера имеют вид

$$dB_\lambda=v_\lambda^\mu B_\mu,\quad \lambda=0, \dots, 3,\ \mu=0, \dots, 3, \tag{2}$$

где

$$v_\lambda^\mu=b_\lambda^{\mu j} v_j,\ v_0^j=v_j,\ j=1, 2.$$

и имеют место следующие соотношения:

$$b_2^{32}=b_1^{31}-1; \tag{3}$$

$$b_2^{31}=b_1^{32} \tag{4}$$

$$(b_1^{01}+b_2^{02})(2b_1^{31}-1)-2b_1^{32}(b_1^{02}+b_2^{01})=0; \tag{5}$$

$$b_2^{21}=b_1^{11}+b_2^{12}-b_1^{22}, \quad b_1^{12}=-b_2^{11}+b_1^{21}+b_2^{22}. \tag{6}$$

Обозначим $b_1^{31}=p$, $b_1^{32}=q$. Условием $2p-1\neq\pm 2q$ исключен случай, когда прямые l_j лежат в плоскости коники. Уравнения структуры дают закон внешнего дифференцирования базисных форм

$$Dv_0^1=b_1[v_1 v_2]; \quad Dv_0^2=b_2[v_1 v_2]$$

и основную систему внешних дифференциальных уравнений:

$$[\underline{db_1^{11}}\, v_1]+[db_1^{12}\, v_2]=H_1^1[v_1 v_2]; \tag{7.1}$$

$$[db_1^{01}\, v_1]+[\underline{db_1^{02}}\, v_2]=H_1^0[v_1 v_2]; \tag{7.2}$$

$$[\underline{db_1^{21}}\, v_1]+[\underline{db_1^{22}}\, v_2]=H_1^2[v_1 v_2]; \tag{7.3}$$

$$[\underline{dp}\, v_1]+[dq v_2]=H_1^3[v_1 v_2]; \tag{7.4}$$

$$[\underline{dq}\, v_1]+[dp\, v_2]=H_2^3[v_1 v_2]; \tag{7.5}$$

$$[\underline{db_2^{11}}\, v_1]+[\underline{db_2^{12}}\, v_2]=H_2^1[v_1 v_2]; \tag{7.6}$$

$$[db_2^{21}\, v_1]+[\underline{db_2^{22}}\, v_2]=H_2^2[v_1 v_2]; \tag{7.7}$$

$$[\underline{db_3^{01}}\, v_1]+[\underline{db_3^{02}}\, v_2]=H_3^0[v_1 v_2]; \tag{7.8}$$

$$[\underline{db_3^{11}}\, v_1]+[\underline{db_3^{12}}\, v_2]=H_3^1[v_1 v_2]; \tag{7.9}$$

$$[\underline{db_3^{21}}\, v_1]+[\underline{db_3^{22}}\, v_2]=H_3^2[v_1 v_2]; \tag{7.10}$$

$$[\underline{db_0^{01}}\, v_1]+[\underline{db_0^{02}}\, v_2]=H_0^0[v_1 v_2]; \tag{7.11}$$

$$[\underline{db_2^{01}}\, v_1]+[\underline{db_2^{02}}\, v_2]=H_2^0[v_1 v_2], \tag{7.12}$$

где

$$H_\alpha^\beta=b_\alpha^{\mu 1} b_\mu^{\beta 2}-b_\alpha^{\mu 2} b_\mu^{\beta 1}-b_\alpha^{\beta 1} b_1-b_\alpha^{\beta 2} b_2,$$

$$H_0^0=b_1^{02}-b_2^{01}-b_0^{01} b_1-b_0^{02} b_2,$$

$$b_1=b_1^{12}-b_0^{02}-b_2^{11}, \quad b_2=b_0^{01}-b_2^{21}+b_1^{22},$$

$$\alpha=1,2,3, \quad \beta=0,1,2,3, \quad \mu=0,1,2,3.$$

Система (7.1 — 7.12) — в инволюции, так как является стандартной (базис системы „выделенных переменных“ [8] образуют подчеркнутые дифференциалы). Старший характер равен числу уравнений, содержащих две подчеркнутые формы, т. е. семи. Таким образом, эта система определяет невырожденную конгруэнцию коник, отнесенную к произвольному подмногообразию, с произволом семи функций двух аргументов.

Замечание. В статье [5] допущена неточность в формуле (56), исправленная в формуле (5) настоящего параграфа.

Сформулируем задачу. В каждой плоскости коники надо выбрать прямую L так, чтобы полученная прямолинейная конгруэнция образовывала расслояемую пару с конгруэнцией прямых B_0B_3.

§ 2. Общий случай

Пусть $\overline{Q}_g = g\overline{B}_0 + \overline{B}_2$ — точка пересечения искомой прямой L с прямой B_0B_2, где g — неизвестная функция от параметров конгруэнции. Уравнения лучей конгруэнций расслояемой пары запишем в виде (ср. [3])

$$\overline{N} = \overline{B}_1 + y\overline{Q}_g; \quad \overline{M} = \overline{B}_0 + z\overline{B}_3.$$

Задание подмногообразия $v_1 = 0$ определяет прямую $B_1 Q_g$ и обратно. Как известно [3], условия полной расслояемости состоят в том чтобы уравнения

$$(dNNB_0B_3) = (dMMB_1Q_g) = 0 \tag{8}$$

образовывали вполне интегрируемую систему относительно y и z. Раскрывая (8), получаем

$$\begin{aligned} dy &= y^2(gv_1 + v_2^1) + y(v_1^1 - gv_2 - v_2^2) - v_1^2; \\ dz &= z^2(v_3^0 - v_3^2 g) + z(v_0^0 - v_2 g - v_3^3). \end{aligned} \tag{9}$$

Внешнее дифференцирование этих уравнений дает

$$\begin{aligned} & y^2\{[dgv_1] + g([v_0^0 v_1] + [v_1 v_1^1] + [v_2 v_2^1]) + [v_2^0 v_1] + [v_2^1 v_1^1] + \\ & + [v_2^2 v_2^1] + [v_2^3 v_3^1]\} + y\{[2dy; gv_1 + v_2^1] + [v_1^0 v_1] + \\ & + [v_1^2 v_2^1] + [v_1^3 v_3^1] - g([v_0^0 v_2] + [v_1 v_1^2] + [v_2 v_2^2]) - \\ & - [v_2^0 v_2] - [v_2^1 v_1^2] - [v_2^3 v_3^2] - [dgv_2]\} + [dy, v_1^1] - \\ & - [dy v_2^2] - g[dyv_2] - [v_1^1 v_1^2] - [v_1^2 v_2^2] - [v_1^3 v_3^2] - [v_1^0, v_2] = 0; \end{aligned} \tag{10.1}$$

$$\begin{aligned} & z^2\{[v_3^0 v_0^0] +]v_3^1 v_1^0] + [v_3^2 v_2^0] + [v_3^3 v_3^0] - g[v_3^0 v_2] - g[v_3^1 v_1^2] - \\ & - g[v_3^2 v_2^2] - g[v_3^3 v_3^2] - [dg v_3^2]\} + z\{2[dz, v_3^0 - v_3^2 g] + \\ & + [v_1 v_1^0] + [v_2 v_2^0] - g([v_0^0 v_2] - [v_1 v_1^2] - [v_2 v_2^2] - [dgv_2] - \\ & - [v_3^1 v_1^3] - [v_3^2 v_2^3]\} + [dz, v_0^0 - v_2 g - v_3^3] = 0. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Внося в (10) dy и dz из (9), получаем

$$\begin{aligned} & y^2\{g^2[v_1 v_2] - g[v_2^2 v_1] + [dg v_1] + g[v_0^0 v_1] + [v_2^0 v_1] + \\ & + [v_2^3 v_3^1]\} + y\{[v_1^0 v_1] + [v_1^3 v_3^1] - g[v_0^0 v_2] - [gv_1^2 v_1] - \\ & - g[v_2 v_2^2] - [v_2^0 v_2] - [v_2^3 v_3^2] - [dgv_2]\} + \\ & + \{g[v_1^2 v_2] - [v_1^0 v_2] - [v_1^3 v_3^2]\} = 0; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} & z^2\{-[v_0^0 v_3^2] g + g^2[v_2 v_3^2] + [v_3^1 v_1^0] + [v_3^2 v_2^0] - g[v_3^1 v_1^2] - \\ & - g[v_3^2 v_2^2] - [dgv_3^2]\} + z\{[v_1 v_1^0] + [v_2 v_2^0] - g[v_0^0 v_2] - \\ & - g[v_2 v_2^2] + g[v_1^2 v_1] + [v_2^3 v_3^2] - [dgv_2] - [v_3^1 v_1^3]\} = 0. \end{aligned}$$

Потребовав, чтобы эти соотношения стали тождествами относительно y и z, получим, что условия вполне интегрируемости системы (9) сводятся к соотношениям

$$gb_1^{21} - b_1^{01} - pb_3^{22} + qb_3^{21} = 0; \tag{12}$$

$$b_1^{02} - gb_1^{22} - b_3^{21}(p - 1) + b_3^{22} q = 0; \tag{13}$$

$$dg = G_1 v_1 + G_2 v_2, \tag{14}$$

где

$$G_1 = -b_1^{02} + g\,(b_1^{22} - b_3^{01} + b_2^{21}) + pb_3^{12} - qb_3^{11} - $$
$$- b_2^{01} - qb_3^{22} + (p-1)\,b_3^{21};$$

$$G_2 = g^2 + g\,(b_2^{22} - b_3^{02}) - b_2^{02} + qb_3^{12} - (p-1)\,b_3^{11}. \qquad (15)$$

Сравнив (12) и (13), получим

$$b_1^{22}\,(b_1^{01} + pb_3^{22} - qb_3^{21}) = b_1^{21}\,(b_1^{02} - b_3^{21}\,p + b_3^{21} + b_3^{22}\,q). \qquad (16)$$

Исключим из рассмотрения случай $b_1^{22} \cdot b_1^{21} = 0$ (он будет рассмотрен в § 3). Тогда подстановка значения g, найденного из (12), в уравнение (14) приведет к уравнению Пфаффа

$$b_1^{21}\,(db_1^{01} + b_3^{22}\,dp + p\,db_3^{22} - q\,db_3^{21} - b_3^{21}\,dq) -$$
$$- db_1^{21}\,(b_1^{01} + pb_3^{22} - qb_3^{21}) = (b_1^{21})^2\,\{G_1 v_1 + G_2 v_2\}. \qquad (17)$$

Продифференцировав уравнение (17) внешним образом, получаем

$$[p\,db_3^{12} + \Theta_1,\, v_1] + [(1-p)\,db_3^{11} + \Theta_2,\, v_2] = P\,[v_1\, v_2], \qquad (18)$$

где Θ_j — формы, вид которых для дальнейшего не существен. Конечные соотношения (5) и (16) можно представить в виде

$$b_2^{01} = \frac{(2p-1)\,(b_1^{01} + b_2^{02}) - 2qb_1^{02}}{2q}; \qquad (19.1)$$

$$b_3^{21} = \frac{b_1^{22}\,(b_1^{01} + pb_3^{22}) - b_1^{21}\,(b_1^{02} + b_3^{22}\,q)}{b_1^{22}\,q - b_1^{21}\,(p-1)}, \qquad (19.2)$$

предполагая

$$q \neq 0; \quad b_1^{22}\,q - b_1^{21}\,(p-1) \neq 0. \qquad (20)$$

Исключенные при этом классы также будут рассмотрены в § 3. Теперь базисными формами остаются db_1^{11}, db_1^{02}, db_1^{2j}, dp, dq, db_2^{1j}, db_2^{22}, db_3^{0j}, db_3^{11}, db_3^{22}, db_3^{0j}, db_2^{02}, db_3^{12}, $(j = 1, 2)$. Получившаяся система дифференциальных уравнений стандартна [8], и следовательно — в инволюции со старшим характером, равным четырем. Таким образом, в общем случае решение задачи существует и определяется с произволом четырех функций двух аргументов. Отсюда вытекает, что для произвольной конгруэнции коник наша задача не имеет решения, ибо, как известно, общая конгруэнция коник определяется с произволом шести функций двух аргументов.

З а м е ч а н и е. Так как в единственное (возникшее в ходе решения задачи) конечное соотношение входит инвариант второго порядка b_1^{22} подмногообразия $v_1 = 0$ (см. [7], [5]), то класс конгруэнций коник, для которого наша задача имеет решение, определяется с произволом трех функций двух аргументов, так как уравнение второго порядка подмногообразие не фиксирует.

Это замечание следует иметь в виду и в других случаях, рассматриваемых в работе.

§ 3. Исключенные случаи

Рассмотрим классы конгруэнций коник, исключенные из рассмотрения при решении задачи в общем случае в § 2.

I. Пусть

$$q = 0;\; b_1^{21} \cdot b_1^{22} \neq 0. \tag{21}$$

Тогда, подставив в (5), получаем

$$(2p - 1)(b_2^{02} + b_1^{01}) = 0, \tag{22}$$

причем $(2p - 1) \neq 0$, ибо в противном случае прямые l_j лежат в плоскости коники (см. § 1). Следовательно, возможно лишь следующее:

$$2p - 1 \neq 0;\; b_2^{02} + b_1^{01} = 0. \tag{23}$$

При $q = 0$ уравнение Пфаффа (17) и условие (19.2) примут соответственно вид

$$b_1^{21}(db_1^{01} + b_3^{22}\,dp + p\,db_3^{22}) - db_1^{21}(b_1^{01} + pb_3^{22}) = \\ = (b_1^{21})^2 (G_1^* v_1 + G_2^* v_2); \tag{24}$$

$$b_3^{21} = -\frac{b_1^{22}(b_1^{01} + pb_3^{22}) - b_1^{21} b_1^{02}}{b_1^{21}(p - 1)}, \tag{25}$$

где $G_1 = G_1^*$, $G_2 = G_2^*$ при $q = 0$. При этом $p - 1 \neq 0$, так как при $p - 1 = q = 0$, так же как при $p = q = 0$, семейство плоскостей коник — однопараметрическое. Этот случай из рассмотрения мы исключили. Подстановка (21) в (7.4) и (7.5) приведет к уравнению Пфаффа.

$$dp = \{-b_2^{12} p - (p - 1)(b_0^{01} + b_1^{22} - 2b_2^{21} + b_3^{31})\} v_1 - \\ - \{b_1^{21}(p - 1) + p(b_3^{32} - b_0^{02} - 2b_1^{12} + b_2^{11})\} v_2. \tag{26}$$

Продифференцировав его внешним образом, получим

$$[-p\,db_2^{12} + \Theta_3,\; v_1] + [-p\,db_2^{11} + \Theta_4,\; v_2] = \Theta_5 [v_1 v_2], \tag{27}$$

где Θ_α $(\alpha = 3, 4, 5)$ — формы, вид которых для дальнейшего не существен. Теперь базис образуют следующие формы: db_2^{12}, db_3^{11}, db_2^{22}, db_1^{11}, db_2^{01}, db_3^{21}, db_1^{02}, db_3^{0j}, db_1^{2j}, db_0^{01}, db_2^{11}, db_3^{12}. В итоге получается стандартная [8] система дифференциальных уравнений со старшим характером, равным двум. Решение определяется с произволом двух функций двух аргументов. Таким образом, для этого частного класса задача имеет решение, причем (см. замечание в § 1) произвол класса конгруэнций коник—одна функция двух аргументов.

