Scientific Journal of Samarkand University

Volume 2020 Article 42

1-24-2020

The problem of integral geometry in a strip with weight function

A. X. Begmatov
Samarkand State University, akrambegmatov@mail.ru

A. S. Ismoilov
Samarkand State University

УДК: 517.946

ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПОЛОСЕ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

А.Х. Бегматов, А.С. Исмоилов
Самаркандский государственный университет
E-mail: akrambegmatov@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе рассмотрена задача восстановления функции по семейству парабол в полосе с весовой функцией, имеющей особенность. Доказана теорема единственности решения уравнение. Показано что решение поставленной задачи слабо некорректно, то есть получены оценки устойчивости в пространствах конечной гладкости.

Ключевые слова: слабо некорректные задачи, преобразование Фурье, теоремы единственности, весовая функция.

Yo'lakda vazn funksiyali integral geometriyamasalasi

Annotatsiya. Bu ishda yo'lakda maxsuslikka ega bo'lgan vazn funksiyali parabolalar oilasi bo'yicha funksiyani tiklash masalasi qaralgan. Yechimning yagonaligi teoremasi isbotlangan. Qo'yilgan masalaning yechimi kuchsiz nokorrekt ekanligi ko'rsatilgan va turg'unlik bahosi olingan.

Kalit so zlar: кuchsiz nokorrekt masala, Fur'e almashtirishlari, yagonalik teoremasi, vazn funksiya.

The problem of integral geometry in a strip with weight function

Abstract. In this work we consider the problem of reconstructing a function from a family of parabolas in the upper half-plane with a weight function having a singularity. The uniqueness of theorem for the solution of equation is proved and the inversion formula is derived. It is shown that the solution of the problem posed is weakly ill-posed, that is, stability estimates are obtained in spaces of finite smoothness.

Keywords: Ill-posed problems, integral geometry problems, integral transforms, inversion formula, existence theorem

1. Введение

Интегральная геометрия, один из актуальных разделов анализа и математической физики, изучает вопросы восстановления функции, от которой известны интегралы, заданные на семействе многообразий. Впервые связь между задачами интегральной геометрии и многомерными обратными задачами для дифференциальных уравнений была установлена в работе М.М. Лаврентьева и В.Г.Романова [1].

Приведем определение задачи интегральной геометрии[2,3]. Пусть $u(\xi)$ – достаточно гладкая функция, определенная в n – мерном пространстве $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$, и $\{\Gamma(x)\}$ – семейство гладких многообразий в этом пространстве, зависящих от параметра $x=(x_1,...,x_m)$. Пусть, далее, от функции $u(\xi)$ известны интегралы

$$\int\limits_{\Gamma(x)} u(\xi)d\sigma = f(x),$$

где $d\sigma$ определяет элемент меры по $\Gamma(x)$. Требуется по функции $f(x)$ найти функцию $u(\xi)$.

Единственность широкого класса задач интегральной геометрии в полосе была установлена В.Г. Романовым. Задачи не вольтерровского типа изучались в работах М.М.Лаврентьева и А.Л. Бухгейма [4,5], Р.Г. Мухометова [6].

Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа с весовыми функциями, имеющими особенность исследовались в работах [7,8].

Теоремы единственности, оценки устойчивости и формулы обращения слабо некорректных задач интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями вершинах получены в [9-12].

В работах [13-14] изучены новые классы задачи интегральной геометрии и введены новые подходы к исследованию задач восстановления функции по весовым функциям с особенностью.

Введем обозначения, которые будем использовать в этом пункте:

$$x\in R^2,\ \ \xi\in R^2,\ \lambda\in R^1,\ \ \mu\in R^1,\ \ \ R_+^2=\{x=(x_1,x_2): x_2\ge 0\};$$

$$\Omega=\{x\in R_+^2:\ 0<x_2<l\},$$

$$\bar\Omega=\{x\in R_+^2:\ 0\le x_2\le l\},$$

здесь, $0 < l < \infty$.

