ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 58, № 11/2 ФИЗИКА 2015

УДК 519.865

К.И. ЛИВШИЦ, Е.С. УЛЬЯНОВА

ДИФФУЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПРОЦЕССА ПРОИЗВОДСТВА И СБЫТА СКОРОПОРТЯЩЕЙСЯ ПРОДУКЦИИ

Найдена плотность распределения количества скоропортящейся продукции при непрерывном производстве и релейном управлении ценой продажи.

Ключевые слова: *скоропортящаяся продукция, плотность распределения, диффузионная аппроксимация.*

Модели управления запасами с ограниченным сроком годности интенсивно изучаются в последние годы. За это время появилось несколько обзорных статей по данной теме, например обзоры S.K. Goyal, B.C. Giri [1], M. Bakker, J. Riezebos и R.H. Teunter [2]. Укажем еще на работы V.K. Mishra и L.S. Singh [3, 4], R. Begum, S.K. Sahu, R.R. Sahoo [5, 6], R.P. Tripathi, D. Singh, T. Mishra [7], в которых рассматриваются модели управления запасами, непрерывно портящихся с течением времени, при условии, что спрос на продукцию является известной функцией от времени. В работе [8] рассматривается модель управления запасами, где спрос на продукты является известной функцией от времени, а процесс ухудшения продукции рассматривается как случайный с функцией распределения Вейбулла. В статье [9] рассматривается модель управления непрерывно портящимися запасами, где спрос является известной функцией от цены.

1. Математическая модель задачи

В настоящей работе задача поступления (производства) и сбыта скоропортящейся продукции рассматривается при следующих предположениях. Считается, что продукция поступает с постоянной скоростью C, так что за время t поступает Ct единиц продукции. При хранении продукция непрерывно портится. Пусть $S(t)$ – количество продукции в момент времени t. Тогда потери за малое время Δt равны $kS(t)\Delta t$. Будем считать далее, что величины покупок – независимые случайные величины с плотностью распределения $\varphi(x)$, средним значением $M\{x\}=a$ и вторым моментом $M\{x^2\}=a_2$. Моменты продаж образуют пуассоновский поток, интенсивность которого λ зависит от цены продажи b. Считается, что интенсивность потока продаж λ монотонно убывает с ростом цены b. Управление продажами осуществляется следующим образом. Вводится пороговое значение допустимого запаса продукции S_0. При $S(t)\le S_0$ назначается цена продажи b_0, при $S(t)>S_0$ назначается цена продажи $b_1<b_0$. В соответствии с этим текущая интенсивность потока моментов продаж имеет вид

$$\lambda(S)=\begin{cases}\lambda_0, S\le S_0,\\ \lambda_1, \mathrm{S}>\mathrm{S}_0.\end{cases} \tag{1}$$

Естественно считать, что $C-\lambda_0 a>0$ и $C-\lambda_1 a<0$. До достижения критического уровня S_0 создается запас продукции, затем начинается ее распродажа. Наконец, возможна ситуация, когда текущий спрос не может быть удовлетворен полностью. В этом случае считается, что $S(t)<0$. Заказы удовлетворяются в порядке их поступления.

Обозначим

$$P(S,t)=\frac{\Pr\{S\le S(t)<S+dS\}}{dS}$$

– плотность распределения количества продукции S в момент времени t.

Теорема 1. Если $P(S,t)$ дифференцируема по t, $SP(S,t)$ дифференцируема по S, то функция $P(S,t)$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial P(S,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial S}\left[(kSI(S)-C)P(S,t)\right]-\lambda(S)P(S,t)+\int_0^\infty \lambda(S+y)P(S+y,t)\varphi(y)dy, \tag{2}$$

где $I(S)$ – единичная ступенчатая функция.