II. Пусть

$$b_1^{21} b_1^{22} = 0;\; q \neq 0. \tag{28}$$

Возможны два случая.

1) $b_1^{21} = 0$; $b_1^{22} \neq 0$. (29)

Тогда g определится из уравнения (13), а соотношение (19.2) и уравнение Пфаффа (14) примут соответственно вид

$$b_3^{21} = \frac{1}{q}(b_1^{01} + b_3^{22} p); \tag{30}$$

$$b_1^{22}(db_1^{02} - db_3^{21}(p - 1) - dp \cdot b_3^{21} + b_3^{22}\,dq + q\,db_3^{21}) - (b_1^{02} - b_3^{21} p + \\ + b_3^{21} - b_3^{22} q)\,db_1^{22} = (b_1^{22})^2 \{G_1 v_1 + G_2 v_2\}. \tag{31}$$

Продифференцировав (31) внешним образом, получим

$$[p\,db_3^{12} + \Theta_6,\; v_1] + [-(p - 1)\,db_3^{11} + \Theta_7,\; v_2] = \Theta_8 [v_1 v_2].$$

За базисные формы принимаем db_1^{01}, db_1^{22}, db_3^{02}, db_2^{22}, db_1^{11}, db_3^{12}, db_2^{01}, db_3^{0j}, db_2^{1j}, db_0^{0j}, dp, dq, $(j = 1, 2)$. Система дифференциальных уравнений стандартна и — в инволюции. Следовательно, в этом случае задача имеет решение, определяющееся с произволом трех функций двух аргументов. Геометрически этот случай характеризуется тем, что касательная к линии $v_2 = 0$ в точке B_1 поверхности (B_1) пересекает прямую $B_0 B_3$.

Случай $b_1^{22} = 0$, $b_1^{21} \neq 0$ геометрически отличается от предыдущего тем, что касательная к линии $v_1 = 0$ в точке B_1 поверхности (B_1) пересекает прямую $B_0 B_3$.

2. Пусть

$$b_1^{21} = b_1^{22} = 0. \tag{32}$$

Внеся (32) в (7.3), получим

$$b_1^{01} + pb_3^{22} - qb_3^{21} = 0. \tag{33}$$

Сравнивая (32) и (12, 13), получим (33) и следующее выражение:

$$b_1^{02} - b_3^{21}(p-1) + qb_3^{22} = 0. \tag{34}$$

Кроме того, имеет место уравнение Пфаффа (14), причем g уже не определяется через коэффициенты b_i^{jk}. Дифференцируя (14) внешним образом, получим

$$\begin{aligned} &[-db_1^{02} + dg\,(b_2^{21} - b_0^{01}) + pdb_3^{12} + b_3^{12}\,dp + g\,(db_2^{21} - db_0^{01}) - b_3^{11}\,dq - \\ &- qdb_3^{11} - db_2^{01} - qdb_3^{22} - b_3^{22}\,dq + (p-1)\,db_3^{21} + b_3^{21}\,dp;\ v_1] + \\ &+ [2gdg + dg\cdot(b_2^{22} - b_0^{02}) + g(db_2^{22} - db_0^{02}) - db_2^{02} + b_3^{12}dq + qdb_3^{12} - (p- \\ &-1)db_3^{11} - b_3^{11}\,dp;\ v_2] + \{G_1\,(b_1^{12} - b_0^{02} - b_2^{11}) + G_2\,(b_0^{01} - b_2^{21})\}\,[v_1\,v_2] = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Вместо dg в (35) следует подставить его выражение из (14). Учитывая (3, 4, 5, 6, 33, 34), принимаем за базисные в системе дифференциальных уравнений следующие формы: dq, dp, db_3^{11}, db_2^{02}, db_1^{11}, db_2^{22}, db_3^{21}, db_1^{02}, db_3^{0j}, db_2^{1j}, db_0^{0j}, db_3^{12}, $(j = 1, 2)$. В силу (32) уравнение (7.3) тождественно исчезает. Оставшаяся система дифференциальных уравнений стандартна. Решение определяется с произволом трех функций двух аргументов. Условие (32) геометрически характеризуется тем, что касательная плоскость к поверхности (B_1) в точке (B_1) совпадает с координатной $\{B_1\,B_0\,B_3\}$. Так как теперь функция g определяется дифференциальным уравнением, то для каждого подмногообразия получается ∞^1 решений задачи.

III. Если $qb_1^{22} - b_1^{21}(p-1) = 0$, то в уравнении (19.2) можно предположить $pb_1^{22} - b_1^{21}\,q \neq 0$ и разрешить его относительно b_3^{22}. Получается тот же результат, что и в общем случае. Если же

$$qb_1^{22} - b_1^{21}(p-1) = pb_1^{22} - b_1^{21}\,q = 0,$$

то

$$(q)^2 - p\,(p-1) = 0, \tag{36}$$

а это означает, что асимптотические линии на поверхности (B_0) сдвоенные, то есть поверхность (B_0) является торсом. Следовательно, семейство плоскостей коник—однопараметрическое, что исключено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.-Л., 1948.

2. Щербаков Р. Н. Репер линии на поверхности в аффинной дифференциальной геометрии.— «Уч. зап. Бурят-Монгольского пединститута», 1952, 3, 15—40.

3. Щербаков Р. Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск, 1960.

4. Толстова Г. Д. Аналог задачи Бианки в эквиаффинной теории конгруэнций коник. — Геометрический сб., 13 («Труды Томского ун-та», 246), 143—159.

5. Шуленина Г. В. Репераж подмногообразий в многообразиях коник в трехмерном проективном пространстве. — Геометрический сб., 9 («Труды Томского ун-та», 212), 1972, 49—71.

6. Малаховский В. С. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве. — Геометрический сб., 3 («Труды Томского ун-та», 168), 1963, 43—50.

7. Шуленина Г. В. Письмо в редакцию.— Геометрический сб., 12 («Труды Томского ун-та», 244), 1975, 111.

8. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск, 1973.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 18 1977

Т. В. ЛЫЖИНА, Н. А. МАНДРИКОВА, Р. Н. ЩЕРБАКОВ

НЕМЕТРИЧЕСКАЯ ФЛАГОВАЯ ТЕОРИЯ КРИВЫХ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ КОМПЛЕКСОВ

Среди неевклидовых пространств, описанных в известной монографии Б. А. Розенфельда [1], особое место занимают флаговые пространства, так как их абсолюты не содержат ни одной квадрики, не выродившейся в дважды взятое линейное подпространство проективного пространства. Введение метрики в таких пространствах производится путем упрощения формул преобразования, сохраняющего абсолют, т. е. заменой общей группы флаговых преобразований некоторой ее подгруппой. В терминах метода подвижного репера эти подгруппы получаются, если в деривационных формулах (см. [3])

$$d\boldsymbol{r} = \Omega^i \boldsymbol{e}_i, \;\; d\boldsymbol{e}_i = \Omega_i^j \boldsymbol{e}_j, \tag{1}$$
$$i, \; j = 1, 2, \dots \; n,$$

где

$$\Omega_i^j \equiv 0, \;\; i > j, \tag{2}$$

считать равными нулю одну, все или несколько из форм Ω_i^i (так как

$$D\Omega_i^i = [\Omega\Omega_i^i] \tag{3}$$

при фиксированном i, то каждое соотношение $\Omega_i^i = 0$ выделяет подгруппу). Если все Ω_i^i равны нулю, то мы получаем метрическую флаговую геометрию (геометрию пространства F_n) — наиболее изученную (при $1 < n \leqslant 4$ она дает геометрию пространства-времени классической механики — «геометрию галилеева пространства» [1]).

Геометрия пространства Φ_n, определяемого общей флаговой группой, изучена меньше. Что касается его дифференциальной геометрии, то нам известны лишь работы [2], [3] И. А. Пеннер, в которых рассматриваются кривые в Φ_n и поверхности в Φ_3, заметки [4], [5] З. П. Бадяевой по теории поверхностей в Φ_3 и работы Т. В. Лыжиной [6], [7] по теории регулюсов (линейчатых поверхностей) и конгруэнций. Имеются еще предварительные сообщения [8], [9].

Геометрия кривых во флаговой 2-плоскости исследовалась еще в начале XX века, но во всех работах накладывались те или иные ограничения на формы Ω_1^1 и Ω_2^2 — см., например, [10].

В предлагаемой работе геометрически охарактеризованы канонические реперы кривых в Φ_2 и Φ_3. Эти результаты оказались полезными при построении начал флаговой теории комплексов, так как при реперaже последних оказалось, что все координатные подмногообразия Ψ_1 являются торсами, т. е. регулюсами, огибающими кривые.

§ 1. О плоских кривых

Для плоской кривой $n=2$ и вектор e_2 — изотропный (т. е. его направление определяется точкой абсолюта—флага). Исключая точки с изотропными касательными и включая в репер касательную к кривой, получаем основное соотношение [11]

$$\Omega_1^2 = \alpha\,\Omega^1,$$

из которого применением алгоритма Картана [11] получаем

$$\delta\alpha = \alpha\,(2\pi_1^1 - \pi_2^2),$$

где δ и π — обозначения, относящиеся ко вторичным параметрам. Исключая точки распрямления $\alpha=0$, фиксируем

$$\alpha = 1,\ 2\pi_1^1 = \pi_2^2.$$

Следующий шаг алгоритма дает

$$-2\Omega_1^1 + \Omega_2^2 = \lambda\Omega^1; \tag{3}$$

$$\delta\lambda = \lambda\pi_1^1. \tag{4}$$

Если $\lambda=0$, то получаются деривационные формулы

$$dA = e_1\,ds;\ de_1 = (ke_1 + e_2)\,ds, \tag{5}$$
$$de_2 = 2ke_2\,ds,$$

где s — инвариантный параметр. Отыскивая обычным путем соприкасающуюся конику, получаем цикл [1] $x_1^2 - 2x_2 = 0$, который гиперoскулирует с нашей кривой.

Следовательно, проводя фиксацию $\lambda=1$, мы исключаем из рассмотрения только циклы. Деривационные формулы канонического репера в общем случае имеют вид

$$dA = e_1\,ds;\ \ de_1 = (ke_1 + e_2)\,ds;$$
$$de_2 = (2k+1)\,e_2\,ds, \tag{6}$$

где s — флаговая длина дуги, а k — флаговая кривизна.

Уравнение соприкасающейся параболической гиперболы [1] имеет вид

$$3x_1^2 + 2x_1\,x_2 - 6x_2 = 0. \tag{7}$$

Ее центр есть точка

$$C_1 = A + 3e_1 - 9e_2. \tag{8}$$

Соприкосновение четвертого порядка с кривой имеет коника

$$9x_1^2 + 6x_1\,x_2 - (3k+1)\,x_2^2 - 18\,x_2 = 0 \tag{9}$$

с центром в точке

$$C_2 = A + \frac{3}{2+3k}\,(e_1 - 3e_2). \tag{10}$$

Этих данных достаточно для геометрической характеристики нормировки векторов канонического репера и флаговой кривизны: если проекции точки C_1 на прямые $r = A + \lambda\,e_1$ и $r = A + \lambda\,e_2$ обозначить C_{11} и C_{12}, то

$$e_1 = \frac{1}{3}\,\overline{AC_{11}};\ \ e_2 = \frac{1}{9}\,\overline{C_{12}\,A}; \tag{11}$$

наконец, через простое отношение $(C_1\ C_2;\ A) = C_1\,A : AC_2$ точек C_1, C_2 и A кривизна в силу (8) и (10) выражается так:

$$k = \frac{1}{3}\{(C_1\, C_2;\ A) - 2\}. \tag{12}$$

Отметим еще, что аффинная нормаль кривой имеет направление $\eta = \boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2$, а неизотропная асимптота коники (7) — направление $2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2$.

Получим вычислительные формулы для s и k при задании кривой как годографа вектор-функции

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{13}$$

относительно произвольной фиксированной флаговой системы координат $(O,\ \boldsymbol{i}_1,\ \boldsymbol{i}_2)$, где $\boldsymbol{i}_2 = \boldsymbol{i}$ — изотропный вектор. Положив

$$\boldsymbol{r}'' = \alpha\, \boldsymbol{r}' + \beta\, \boldsymbol{i} \tag{14}$$

и

$$\boldsymbol{r}' = \sigma\, \boldsymbol{e}_1;\ \sigma = ds : dt;\ \boldsymbol{e}_2 = \gamma\, \boldsymbol{i} \tag{15}$$

(штрихи означают дифференцирование по t), найдем

$$\alpha = (\boldsymbol{r}''\, \boldsymbol{i}) : (\boldsymbol{r}'\, \boldsymbol{i});\ \beta = (\boldsymbol{r}'\, \boldsymbol{r}'') : (\boldsymbol{r}'\, \boldsymbol{i}), \tag{16}$$

где $(\boldsymbol{ab})$ — косое произведение векторов.

Отсюда и из (15) получается

$$\sigma\alpha = \sigma' + \sigma^2 k;\ \beta = \sigma^2 \gamma;\ \sigma = (\ln \beta)' - 2\alpha, \tag{17}$$

что дает возможность получить окончательные формулы:

$$s = \int_0^t \left\{ \frac{(\boldsymbol{r}'\ \boldsymbol{r}''')}{(\boldsymbol{r}'\ \boldsymbol{r}'')} - 3\,\frac{(\boldsymbol{r}''\ \boldsymbol{i})}{(\boldsymbol{r}'\ \boldsymbol{i})} \right\} dt; \tag{18}$$

$$k = \sigma^{-2}(\sigma\alpha - \sigma'). \tag{19}$$

Если же положить $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i}_1 + y\boldsymbol{i}_2$, $x = t$, $y = y(x)$, то получатся формулы И. А. Пеннер (см. [2])

$$s = \int_0^t \frac{y'''}{y''}\, dt;\quad k = 1 - \frac{y''\, y^{\mathrm{IV}}}{(y''')^2}\,. \tag{20}$$

Потребовав гиперoскуляцию коники (9) с кривой (или неподвижность точки C_2), получим натуральное уравнение коник (кроме циклов)

$$9\,\frac{dk}{ds} = 2\,(3k + 2)\,(3k + 1). \tag{21}$$

Это есть (в терминах работы [12]) уравнение „картанова образа“. Его порядок относительно k и $dk : ds$ равен двум, т. е. порядку уравнения коники, что соответствует [12].

При $k = -1/3$ получаем параболическую гиперболу, при $k = -2/3$ — параболу.

Другие кривые постоянной флаговой кривизны определены в [2]. Их геометрические характеристики получаются из (9), (10) и (12). Например, для кривой $y = -x \ln x$ в силу (12) имеем $(C_1 C_2;\ A) = -1$, так как $k = -1$, а для экспоненты $(k = 0)$ имеем $(C_1 C_2;\ A) = 2$.

§ 2. О пространственных кривых

В работе [3] проведено построение канонического репера пространственной кривой методом Картана, но не дана геометрическая характеристика репера и инвариантов и не отмечены некоторые исключенные из рассмотрения случаи. Поэтому мы повторяем построение репера, уточняя геометрию вопроса.

