



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2019)

**МАТЕРИАЛЫ
XVIII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
26–30 июня 2019 г.**

Часть 2



ТОМСК
«Издательство НТЛ»
2019

Исследование замкнутой RQ-системы M/GI/1//N с вызываемыми заявками

А.А. Назаров^{*1}, А.С. Квач^{**1}, Я. Штрик²

¹Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия
²Дебреценский университет, г. Дебрецен, Венгрия

В настоящее время среди широкого класса RQ-систем [1, 2] системы с вызываемыми заявками представляют особый практический интерес. Один из типичных примеров такой системы – это call-центры, где оператор в свободное от обслуживания поступающих звонков время может сам производить исходящий звонок абонентам для предоставления актуальной информации, предложения товаров, акций. Первые результаты по RQ-системам с вызываемыми заявками были получены Фалиным [3], другие результаты по исследованию данных систем можно найти в работах [4–6].

В отличие от классической системы с вызываемыми заявками в данной модели учитывается тот факт, что при увеличении числа заявок в системе интенсивность генерирования новой заявки уменьшается. В такой ситуации используются модели с конечным числом источников [7–10].

Стоит отметить, что в данной системе заявки вызываются либо из источника, либо с орбиты. Ранее такая система была представлена в работе [11] для случая экспоненциального обслуживания поступающих и вызываемых заявок. Также для замкнутой RQ-системы M/M/1//N с вызываемыми заявками в работе [12] авторами было выполнено исследование времени пребывания заявки на орбите.

Постановка задачи

Рассматривается немарковская замкнутая RQ-система с вызываемыми заявками (рис. 1). Источник, отправивший заявку на обслуживание, не генерирует новую до тех пор, пока заявка не завершит свое обслужи-

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00277).

** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-41-703002.

живание. Каждый из N источников генерирует заявку и отправляет ее на прибор с интенсивностью λ/N . Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его для обслуживания. Время обслуживания каждой заявки является случайной величиной с произвольной функцией распределения $B_1(x)$ с первым и вторым начальными моментами b_1 и $b_1^{(2)}$ соответственно. Если прибор занят, то заявка переходит на орбиту и после случайной задержки, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ/N , она вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата.

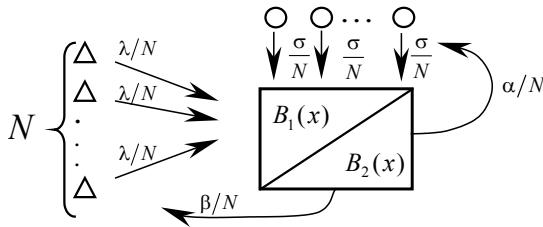


Рис 1. Замкнутая RQ-система M/GI/1/N с вызываемыми заявками

В данной модели предполагается, что прибор в свободном состоянии может осуществлять вызов заявок с орбиты с интенсивностью α/N или из источника с интенсивностью β/N . Обслуживание вызванных прибором заявок имеет произвольную функцию распределения $B_2(x)$ с соответствующими первым и вторым начальными моментами b_2 и $b_2^{(2)}$.

Пусть $n(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t , а процесс $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{прибор свободен,} \\ 1, & \text{прибор занят поступившей заявкой,} \\ 2, & \text{прибор занят вызванной заявкой.} \end{cases}$$

Для рассматриваемой системы процесс $\{k(t), n(t)\}$ не является марковским. Для его марковизации воспользуемся методом дополнительной переменной, а именно методом остаточного времени обслуживания.

Введем случайный процесс $z(t)$, имеющий смысл длины интервала от момента t до момента окончания обслуживания заявки. Таким образом, исследуется марковский процесс $\{k(t), n(t), z(t)\}$, если $k(t) = 1, 2$ и $\{k(t), n(t)\}$ при $k(t) = 0$.

Обозначим следующие вероятности

$$P_0(n, t) = P\{k(t) = 0, n(t) = n\},$$

$$P_k(n, z, t) = P\{k(t) = k, z(t) < z, n(t) = n\}, \quad k = 1, 2.$$

Для предложенной модели ставится задача исследования распределения вероятностей числа заявок на орбите методом асимптотического анализа в предельном условии растущего числа источников.