Пример. Рассмотрим в качестве примера простейший случай, когда покупки имеют экспоненциальное распределение

$$\varphi(S)=\frac{1}{a}\exp\left(-\frac{S}{a}\right).$$

В стационарном режиме при $t\to\infty$ уравнение (2) принимает вид

$$\frac{d}{dS}\left[(kS-C)P(S)\right]-\lambda_1 P(S)+\frac{\lambda_1}{a}e^{\frac{S}{a}}\int_S^\infty P(z)\mathrm{e}^{-\frac{z}{a}}dz=0,\quad S>S_0; \tag{3}$$

$$\frac{d}{dS}\left[(kSI(S)-C)P(S)\right]-\lambda_0 P(S)+\frac{\lambda_0}{a}e^{\frac{S}{a}}\int_S^{S_0} P(z)e^{-\frac{z}{a}}dz+\frac{\lambda_1}{a}e^{\frac{S}{a}}\int_{S_0}^\infty P(z)e^{-\frac{z}{a}}dz=0,-\infty<S\le S_0. \tag{4}$$

Решая уравнения (3) и (4), получим

$$P(S)=\begin{cases} Be^{\frac{C-\lambda_0 a}{Ca}S}, & S<0,\\ B\left(1-\frac{k}{C}S\right)^{\frac{\lambda_0}{k}-1}e^{\frac{S}{a}}, & 0\le S\le S_0,\\ B\left(1-\frac{k}{C}S_0\right)^{\frac{\lambda_0-\lambda_1}{k}}\left(1-\frac{k}{C}S\right)^{\frac{\lambda_1}{k}-1}e^{\frac{S}{a}}, & S_0<S\le\frac{C}{k},\end{cases} \tag{5}$$

где постоянная B определяется из условия нормировки.

2. Диффузионная аппроксимация процесса производства и сбыта

В общем случае найти решение уравнения (2) не удается даже в стационарном режиме. Поэтому представляет интерес построение приближенных решений уравнения (2).

Будем предполагать, что скорость производства $C=cN$, интенсивности потоков покупок $\lambda_0=\Lambda_0 N,\ \lambda_1=\Lambda_1 N$, порог $S_0=s_0N$, где $N\gg 1$. Рассмотрим поведение решения уравнения (2) при $N\to\infty$. Обозначим $\varepsilon^2=1/N$. Введем функцию

$$F(S,t,\varepsilon)=P\left(\frac{S}{\varepsilon},t\right). \tag{6}$$

Рассмотрим вначале область $S>S_0$. Уравнение (2) в этой области перепишется в виде

$$\varepsilon^2\frac{\partial F(y,t,\varepsilon)}{\partial t}+\Lambda_1 F(y,t,\varepsilon)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left[(k\varepsilon y-c)F(\mathrm{y},t,\varepsilon)\right]+\Lambda_1\int_0^\infty F(y+\varepsilon z,t,\varepsilon)\varphi(z)dz. \tag{7}$$

Раскладывая функцию $F(y+\varepsilon z,t,\varepsilon)$ в ряд Тейлора по первому аргументу и ограничиваясь первыми тремя членами разложения, получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial F(y,t,\varepsilon)}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left[(k\varepsilon y-c+\Lambda_1 a)F(y,t,\varepsilon)\right]+\Lambda_1\frac{a_2}{2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 F(y,t,\varepsilon)}{\partial y^2}+o(\varepsilon^2). \tag{8}$$

Введем новые переменные

$$t=t,\quad u=y-\frac{1}{\varepsilon}x(t), \tag{9}$$

где функцию $x(t)$ определим ниже и функцию $Q(u,t,\varepsilon)$ соотношением

$$F(y,t,\varepsilon)=Q\left(y-\frac{1}{\varepsilon}x(t),t,\varepsilon\right). \tag{10}$$

Потребуем, чтобы функция $x(t)$ удовлетворяла уравнению

$$\dot{x}(t)=-kx(t)+c-\Lambda_1 a. \tag{11}$$

Тогда для функции $Q(u,t,\varepsilon)$ будем иметь

$$\frac{\partial Q(u,t,\varepsilon)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial u}\left[kuQ(u,t,\varepsilon)\right]+\frac{\Lambda_1 a_2}{2}Q(u,t,\varepsilon)+\frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}. \tag{12}$$