Естественно ограничиться рассмотрением точек с неизотропными [3] касательными (т. е. с касательными, не пересекающими прямую флага; такие прямые в [1] называются прямыми первого порядка) и неизотропными (т. е. не содержащими флаговую прямую) соприкасающимися плоскостями. Включая касательную прямую и соприкасающуюся плоскость в репер, сопоставим им вектор $\boldsymbol{e}_1$ и бивектор $\{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\}$ репера. Тогда

$$d\boldsymbol{A} = \Omega^1 \boldsymbol{e}_1; \qquad d\boldsymbol{e}_1 = \Omega_1^1 \boldsymbol{e}_1 + \Omega_1^2 \boldsymbol{e}_2. \tag{22}$$

При этом формы Ω^1, Ω_1^2 и Ω_2^3 станут главными [11], т. е.

$$\Omega_1^2 \equiv \omega_1^2 = \alpha\omega^1; \qquad \Omega_2^3 \equiv \omega_2^3 = \beta\omega^1. \tag{23}$$

Алгоритм Картана дает

$$\delta\alpha = \alpha(2\pi_1^1 - \pi_2^2); \qquad \delta\beta = \beta(\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3). \tag{24}$$

Исключая точки распрямления ($\alpha = 0$) и уплощения ($\beta = 0$), фиксируем

$$\alpha = \beta = 1; \ \pi_2^2 = 2\pi_1^1, \ \pi_3^3 = 3\pi_1^1. \tag{25}$$

Так как по Картану следующий этап фиксации должен начаться с формы

$$\omega_2^2 - 2\omega_1^1 = \gamma\omega^1, \tag{26}$$

где

$$\delta\gamma = \gamma\pi_1^1, \tag{27}$$

то необходимо выяснить, какие кривые характеризуются условием $\gamma = 0$, т. е.

$$\omega_2^2 = 2\omega_1^1. \tag{28}$$

Положив $\omega_1^1 = k\omega^1$, мы увидим, что деривационные формулы для изотропной проекции (т. е. проекции в направлении $\boldsymbol{e}_3$ — ср. [6]) рассматриваемой кривой на соприкасающуюся плоскость будут иметь вид (5). Следовательно, эта проекция есть парабола со слабоизотропным диаметром $\boldsymbol{e}_2$. Таким образом, наша кривая расположена на параболическом цилиндре с изотропными образующими. Оставим этот случай для специального рассмотрения (см. § 3), а сейчас рассмотрим общий случай, при котором возможна фиксация

$$\gamma = 1; \ \pi_1^1 = 0. \tag{29}$$

Все вторичные параметры исчерпаны, и можно положить

$$\omega^1 = ds; \ \omega_1^1 = k\,ds; \ \omega_3^3 = \varkappa\,ds, \tag{30}$$

что приводит к окончательным деривационным формулам:

$$dA = e_1\,ds;\ de_1 = (ke_1 + e_2)\,ds;$$
$$de_2 = \{(2k+1)\,e_2 + e_3\}\,ds;\ de_3 = \varkappa e_3\,ds. \tag{31}$$

Направления всех векторов репера определены (e_2 — единственное слабоизотропное*) направление в соприкасающейся плоскости). Остается выяснить геометрическое значение их нормировок и инвариантов k и $\varkappa$.

Так как изотропная проекция кривой на соприкасающуюся плоскость имеет деривационные формулы, совпадающие с формулами (6), то нормировка векторов e_1 и e_2, а также геометрическая характеристика инварианта k даются снова формулами (11) и (12), причем, конечно, вектор e_2 имеет не изотропное, а слабоизотропное направление.

Коль скоро геометрическая характеристика нормировки вектора e_2 известна, то определена кривая $r = A + e_2$ на цилиндроиде [13]

$$r = A + \lambda e_2 \tag{32}$$

с направляющей плоскостью $\{e_2 e_3\}$. Касательная к этой кривой имеет направление

$$l \parallel e_1 + (2k+1)\,e_2 + e_3. \tag{33}$$

Отсюда следует, что вектор e_3 нормирован так, что касательная к указанной кривой в точке $r = A + e_2$ имеет проекцией на полуизотропную [6] плоскость $\{e_1 e_3\}$ репера аффинную биссектрису векторов e_1 и e_3.

Определив нормировку вектора e_3, естественно рассмотреть кривую $r = A + e_3$ на изотропном цилиндре

$$r = A + \lambda e_3.$$

Ее касательная в точке $r = A + e_3$ параллельна вектору

$$m \parallel e_1 + \varkappa e_3,$$

откуда следует, что $\varkappa$ есть аффинный угловой коэффициент указанной касательной в той же полуизотропной плоскости $\{e_1 e_3\}$.

Соприкасающейся квадрикой для цилиндроида (32) является линейчатый гиперболический параболоид [15],

$$2x_1x_2 + Kx_1x_3 - 2x_3 = 0, \tag{34}$$

где

$$K = 1 + 3k - \varkappa. \tag{35}$$

В работе [3] вместо коэффициента $\varkappa$ введен коэффициент $\tilde{\varkappa} = \varkappa - 3k$. Очевидно, что $K = 1 - \tilde{\varkappa}$. Параболоид (34) пересекает полуизотропную плоскость $x_2 = 0$ по лучу $x_3 = 0$ и по прямой

$$Kx_1 = 2, \tag{36}$$

откуда выясняется геометрическое значение инварианта K, а следовательно, и $\varkappa$. Еще одно значение для K получается, если найти соприкасающийся изотропный линейный комплекс [6] регулюса касательных

$$p_{12} - p_{03} - \frac{1}{2}Kp_{31} = 0 \tag{37}$$

*) Слабоизотропным называется ([3], [6]) направление, определяемое точкой флаговой прямой.

и его аффинную ось [11], т. е. вектор, соответствующий в нуль системе (37) плоскости флага:

$$Ke_1 - 2e_3. \tag{38}$$

Итак, пространственная кривая в Φ_3 определяется инвариантами s, k и $\varkappa$ (последний можно заменить на $\tilde{\varkappa} = \varkappa - 3k$ или $K = 1 - \varkappa$). Получим вычислительные формулы для этих инвариантов, предполагая, что кривая задана уравнениями

$$y = y(x); \cdot z = z(x)$$

относительно неподвижной флаговой системы координат $\{O, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3\}$), т. е. вектор-функцией

$$\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i}_1 + y(x)\,\boldsymbol{i}_2 + z(x)\,\boldsymbol{i}_3, \tag{39}$$

где, конечно, $\boldsymbol{i}_3$ — изотропный вектор, а $\boldsymbol{i}_2$ — слабоизотропный. Имеем

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{i}_1 + y'\boldsymbol{i}_2 + z'\boldsymbol{i}_3; \tag{40}$$

$$\boldsymbol{A}^{(k)} = y^{(k)}\,\boldsymbol{i}_2 + z^{(k)}\,\boldsymbol{i}_3 \tag{41}$$

(штрихи означают дифференцирование по x). Так как $\boldsymbol{e}_1 = d\boldsymbol{A} : ds = \boldsymbol{A}' : \sigma$, где

$$\sigma = \frac{ds}{dx}, \tag{42}$$

то

$$\sigma\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}_1 + y'\boldsymbol{i}_2 + z'\boldsymbol{i}_3. \tag{43}$$

Положим

$$\boldsymbol{e}_2 = b\boldsymbol{i}_2 + c\boldsymbol{i}_3; \quad c \neq 0; \tag{44}$$

$$\boldsymbol{e}_3 = a\boldsymbol{i}_3; \qquad a \neq 0. \tag{45}$$

Дифференцирование тождества (43) по x дает

$$(\sigma' + k\sigma^2)(\boldsymbol{i}_1 + y'\boldsymbol{i}_2 + z'\boldsymbol{i}_3) + \sigma^2(b\boldsymbol{i}_2 + c\boldsymbol{i}_3) = y''\boldsymbol{i}_2 + z''\boldsymbol{i}_3,$$

откуда

$$\sigma' + k\sigma^2 = 0; \tag{46}$$

$$b = y'' : \sigma^2; \tag{47}$$

$$c = z'' : \sigma^2. \tag{48}$$

Аналогично, дифференцирование (44) и (45) дает

$$b' = b\sigma(2k + 1); \tag{49}$$

$$c' = \sigma(c(2k + 1) + a); \tag{50}$$

$$a' = \varkappa\sigma a. \tag{51}$$

В силу (41), (47) и (48) имеем

$$\boldsymbol{A}'' = \sigma^2(b\boldsymbol{i}_2 + c\boldsymbol{i}_3). \tag{52}$$

Дифференцируя это равенство и применяя (41), (46), (49) и (50), получаем

$$y''' = \sigma^3 b; \quad z''' = \sigma^3(c + a). \tag{53}$$

Еще одно дифференцирование дает

$$y^{\mathrm{IV}} = b\sigma^4(1 - k); \quad z^{\mathrm{IV}} = \sigma^4\{c(1 - k) + a(1 + \tilde{\varkappa})\}. \tag{54}$$

Из (47), (48), (53) и (54) получаются окончательные формулы:

$$ds = \frac{y'''}{y''}\,ds; \quad k = \left(\frac{y''}{y'''}\right)'; \tag{55}$$

$$\tilde{\varkappa} + 1 = \frac{(z^{\mathrm{IV}}\,y'' - z''\,y^{\mathrm{IV}})\,y''}{(z'''\,y'' - z''\,y''')\,y'''}. \tag{56}$$

Эти формулы имеют смысл только при $y''' \neq 0$, т. е. из рассмотрения исключаются кривые, расположенные на изотропных параболических цилиндрах. В последней формуле предполагается, что кривая не плоская (см. (48), (41) и (44)). Тогда имеем

$$z'''\,y'' - z''\,y''' \equiv \sigma^5 ab \neq 0.$$

При $z''' = 0$ кривая расположена на параболическом цилиндре со слабоизотропной образующей, так как проекция на плоскость $\{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_3\}$ параллельно $\boldsymbol{i}_2$ есть парабола. Натуральное уравнение такой кривой в силу (53) и (54) имеет вид $\varkappa = 2k$.

Из формул (36) и (37) вытекает геометрическая характеристика еще одного класса кривых: натуральное уравнение $K = 0$ характеризует кривые с изотропной аффинной осью (38) изотропного линейного комплекса (37).

§ 3. О кривых, расположенных на изотропных параболических цилиндрах

Теперь мы закончим репераж для кривой, расположенной на изотропном параболическом цилиндре. В этом случае в (26) имеем $\gamma = 0$, а для фиксации последнего вторичного параметра остается соотношение, вытекающее из (25):

$$\omega_3^3 - 3\omega_1^1 = \chi\omega^1, \tag{57}$$

откуда

$$\delta\chi = \chi\pi_1^1. \tag{58}$$

Если $\chi \neq 0$, то возможна фиксация

$$\chi = 1; \quad \pi_1^1 = 0,$$

а деривационные формулы приводятся к виду

$$\begin{gathered} dA = e_1 ds; \quad de_1 = (ke_1 + e_2)\,ds; \\ de_2 = (2ke_2 + e_3)\,ds; \quad de_3 = (3k + 1)\,e_3 ds. \end{gathered} \tag{59}$$

Покажем, что эти формулы определяют наиболее общую кривую, расположенную на изотропном параболическом цилиндре. В соответствующим образом выбранной неподвижной флаговой системе координат $(O, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$ уравнение такого цилиндра имеет вид $2y = x^2$, а уравнения общей кривой, лежащей на нем, задаются с произволом одной функции z одного аргумента x:

$$\begin{gathered} y = \frac{1}{2}\,x^2; \\ z = z(x). \end{gathered} \tag{60}$$

Покажем, что зная функцию $z = z(x)$, можно найти векторы канонического репера $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и инварианты s и k так, что будут выполняться формулы (59). Система (O, $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$) станет тогда начальным положением канонического репера.

Положим

$$\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i}_1 + \frac{1}{2}x^2\boldsymbol{i}_2 + z(x)\boldsymbol{i}_3. \tag{61}$$

Далее можно вести выкладки так же, как мы это сделали в формулах (39)—(55), но с упрощениями, вытекающими из того, что $y = \frac{1}{2}x^2$, и вместо деривационных формул (31) действуют формулы (59). Приводим результат

$$k = -\frac{\sigma'}{\sigma^2} = \frac{z^{\mathrm{V}}z''' - (z^{\mathrm{IV}})^2}{(z^{\mathrm{IV}})^2}; \tag{62}$$

$$\sigma\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}_1 + x\boldsymbol{i}_2 + z'\boldsymbol{i}_3; \tag{63}$$

$$\sigma^2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i}_2 + z''\boldsymbol{i}_3; \tag{64}$$

$$\sigma^3\boldsymbol{e}_3 = z'''\boldsymbol{i}_3; \tag{65}$$

$$\sigma = \frac{ds}{dx} = \frac{z^{\mathrm{IV}}}{z'''}. \tag{66}$$

Никаких ограничений на функцию $z = z(x)$ не возникает, кроме предположения $z^{\mathrm{IV}} \neq 0$, чем и доказывается наше утверждение.

При $z^{\mathrm{IV}} \equiv 0$ мы имеем кривую третьего порядка, расположенную на изотропном параболическом цилиндре.

Все кривые третьего порядка, как известно, проективно-эквивалентны. Все изотропные параболические цилиндры флагово-эквивалентны. Для кривых $z^{\mathrm{IV}} \equiv 0$ (так же, как для циклов на плоскости, см. § 1) канонический репер не определяется единственным образом. Но именно этот случай и исключен предположением $\chi \neq 0$.

§ 4. s-репер линейчатого комплекса

Пусть теперь элементом является неизотропная прямая

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A} + t\boldsymbol{e}_1, \tag{67}$$

а главных параметров — три. Тогда в формулах (1) — (2) при $n = 3$ главными формами будут $\Omega^2 \equiv \omega^2$, $\Omega^3 \equiv \omega^3$, $\Omega_1^2 \equiv \omega_1^2$, $\Omega_1^3 \equiv \omega_1^3$, так как при включении прямой (67) в репер фиксируются вторичные формы π^2, π^3, π_1^2, π_1^3.

Если записать основное соотношение в виде

$$\alpha\omega^3 + \beta\omega_1^2 + \gamma\omega_1^3 + \varkappa\omega^2 = 0, \tag{68}$$

то главная корреляция [11] примет вид

$$\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{e}_1 \longleftrightarrow (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{A},\ (\alpha t - \gamma)\boldsymbol{e}_2 + (\beta - \varkappa t)\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_1) = 0. \tag{69}$$

Она вырождается только для специальных [11] комплексов при

$$\alpha\beta - \gamma\varkappa = 0. \tag{70}$$

Полуизотропной плоскости, проходящей через луч, соответствует в корреляции (69) точка

$$C = A + \frac{\gamma}{\alpha} e_3, \tag{71}$$

которую естественно назвать *флаговым центром* луча.