В полосе $\bar{\Omega}$ рассмотрим семейство $P(x_1, x_2)$ кривых, которое однозначно параметризуются с помощью координат своих вершин $(x_1, x_2) \in \Omega$:

$$P(x_1, x_2) = \{(\xi_1, \xi_2) : x_2 - \xi_2 = (x_1 - \xi_1)^2, \ \ 0 \le \xi_2 \le x_2\}.$$

2. Задача интегральной геометрии

Задача 1. Определить функцию двух переменных $u(x_1, x_2)$, если для всех (x_1, x_2) из полосы $\bar{\Omega}$ известны интегралы от нее параболам $P(x_1, x_2)$:

$$\int_{x_1 - \sqrt{x_2}}^{x_1 + \sqrt{x_2}} g(x_1, \xi_1) u(\xi_1, x_2 - (x_1 - \xi_1)^2) d\xi_1 = f(x_1, x_2), \qquad (1)$$

где $\qquad g(x_1, \xi_1) = 2(x_1 - \xi_1) \qquad (2).$

Обозначим через U класс функция $u(x_1, x_2)$, которые имеют все непрерывные частные производные до восьмого порядка включительно и финитны с носителем в R_+^2. Для определенности имеем

supp $u \subset D = \{(x_1, x_2) : -a < x_1 < a, \ 0 < a < \infty, \ 0 < x_2 < l, \ \ l < \infty\}$.

Доопределим правую часть уравнения (1) при $x_2 < 0$.

Введем функцию

$$f^*(x_1, x_2) = \begin{cases} f(x_1, x_2), & при \ x_2 \ge 0, \\ 0, & при \ x_2 < 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Как следует из постановки задачи 1 и условий, наложенных на функцию $u(\cdot)$, к функции $f^*(x_1, x_2)$ можно применить преобразование Фурье по x_2.

$$\varphi(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x_2} \hat{f}^*(\lambda, x_2) dx_2 = \int_{0}^{\infty} e^{i\mu x_2} \hat{f}(\lambda, x_2) dx_2.$$

Таким образом, доопределив $f(x_1, x_2)$ в нижней полуплоскости нулём, к обеим частям уравнения (1) можно применять преобразование Фурье по x_2.

Введем следующие функции

$$I(\lambda, \mu) = \int_0^{\infty} e^{i\mu\tau} \cos\lambda\tau d\tau, \qquad (4)$$

$$I_1(\lambda, x_2 - \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu(x_2 - \xi_2)} \frac{\lambda d\mu}{\left(1 + \mu^4\right) I(\lambda, \mu)}, \qquad (5)$$

$$I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda(x_1 - \xi_1)} I_1(\lambda, x_2 - \xi_2)}{1 + \lambda^4} d\lambda. \qquad (6)$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ известна для всех $(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$. Тогда решение задача 1 в классе U единственно, имеет место представление

$$u(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_2^{\,4}} \right) \left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^{\,4}} \right) f_2(x_1, x_2) d\xi_1 d\xi_2 d\zeta, \qquad (7)$$

и выполняется неравенство

$$\| u(x_1, x_2) \|_{W_2^{1,0}(\Omega)} \le C_0 \| f_1 \|_{W_2^2(\Omega)},$$

где C_0 – некоторая постоянная.

Доказательство. Приведём уравнение (1) более удобному виду:

$$f(x_1,x_2)=\int\limits_{x_1-\sqrt{x_2}}^{x_1+\sqrt{x_2}} 2\left(x_1-\xi_1\right)u\left(\xi_1,x_2-(x_1-\xi_1)^2\right)d\xi_1 = \begin{aligned}&=\int\limits_0^{x_2} 2\sqrt{x_2-\xi_2}\,u(x_1-\sqrt{x_2-\xi_2},\xi_2)\frac{d\xi_2}{2\sqrt{x_2-\xi_2}}+\\&+\int\limits_0^{x_2} 2(-\sqrt{x_2-\xi_2})u(x_1+\sqrt{x_2-\xi_2},\xi_2)\frac{-d\xi_2}{2\sqrt{x_2-\xi_2}}.\end{aligned}$$

$$\int\limits_0^{x_2}\left[u(x_1-h,\xi_2)-u(x_1+h,\xi_2)\right]d\xi_2 = f(x_1,x_2), \tag{8}$$

где $h=\sqrt{x_2-\xi_2}$.