Пусть

$$Q(u,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}Q(u,t,\varepsilon)\,. \tag{13}$$

Тогда

$$\frac{\partial Q(u,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial u}\left[kuQ(u,t)\right]+\frac{\Lambda_1 a_2}{2}\frac{\partial^2 Q(u,t)}{\partial u^2}. \tag{14}$$

Соответствующее (14) стохастическое дифференциальное уравнение для процесса $u(t)$ имеет вид

$$du(t)=-ku(t)dt+\sqrt{\Lambda_1 a_2}\,dW(t), \tag{15}$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Из уравнений (11) и (15), учитывая сделанные замены переменных, будем иметь для процесса $\xi(t)=\varepsilon^2 S(t)$ при $\varepsilon\ll 1$

$$d\xi(t)=-k\xi(t)dt+(c-\Lambda_1 a)dt+\sqrt{\Lambda_1 a_2}\,\varepsilon dW(t). \tag{16}$$

Пусть

$$h(z,t)=\frac{\partial \Pr\{\xi(t)<z\}}{\partial z}. \tag{17}$$

Согласно (16), плотность распределения $h(z,t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial h(z,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}\left[(c-\Lambda_1 a-kz)h(z,t)\right]+\frac{\Lambda_1 a_2}{2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 h(z,t)}{\partial z^2}. \tag{18}$$

В стационарном режиме получим для плотности распределения

$$h(z)=\lim_{t\to\infty}h(z,t)\,,$$

$$\frac{\Lambda_1 a_2\varepsilon^2}{2}\frac{d^2 h(z)}{dz^2}+\frac{d}{dz}\left[(\Lambda_1 a-c+kz)h(z)\right]=0\,, \tag{19}$$

откуда

$$h(z)=Be^{-\frac{(\Lambda_1 a-c+kz)^2}{\Lambda_1 a_2\varepsilon^2 k}}. \tag{20}$$

Рассмотрим теперь область $S<S_0$. Уравнение (2) относительно функции $F(S,t,\varepsilon)$ (6) теперь перепишется как

$$\varepsilon^2\frac{\partial F(y,t,\varepsilon)}{\partial t}+\Lambda_0 F(y,t,\varepsilon)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left[(k\varepsilon yI(y)-c)F(y,t,\varepsilon)\right]+\Lambda_0\int_0^\infty F(y+\varepsilon z,t,\varepsilon)\varphi(z)dz+R(y,\varepsilon)\,, \tag{21}$$

где

$$R(y,\varepsilon)=(\Lambda_1-\Lambda_0)\int_{S_0-\frac{y}{\varepsilon}}^{\infty}F(y+\varepsilon z,t,\varepsilon)\varphi(z)dz=o(\varepsilon^2),$$

так как функция $F(y,t,\varepsilon)$ ограничена и второй момент a_2 существует. Поэтому последнее слагаемое в уравнении (21) в дальнейшем не учитывается. Раскладывая $F(y+\varepsilon z,t,\varepsilon)$ в ряд Тейлора по первому аргументу, получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial F(y,t,\varepsilon)}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left[(k\varepsilon yI(\mathrm{y})-c+\Lambda_0 a)F(y,t,\varepsilon)\right]+\Lambda_0\frac{a_2}{2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 F(\mathrm{y},t,\varepsilon)}{\partial y^2}+o(\varepsilon^2). \tag{22}$$

Рассмотрим область $y<0$. Сделав замены (9) и (10) и положив

$$\dot{x}(t)=c-\Lambda_0 a\,, \tag{23}$$

получим при $\varepsilon\to 0$ для функции (13)

$$\frac{\partial Q(u,t)}{\partial t}=\frac{\Lambda_0 a_2}{2}\frac{\partial^2 Q(u,t)}{\partial u^2}. \tag{24}$$