Отказавшись от рассмотрения цилиндрических комплексов, перепишем основное соотношение в виде

$$\omega^2 = \alpha\omega^3 + \beta\omega_1^2 + \gamma\omega_1^3, \tag{72}$$

т. е. положим $\varkappa = -1$. Первый шаг алгоритма Картана [11] дает

$$\begin{aligned} \delta\alpha &= \alpha(\pi_3^3 - \pi_2^2) + \alpha^2\pi_2^3; \\ \delta\beta &= \beta\alpha\pi_2^3 - \beta\pi_1^1 + \gamma\pi_2^3 + \pi^1; \\ \delta\gamma &= \alpha\gamma\pi_2^3 + \gamma(\pi_3^3 - \pi_1^1 - \pi_2^2) - \alpha\pi^1. \end{aligned} \tag{73}$$

Исключив из рассмотрения комплексы (и отдельные лучи) с несобственным флаговым центром, проведем фиксацию

$$\begin{aligned} &\alpha = 1; \ \pi_2^3 - \pi_2^2 + \pi_2^3 = 0; \\ &\gamma = 0; \qquad \pi^1 = 0, \end{aligned} \tag{74}$$

совмещающую начало репера с флаговым центром луча и накладывающую некоторую связь на векторы e_2 и e_3. Так как условие (70) приняло вид $\beta = 0$, то еще одна фиксация

$$\beta = 1; \ \pi_2^3 - \pi_1^1 = 0 \tag{75}$$

исключает из рассмотрения специальные комплексы. Основное соотношение (72) принимает вид

$$\omega^2 = \omega^3 + \omega_1^2, \tag{76}$$

а его замыкание и лемма Картана дают вторые основные соотношения

$$\begin{aligned} \omega^1 + \omega_2^3 - \omega_1^1 &= a\omega_1^2 + b\omega_1^3 + c\omega^3; \\ -\omega^1 &= b\omega_1^2 + z\omega_1^3 + f\omega^3; \\ \omega_2^3 + \omega_3^3 - \omega_2^2 &= c\omega_1^2 + f\omega_1^3 + g\omega^3. \end{aligned} \tag{77}$$

Коэффициенты этих соотношений зависят от оставшихся вторичных параметров следующим образом:

$$\begin{aligned} &\delta a = 2(b + c)\pi_1^1 + a\pi_3^3; \ \delta f = f\pi_3^3; \\ &\delta b = (f + z - b)\pi_1^1 + b\pi_3^3; \ \delta g = g(2\pi_1^1 + \pi_3^3); \\ &\delta z = z(\pi_3^3 - 2\pi_1^1); \\ &\delta c = (f + g + c)\pi_1^1 + c\pi_3^3. \end{aligned} \tag{78}$$

При завершении построения канонического репера следует принять во внимание два фактора: связи фиксируемых коэффициентов с наиболее простыми геометрическими ковариантами луча и необходимость получения основной системы внешних дифференциальных уравнений в виде, не требующем продолжения (т. е. удовлетворяющем критерию Картана, коль скоро получить ее в стандартном виде не удается).

Замыкание соотношений (77) приводит к системе внешних дифференциальных уравнений

$$[da, \omega_1^2] + [db, \omega_1^3] + [dc, \omega^3] = X_1^i W_i;$$

$$[db,\ \omega_1^2] + [dz,\ \omega_1^3] + [df,\ \omega^3] = X_2^i W_i; \tag{79}$$
$$[dc,\ \omega_1^2] + [df,\ \omega_1^3] + [dg,\ \omega^3] = X_3^i W_i,$$

где

$$W_1 = [\omega_1^3,\ \omega_1^2];\ W_2 = [\omega^3,\ \omega_1^2];\ W_3 = [\omega^3,\ \omega_1^3],$$

а коэффициенты X_j^i являются полиномами относительно a, b, c, f, z, g и коэффициентов, при помощи которых после некоторой фиксации вторичных параметров выразятся через базис остальные формы, входящие в деривационные формулы, т. е. коэффициентов выражений:

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= a_1\omega_1^2 + a_2\omega_1^3 + a_3\omega^3; \\ \omega_2^2 &= m_1\omega_1^2 + m_2\omega_1^3 + m_3\omega^3; \\ \omega_3^3 &= q_1\omega_1^2 + q_2\omega_1^3 + q_3\omega^3; \\ \omega_2^3 &= p_1\omega_1^2 + p_2\omega_1^3 + p_3\omega^3. \end{aligned} \tag{80}$$

Коэффициенты a_i, m_i, q_i, p_i в силу (77) связаны шестью соотношениями:

$$\begin{aligned} &p_1 - a_1 = a + b;\ p_1 + q_1 - m_1 = c; \\ &p_2 - a_2 = b + z;\ p_2 + q_2 - m_2 = f; \\ &p_3 - a_3 = c + f;\ p_3 + q_3 - m_3 = g. \end{aligned} \tag{81}$$

Поэтому в основную систему дифференциальных уравнений включатся замыкания только двух уравнений из (80), так как два остальных будут их алгебраическими следствиями при любой фиксации репера.

Обратимся к геометрическим соображениям. Прежде всего обнаруживается, что все три координатные подмногообразия Ψ_1 [11] — торсы, причем $\omega_1^2 = \omega_1^3 = 0$ — цилиндр, а $\omega_1^2 = \omega^3 = 0$ — полуизотропная плоскость. Лучи комплекса, принадлежащие подмногообразию $\omega_1^2 = \omega^3 = 0$, огибают плоскую кривую, которую, следуя Н. И. Кованцову [14], назовем „кривой s“. Вдоль нее деривационные формулы дают

$$\begin{aligned} dA &= -z\omega_1^3 e_1; \\ de_1 &= (a_2 e_1 + e_3)\,\omega_1^3; \\ de_3 &= q_2 e_3 \omega_1^3. \end{aligned} \tag{82}$$

Формулы (82) станут наиболее близкими к формулам (6) канонического репера плоской кривой, если мы проведем фиксацию

$$z = -1;\ \pi_3^3 = 2\pi_1^1.$$

Вторую фиксацию естественно выбрать так, чтобы во втором уравнении из системы (79) осталась одна неизвестная функция. Тогда возникает дополнительное конечное соотношение (один из коэффициентов X_2^i обратится в нуль), а само уравнение станет стандартным, что повысит вероятность выполнимости критерия Картана. Так как f не может быть приведено к нулю, то наиболее выгодной является фиксация

$$b = 0;\ (f - 1)\,\pi_1^1 = 0. \tag{83}$$

Разумеется случай $b = 0$, $f = 1$ следует исключить из рассмотрения (см. о нем ниже — § 5).

Конечное соотношение $X_2^1 = 0$ в подробной записи имеет вид

$$2a_1 + (1 - f)(a_2 - 1) - q_1 = 0. \tag{84}$$

Будем называть построенный канонический репер *s-репером*, так как он тесно связан с кривой s.

Теорема 1. Основная система внешних дифференциальных уравнений линейчатого комплекса, отнесенного к s-реперу, — в инволюции.

Доказательство. Основная система состоит из пяти внешних дифференциальных уравнений, которые после проведенных фиксаций можно записать так:

$$[\Delta a, \omega_1^2] + [\Delta c, \omega^3] = 0; \tag{85$_1$}$$

$$[\Delta f, \omega^3] = 0; \tag{85$_2$}$$

$$[\widetilde{\Delta} c, \omega_1^2] + [\Delta f, \omega_1^3] + [\Delta g, \omega^3] = 0; \tag{85$_3$}$$

$$[\Delta a_1, \omega_1^2] + [\Delta a_2, \omega_1^3] + [\Delta a_3, \omega^3] = 0; \tag{85$_4$}$$

$$[\Delta q_1, \omega_1^2] + [\Delta q_2, \omega_1^3] + [\Delta q_3, \omega^3] = 0. \tag{85$_5$}$$

Здесь $\Delta a, \ldots\ \Delta q_3$ означают выражения, представляющие собой суммы соответствующего дифференциала и некоторой линейной комбинации базисных форм, коэффициенты которых состоят из букв $a, \ldots, q_3$. Например:

$$\Delta f = df + X_2^2 \omega_1^2 + X_2^3 \omega_1^3.$$

Выражения Δc и $\widetilde{\Delta c}$ отличаются друг от друга только линейными относительно базисных форм слагаемыми, и оба содержат слагаемое dc. Система (85) не является стандартной. Однако проверить критерий Картана [11] нетрудно. Для определения числа N применим к системе (85) лемму Картана. Получим

$$\left.\begin{aligned} &\Delta a = A\omega_1^2 + B\omega^3, \\ &\Delta c = B\omega_1^2 + C\omega^3, \\ &\widetilde{\Delta} c = \widetilde{B}\omega_1^2 + \widetilde{C}\omega^3, \\ &\Delta g = \widetilde{C}\omega_1^2 + F\omega_1^3 + G\omega^3, \\ &\Delta f = F\omega^3. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

$$\begin{aligned} &\Delta a_i = a_{i1}\omega_1^2 + a_{i2}\omega_1^3 + a_{i3}\omega^3, \ a_{ij} = a_{ji}; \\ &\Delta q_i = q_{i1}\omega_1^2 + q_{i2}\omega_1^3 + q_{i3}\omega^3; \ q_{ij} = q_{ji}. \end{aligned} \tag{87}$$

В силу сделанного относительно Δc и $\widetilde{\Delta c}$ замечания коэффициенты $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ выражаются через B и C соответственно. Три коэффициента a_{11}, a_{12}, a_{13} выражаются через остальные коэффициенты в силу (84). Таким образом, число независимых новых букв в правых частях соотношений (86) равно пяти, а в правых частях (87) — девяти. Следовательно, $N = 14$. Для построения регулярной цепи [11] занумеруем базисные формы так: $\omega^3 = \omega_1$, $\omega_1^2 = \omega_2$, $\omega_1^3 = \omega_3$. Ранги линейных систем для этой цепи таковы: $r_1 = 5$ (при $\omega_1^3 = 0$) и $r_2 = 8$. Так как число неизвестных функций с учетом соотношения (84) равно $10 - 1 = 9$, то характеры системы имеют следующие значения: $s_1 = r_1 = 5$, $s_2 = r_2 - r_1 = 3$, $s_3 = 9 - 8 = 1$. Число Картана Q равно 14. Итак, $Q = N$, критерий Картана выполняется, теорема доказана.

Перейдем к геометрическому описанию s-репера. Плоскость $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = 0$ определена при включении элемента в репер — это единственная полуизотропная плоскость, содержащая луч комплекса. Как сказано выше, начало репера соответствует этой плоскости в главной корреляции, принимающей вид

$$A + te_1 \longleftrightarrow (R - A,\ e_1,\ \alpha t e_2 + (\beta + t)\, e_3) = 0 \tag{88}$$

в силу фиксации $\gamma = 0$.

Та же самая корреляция получается, как известно, если точкам луча сопоставить плоскости, соответствующие им в нуль системе любого из пучка касательных линейных комплексов. Уравнение этого пучка при $\gamma = 0$ имеет вид

$$\lambda p_{23} + \alpha p_{31} + p_{12} + \beta p_{02} = 0 \tag{89}$$

При $\lambda = 0$ получается изотропный линейный комплекс [6]. Его аффинной осью является вектор $\alpha e_2 + e_3$, откуда виден геометрический смысл фиксации $\alpha = 1$: она определяет направление $e_2 + e_3$ и плоскость

$$(R - A,\ e_1,\ e_2 + e_3) = 0, \tag{90}$$

которая касается цилиндра комплекса. Что касается последней фиксации первого этапа, т. е. фиксации $\beta = 1$, то она приводит главную корреляцию к виду

$$A + te_1 \longleftrightarrow (R - A,\ e_1,\ t\,(e_2 + e_3) + e_3) = 0, \tag{91}$$

т. е., например, точке $A - e_1$ ставит в соответствие плоскость репера $(R - A,\ e_1,\ e_2) = 0$.

Векторы $e_2 + e_3$ и e_3 определяют вторую полуизотропную плоскость репера

$$(R - r,\ e_2,\ e_3) = 0. \tag{92}$$

Как известно, каждой плоскости, проходящей через луч, касаются в общем случае два торса. Плоскости (92) касаются торсы

$$\begin{gathered} -\omega^1 \equiv b\omega_1^2 + z\omega_1^3 + f\omega^3 = 0; \\ \omega_1^2\omega^3 = (\omega_1^2 + \omega^3)\,\omega_1^3. \end{gathered} \tag{93}$$

Одним из них при фиксации $b = 0$ становится координатный торс

$$\omega_1^3 = \omega^3 = 0, \tag{94}$$

который мы будем называть *основным* торсом. Его фокусом является точка

$$F = A - e_1, \tag{95}$$

что определяет нормирование вектора e_1, а следовательно, в силу (91) и выбор плоскости

$$(R - A,\ e_1,\ e_2) = 0. \tag{96}$$

Пересечение плоскостей (92) и (96) определяет теперь направление вектора e_2 и прямую $R = A + te_2$, которая иначе может быть характеризована как касательная к линии флаговых центров на основном торсе.

Для выяснения значения последней нормировки ($z = -1$) обратимся к „кривой s“. Обозначим

$$e_1 = e_1^*;\ e_3 = e_2^*;\ \omega_1^3\,|_{\omega_1^2 = \omega^3 = 0} = ds^*. \tag{97}$$

Тогда для кривой s получатся такие деривационные формулы:

$$dA = e_1^* ds^*;\ de_1 = (a_2 e_1^* + e_2^*)\, ds^*;\ de_2^* = q_2 e_2^* ds^*. \tag{98}$$

Сопоставив их с формулами (6), найдем

$$e_1^* = \sigma e_1;\ e_2^* = \sigma^2 e_2, \tag{99}$$

где

$$\sigma = ds : ds^*. \tag{100}$$

Так как нормировка вектора e_1^* уже известна, то отсюда получается геометрическое значение нормировки вектора $e_3 = e_2^*$:

$$|e_3| = |e_1|^2 \cdot |e_2| : |e_1^*|^2. \tag{101}$$

Здесь $|e_1|$ и $|e_2|$ — длины векторов канонического репера кривой s, а $|e_1^*| = |A - F|$, где F — фокус основного торса, A — флаговый центр.

Коль скоро все векторы s-репера и все координатные подмногообразия геометрически охарактеризованы, то выписывая по отдельности деривационные формулы (для всех векторов s-репера) для кривой s, основного торса и цилиндра, легко получить геометрическое значение всех инвариантов комплекса прямых. Например, из деривационных формул для кривой s:

$$\begin{gathered} dA = \omega_1^2 e_1; \ de_1 = (a_2 e_1 + e_3)\,\omega_1^2; \\ de_2 = (m_2 e_2 + p_2 e_3)\,\omega_1^2; \ de_3 = q_2 e_3 \omega_1^2 \end{gathered} \tag{102}$$

получим

$$\begin{gathered} a_2 = \frac{(de_1,\ e_2,\ e_3)}{(dA,\ e_2,\ e_3)}; \ m_2 = \frac{(de_2,\ e_3,\ e_1)}{(dA,\ e_2,\ e_3)}; \\ p_2 = \frac{(de_2,\ e_1,\ e_2)}{(dA,\ e_2,\ e_3)}; \ q_2 = \frac{(de_3,\ e_1,\ e_2)}{(dA,\ e_2,\ e_3)}. \end{gathered} \tag{103}$$

С другой стороны, применяя вычислительные формулы (18) — (20) и (55) — (56), легко получить инварианты кривой s и ребра возврата основного торса.

Например, флаговые длина дуги s и кривизна k кривой s выражаются так:

$$s = \int (g_2 - 2a_2)\, ds^*; \quad k = \frac{\sigma a_2 - \sigma'}{\sigma^2}, \tag{104}$$

где

$$\sigma = ds : ds^*; \ \sigma' = d\sigma : ds^*,$$

а ds^* введено в (97).

Для флаговой длины дуги s и инварианта k ребра возврата основного торса получаем

$$s = \int \frac{a_1' + a_1 m_1}{3a_1}\, ds^*; \quad k = -\frac{1}{a_1}\left(\frac{3a_1}{a_1' + a_1 m_1}\right)', \tag{105}$$

где $ds^* = \omega_1^2 |_{\omega_1^3 = \omega^3 = 0}$, а штрихи означают дифференцирование по s^*.