Применим преобразование Фурье по переменной x_1 к обеим частям уравнения (8)

$$\hat{f}(\lambda,x_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x_1}\int\limits_0^{x_2}\left[u(x_1-h,\xi_2)-u(x_1+h,\xi_2\right]d\xi_2 dx_1 =$$

$$=2i\int\limits_0^{x_2}\frac{e^{-i\lambda h}-e^{i\lambda h}}{2i}\hat{u}(\lambda,\xi_2)d\xi_2 = 2i\int\limits_0^{x_2}\sin(\lambda h)\,\hat{u}(\lambda,\xi_2)d\xi_2 .$$

Теперь $\hat{f}_1(\lambda,x_2)=\dfrac{1}{2i}\hat{f}(\lambda,x_2)$.

Таким образом

$$\int\limits_0^{x_2}\cos\lambda h\,\hat{u}(\lambda,\xi_2)d\xi_2 = \hat{f}_1(\lambda,\xi_2)\ . \tag{9}$$

Применим к уравнению (9) одностороннее преобразование Фурье по переменной x_2:

$\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu)=\int\limits_0^{\infty} e^{i\mu x_2}\int\limits_0^{x_2}\sin(\lambda h)\hat{u}(\lambda,\xi_2)d\xi_2 dx_2 = \int\limits_0^{\infty}\hat{u}(\lambda,\xi_2)\int\limits_{\xi_2}^{\infty} e^{i\mu x_2}\sin\lambda\sqrt{x_2-\xi_2}\,dx_2 d\xi_2$. Сделав в этом равенстве замену $\tau=x_2-\xi_2$, получим:

$$\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu)=\int\limits_0^{\infty}\hat{u}(\lambda,\xi_2)\int\limits_{\xi_2}^{\infty} e^{i\mu(\tau+\xi_2)}\sin\lambda\sqrt{\tau}\,d\tau\,d\xi_2 =$$

$$=\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu)\int\limits_0^{\infty} e^{i\mu\tau}\sin\lambda\sqrt{\tau}\,d\tau .$$

Таким образом уравнение (9) примет вид

$$\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu)\cdot\int\limits_0^{\infty} e^{i\mu\tau}\sin\lambda\sqrt{\tau}d\tau = \hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu), \tag{10}$$

Нам нужно оценить снизу по модулю функцию $I(\lambda,\mu)$, что позволит получить оценки для функции $\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu)$, а затем и для искомой функции $u(x_1,x_2)$.

Покажем, что интеграл (4) является равномерно сходящимся относительно параметров λ и μ, причём параметр μ можно без ограничения общности считать положительным.

Сделав замену $\sqrt{\tau}=t$ и учитывая $d\tau = 2t\,dt$, в интеграле (4), имеем:

$$I=2\int\limits_0^{\infty} te^{i\mu t^2}\sin\lambda t dt = 2\int\limits_0^{\infty} t\cos\mu t^2\sin\lambda t dt + 2i\int\limits_0^{\infty} t\sin\mu t^2\sin\lambda t dt.$$

Используя формулы

$$\int\limits_0^{\infty} x\sin(ax^2)\sin(2bx)dx = \frac{b}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left[\cos\frac{b^2}{a}+\sin\frac{b^2}{a}\right],\ [a>0,\,b>0],$$

$$\int\limits_0^{\infty} x\cos(ax^2)\sin(2bx)dx = \frac{b}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left[\sin\frac{b^2}{a}-\cos\frac{b^2}{a}\right],\ [a>0,\,b>0]$$