Метод асимптотического анализа

Для стационарного распределения вероятностей $P_0(n)$, $P_1(n, z)$, $P_2(n, z)$ состояний системы составим систему уравнений Колмогорова вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(n, 0)}{\partial z} + \frac{\partial P_2(n, 0)}{\partial z} - \left[\lambda \frac{N-n}{N} + \beta \frac{N-n}{N} + \sigma \frac{n}{N} + \alpha \frac{n}{N} \right] P_0(n) = 0, \\ \frac{\partial P_1(n, z)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(n, 0)}{\partial z} - \lambda \frac{N-n-1}{N} P_1(n, z) + \\ + \lambda \frac{N-n}{N} [P_1(n-1, z) + B_1(z)P_0(n)] + \sigma \frac{n+1}{N} B_1(z)P_0(n+1) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2(n, z)}{\partial z} - \frac{\partial P_2(n, 0)}{\partial z} - \lambda \frac{N-n-1}{N} P_2(n, z) + \lambda \frac{N-n}{N} P_2(n-1, z) + \\ + \beta \frac{N-n}{N} B_2(z)P_0(n) + \alpha \frac{n+1}{N} B_2(z)P_0(n+1) = 0. \end{aligned}$$

Введем частичные характеристические функции

$$H_0(u) = \sum_{n=0}^N e^{iun} P_0(n), \quad H_k(u, z) = \sum_{n=1}^N e^{iun} P_k(n, z), \quad k = 1, 2,$$

тогда систему (1) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + \frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} - [\lambda + \beta] H_0(u) + \frac{i}{N} [\alpha + \sigma - \lambda - \beta] \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} = 0, \\
& \frac{\partial H_1(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + \lambda B_1(z) H_0(u) + \lambda \left(1 - \frac{1}{N}\right) (e^{iu} - 1) H_1(u, z) + \\
& \quad + \frac{i}{N} B_1(z) (\lambda - \sigma e^{-iu}) \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} + \frac{i}{N} \lambda (e^{iu} - 1) \frac{\partial H_1(u, z)}{\partial u} = 0, \quad (2) \\
& \frac{\partial H_2(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} + \beta B_2(z) H_0(u) + \lambda \left(1 - \frac{1}{N}\right) (e^{iu} - 1) H_2(u, z) + \\
& \quad + \frac{i}{N} B_2(z) (\beta - \alpha e^{-iu}) \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} + \frac{i}{N} \lambda (e^{iu} - 1) \frac{\partial H_2(u, z)}{\partial u} = 0.
\end{aligned}$$

Полученную систему (2) будем решать методом асимптотического анализа в условии растущего числа источников ($N \rightarrow \infty$).

Теорема 1. Для замкнутой RQ-системы M/GI/1/N с вызываемыми заявками справедливо следующее равенство:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M \exp\left(iw \frac{n(t)}{N}\right) = \exp(iw\kappa_1),$$

где величина κ_1 имеет смысл асимптотического семиинварианта первого порядка и является решением уравнения

$$\lambda(1 - \kappa_1)[R_1(\kappa_1) + R_2(\kappa_1)] - (\alpha + \sigma)R_0(\kappa_1)\kappa_1 = 0,$$

где стационарное распределение вероятностей $R_k(\kappa_1)$ состояний k прибора зависит от κ_1 и определяются равенствами

$$\begin{aligned}
R_0(\kappa_1) &= \{1 + \delta_1(\kappa_1)b_1 + \delta_2(\kappa_1)b_2\}^{-1}, \\
R_1(\kappa_1) &= \delta_1(\kappa_1)R_0(\kappa_1)b_1, \quad R_2(\kappa_1) = \delta_2(\kappa_1)R_0(\kappa_1)b_2.
\end{aligned}$$

Здесь $\delta_1(\kappa_1) = \lambda(1 - \kappa_1) + \sigma\kappa_1$, $\delta_2(\kappa_1) = \beta(1 - \kappa_1) + \alpha\kappa_1$.

Для реализации асимптотики второго порядка в системе уравнений (2) выполним следующие замены:

$$\begin{aligned}
H_0(u) &= H_0^{(2)}(u) \exp\{iu\kappa_1 N\}, \\
H_k(u, z) &= H_k^{(2)}(u, z) \exp\{iu\kappa_1 N\}, \quad k = 1, 2,
\end{aligned}$$