Наконец, зная геометрическое значение того или иного аффинного или проективного коварианта комплекса, нетрудно найти его выражение в терминах s-репера. Например, инфлекционные центры [11] суть точки $A + te_1$, где t — один из корней уравнения

$$\begin{gathered} gt^4 + 2t^3(g - c - f) + t^2(a - 2c - 4f + g + 1) - \\ - 2t(f + 1) - 1 = 0, \end{gathered} \tag{106}$$

а аффинный центр [14] есть точка

$$Q = A + \frac{c + f - g}{2g} e_1. \tag{107}$$

Заметим в заключение, что цилиндрическая конгруэнция $\omega_1^2 = 0$ голономна в любом комплексе.

§ 5. Некоторые частные классы комплексов

Так как основная система дифференциальных уравнений не стандартна, то доказательства существования комплексов, характеризующихся натуральными уравнениями, которые связывают только инварианты a, c, f, g, приводит к сложным выкладкам, хотя геометрическое истолкование таких классов очень просто. По той же причине трудно установить, существует ли комплекс, исключенный при фиксации (83), хотя из уравнений (93) сразу следует геометрическое значение этого случая: совпадают два торса, касающиеся полуизотропной плоскости, проходящей через аффинную ось касательного изотропного линейного комплекса (т. е. плоскости (92)).

Поэтому мы отметим здесь лишь некоторые классы комплексов, определяемые соотношениями на коэффициенты форм ω_2^3 и ω_i^i, так как одно такое соотношение в общем случае делает зависимой от остальных форм системы (85) одну из форм Δq_i или Δa_i, что не приводит к нарушению критерия Картана при построении регулярной цепи тем же путем, что и в теореме 1, а влечет только изменение значений характеров.

Поэтому каждый из перечисляемых ниже классов комплексов существует и определяется с произволом трех функций двух аргументов.

1) $q_2 = 2a_2 + 1$; векторы e_1 и e_3 канонического s-репера комплекса совпадают с векторами e_1 и e_2 канонического репера кривой s.

2) $q_2 = 2a_2$; кривая s является циклом (см. формулы (5).

3) $q_2 - 2a_2 = C$, где C — константа, отличная от 0 и 1; векторы e_1 и e_3 s-репера неизменно связаны с векторами канонического репера кривой s; флаговая кривизна кривой s равна $C^{-1}a_2$ (см. формулы (104).

4) $p_2 = 0$, т. е. $a_2 = 1$; направление вектора e_2 остается неизменным вдоль кривой s; кривая s и основной торс определяют голономное подмногообразие Ψ_2 [11] комплекса: $\omega^3 = 0$.

5) $p_1 = 0$, т. е. $a_1 = -a$; линия флаговых центров на основном торсе — прямая.

6) $p_3 = 0$, т. е. $a_3 + c + f = 0$; направление e_2 остается неизменным вдоль цилиндра комплекса; цилиндр и основной торс определяют голономную цилиндрическую конгруэнцию ($\omega_1^3 = 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М., 1969.
2. Пеннер И. А. Кривые в N-мерной геометрии с вырожденным абсолютом.— «Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина», 243, 1965, 260—273.
3. Пеннер И. А. Дифференциальная геометрия пространства Φ_3.— «Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина», 271, 1967, 113—122.
4. Бадяева З. П. Поверхность в трехмерном флаговом пространстве. — Материалы научно-метод. конф. по математике. Красноярск, 1971, 105—107.
5. Бадяева З. П. О некоторых классах поверхностей во флаговом пространстве.— Материалы второй юбилейной межвуз. научн. конф. по матем. и мех., посвященной 20-летию Киргизского ун-та. Фрунзе, 1971, 56—58.
6. Лыжина Т. В. Регулюсы в трехмерном флаговом пространстве.— Геометрический сб., 11 («Труды Томского ун-та», 235), 1973, 75—91.
7. Лыжина Т. В. О линейчатых конгруэнциях в трехмерном флаговом пространстве.— Геометрический сб., 9 («Труды Томского ун-та», 212), 1972, 210—223.
8. Лыжина Т. В., Щербаков Р. Н. Линейчатые комплексы в F_3.— Материалы третьей научн. конф. по матем. и мех. 1, Томск, 1973, 60.
9. Щербаков Р. Н. Неметрическая флаговая дифференциальная геометрия. — Шестая Всесоюзная геометрич. конф. Тезисы докл. Вильнюс, 1975, 265—267.
10. Popa I. Geometrie centro-affine parabolique des courbes et des surfaces. — Ann. sci. Univ Jassy, 21, 1934—1935, 141—181.
11. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск, 1973.
12. Боровский Ю. Е. Применение метода подвижного репера к задаче классификации многообразий в алгебраическом пространстве Клейна.— Матем. заметки, 1970, 7, 3, 311—317.
13. Щербаков Р. Н. Курс аффинной дифференциальной геометрии. Томск, 1960.
14. Кованцов Н. И. Теория комплексов. Киев, 1963.
15. Выжгина Л. Б., Семенова И. Н., Тюрина И. И. Квадрики во флаговых пространствах.— «Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та им. Н. К. Крупской», 123, 3, 1963, 491—507.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 18 1977

В. В. МАЛЮТИН, Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ПЛОСКОСТИ НАД ТЕНЗОРНЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ ТЕЛ

Классическая гиперболическая плоскость ${}^1S_2$ — плоскость Лобачевского — в силу интерпретации Пуанкаре изображается на полуплоскости комплексного переменного таким образом, что ее абсолют изображается точками вещественной оси, т. е. полем $\boldsymbol{R}$ вещественных чисел, дополненным бесконечно удаленной точкой, а движениям плоскости ${}^1S_2$ соответствуют дробно-линейные преобразования вещественной оси, образующие простую группу Ли класса B_1, т. е. группу Ли того же класса, что и группа движений плоскости ${}^1S_2$.

В настоящей работе* показывается, что аналогичные утверждения справедливы для эрмитовых гиперболических плоскостей ${}^1\overline{S}_2(i)$, ${}^1\overline{S}_2(i, j)$, ${}^1\overline{S}_2(i, j, l)$, определенных соответственно над полем комплексных чисел $\boldsymbol{R}(i)$, телом $\boldsymbol{R}(i, j)$ кватернионов и альтернативным телом $\boldsymbol{R}(i, j, l)$ октав ([1], с. 622 и 683), и аналогичных плоскостей ${}^1\overline{\overline{S}}_2(i, \ldots, I, \ldots)$, определенных над тензорными произведениями $\boldsymbol{R}(i, \ldots)\,(\otimes)\,\boldsymbol{R}(I, \ldots) = \boldsymbol{R}(i, \ldots, I, \ldots)$, указанных тел.

§ 1. Представление абсолюта плоскости ${}^1S_2$ элементами поля $\boldsymbol{R}$, дополненного бесконечно удаленной точкой, можно получить с помощью стереографической проекции этого абсолюта на прямую той же плоскости, которую можно рассматривать как проективную прямую P_1. Проводя аналогичные стереографические проекции абсолютов пространств ${}^1\overline{S}_2(i)$, ${}^1\overline{S}_2(i, j)$, ${}^1\overline{S}_2(i, j, l)$, ${}^1\overline{\overline{S}}_2(i, I)$, ${}^1\overline{\overline{S}}_2(i, j, I)$, ${}^1\overline{\overline{S}}_2(i, j, I, J)$, ${}^1\overline{\overline{S}}_2(i, j, l, I)$ на соответствующие проективные прямые $P_1(i)$, $P_1(i, j)$, $P_1(i, j, l)$, $P_1(i, I)$, $P_1(i, j, I)$, $P_1(i, j, I, J)$, $P_1(i, j, l, I)$, мы установим взаимно однозначное соответствие точек проективных прямых с многообразиями точек абсолютов, высекаемыми из них проектирующими прямыми. Указанные проективные прямые можно рассматривать как алгебры $\boldsymbol{R}(i)$, $\boldsymbol{R}(i, j)$, $\boldsymbol{R}(i, j, l)$, $\boldsymbol{R}(i, I)$, $\boldsymbol{R}(i, j, I)$, $\boldsymbol{R}(i, j, I, J)$ и $\boldsymbol{R}(i, j, l, I)$, дополненные бесконечно удаленными и идеальными элементами, играющими роль обратных для нуля и делителей нуля. Таким образом, абсолюты рассматриваемых эрмитовых гиперболических плоскостей являются расслоенными пространствами, базами которых служат соответствующие проективные прямые, а слоями — пересечения абсолютов с проектирующими прямыми. Размерности абсо-

---

*) § 1 и § 2 написаны В. В. Малютиным, § 3 — Б. А. Розенфельдом.

лютов и их пересечений с проектирующими прямыми определяются соответственно по формулам

$$k = pq + p + q - 2 \tag{1}$$

и

$$l = p + q - 2, \tag{2}$$

где p и q — размерности тел-сомножителей.

Заметим, что группами движений плоскостей ${}^1S_2$, ${}^1\bar{S}_2(i)$, ${}^1\bar{S}_2(i, j)$, ${}^1\bar{S}_2(i, j, l)$ являются соответственно некомпактные простые группы Ли классов B_1, A_2, C_3, F_4, образующие первую строку так называемого „магического квадрата Фрейденталя“ ([2], с. 447):

$$\begin{array}{llll} B_1 & A_2 & C_3 & F_4 \\ A_2 & A_2 \otimes A_2 & A_5 & E_6 \\ C_3 & A_5 & D_6 & E_7 \\ F_4 & E_6 & E_7 & E_8. \end{array} \tag{3}$$

Группы движений плоскостей ${}^1\bar{S}_2(i)$, ${}^1\tilde{\bar{S}}_2(i, I)$, ${}^1\tilde{\bar{S}}_2(i, j, I)$ и ${}^1\tilde{\bar{S}}_2(i, j, l, I)$ также некомпактны и образуют вторую строку квадрата (3). Группы движений плоскостей ${}^1\bar{S}_2(i, j)$, ${}^1\tilde{\bar{S}}_2(i, j, I)$, ${}^1\tilde{\bar{S}}_2(i, j, I, J)$ — некомпактные группы Ли классов C_3, A_5, D_6, принадлежащие третьей строке квадрата (3), а группы движений пространств ${}^1\bar{S}_2(i, j, l)$ и ${}^1\tilde{\bar{S}}_2(i, j, l, I)$ — некомпактные группы Ли классов F_4 и E_6, принадлежащие четвертой строке этого квадрата.

§ 2. Рассматриваемые тела и их тензорные произведения можно связать с градуированными алгебрами Ли, определенными И. Л. Кантором ([3], [4]). Для этого обозначим через U_{-1} тело или тензорное произведение тел, а через $<a, b, c>$ — тернарную операцию на U_{-1}, определяемую соотношением

$$<a, b, c> = a(\tilde{\bar{b}}c) - b(\tilde{\bar{a}}c) + c(\tilde{\bar{b}}a), \tag{4}$$

где в правой части обычное умножение в теле или тензорном произведении тел, а черта и волна обозначают сопряжение соответственно в первом и во втором тензорном сомножителе. Определим, используя операцию (4), пространства U_0 и U_{-2} операторов, действующих на U_{-1}, положив

$$U_0 = \{S_{a,b} \mid S_{a,b}(x) = <a, b, x>\} \tag{5}$$

и

$$U_{-2} = \{K_{a,b} \mid K_{a,b}(x) = <a, x, b> - <b, x, a>\} \tag{6}$$

для a, b, x из U_{-1}. Тогда прямая сумма

$$L = U_{-2} \oplus U_{-1} \oplus U_0 \oplus U_1 \oplus U_2, \tag{7}$$

где U_1 и U_2 — вторые экземпляры пространств U_{-1} и U_{-2}, является градуированной алгеброй Ли. В этой алгебре определен инволютивный автоморфизм τ, ставящий в соответствие элементам из U_i $(i \neq 0)$ их „двойники“ из U_{-i}, а операторам $S_{a,b}$ из U_0 операторы $-S_{b,a}$. Закон коммутации в алгебре (7) с учетом указанного инволютивного автоморфизма определяется формулами

$$[U_i, U_j] = U_{i+j}; \quad [S, a] = S(a); \quad [S, K] = SK - K\tau S; \quad [a, b] = K_{a,b};$$
$$[S_1, S_2] = S_1S_2 - S_2S_1; \quad [K, \tau a] = K(a); \quad [a, \tau b] = S_{a,b}; \quad [K_1, \tau K_2] = K_1K_2 \tag{8}$$

для S, S_i из U_0; K_i из U_{-2}; a, b из U_{-1}. Используя корневые системы, корневые пространства и схемы Дынкина полупростых алгебр Ли, можно определить пространства U_i ($i \neq 0$) в разложении (7) полупростой алгебры Ли следующим образом [4]: пусть π — система простых корней алгебры L, A — некоторый набор корней из π, а $\{A\}_i$ — множество положительных или отрицательных корневых векторов алгебры L, которые в разложении по простым векторам имеют при векторах из A сумму координат, равную i. Тогда U_i — прямая сумма корневых пространств, соответствующих векторам из $\{A\}_i$.

Если перейти от алгебр Ли вида (7) к соответствующим группам Ли, то пространству $U_{-2} \oplus U_{-1}$ алгебры в группе Ли будет соответствовать пространство так называемых образов полупростоты корней набора A, а в случае когда A состоит из одного корня — пространство образов простоты этого корня [5].

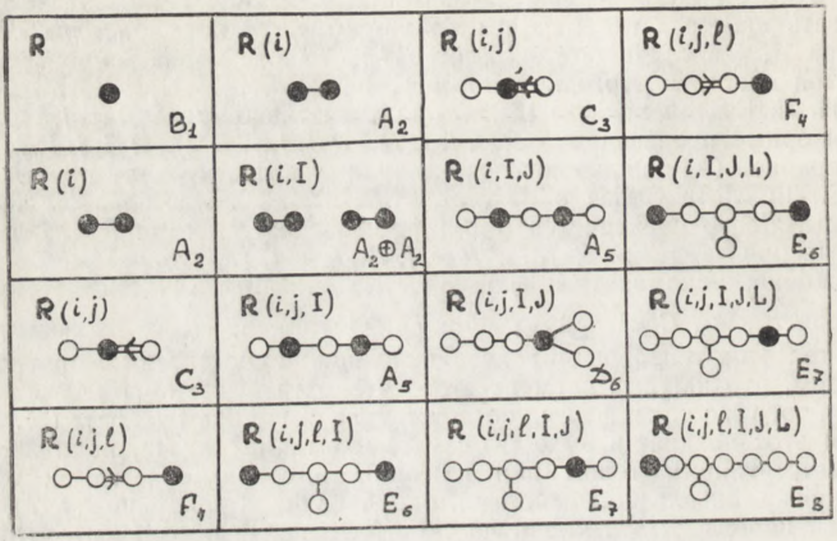
И. Л. Кантор показал [6], что альтернативное тело $\boldsymbol{R}(i, j, l)$ октав и тензорные произведения $\boldsymbol{R}(i, j, l, I)$, $\boldsymbol{R}(i, j, l, I, J)$, $\boldsymbol{R}(i, j, l, I, J, L)$ с операцией (4) порождают по указанному выше правилу простые алгебры Ли соответственно классов F_4, E_6, E_7, E_8. Эти алгебры некомпактны. Легко проверяется (см. [7]), что тела $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}(i)$, $\boldsymbol{R}(i, j)$ и тензорные произведения $\boldsymbol{R}(i, I)$, $\boldsymbol{R}(i, j, I)$, $\boldsymbol{R}(i, j, I, J)$ таким же образом порождают некомпактные полупростые алгебры Ли соответственно классов B_1, A_2, C_3 $A_2 \widehat{\otimes} A_2$, A_5 и D_6. Очевидно, что из рассматриваемых тел и их тензорных произведений можно составить квадрат таким образом, что каждый элемент этого квадрата будет порождать алгебру Ли того же типа, что и соответствующая группа квадрата (3). Приведем этот квадрат в виде (9) с указанием алгебры Ли, порождаемой соответствующим телом или тензорным произведением тел, схемы Дынкина этой алгебры и корней, определяющих градуировку (7), т. е. корней набора A; эти корни на схемах Дынкина обозначены черными кружками.