(см [15]), получим:

$$I=\frac{\lambda}{2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\left[\sin\frac{\lambda^2}{4\mu}-\cos\frac{\lambda^2}{4\mu}+i\left(\cos\frac{\lambda^2}{4\mu}+\sin\frac{\lambda^2}{4\mu}\right)\right]=$$
$$=i\frac{\lambda}{2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\lambda^2}{4\mu}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\lambda^2}{4\mu}\right)\right).$$

Значит, мы имеем следующие выражения:

$$I=i\frac{\lambda}{2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\lambda^2}{4\mu}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\lambda^2}{4\mu}\right)\right)=i\frac{\lambda}{2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\lambda^2}{4\mu}\right)}.$$

Модуль функции $I(\lambda,\mu)$ имеет вид:

$$|I|\geq\frac{|\lambda|}{2|\mu|}\sqrt{\frac{\pi}{|\mu|}}.$$

Учитывая это неравенство и формулу (9) получим неравенство

$$\left|\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu)\right|\leq\left|\frac{2\mu}{\lambda}\sqrt{\frac{\mu}{\pi}}\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu)\right|.$$

Отсюда несложно получит оценку

$$\frac{1}{|I|}\leq\frac{2|\mu|}{|\lambda|}\sqrt{\frac{|\mu|}{\pi}}. \qquad (11)$$

Из уравнения (10), учитывая (11), получим

$$\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu)=\frac{1}{I(\lambda,\mu)}\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu),$$

или

$$\lambda\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu)=\frac{\lambda}{I(\lambda,\mu)}\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu). \qquad (12)$$

Разделим и умножим правую часть равенства (12) на $(1+\mu^4)$:

$$\lambda\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu)=\frac{\lambda}{(1+\mu^4)I(\lambda,\mu)}(1+\mu^4)\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu). \qquad (13)$$

В правой части уравнения (13) функция $\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu)$ примет вид

$$\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu)=\int_0^{+\infty}e^{i\mu\xi_2}\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)d\xi_2.$$

Применяя интегрирование по частям четыре раза, учитывая, свойство дифференцирования преобразования Фурье получим следующее

$$\int_0^{+\infty}e^{i\mu\xi_2}\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)d\xi_2=\frac{1}{\mu^4}\int_0^{+\infty}e^{i\mu\xi_2}\frac{\partial^4\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)}{\partial{\xi_2}^4}d\xi_2. \qquad (14)$$

Подставляя (14) на (13), получим

$$\lambda\cdot\hat{u}(\lambda,\mu)=\frac{\lambda}{\left(1+\mu^4\right)I(\lambda,\mu)}\int_0^{+\infty}e^{i\mu\xi_2}\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)d\xi_2+\int_0^{+\infty}e^{i\mu\xi_2}\frac{\partial^4\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)}{\partial{\xi_2}^4}d\xi_2=$$
$$=\frac{\lambda}{\left(1+\mu^4\right)I(\lambda,\mu)}\int_0^{+\infty}e^{i\mu\xi_2}\left(E+\frac{\partial^4}{\partial{\xi_2}^4}\right)\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)d\xi_2. \qquad (15)$$

Применим к уравнению (15) обратное преобразование Фурье по переменной μ.

$$\lambda\cdot\hat{u}(\lambda,x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\mu x_2}\left\{\int_0^{+\infty}\frac{\lambda}{\left(1+\mu^4\right)I(\lambda,\mu)}e^{i\mu\xi_2}\left(E+\frac{\partial^4}{\partial{\xi_2}^4}\right)\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)d\xi_2\right\}d\mu=$$
$$=\int_0^{+\infty}I_1(\lambda,x_2-\xi_2)\left[E+\frac{\partial^4}{\partial{\xi_2}^4}\right]\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)d\xi_2.$$

