МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ОПТИКИ АТМОСФЕРЫ СО РАН им. В.Е. ЗУЕВА

НОВЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ИССЛЕДОВАНИИ СЛОЖНЫХ СТРУКТУР

МАТЕРИАЛЫ
ДВЕНАДЦАТОЙ КОНФЕРЕНЦИИ С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ
4–8 июня 2018 г.

Мероприятие проведено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-07-20033)

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2018

9. *Беккерман Е.Н.* Автореферат дис. ... кандидата физико-математических наук / Нац. исслед. Том. гос. ун-т. Томск, 2017.
10. *Беккерман Е.Н., Катаев С.Г., Катаева С.С.* Эвристический метод аппроксимации случайного потока событий МС-потоком с произвольным числом состояний // Автоматика и телемеханика. 2013. № 9. С. 20–33.

PARAMETER ESTIMATION AND CHANGE-POINT DETECTION FOR AR(P)/ARCH(Q) PROCESS WITH UNKNOWN PARAMETERS*

S.E. Vorobeychikov, Yu.B. Burkatovskaya

Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia
Tomsk State University, Tomsk, Russia
International Laboratory Statistics of Stochastic Processes and Quantitative Finances, Tomsk, Russia
tracey@tpu.ru

The problem of change point detection arises often in different applications connected with time series analysis, financial mathematics, image processing etc. Sequential methods include a special stopping rule that determines a stopping time. Due to a special stopping rule, we construct statistics with variances bounded from above by a known constant. Consequently, we can estimate non-asymptotically the probabilities of false alarm and delay, but we also investigate asymptotic properties of the statistics.

We consider scalar autoregressive process AR(p)/ARCH(q) specified by the equation

$$x_k = \lambda_1 x_{k-1} + \ldots + \lambda_p x_{k-p} + \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x_{k-1}^2 + \ldots + \alpha_q x_{k-q}^2}\,\xi_k$$

Here $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ – is a sequence of independent identically distributed random variables with zero mean and unit variance. The density distribution function $f_\xi(x)$ of $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ is strictly positive for any value of x. Parameters $\Lambda=[\lambda_1,\ldots,\lambda_p]$ and $A=[\alpha_0,\ldots,\alpha_q]$ are supposed to be unknown.

Since the noise variance of the observed process is unbounded from above, we transform the model; hence, we obtain a model with the noise variance bounded from above by an unknown constant. For parameter estimation of the process, we construct a special factor Γ_n at the interval $[0,n+s]$, where $s=\max\{q,p\}$, to compensate the influence of the unknown constant. Then, we estimate autoregressive parameters by using this factor in the frame of sequential procedure. We introduce a stopping time $\tau(H)$ depending on the positive parameter H and construct a weighted least-squares sequential estimator on the interval $[n+1,\tau]$. Due to the stopping time and the weights, the standard deviation of the estimator is bounded from above by a known constant, which is inversely proportional to H. Also we prove a variant of vector central-limit martingale theorem, which allows investigating asymptotic properties of the estimator.

Suppose that after a certain instant θ, parameter vectors (Λ, A) change their values from (Λ_0, A_0) to (Λ_1, A_1), and $\|\Lambda_0-\Lambda_1\|^2\geq\Delta$. We construct a series of sequential estimation plans $\left(\tau_i,\hat{\Lambda}_i\right)$, where $\{\tau_i\}$ is the increasing sequence of the stopping instances ($\tau_0=-1$), and $\hat{\Lambda}_i$ is the guaranteed parameter estimator on the interval $[\tau_{i-1}+1,\tau_i]$. Then we choose an integer $l>1$ and associate the statistic J_i with the i–th interval for all $i>l$

$$J_i = \left(\hat{\Lambda}_i - \hat{\Lambda}_{i-l}\right)^T \left(\hat{\Lambda}_i - \hat{\Lambda}_{i-l}\right).$$

This statistic is the squared deviation of the estimators with numbers i and $i-l$. The proposed statistics change their expectation after a change point. That allows us to construct the following change-point detection algorithm. The J_i values are compared with a certain threshold δ. The change point is considered to be detected when the value of the statistic exceeds δ.