Пространство $U_{-2} \oplus U_{-1}$ можно рассматривать как тривиально расслоенное пространство с базой U_{-1}, являющейся телом или тензорным произведением тел, и слоем U_{-2}. Составим таблицу, в первой строке которой укажем тело или тензорное произведение тел, во второй — размерность пространства $U_{-2} \oplus U_{-1}$ в соответствующей алгебре Ли L, а в третьей строке — размерность пространства U_{-2}.

Таблица

I	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}(i)$	$\boldsymbol{R}(i, j)$	$\boldsymbol{R}(i, j, l)$	$\boldsymbol{R}(i, I)$	$\boldsymbol{R}(i, j, I)$	$\boldsymbol{R}(i, j, l, I)$	$\boldsymbol{R}(i, j, I, J)$	$\boldsymbol{R}(i, j, l, I, J)$	$\boldsymbol{R}(i, j, l, I, J, L)$
II	1	3	7	15	6	12	24	22	42	78
III	0	1	3	7	2	4	8	6	10	14

Заметим, что числа второй строки таблицы имеют вид (1), а числа третьей строки — вид (2). Если дополнить пространство $U_{-2} \oplus U_{-1}$ бесконечно удаленными и идеальными элементами, соответствующими обратным для нуля и делителей нуля, то указанные тривиальные расслоения перейдут в упомянутые выше нетривиальные расслоения абсолютов определенных нами эрмитовых гиперболических плоскостей над телами или тензорными произведениями тел, так что элементы пространств $U_{-2} \oplus U_{-1}$ можно рассматривать как аффинные координаты точек абсолютов этих плоскостей. Так как движения плоскости ${}^1S_2$ изображаются дробно-линейными преобразованиями вещественной оси, точки которой можно рассматривать как аффинные координаты точек абсолюта плоскости ${}^1S_2$, то преобразования аффинных координат точек абсолютов остальных определенных нами эрмитовых гипер-



(9)

болических плоскостей при движениях этих плоскостей можно рассматривать как обобщение дробно-линейных преобразований на подпространства $U_{-2} \oplus U_{-1}$, соответствующие этим плоскостям.

§ 3. Пространства $U_{-2} \oplus U_{-1}$ для алгебр $\boldsymbol{R}(i, j, l, I, J)$ и $\boldsymbol{R}(i, j, l, I, J, L)$, расширенные указанным образом, можно рассматривать как абсолюты эрмитовых гиперболических плоскостей ${}^1\overset{\simeq}{S}_2(i, j, l, I, J)$ и ${}^1\overset{\simeq}{S}_2(i, j, l, I, J, L)$, которые мы пока не умеем определять в целом. Таким образом, все определенные нами абсолюты гиперболических плоскостей над телами и тензорными произведениями тел представляют собой расширение подпространства $U_{-2} \oplus U_{-1}$ алгебр Ли групп движений этих плоскостей и, следовательно, являются расслоенными пространствами, базами которых служат расширенные тела или тензорные произведения тел, которые можно рассматривать как проективные прямые над соответствующими алгебрами, а слоями—расширенные подпространства U_{-2}, которые можно рассматривать как пересечения указанных абсолютов с проектирующими прямыми. Поэтому квадрату (3) Фрейденталя соответствует квадрат (10) эрмитовых гиперболических плоскостей (для плоскостей ${}^1\overset{\simeq}{S}_2(i, j, l, I, J)$ и ${}^1\overset{\simeq}{S}_2(i, j, l, I, J, L)$ пока определены только их абсолюты):

$$\begin{array}{llll}
{}^1S_2 & {}^1\overline{S}_2(i) & {}^1\overline{S}_2(i, j) & {}^1\overline{S}_2(i, j, l) \\
{}^1\overline{S}_2(i) & {}^1\overset{\approx}{S}_2(i, j) & {}^1\overset{\approx}{S}_2(i, I, J) & {}^1\overset{\approx}{S}_2(i, I, J, L) \\
{}^1\overline{S}_2(i, j) & {}^1\overset{\approx}{S}_2(i, j, I) & {}^1\overset{\approx}{S}_2(i, j, I, J) & {}^1\overset{\approx}{S}_2(i, j, I, J, L) \\
{}^1\overline{S}_2(i, j, l) & {}^1\overset{\approx}{S}_2(i, j, l, I) & {}^1\overset{\approx}{S}_2(i, j, l, I, J) & {}^1\overset{\approx}{S}_2(i, j, l, I, J, L)
\end{array} \tag{10}$$

Если при построении алгебры Ли (7) взять в качестве U_{-1} вместо тела $\boldsymbol{R}(i, \ldots)$ или тензорного произведения тел $\boldsymbol{R}(i, \ldots, I, \ldots) = \boldsymbol{R}(i, \ldots) \oplus \boldsymbol{R}(I, \ldots)$ алгебру $\boldsymbol{R}(\Theta, \ldots)$, обладающую общей комплексной формой с телом $\boldsymbol{R}(i, \ldots)$, например, алгебру $\boldsymbol{R}(e)$ двойных чисел, алгебру $\boldsymbol{R}(i, e)$ антикватернионов, алгебру $\boldsymbol{R}(i, j, e)$ антиоктав ([1], стр. 441 и 535), или тензорное произведение $\boldsymbol{R}(\Theta, \ldots, \Theta, \ldots)$ таких алгебр, то указанным выше образом мы определим абсолюты эрмитовых эллиптических (так как закон инерции эрмитовых форм в пространствах над этими алгебрами не выполняется) плоскостей $\overline{S}_2(\Theta, \ldots)$ и $\overset{\approx}{S}_2(\Theta, \ldots, \Theta, \ldots)$ над указанными алгебрами и группы движений этих плоскостей. На этом пути мы получим все некомпактные группы квадрата Фрейденталя и таким образом для всех этих групп найдем геометрические интерпретации, идея которых для компактных групп Ли была высказана одним из авторов в 1956 году ([8]; см. также [9]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. М., Гостехиздат, 1955.

2. Freudenthal H. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene. VIII. Amsterdam, Indag. Math. 21, 5, S. 447—474.

3. Кантор И. Л. Градуированные алгебры Ли.— «Тр. семин. по вект. и тенз. анализу при МГУ», 15, 1970, 227—266.

4. Кантор И. Л. Некоторые обобщения йордановых алгебр. Там же, 16, 1972, 407—499.

5. Розенфельд Б. А. Образы простоты и полупростоты. Там же. 12, 1963, 269—286.

6. Кантор И. Л. Модели особых алгебр Ли.— «ДАН СССР», 1973, 208, 6, 1276—1279.

7. Малютин В. В. Эрмитовы тернары, алгебры Ли и гиперболические пространства.— Депонированная рукопись, ВИНИТИ, Деп. 1094, апрель 1975.

8. Розенфельд Б. А. Геометрическая интерпретация симметрических пространств с простыми фундаментальными группами. — «ДАН СССР», 1956, 110, 1, 23—26.

9. Розенфельд Б. А. Геометрическая интерпретация квазипростых особых групп Ли классов E_7 и E_8. — «ДАН СССР», 1973, 211, 2, 289—292.

7. Заказ 2357.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 18 1977

А. П. КАРМАЗИН

ЗАМКНУТОСТЬ КЛАССОВ ОТОБРАЖЕНИЙ BL_K^α И $BL_K^\alpha(k)$ ОТНОСИТЕЛЬНО РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ

1. Пусть D — произвольная плоская область, отнесенная к прямоугольной системе координат xoy.

Через l_ξ обозначим множество всех точек из D, лежащих на прямой $x=\xi$, если это множество не пусто. Аналогично определяется множество l_η, $y=\eta$. Будем рассматривать еще множество D_x — проекцию D на ось ox.

Говорят, что некоторое свойство имеет место для почти всех (п. в.) множеств l_x, если для любого измеримого подмножества $D_x' \subset D_x$ найдется подмножество $E_x \subset D_x'$, $\operatorname{mes} E_x = \operatorname{mes} D_x'$, такое, что при $\xi \in E_x$ отмеченное свойство имеет место для l_ξ.

Определение 1. Отображение $T(z) \equiv f_1(z) + if_2(z)$ принадлежит классу BL_K^α в области D, если это отображение непрерывно в D, функции $f_j(x, y)$ абсолютно непрерывны внутри l_x и внутри l_y для почти всех таких множеств и

$$\iint\limits_D \sum_{j=1}^{2}\left(\left|\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|^\alpha + \left|\frac{\partial f_j}{\partial y}\right|^\alpha\right) dx\, dy \leqslant K < \infty, \tag{1}$$

или, что то же самое, если f_j непрерывны в D и имеют в D первые обобщенные производные по x и y в смысле С. Л. Соболева, для которых выполнено (1).

Отображение $T(z)$ принадлежит классу BL^α в D, если $T \in BL_K^\alpha$ при каком-либо конечном K (ср. с классом BL, рассматриваемом в книге [1], см. с. 22).

Пусть на $(0, \infty)$ задана вещественная функция $k(t)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $k(t)$ непрерывна, положительна, конечна, не возрастает и
$$\lim_{t\to+0} k(t) = \infty;$$

2. $\int\limits_0 k(t)\, tdt < \infty$;

3. $\int\limits_0 \frac{k(t)}{t^{\alpha-1}}\, dt = \infty$, $1 < \alpha < 2$.

Определение 2. Отображение $T(z) \equiv f_1(z) + if_2(z)$ принадлежит классу $BL_K^\alpha(k)$ в D, если оно непрерывно в D, функции $f_j(z)$ абсолютно непрерывны внутри l_x и внутри l_y для почти всех таких множеств и

$$\iint\limits_D k(|z-z_0|)\sum_{j=1}^{2}\left(\left|\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|^\alpha+\left|\frac{\partial f_j}{\partial y}\right|^\alpha\right)dx\,dy\leqslant K<\infty,$$

$\forall z_0\in\overline{D}$.

$T(z)$ принадлежит классу $BL^\alpha(k)$ в области D, если $T\in BL_K^\alpha(k)$ при некотором конечном K.

Замечание. Учитывая неравенство

$$(a+b)^\lambda\leqslant a^\lambda+b^\lambda\leqslant 2^{1-\lambda}(a+b)^\lambda,$$

справедливое для $a,\ b\geqslant 0,\ 0<\lambda<1$, нетрудно доказать, что класс $BL^\alpha(k)$ совпадает с классом отображений с ограниченным потенциалом градиента, введенным в рассмотрение в работах [2], [3].

Возникает вопрос о замкнутости классов BL_K^α и $BL_K^\alpha(k)$, $1<\alpha<2$, относительно равномерной сходимости. Мы установим это свойство, воспользовавшись методами, описанными в книге Г. Д. Суворова [1]. Доказательства наших результатов получаются при помощи соответствующих модификаций данных там рассуждений.

2. Проведем доказательство сначала для отображений класса BL_K^α в D.

Лемма 1. Пусть функции

$$\varphi_n(x)=\varphi_{1n}(x)+i\,\varphi_{2n}(x)\ (n=1,2,\dots)$$

(φ_{1n} и φ_{2n} вещественны) удовлетворяют условиям:

а) $\varphi_{jn}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$, $\forall j=1,2$;

б) $$\varliminf_{n\to\infty}\int\limits_0^1(|\varphi_{1n}'|^\alpha+|\varphi_{2n}'|^\alpha)\,dx\leqslant K,\ 1<\alpha<2;$$

в) последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится равномерно к $\varphi(x)=\varphi_1(x)+i\,\varphi_2(x)$ на отрезке $[0,1]$.

Тогда функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ абсолютно непрерывны на $[0,1]$ и

$$\int\limits_0^1(|\varphi_1'|^\alpha+|\varphi_2'|^\alpha)\,dx\leqslant K.$$

Доказательство. Из последовательности $\{\varphi_n\}$ выберем подпоследовательность (обозначим ее снова через $\{\varphi_n\}$), для которой

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1(|\varphi_{1n}'|^\alpha+|\varphi_{2n}'|^\alpha)\,dx\leqslant K.$$

Следовательно, для достаточно больших n

$$\int\limits_0^1(|\varphi_{1n}'|^\alpha+|\varphi_{2n}'|^\alpha)\,dx\leqslant K+1.$$

Выберем произвольно систему попарно непересекающихся интервалов $\delta_r=(\alpha_r,\ \beta_r)\subset[0,\ 1]$ $(r=1,2,\dots,s)$. Тогда

$$\left|\sum_{r=1}^{s}[\varphi_{jn}(\beta_r)-\varphi_{jn}(\alpha_r)]\right|=\left|\int\limits_{\bigcup\limits_{r=1}^{s}\delta_r}\varphi_{jn}'\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 |\varphi'_{jn}|^\alpha dx\right)^{1/\alpha} \left[\operatorname{mes}\left(\bigcup_{r=1}^{s} \delta_r\right)\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \leqslant (K+1)^{1/\alpha} \left[\operatorname{mes}\left(\bigcup_{r=1}^{s} \delta_r\right)\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},$$

где $\frac{\alpha-1}{\alpha} > 0$.

Таким образом, функции φ_{jn} равностепенно абсолютно непрерывны. Отсюда и из условия в) следует, что предельные функции φ_1 и φ_2 абсолютно непрерывны на $[0, 1]$.

Докажем второе утверждение леммы. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Найдется $N(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > N(\varepsilon)$

$$\int_0^1 (|\varphi'_{1n}|^\alpha + |\varphi'_{2n}|^\alpha)\, dx \leqslant K + \varepsilon.$$

Пусть $\Pi: \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_s = 1\}$ — произвольное подразделение сегмента $[0, 1]$. Тогда будем иметь:

$$S(\varphi_{jn};\ \Pi) \equiv \sum_{r=1}^{s} \frac{|\varphi_{jn}(x_r) - \varphi_{jn}(x_{r-1})|^\alpha}{(x_r - x_{r-1})^{\alpha-1}} =$$

$$= \sum_{r=1}^{s} \frac{1}{(x_r - x_{r-1})^{\alpha-1}} \left| \int_{x_{r-1}}^{x_r} \varphi'_{jn}\, dx \right|^\alpha \leqslant \sum_{r=1}^{s} \frac{1}{(x_r - x_{r-1})^{\alpha-1}} \times$$

$$\times \left(\int_{x_{r-1}}^{x_r} dx\right)^{\alpha-1} \int_{x_{r-1}}^{x_r} |\varphi'_{jn}|^\alpha dx = \int_0^1 |\varphi'_{jn}|^\alpha dx.$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{2} S(\varphi_{jn};\ \Pi) \leqslant \int_0^1 (|\varphi'_{1n}|^\alpha + |\varphi'_{2n}|^\alpha)\, dx \leqslant K + \varepsilon.$$

В силу условия в) леммы и произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ для любого подразделения Π сегмента $[0, 1]$ имеет место следующее неравенство для предельной функции $\varphi(x)$:

$$\sum_{j=1}^{2} S(\varphi_j;\ \Pi) \leqslant K,$$

Теперь пусть Π' — подразделение $[0, 1]$ с $x_r = \frac{r}{s}$ $(r = 0, 1, \ldots, s)$.