Значит

$$\lambda \cdot \hat{u}(\lambda, x_2) = \int_0^{+\infty} I_1(\lambda, x_2 - \xi_2)\left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_2{}^4}\right)\hat{f}_1(\lambda, \xi_2)d\xi_2.$$

Последнее соотношение с учетом того, что $\hat{f}_1(\lambda, \xi_2) = \dfrac{1}{2i}\hat{f}(\lambda, \xi_2)$ запишем в следующем виде

$$i\lambda \cdot \hat{u}(\lambda, x_2) = \int_0^{+\infty} I_1(\lambda, x_2 - \xi_2)\left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_2{}^4}\right)\hat{f}_2(\lambda, \xi_2)d\xi_2, \tag{16}$$

где $\hat{f}_2(\lambda, \xi_2) = \dfrac{1}{2}\hat{f}(\lambda, \xi_2)$.

Разделим и умножим правую часть равенства (16) на $(1+\lambda^4)$:

$$i\lambda \cdot \hat{u}(\lambda, x_2) = \int_0^{\infty} (1+\lambda^4)\frac{I_1(\lambda, x_2 - \xi_2)}{(1+\lambda^4)}\left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_2^4}\right)\hat{f}_2(\lambda, \xi_2)d\xi_2. \tag{17}$$

В интеграле

$$\hat{f}_2(\lambda, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi_1, \xi_2)e^{i\lambda\xi_1}d\xi_1,$$

применяя интегрирование по частям четыре раза, учитывая, свойство дифференцирования преобразования Фурье получим следующее

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi_1, \xi_2)e^{i\lambda\xi_1}d\xi_1 = \frac{1}{\lambda^4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^4 f_2(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1{}^4}e^{i\lambda\xi_1}d\xi_1. \tag{18}$$

Отсюда (17) примет вид

$$i\lambda \cdot \hat{u}(\lambda, x_2) = \int_0^{\infty}\frac{I_1(\lambda, x_2 - \xi_2)}{(1+\lambda^4)}(1+\lambda^4)\left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_2{}^4}\right)\hat{f}_2(\lambda, \xi_2)d\xi_2 =$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{I_1(\lambda, x_2 - \xi_2)}{(1+\lambda^4)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\xi_1}\left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_2{}^4}\right)\left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_1{}^4}\right)f_2(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2. \tag{19}$$

Применяя к уравнению (19) обратное преобразование Фурье по переменной λ и используя теорему о свертке, а также свойство дифференцирования преобразования Фурье, получим:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x_1}\int_0^{\infty}\frac{I_1(\lambda, x_2 - \xi_2)}{(1+\lambda^4)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\xi_1}\left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_2{}^4}\right)\left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_1{}^4}\right)f_2(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2 d\lambda =$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\lambda(x_1-\xi_1)}I_1(\lambda, x_2 - \xi_2)}{(1+\lambda^4)}d\lambda\left\{\left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_2{}^4}\right)\left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_1{}^4}\right)f_2(\xi_1, \xi_2)\right\}d\xi_1 d\xi_2,$$

или

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)\left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_2{}^4}\right)\left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_1{}^4}\right)f_2(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2.$$

Отсюда имеем следующее представление решения задачи I:

$$u(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)\left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_2{}^4}\right)\left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_1{}^4}\right)f_2(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2 d\zeta, \tag{20}$$

где $I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)$ определено с помощью формулу (6).

Учитывая неравенство (11) и формулу (12), получим

$$\left|\lambda \cdot \hat{\hat{u}}(\lambda, \mu)\right| \le \left(2|\mu|\sqrt{\frac{|\mu|}{\pi}}\right) \cdot \left|\hat{\hat{f}}_1(\lambda, \mu)\right|,$$

откуда следует оценка

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda \cdot \hat{\hat{u}}(\lambda, \mu)|^2 \, d\mu d\lambda \le \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|2|\mu|\sqrt{\frac{|\mu|}{\pi}}\right|^2 \cdot \left|\hat{\hat{f}}_1(\lambda, \mu)\right|^2 d\mu d\lambda . \tag{21}$$

Используя свойства дифференцирования преобразование Фурье, неравенство треугольника для норм, а также учитывая (20) и (21), условия наложенные на функцию u получим оценку

$$\| u(x_1, x_2) \|_{W_2^{1,0}(\Omega)} \le C_0 \| f_1 \|_{W_2^2(\Omega)},$$

где C_0 – некоторая постоянная.