Пусть $y>0$. Сделав замены (9) и (10) и положив

$$\dot{x}(t)=-kx(t)+c-\Lambda_0 a\ , \tag{25}$$

получим при $\varepsilon\to 0$ для функции (13)

$$\frac{\partial Q(u,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial u}\left[kuQ(u,t)\right]+\frac{\Lambda_0 a_2}{2}\frac{\partial^2 Q(u,t)}{\partial u^2}. \tag{26}$$

Из соотношений (23) – (26) вытекает, что при $\varepsilon\ll 1$ процесс $\xi(t)=\varepsilon^2 S(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t)=-k\xi(t)I(\xi(\mathrm{t}))dt+(c-\Lambda_0 a)dt+\sqrt{\Lambda_0 a_2}\,\varepsilon dW(t). \tag{27}$$

Поэтому в стационарном режиме плотность распределения (17) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\Lambda_0 a_2\varepsilon^2}{2}\frac{d^2h(z)}{dz^2}+\frac{d}{dz}\left[(\Lambda_0 a-c+kzI(z))h(z)\right]=0. \tag{28}$$

С учетом граничного условия $h(-\infty)=0$ в области $z<0$ получим

$$h(z)=De^{\frac{2(c-\Lambda_0 a)}{\Lambda_0 a_2\varepsilon^2}z}. \tag{29}$$

В области $0\le z\le s_0$ решение уравнения (28) имеет вид

$$h(z)=(D_1+D_2\int_0^z e^{-\frac{(kx+c-\Lambda_0 a)^2}{k\Lambda_0 a_2\varepsilon^2}}dx)e^{\frac{(kz+c-\Lambda_0 a)^2}{k\Lambda_0 a_2\varepsilon^2}}. \tag{30}$$

В точке $z=0$ должны выполняться условия непрерывности $h(0-0)=h(0+0), h'(0-0)=h'(0+0)$, так как функция $h(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка, откуда $D_2=0$ и $D=D_1 e^{\frac{(c-\Lambda_0 a)^2}{\Lambda_0 a_2\varepsilon^2}}$.

Таким образом, плотность распределения $h(s)$ определяется соотношением

$$h(s)=\begin{cases} Ae^{\frac{(c-\Lambda_0 a)^2}{\Lambda_0 a_2\varepsilon^2 k}}e^{\frac{2(c-\Lambda_0 a)}{\Lambda_0 a_2\varepsilon^2}s}, & s<0,\\ Ae^{\frac{(ks+c-\Lambda_0 a)^2}{\Lambda_0 a_2\varepsilon^2 k}}, & 0\le s\le s_0,\\ Be^{-\frac{(ks+c-\Lambda_1 a)^2}{\Lambda_1 a_2\varepsilon^2 k}}, & s>s_0. \end{cases} \tag{31}$$

Связь между постоянными A и B определяется далее, во-первых, условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{0}h(s)ds+\int_0^{s_0}h(s)ds+\int_{s_0}^{\infty}h(\mathrm{s})ds=1,$$

и, во-вторых, рассмотрением уравнения (2) при $S=S_0$ в стационарном режиме, которое в этом случае принимает вид

$$(kS_0-C)\frac{\partial P(S_0,\infty)}{\partial S}+(k-\lambda_0)P(S_0,\infty)+\lambda_1\int_0^{\infty}P(S_0+y,\infty)\varphi(y)dy=0. \tag{32}$$

Заменяя плотность $P(S,\infty)$ на ее аппроксимацию (31), получим второе уравнение, связывающее постоянные A и B. Для получения окончательных соотношений необходимо, очевидно, задать явный вид плотности распределения $\varphi(y)$.