Положим

$$f_{js}(x) \equiv \frac{\varphi_j(x_r) - \varphi_j(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}}$$

при $x \in (x_{r-1}, x_r)$ $(r = 1, \ldots, s)$. В точках деления полагаем $f_{js}(x_r) = 0$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\int_0^1 (|f_{1s}|^\alpha + |f_{2s}|^\alpha)\, dx = \sum_{r=1}^{s} \int_{x_{r-1}}^{x_r} \sum_{j=1}^{2} \frac{|\varphi_j(x_r) - \varphi_j(x_{r-1})|^\alpha}{|x_r - x_{r-1}|^\alpha}\, dx =$$

$$= \sum_{r=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{2} \frac{|\varphi_j(x_r) - \varphi_j(x_{r-1})|^\alpha}{|x_r - x_{r-1}|^{\alpha-1}} \right) = \sum_{j=1}^{2} S(\varphi_j;\ \Pi').$$

Таким образом,

$$\int_0^1 (|f_{1s}|^\alpha + |f_{2s}|^\alpha)\, dx = \sum_{j=1}^{2} S(\varphi_j;\ \Pi') \leqslant K.$$

Нетрудно убедиться, что п. в. на $[0, 1]$ (исключение могут составить только точки деления и точки, в которых не существуют φ_j')

$$\lim_{s\to\infty} f_{js}(x) = \varphi_j'(x).$$

В силу леммы Фату (см. [4], стр. 50) тогда

$$\int_0^1 (|\varphi_1'|^\alpha + |\varphi_2'|^\alpha)\, dx \leqslant \varliminf_{s\to\infty} \int_0^1 (|f_{1s}|^\alpha + |f_{2s}|^\alpha)\, dx \leqslant K,$$

и лемма доказана.

Лемма 2. Если отображения $T_n(z) \equiv f_{1n}(x, y) + i f_{2n}(x, y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют в замкнутой ограниченной области $\overline{G}$ условиям:

1) $T_n(z) \in BL_K^\alpha$ (K не зависит от n);
2) $T_n(z) \to T(z)$, $T(z) \equiv f_1(x, y) + i f_2(x, y)$ при $n \to \infty$ равномерно на $\overline{G}$, то $T(z) \in BL_K^\alpha$ в $\overline{G}$.

Доказательство. Положим (см. [5], стр. 41—42)

$$\varphi_n(y) = \int_{l_y} \left(\left| \frac{\partial f_{1n}}{\partial x} \right|^\alpha + \left| \frac{\partial f_{2n}}{\partial x} \right|^\alpha \right) dx.$$

Из теоремы Фубини следует, что

$$\iint_{\overline{G}} \left(\left| \frac{\partial f_{1n}}{\partial x} \right|^\alpha + \left| \frac{\partial f_{2n}}{\partial x} \right|^\alpha \right) dx\, dy = \int_{\overline{G}_y} \varphi_n(y)\, dy \leqslant K.$$

Здесь $\overline{G}_y$ — проекция $\overline{G}$ на ось oy.

Из последнего неравенства и леммы Фату заключаем, что функция $\varphi(y) = \varliminf_{n\to\infty} \varphi_n(y)$ конечна для п. в. $y \in \overline{G}_y$, и что

$$\int_{\overline{G}_y} \varphi(y)\, dy \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_{\overline{G}_y} \varphi_n(y)\, dy.$$

Обозначим через H_y множество тех значений y, для которых выполнены условия:

α) все функции $f_{jn}(x, y)$ абсолютно непрерывны по x внутри l_y;
β) функции $\varphi(y)$, $\varphi_n(y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ конечны.

Очевидно, $\operatorname{mes} H_y = \operatorname{mes} \overline{G}_y$ и для каждого фиксированного $y \in H_y$, функции $g_n(x) \equiv f_{1n}(x, y) + i f_{2n}(x, y)$ удовлетворяют всем условиям леммы 1 на любом сегменте, принадлежащем l_y. Действительно, условие а) леммы 1 дается условием α), условие б) леммы 1 следует из равенств

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_{l_y} \left(\left| \frac{\partial f_{1n}}{\partial x} \right|^\alpha + \left| \frac{\partial f_{2n}}{\partial x} \right|^\alpha \right) dx = \varliminf_{n\to\infty} \varphi_n(y) = \varphi(y)$$

и условия β).

Тогда, в силу леммы 1, для $\forall\, y \in H_y$ функции f_1 и f_2 абсолютно непрерывны по x на каждом сегменте из l_y, и

$$\int\limits_{l_y}\left(\left|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|^\alpha+\left|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|^\alpha\right)dx\leqslant\varphi(y).$$

Точно также получим, что для п. в. $x\in\overline{G}_x$ функции f_1 и f_2 абсолютно непрерывны по y на каждом сегменте из l_x, и

$$\int\limits_{l_x}\left(\left|\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|^\alpha+\left|\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|^\alpha\right)dy\leqslant\psi(x),$$

где

$$\psi(x)=\varliminf_{n\to\infty}\psi_n(x)=\varliminf_{n\to\infty}\int\limits_{l_x}\left(\left|\frac{\partial f_{1n}}{\partial y}\right|^\alpha+\left|\frac{\partial f_{2n}}{\partial y}\right|^\alpha\right)dy.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{\overline{G}}\left(\left|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|^\alpha+\left|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|^\alpha+\left|\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|^\alpha+\left|\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|^\alpha\right)dx\,dy\leqslant\int\limits_{\overline{G}_y}\varphi(y)\,dy+\int\limits_{\overline{G}_x}\psi(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int\limits_{\overline{G}_y}\varphi_n(y)\,dy+\varliminf_{n\to\infty}\int\limits_{\overline{G}_x}\psi_n(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\iint\limits_{\overline{G}}\left(\left|\frac{\partial f_{1n}}{\partial x}\right|^\alpha+\left|\frac{\partial f_{2n}}{\partial x}\right|^\alpha+\left|\frac{\partial f_{1n}}{\partial y}\right|^\alpha+\left|\frac{\partial f_{2n}}{\partial y}\right|^\alpha\right)dx\,dy\leqslant K.$$

Лемма 2 доказана.

Легко заметить, что отображение $T(z)$ принадлежит классу BL_K^α в области D тогда и только тогда, когда $T(z)\in BL_K^\alpha$ в любой ограниченной замкнутой подобласти $\overline{D'}\subset D$.

Отсюда и из леммы 2 получается

Теорема 1. Пусть $\{T_n(z)\}$ — последовательность отображений класса BL_K^α в области D, равномерно сходящаяся внутри D к отображению $T(z)$. Тогда $T\in BL_K^\alpha$ в D.

3. Точно по этой же схеме доказывается замкнутость относительно равномерной сходимости отображений класса $BL_K^\alpha(k)$.

Лемма. 3. Пусть функции

$$\varphi_n(x)=\varphi_{1n}(x)+i\,\varphi_{2n}(x)\ \ (n=1,\ 2,\ldots)$$

удовлетворяют условиям:

а) $\varphi_{jn}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$, $j=1, 2$;

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 h(x)\,(|\varphi_{1n}'|^\alpha+|\varphi_{2n}'|^\alpha)\,dx\leqslant K$, где $1<\alpha<2$, а $h(x)$ — непрерывная конечная функция на $[0, 1]$, для которой $\min\limits_{x\in[0,1]}h(x)\geqslant h_0>0$;

в) последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится равномерно к $\varphi(x)=\varphi_1(x)+i\,\varphi_2(x)$ на $[0, 1]$.

Тогда функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ абсолютно непрерывны на $[0, 1]$ и

$$\int\limits_0^1 h(x)\,(|\varphi_1'|^\alpha+|\varphi_2'|^\alpha)\,dx\leqslant K\cdot$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1, выбираем из $\{\varphi_n\}$ подпоследовательность (обозначая ее снова через $\{\varphi_n\}$), для которой

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 h(x)\,(|\varphi'_{1n}|^\alpha + |\varphi'_{2n}|^\alpha)\,dx \leqslant K.$$

Тогда для всех достаточно больших n

$$\int_0^1 h(x)\,(|\varphi'_{1n}|^\alpha + |\varphi'_{2n}|^\alpha)\,dx \leqslant K+1.$$

Далее имеем

$$h_0\int_0^1 (|\varphi'_{1n}|^\alpha + |\varphi'_{2n}|^\alpha)\,dx \leqslant \int_0^1 h(x)\,(|\varphi'_{1n}|^\alpha + |\varphi'_{2n}|^\alpha)\,dx.$$

Следовательно, при $n > N$

$$\int_0^1 (|\varphi'_{1n}|^\alpha + |\varphi'_{2n}|^\alpha)\,dx \leqslant \frac{K+1}{h_0}$$

и мы находимся в условиях леммы 1. Таким образом, функции φ_1 и φ_2 абсолютно непрерывны на $[0, 1]$.

Доказательство второго утверждения леммы проводится точно по схеме доказательства соответствующего утверждения из леммы 1. Укажем только необходимые здесь изменения при построении $S(\varphi_{jn};\ \mathrm{II})$ и $f_{js}(x)$. Полагаем

$$S(\varphi_{jn};\ \mathrm{II}) \equiv \sum_{r=1}^{s} C^{(r)}\,\frac{|\varphi_{jn}(x_r) - \varphi_{jn}(x_{r-1})|^\alpha}{(x_r - x_{r-1})^{\alpha-1}},$$

где

$$C^{(r)} = \min_{x\in[x_{r-1},\ x_r[} h(x);$$

$$f_{js}(x) \equiv (C^{(r)})^{1/\alpha}\,\frac{\varphi_j(x_r) - \varphi_j(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}},$$

если $x \in (x_{r-1},\ x_r)$, $f_{js}(x_r) = 0$.

Лемма 4. Если отображения $T_n(z) \equiv f_{1n}(x,\ y) + i f_{2n}(x,\ y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют в замкнутой ограниченной области $\overline{G}$ условиям:

1) $T_n(z) \in BL_K^\alpha(k)$ (K не зависит от n),

2) $T_n(z) \to T(z)$, $T(z) \equiv f_1(x,\ y) + i f_2(x,\ y)$, при $n\to\infty$ равномерно на $\overline{G}$, то $T(z) \in BL_K^\alpha(k)$ в $\overline{G}$.

Схема доказательства леммы полностью совпадает со схемой доказательства леммы 2. Нужно только соответствующим образом изменить функции $\varphi_n(y)$ и $\psi_n(x)$:

$$\varphi_n(y) = \int_{l_y} k(|z - z_0|)\left(\left|\frac{\partial f_{1n}}{\partial x}\right|^\alpha + \left|\frac{\partial f_{2n}}{\partial x}\right|^\alpha\right)dx;$$

$$\psi_n(x) = \int_{l_x} k(|z - z_0|)\left(\left|\frac{\partial f_{1n}}{\partial y}\right|^\alpha + \left|\frac{\partial f_{2n}}{\partial y}\right|^\alpha\right)dy.$$

Заметим, что, например, при фиксированном y функция $h(x) = k(|z - z_0|)$ удовлетворяет всем условиям, сформулированным в лемме 3: она неотрицательна, непрерывна и $\min h(y) \geqslant h_y > 0$ на любом сегменте из l_y.

Таким образом, нами получена следующая теорема.

Теорема 2. Пусть последовательность $\{T_n(z)\}$ отображений класса $BL_K^\alpha(k)$ в области D равномерно внутри D сходится к отображению $T(z)$. Тогда $T(z) \in BL_K^\alpha(k)$ в D.

ЛИТЕРАТУРА

1. Суворов Г. Д. Семейства плоских топологических отображений. Новосибирск, 1965.
2. Куфарев Б. П. Отображение класса $BL_?^?(k)$. — Материалы IV конф. по математике и механике. 1, Томск, 1974, 16—17.
3. Куфарев Б. П., Соколов Б. В. О соответствии границ при отображениях шара. — Метрические вопросы теории функций и отображений, Киев, «Наукова думка», 7, 1975, 93—104.
4. Сакс С. Теория интеграла. ИЛ, 1949.
5. Сигалов А. Г. Двумерные задачи вариационного исчисления. — УМН, 6, 2 (42), 1951, 16—101.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СЕМИНАР Н. Г. ТУГАНОВА В ТОМСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Доклады, сделанные на заседаниях с сентября 1975 года (о предшествующих заседаниях семинара сообщалось в выпусках 2—8, 12 и 16).

11/IX 1975. Р. Н. Щербаков. О работе геометрического семинара им. Н. Г. Туганова в Томском университете (доклад, прочитанный на Всесоюзном совещании заведующих математических кафедр университетов).

11/IX 1975. А. А. Лучинин. О Шестой Всесоюзной геометрической конференции.

19/IX 1975. Л. З. Кругляков. Торсальные плоскости, ассоциирующиеся с элементом подмногообразия семейства многомерных плоскостей.

2/X 1975. Р. Н. Щербаков, Т. В. Лыжина, Н. А. Мандрикова. Неметрическая флаговая теория кривых и ее приложения к теории комплексов прямых.

9/X 1975. А. Ф. Соловьев. О некоторых свойствах неголономной гиперповерхности, связанных с геодезическими линиями.

23/X 1975. О. А. Сдвижков. Геометрия непараболических m-поверхностей r-квазиевклидова пространства.

13/XI 1975. И. А. Печников. Репераж сопряженных пар пфаффовых многообразий и подмногообразий.

20/XI 1975. Л. З. Кругляков, А. Г. Мизин, Е. С. Никитина. Комплексы индекса один 2-плоскостей в проективном 5-пространстве.

18/XII 1975. И. А. Печников. Об одном изложении алгоритма Э. Картана.

25/XII 1975. В. В. Кайзер. Характеристические векторные поля и неголономные сужения распределений на дифференцируемых многообразиях.

19/XII 1976. В. В. Кайзер. Характеристические подраспределения и сужения дифференцируемых распределений в многомерном проективном пространстве.

4/III 1976. А. Ф. Соловьев. Кривизна и кручение связности, индуцированной распределением в римановом пространстве.

11/III 1976. А. Ф. Соловьев. Внешне и внутренне плоские распределения. Распределения нулевой внешней и нулевой внутренней кривизны.

11/III 1976. Р. Н. Щербаков. Памяти профессора Й. Клапки.

18/III 1976. Л. З .Кругляков. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (обзорный доклад).

25/III 1976. Л. З. Кругляков. Торсальные пфаффовы подмногообразия семейств многомерных плоскостей.

1/IV 1976. В. А. Приходько, Л. З. Кругляков. О комплексе прямых K_1 в проективном 5-пространстве.

22/IV 1976. В. В. Кайзер. Расширения и сужения дифференцируемых распределений в многомерных проективных пространствах.

6/V 1976. Н. К. Смоленцев. Геометрия групп диффеоморфизмов и движения идеальной баротропной жидкости.

20/V 1976. В. Б. Цыренова. К теории поверхностей в трехмерном квазиэллиптическом пространстве.