The probabilities of false alarm P_0 and the probability of delay P_1 in any observation cycle $[\tau_{i-1}+1,\tau_i]$ are important characteristics of any change point detection procedure. Due to the application of the guaranteed parameter estimators in the statistics, we can obtain the upper bounds for these probabilities

$$P_0 \leq \frac{4(H+p-1)}{\delta H^2}, \quad P_1 \leq \frac{4(H+p-1)}{\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right)^2 H^2}.$$

Asymptotic properties of the estimators let us establish the following asymptotic upper bounds of the error probabilities. For ergodic AR(p)/ARCH(q) process and for sufficiently large H we obtain the inequalities

$$P_0 \leq 4\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{\delta}H}{2\sqrt{(H+p-1)}}\right)\right), \quad P_1 \leq 4\left(1-\Phi\left(\frac{\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right)H}{2\sqrt{(H+p-1)}}\right)\right).$$

* Authors are supported by the RFBR grant № 16-01-00121.

We conducted numerical simulation of the proposed estimation and change point detection algorithms for AR(p)/ARCH(q) process. For the estimator, the mean number of the observations increases linearly by H. This property is important for sequential estimators. The sample mean-square error of the estimation is about three times less than the theoretical one. One can see that when the difference between the parameters is sufficiently large then the sample error probabilities are much less than their theoretical upper bounds. Moreover, generally no false alarms and skipping the change point were registered. The results of numerical simulation prove the possibility to use the proposed algorithm used for change point detection of recurrent processes with unknown noise variance. However, the algorithms should be improved through more accurate compensation of the noise variance.

АНАЛИЗ ОТКРЫТОЙ СЕТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ЗАЯВОК И ОБХОДАМИ

А.О. Галицкая

Гродненский государственный университет имени Я. Купалы, Гродно, Республика Беларусь
g_alexandra_06@mail.ru

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания с однотипными заявками, общее число которых ограничено. Пусть S_i, $i=\overline{1,n}$ – СМО, между которыми циркулируют заявки, S_0 – внешняя среда. Каждая заявка входного потока независимо от других с вероятностью p_{0i} направляется в i-ю СМО, $i=\overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n} p_{0i}=1$.

Предположим, что система S_i имеет m_i линий обслуживания, каждая из которых обслуживает заявки по показательному закону с интенсивностью μ_i, $i=\overline{1,n}$. В систему поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Заявка, завершающая обслуживание в системе S_i, мгновенно независимо от других заявок с вероятностью p_{ij}, $j=\overline{1,n}$, переходит в систему S_j или с вероятностью p_{i0} покидает сеть, $\sum_{j=0}^{n} p_{ij}=1$. Матрицы вероятностей переходов $P=\|p_{ij}\|$, $0 \le p_{ij} \le 1$, являются стохастическими матрицами, соответствующей неприводимой марковской цепи.

Будем считать, что общее число заявок в рассматриваемой открытой сети ограничено константой K. Состояние сети определяется вектором

$$k(t)=(k_1(t),k_2(t),...,k_n(t)), \tag{1}$$

где $k_i(t)$ – число заявок в системе S_i в момент времени t, $i=\overline{1,n}$.

Проведен асимптотический анализ марковского процесса (1) при большом, но ограиченном числе заявок.

Пусть $\varphi_i, \alpha_i, \beta_{ij}$ – условные вероятности событий, определенные в [1], $i,j=\overline{1,n}$.

Чтобы найти распределение вероятностей случайного вектора $k(t)$ рассматривается вектор

$$x(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))=\left(\frac{k(t)}{K}\right)=\left(\frac{k_1(t)}{K},\frac{k_2(t)}{K},...,\frac{k_n(t)}{K}\right).$$

Доказано, что плотность распределения вектора (1) с точностью до $O\left(\frac{1}{K^2}\right)$ удовлетворяет уравнению Колмогорова-Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=-\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(A_i(x,t)p(x,t))+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=0}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}(B_{ij}(x,t)p(x,t)), \text{ где}$$

$$A_0(x,t)=\sum_{j=0}^{n}\mu_j\varepsilon_j(x_j,t)(\beta_{0j}-\delta_j)+\lambda(1-\sum_{i=0}^{n}x_i)(1-\varphi_0), i=\overline{1,n}, \tag{2}$$

$$A_i(x,t)=\sum_{j=0}^{n}\mu_j\varepsilon_j(x_j,t)(\beta_{ij}-\delta_j)+\sum_{j-0}^{n}\mu_j\varepsilon_j(x_j,t)(\alpha_j-\delta_j), i=\overline{1,n}. \tag{3}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $\varepsilon_j(x_j,t)=\min(x_j(t),m_j), i=\overline{1,n}$.