и в результате получим систему вида

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial H_1^{(2)}(u, 0)}{\partial z} + \frac{\partial H_2^{(2)}(u, 0)}{\partial z} - [(\lambda + \beta)(1 - \kappa_1) + (\alpha + \sigma)\kappa_1] H_0^{(2)}(u) + \\
 & \quad + \frac{i}{N} [\alpha + \sigma - \lambda - \beta] \frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} = 0, \\
 & \frac{\partial H_1^{(2)}(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_1^{(2)}(u, 0)}{\partial z} + [\lambda(1 - \kappa_1) + \sigma\kappa_1 e^{-iu}] B_1(z) H_0^{(2)}(u) + \\
 & \quad + \lambda \left(1 - \kappa_1 - \frac{1}{N}\right) (e^{iu} - 1) H_1^{(2)}(u, z) + \\
 & \quad + \frac{i}{N} B_1(z) (\lambda - \sigma e^{-iu}) \frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} + \frac{i}{N} \lambda (e^{iu} - 1) \frac{\partial H_1^{(2)}(u, z)}{\partial u} = 0, \\
 & \frac{\partial H_2^{(2)}(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_2^{(2)}(u, 0)}{\partial z} + [\beta(1 - \kappa_1) + \alpha\kappa_1 e^{-iu}] B_2(z) H_0^{(2)}(u) + \\
 & \quad + \lambda \left(1 - \kappa_1 - \frac{1}{N}\right) (e^{iu} - 1) H_2^{(2)}(u, z) + \\
 & \quad + \frac{i}{N} B_2(z) (\beta - \alpha e^{-iu}) \frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} + \frac{i}{N} \lambda (e^{iu} - 1) \frac{\partial H_2^{(2)}(u, z)}{\partial u} = 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Применяя систему (3), можно доказать следующее утверждение:

Теорема 2. В условиях теоремы 1 справедливо равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M \exp \left(iw \frac{n(t) - \kappa_1 N}{\sqrt{N}} \right) = \exp \left\{ \frac{(iw)^2}{2} \kappa_2 \right\},$$

где величина κ_2 имеет смысл асимптотического семиинварианта второго порядка и определяется равенством

$$\kappa_2 = \frac{\lambda(1 - \kappa_1)g_1 + (\alpha + \sigma)\kappa_1}{\lambda(1 - \kappa_1)g_2 + \lambda(\delta_1 b_1 + \delta_2 b_2) + (\alpha + \sigma)},$$

$$\text{где } g_1 = \frac{\lambda}{2} (1 - \kappa_1) [\delta_1 b_1^{(2)} + \delta_2 b_2^{(2)}] - \kappa_1 [\sigma b_1 + \alpha b_2],$$

$$g_2 = (\lambda - \sigma)b_1 + (\beta - \alpha)b_2, \quad \delta_1 = \delta_1(\kappa_1), \quad \delta_2 = \delta_2(\kappa_1).$$

Таким образом, из теоремы 1 и 2 следует, что допредельное распределение вероятностей числа заявок на орбите можно аппроксимировать нормальным распределением с математическим ожиданием $\kappa_1 N$ и дисперсией $\kappa_2 N$.

Заключение

В работе рассмотрена замкнутая RQ-система M/GI/1//N с вызываемыми заявками. Исследование системы выполнено методом асимптотического анализа в предельном условии растущего числа источников. В результате анализа было показано, что предельное распределение вероятностей числа заявок на орбите имеет нормальное распределение с заданными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Springer, 2008. 309 p.
2. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial queues. London: Chapman & Hall, 1997. 328 p.
3. *Falin G.* Model of coupled switching in presence of recurrent calls // Engineering Cybernetics Review. 1979. V. 17. P. 53–59.
4. *Artalejo J.R., Phung-Duc T.* Markovian retrial queues with two way communication // J. Industrial and Management Optimization. 2012. V. 8(4). P. 781–806.
5. *Dragieva V., Phung-Duc T.* Two-way communication M/M/1 retrial queue with server-orbit interaction // Proceedings of the 11th International Conference on Queueing Theory and Network Applications. ACM, 2016. P. 11.
6. *Nazarov A.A., Paul S., Gudkova I., et al.* Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition // Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation. 2017.
7. *Dragieva V.I.* Number of retrials in a finite source retrial queue with unreliable server // Asia-Pac. J. Oper. Res. 2014. V. 31(2). P. 23.
8. *Sztrik J., Almási B., Roszik J.* Heterogeneous finite-source retrial queues with server subject to breakdowns and repairs // J. Math. Sci. 2006. V. 132. P. 677–685.
9. *Nazarov A., Sztrik J., Kvach A.* A Survey of Recent Results in Finite-Source Retrial Queues with Collisions // Communications in Computer and Information Science. Springer Verlag, 2018. V. 912. P. 1–15.
10. *Nazarov A., Sztrik J., Kvach A. et al.* Asymptotic analysis of finite-source M/M/1 retrial queueing system with collisions and server subject to breakdowns and repairs // Annals of Operations Research. 2018. <https://doi.org/10.1007/s10479-018-2894-z>
11. *Dragieva V., Phung-Duc T.* Two-way communication M/M/1//N retrial queue // International Conference on Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications. Springer, 2017. P. 81–94.
1. *Nazarov A., Sztrik J., Kvach A.* Asymptotic sojourn time analysis of closed M/M/1 retrial queueing system with two-way communication // Communications in Computer and Information Science. Springer Verlag, 2018. V. 912. P. 172–183.