Из которой вытекает единственность решения задачи I .

References

1. Romanov V.G. Nekotorie obratnie zadachi dlya uravneniy giperbolicheskogo tipa. Novosibirsk: Nauka, 1972.
2. Lavrentev M.M., Savelev L.Ya. Teoriya operatorov i nekorrektnie zadachi. – Novosibirsk: Izd-vo In-ta matematiki. 1999. – 702 s.
3. Lavrentev M.M. Integralnaya geometriya i obratnie zadachi // Nekorrektnie zadachi matematicheskoy fiziki i analiza. Novosibirsk: Nauka, 1984. S.81-86.
4. Lavrentev M.M., Buxgeym A.L. Ob odnom klasse zadach integralnoy geometrii // Dokl. AN SSSR. 1973. T.311, №1. S. 38-39.
5. Lavrentev M.M., Buxgeym A.L. Ob odnom klasse operatornix uravneniy pervogo roda // Funksion. analiz i yego pril. 1973. T.7. Vip.4.S.44-53.
6. Muxometov R.G. O zadache integralnoy geometrii // Matematicheskiye problemi geofiziki. Vip. 6. Ch. 2. Novosibirsk: VS SO AN SSSR, 1975. S. 212-242.
7. BegmatovAkr.X. Dva klassa slabo nekorrektnix zadach integralnoy geometrii na ploskosti // Sib. mat. jurnal. 1995. T. 36. № 2. S. 243-247.
8. BegmatovAkram H. On a class of weakly ill-posed Volterra-type of integral geometry in the three-dimensional space // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 1995. Vol. 3. №3. P. 231-235.
9. BegmatovAkr.X. Volterovskiye zadachi integralnoy geometrii na ploskosti dlya krivix s osobennostyami // Sib. mat. jurnal. 1997. T. 38. № 4. C 723-737.
10. BegmatovAkr.X. Zadachi integralnoy geometrii po spesialnim krivim i poverxnostyam s osobennostyami v vershinax // Dokladi RAN. 1998. T. 358. № 2. S. 151-153.
11. Begmatov Akbar H. and BegmatovAkram H. Problems of integral geometry on curves and surfaces in Euclidean space // Ill-Posed and Non-Classical Problems of Mathematical Physics and Analysis, M.M. Lavrent'ev et al., Eds., Proceedings of International Conference, VSP, Utrecht-Boston, 2003, 1-18.
12. BegmatovAkram H., Ochilov Z.H. Recovering of function set by integrals along a curve in the plane // Ill-Posed and Non-Classical Problems of Mathematical Physics and Analysis, M.M. Lavrent'ev et al., Eds., Proceedings of International Conference, VSP, Utrecht-Boston, 2003, 191-198
13. BegmatovAkram X., Ochilov Z.X.Zadachi integralnoy geometrii s razrivnoy vesovoy funksiyey //Dokladi RAN.– Moskva, 2009.429.– № 3.–C. 295-297.
14. Akram H. Begmatov, M.E. Muminov, Z.H. Ochilov. The Problem of Integral Geometry of Volterra Type with a Weight Function of a Special Type. Horizon Research Publishing (HRPUB)Corporation, USA, Mathematics and statistics. Vol 3, No 5. 2015. r. 113-120.
15. GradshteynI.S., Rijik I.M.Tablitsi integralov, summ, ryadov i proizvedeniy.– M.: Fizmatgiz, 1962.– 1180 s.