Таким образом, в работе найдена плотность распределения количества скоропортящейся продукции при релейном управлении интенсивностью продаж и дополнительном предположении о том, что темп производства и интенсивность продаж достаточно велики. Аналогично вышеизло-

женному могут быть исследованы и более сложные алгоритмы управления продажами, например алгоритм с гистерезисным управлением продажами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Goyal S.K., Giri B.C. // Eur. J. Operat. Res. – 2001. – V. 134 (1). – P. 1–16.
2. Bakker M., Riezebos J., Teunter R.H. // E. J. Operat. Res. –2012. – V. 221. – P. 275–284.
3. Mishra V.K. // J. Industrial Eng. Management. – 2013. – V. 6(2). – P. 495–506.
4. Mishra V.K. // J. Industrial Eng. Management. – 2011. – V. 6(4). – P. 269–271.
5. Begum R., Sahu S.K., Sahoo R.R. // British J. Appl. Sci. Technol. – 2012. – V. 2(2). – P. 112–131.
6. Begum R., Sahu S.K. // Int. J. Inventory Control and Management. – 2012. – V. 2. – No. 2. – P. 257–268.
7. Tripathi R.P., Singh D., Mishra T. // Int. J. Supply and Operations Management. – 2014. – V. 1. – Iss. 1. –P. 20–37.
8. Sharma V., Chaudhary R. // Res. J. Management Sci. – 2013. – V. 2(3). – P. 28–30.
9. Tripathy C.K., Mishra U. // Appl. Mathematical Sci. – 2010. – V. 4. – No. 44. – P. 2171–2179.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия
E-mail: kim47@mail.ru; katerina_tomsk@sibmail.com.

Поступила в редакцию 14.10.15.

Лившиц Климентий Исаакович, д.т.н., профессор;
Ульянова Екатерина Сергеевна, аспирантка.

K.I. LIVSHITS, E.S. ULYANOVA

DIFFUSION APPROXIMATION OF THE PRODUCTION AND SELLING OF PERISHABLE PRODUCTS

In this paper the density distribution of the number of perishable products with continuous production and relay control sales price has been found.

Keywords: *perishable products. diffusion approximation, density distribution.*

REFERENCES

1. Goyal S.K., Giri B.C. Recent trends in modeling of deteriorating inventory. *European Journal of Operational Research*, 2001, vol. 134 (1), pp. 1–16.
2. Bakker M., J. Riezebos J., Teunter R.H. Review of inventory systems with deterioration since 2001. *European Journal of Operational Research*, 2012, vol. 221, pp. 275–284.
3. Mishra V.K. An inventory model of instantaneous deteriorating items with controllable deterioration rate for time dependent demand and holding cost. *Journal of Industrial Engineering and Management*, 2013, vol. 6(2), pp. 495–506.
4. Mishra V.K. Deteriorating inventory model with time dependent demand and partial backlogging. *Journal of Industrial Engineering and Management*, 2011, vol. 6(4), pp. 269–271.
5. Begum R., Sahu S.K., Sahoo R.R. An Inventory Model for Deteriorating Items with Quadratic Demand and Partial Backlogging. *British Journal of Applied Science & Technology*, 2012, vol. 2(2), pp. 112–131.
6. Begum R., Sahu S.K. An EOQ model for deteriorating items quadratic demand and shortages. *International Journal of Inventory Control and Management*, 2012, vol. 2, no. 2, pp. 257–268.
7. Tripathi R.P., Singh D., Mishra T. EOQ model for deteriorating Items with exponential time dependent demand rate under inflation when supplier credit linked to order quantity. *International Journal of Supply and Operations Management*, 2014, vol. 1, iss. 1, pp. 20–37.
8. Sharma V., Chaudhary R. An inventory model for deteriorating items with weibull deterioration with time dependent demand and shortages. *Research Journal of Management Sciences*, 2013, vol. 2(3), pp. 28–30.
9. Tripathy C.K., Mishra U. An inventory model for weibull deteriorating items with price dependent demand and time-varying holding cost. *Applied Mathematical Sciences*, 2010, vol. 4, no. 44, pp. 2171–2179.