27/V 1976. Л. Е. Куновская, Л. З. Кругляков. О 2-семействах плоскостей в P_5 и конгруэнциях демиквадрик в P_3.

9/IX 1976. Р. Н. Щербаков, Л. З. Кругляков. О Всесоюзной конференции «150 лет геометрии Лобачевского».

9/IX 1976. Е. С. Никитина. О фокальном класса N—6 и индекса один комплексе плоскостей в проективном N—пространстве.

16/IX 1976. Н. П. Чупахин, Л. З. Кругляков. О псевдофокальной сопряженности в теории семейств многомерных плоскостей.

30/IX 1976. О. А. Сдвижков. Основы теории многомерных поверхностей в полуевклидовых пространствах.

14/X 1976. В. И. Слободской, В. А. Баранова. Комплексная и двойная структуры в многообразиях прямых n-мерных неевклидовых пространств и их применение в теории прямолинейных конгруэнций.

4/XI 1976. Н. М. Онищук. Кафедре геометрии Томского университета — 30 лет.

11/XI 1976. Г. В. Шуленина. О задаче Бианки для конгруэнции коник в проективном пространстве.

18/XI 1976. А. Ф. Соловьев. Распределения постоянной кривизны в E_n.

25/XI 1976. М. С. Бухтяк. Изображение прямых одного линейчатого многообразия точками четырехмерного пространства.

2/XII 1976. В. В. Слухаев. О дифференциальных формах высших порядков.

9/XII 1976. Л. З. Кругляков. О некоторых свойствах комплексов прямых в многомерном проективном пространстве.

16/XII 1976. В. Н. Черненко. О соединимости двух точек 3-мерного C^∞-многообразия интегральной кривой невполнеинтегрируемой дифференциальной системы.

ПОПРАВКА

В статье «Основы теории поверхностей квазиэллиптического пространства S_3^1», опубликованной в ротапринтном сборнике трудов Томского университета, т. 258 (Геометрический сб., вып. 15, 1975), следует внести следующие поправки. Формулы (4), (5), (7) из § 5 и первых два уравнения (5) из § 8 должны иметь вид

$$K = 1 + b\varepsilon^2, \tag{4}$$

$$K = 1 - \beta^2 = 1 - I, \tag{5}$$

$$\nu^2 = \beta^2 \operatorname{ctg}^2\varphi; \tag{7}$$

$$[d\alpha_1\omega^1] + [d\alpha_2\omega^2] = -\alpha_2\nu[\omega^1\omega^2], \ [d\beta_1\omega^1] + [d\beta_2\omega^2] = -\beta_2\nu[\omega^1\omega^2]. \tag{5}$$

В реферате той же статьи следует читать «прямейшие» вместо «прямолинейные».

Цыренова В. Б., Щербаков Р. Н.

РЕФЕРАТЫ

ОПУБЛИКОВАННЫХ СТАТЕЙ

Касательные подпространства и характеристики многообразий, ассоциированных с семейством многомерных плоскостей. Кругляков Л. З. **Геометрический сб., 18.** Изд-во Томского ун-та, 1977, 3—15. Решается вопрос об отыскании всех подмногообразий $L(\Psi_b)$ a-семейства $L(a)$ d-плоскостей L, имеющих заданное касательное t-подпространство l_t или заданную характеристику L_k. Характеристика L_k называется характеристикой первого типа, если касательное подпространство $TL_k(a)$ для плоскости L_k семейства $L_k(a)$ содержит L. В противном случае она называется характеристикой второго типа. Двойственным образом вводятся касательные подпространства l_t подмногообразия $L(\Psi_b)$ первого и второго типа. Выясняется число (если оно конечно) подмногообразий $L(\Psi_b)$, имеющих характеристики L_k или касательные подпространства l_t. Для внутренних (внешних) порожденных семейством $L(a)$ многообразий плоскостей $L_k \subset L$ $(l_t \supset L)$ решается вопрос об отыскании всех L_k (l_t) по заданному касательному подпространству (заданной характеристике) внутреннего (внешнего) порожденного многообразия. Характеристическая поверхность плоскости l_{n-a} внешне порожденного многообразия $l_{n-a}(m_2, a)$ есть гиперповерхность $S^a(l_{n-a})$ порядка a. Рассматриваются случаи, когда поверхность $S^a(l_{n-a})$ распадается. Получены двойственные результаты, с их помощью определено соответствие $L_{d-1} \leftrightarrow l_{d+1}$, где $L_{d-1} \subset L$, а $l_{d+1} \supset L$, и выделены семейства, обладающие таковым.

О плоскостных поверхностях, обладающих торсальными плоскостями. Кругляков Л. З. **Геометрический сб., 18.** Изд-во Томск. ун-та, 1977, 16—24. Пфаффово подмногообразие $L(\Psi_b)$ a-семейства $L(a)$ d-плоскостей L с касательным n-подпространством в проективном N-пространстве при $\rho = n - d - a > 0$ порождает точечное многообразие $X(d, \Psi_b)$. Если во всех неособых точках плоскости $L_k \subset L$ его касательное подпространство $TX(d, \Psi_b)$ одно и то же, то L_k называется торсальной плоскостью относительно $L(\Psi_b)$. Если касательные $(d+a)$-плоскости к плоскостной поверхности $X(d, a)$, описываемой семейством $L(a)$, во всех неособых точках плоскости L_k пересекаются по $(d+\sigma)$-плоскости, то $X(d, a)$ называется поверхностью типа σ по L_k. Эквивалентны в общем случае следующие свойства плоскости L_k: 1) она является торсальной относительно $L(\Psi_b) \subset L(a)$; 2) она сечет характеристическую поверхность плоскости L подмногообразия $L(\Psi_b)$ по $(k-1)$-поверхности порядка b; 3) семейство $L(a)$ описывает поверхность типа $\sigma = b$ по L_k. Для поверхности $X(d, a)$ типа σ по L_k имеет место неравенство $\rho \leqslant k(a-\sigma) + a(d-k)$. Случай $k=d$ рассмотрен в РЖМат, 1975, 4А740.

О k-псевдофокальных семействах плоскостей в проективном пространстве. Щербаков Н. Р. **Геометрический сб., 18.** Изд-во Томск. ун-та, 1977, 25–32. В k-псевдофокальном класса ρ (РЖМат, 1972, 4А785) a-семействе d-плоскостей $L(a)$ плоскость $L_k \subset L$ называется k-псевдофокусом пфаффова подмногообразия $L(\Psi_b)$, если касательное подпространство $TL_k(m_1, a)$, где $m_1 = (k+1)(d-k)$ внутреннего порожденного многообразия $L_k(m_1, a)$ (РЖМат, 1974, 2А 603) совпадает с касательным подпространством $TL(\Psi_b)$ подмногообразия $L(\Psi_b)$. Плоскость L_k является k-псевдофокусом подмногообразия $L(\Psi_b)$ тогда и только тогда, когда характеристика касательного подпространства $TL_k(m_1, a)$ совпадает с касательным подпространством $TL_k(m_1, \Psi_b)$ пфаффова подмногообразия $L_k(m_1, \Psi_b)$, порожденного подмногообразием $L(\Psi_b)$. Если $\rho = a - b$ (тогда $k = d-1$), то для любой $(n-a)$-плоскости $l_{n-a} \supset L$, принадлежащей касательному подпространству $TL_{d-1}(d, a) = TL(\Psi_b)$, характеристическая гиперповерхность $S^a(l_{n-a})$ распадается на гиперповерхность порядка b и на $a-b$ раз взятую плоскость L_{d-1}. Если (при $\rho = a - b$) $\dim TL_{d-1}(m_1, \Psi_b) = n - a$, то плоскость L_{d-1} является $(d-1)$-псевдофокусом подмногообразия $L(\Psi_b)$ тогда и только тогда, когда характеристическая гиперповерхность $S^a[TL_{d-1}(m_1, \Psi_b)]$ есть a раз взятая плоскость L_{d-1}.

О геометрии пары m-поверхностей в проективном пространстве P_n. Лучинин А. А. **Геометрический сб., 18.** Изд-во Томского ун-та, 1977, 33—46 В работе для пары m-поверхностей в n-мерном проективном пространстве при $n \leqslant \frac{m(m+3)}{2}$ аналитически строится инвариантное оснащение для одной из поверхностей, а затем, используя полученное оснащение и объект отображения, строится инвариантное оснащение для другой поверхности. Рассматривается ряд геометрических образов (соприкасающиеся гиперквадрики, характеристики и фокальные образы инвариантных подпространств), которые позволяют выяснить геометрические свойства построенного оснащения. Изучаются также проективные преобразования инвариантных подпространств, связанных с рассматриваемыми поверхностями.

Комплексы индекса один плоскостей в пространстве P_5. Кругляков Л. З., Мизин А. Г., Никитина Е. С. **Геометрический сб., 18.** Изд-во Томского ун-та, 1977, 47—58. Комплексом индекса один двумерных плоскостей L в пятимерном пространстве P_5 называется 4-семейство плоскостей $L(4)$. Устанавливается соответствие между особыми (РЖМат, 1964, 7А459) точками и фокальными класса нуль подмногообразиями (РЖМат, 1971, 6А687). Прямая L_1 плоскости комплекса называется торсальной класса один, если существует такое подмногообразие $L(\widetilde{\Psi}_2)$, что касательное подпространство $TL_1(2, \widetilde{\Psi}_2)$ трехмерно. В общем случае в плоскости L имеется три торсальных класса один прямых, на каждой из них имеется не более двух особых точек, а во всех остальных точках торсальной прямой соответствующие гиперплоскости основного соответствия (РЖМат, 1964, 7А459) образуют пучок с вершиной $TL_1(2, \widetilde{\Psi}_2)$. Подмногообразие $L(\widetilde{\Psi}_2)$ состоит из всех 1-подсемейств, имеющих характеристику на соответствующей прямой L_1. Вводятся точки прикосновения подмногообразий $L(\Psi_1)$ и $L(\Psi_2)$ с плоскостью комплекса и исследуются подмногообразия по расположению точек прикосновения. Обозначения и терминология соответствуют работе Л. З. Круглякова «К дифференциальной геометрии семейств подпространств в проективном пространстве».— Геометрический сб., 16 («Труды Томского ун-та», 263), 1975, 42—57.

Распределения Δ_m на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного центроаффинного пространства ($m<n$). Онищук Н. М. **Геометрический сб., 18.** Изд-во Томского ун-та, 1977, 59—71. В работе показано, что геометрический объект, определяющий распределение Δ_m на многообразии Φ_{2n-1} всех гиперплоских элементов CH, состоит из m-пары $\{L_m, L_{n-m-1}\}$ и отображения h. Инвариант b есть центроаффинное расстояние от плоскости L_m до плоскости L_{n-m-1}. Основная прямая элемента CH есть такая прямая $L_1' \subset H$, что характеристика плоскости, определяемой этой прямой и центром пространства вдоль 1-семейства, проходит через точку C. Доказано, что 1) совокупность основных прямых элемента CH всех тех интегральных 1-семейств Ψ_1 распределения Δ_m, для которых центроаффинное расстояние от касательной к линии $C(\Psi_1)$ до характеристики плоскости H равно инварианту $l \neq -1$ есть $(m-1)$-мерный конус второго порядка; 2) совокупность основных прямых элемента CH всех тех Ψ_1, для которых касательная к линии $C(\Psi_1)$ и характеристика плоскости H составляют небисекантную 1-пару, образуют два конуса второго порядка. Определены аналоги сопряженных и асимптотических линий для интегральных 1-семейств распределения Δ_m. Отмечены их свойства. Дана геометрическая характеристика условию инволютивности распределения Δ_m. Выделены некоторые классы распределений Δ_m.

О задаче Бианки в проективной теории конгруэнций коник. Шуленина Г. В. **Геометрический сб., 18.** Изд-во Томского ун-та, 1977, 72—78. Для невырожденных конгруэнций коник, плоскости которых образуют двупараметрическое семейство, в трехмерном проективном пространстве решена следующая задача: в плоскости каждой коники выбрать прямую L так, чтобы полученная прямолинейная конгруэнция образовывала расслояемую пару с конгруэнцией прямых B_0B_3, где B_0B_3 — ось канонического репера, не лежащая в плоскости коники и проходящая через характеристическую точку B_0 этой плоскости. В общем случае решение определяется с произволом четырех функций двух аргументов (то есть не для произвольной конгруэнции коник). Исследованы некоторые частные классы конгруэнций, дающие решение задачи. Аналогичная задача в аффинной геометрии решена в РЖМат, 1974, 3А572.

Неметрическая флаговая теория кривых и ее приложения к теории комплексов. Лыжина Т. В., Мандрикова Н. А., Щербаков Р. Н. **Геометрический сб., 18.** Изд-во Томского ун-та, 1977, 79—92. Канонические реперы и вычислительные формулы системы инвариантов плоской и пространственной кривых применяются для геометрической характеристики инвариантов и классов линейчатых комплексов в трехмерном неметрическом флаговом пространстве (фундаментальная группа состоит из всех проективных преобразований, сохраняющих флаг, а не только из «движений»), в котором комплекс естественно относится к трем флагово-инвариантным подмногообразиям — плоской кривой, цилиндру и «основному торсу» (касающемуся плоскости, проходящей через луч и параллельной аффинной оси касательного изотропного линейного комплекса). По теории кривых см. также РЖМат, 1968, 8А488; 1965, 12А522. Библ. 15 назв.

Гиперболические плоскости над тензорными произведениями тел. Малютин В. В., Розенфельд Б. А. **Геометрический сб., 18.** Изд-во Томского ун-та, 1977, 93—97. Получены аналоги известной интерпретации плоскости Лобачевского на плоскость комплексного переменного для эрмитовых гиперболических плоскостей, определенных над полем комплексных чисел, телом кватернионов и альтернативным телом октав, а также над их тензорными произведениями. Так как указанные тела и их произведения связаны с градуированными алгебрами Ли, определенными в РЖМат, 1971, 1А371; 1972, 2А386, то геометрически характеризуются и эти группы.

Замкнутость классов отображений BL^{α}_{κ} и BL^{α}_{κ} (k) относительно равномерной сходимости. Кармазин А. П. **Геометрический сб., 18.** Изд-во Томского ун-та, 1977, 98—104. Пусть $\{T_n(z)\}$ — последовательность отображений класса BL^{α}_{κ} либо $BL^{\alpha}_{\kappa}(k)$ ($k(t)$ — ядровая функция) в области D. Показано, что если $\{T_n(z)\}$ сходится равномерно внутри области D к отображению $T(z)$, то $T(z)$ принадлежит тому же классу BL^{α}_{κ} ($BL^{\alpha}_{\kappa}(k)$) в D.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 18

Томск, изд-во ТГУ, 1977 г., 112 с.

Редактор **Л. Л. Зайцева**
Технический редактор **Н. А. Невиницына**
Корректор **Т. В. Зелева**

КЗ02031. Сдано в набор 1/X-76 г. Подписано к печати 2/II-77 г.
Бум. типографская № 2; Формат $70 \times 108^1/_{16}$; п. л. 7; уч.-изд. 8; усл. п. л. 9,8
Заказ 2357. Тираж 500. Цена 1 руб. 20 коп.

Издательство ТГУ. Томск-29, ул. Никитина, 17
Типография издательства «Красное знамя»
Томск, ул. Советская, 47

Цена 1 руб. 20 коп.