

**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN**

**Anwendung von Maximum-Likelihood
Expectation-Maximization und Origin Ensemble zur
Rekonstruktion von Aktivitätsverteilungen beim
Single Plane Compton Imaging (SPCI)**

Masterarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science (M. Sc.)

vorgelegt von
Dominik Kornek
geboren am 24. Juni 1993
in Bruchsal, Deutschland

OncoRay
Nationales Zentrum für Medizinische Strahlenforschung in der Onkologie
Medizinische Fakultät Carl Gustav Carus
Technische Universität Dresden
2019

1. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang Enhardt
2. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Steffen Löck
Betreuer: Dr. rer. nat. Toni Kögler

Tag der Einreichung: 30. August 2019

Abstract

In nuclear medicine imaging, the Anger camera imposes a limit on the detection efficiency in order to improve the spatial resolution. The detection efficiency can be increased with electronically collimated systems known as Compton Cameras, which use the kinematics of Compton scattering to locate the detected events. An alternative approach to the design of a Compton Camera combining scatter and absorption planes was investigated in the past. It was shown that the so-called Single Plane Compton Camera is able to separately reconstruct two point sources in empty space. Further optimization is required to reconstruct more complex images. Thus, an extensive understanding of the measurement principle is provided. Two 3D-algorithms were implemented for binned data and list mode data. Measurement data were generated by means of an existing simulated data set of a simple detector design and reconstructed. It is shown that a robust signal-to-noise ratio can be achieved due to high numbers of detected counts. List mode algorithms produce high computational costs and binned algorithms may be used instead. The average position information is low and imposes a negative impact on the spatial resolution, which is about 15 mm at a distance of 50 mm for $E = 662$ keV. The implemented algorithms cannot increase the spatial resolution due to lack of precise position information. Therefore, future studies should focus on technical measures, which are given in this thesis.

Kurzfassung

In der nuklearmedizinischen Bildgebung mit Anger-Kameras wird ein höheres Auflösungsvermögen durch Limitierung der Nachweiseffizienz erreicht. Compton Cameras können die Nachweiseffizienz mittels elektronischer Kollimation, die zur Ortsbestimmung die Compton-Kinematik anwendet, erhöhen. Ein alternativer Ansatz für die Konstruktion einer Compton Camera, die Streu- und Absorptionsebenen in einer Ebene kombiniert, wurde in der Vergangenheit untersucht. Die sogenannte Single Plane Compton Camera ist in der Lage, Punktquellen im Vakuum getrennt aufzulösen. Zur Darstellung komplexerer Bildinhalte wird die Optimierung der Bildrekonstruktion angestrebt. Diese umfasst ein umfängliches Verständnis des Messprinzips, das in dieser Arbeit dargelegt wird. Jeweils ein 3D-Rekonstruktionsalgorithmus wurde für konventionell gebinnete und List-Mode-Daten implementiert. Anhand eines vorliegenden Simulationsdatensatzes einer einfachen Detektor-konfiguration wurden Messdaten generiert und rekonstruiert. Es konnte gezeigt werden, dass aufgrund der hohen Zählstatistik ein robustes Signal-to-Noise-Ratio erhalten wird. List-Mode-Verfahren eignen sich aufgrund eines höheren Rechenaufwandes nicht. Die mittlere Ortsinformation der Ereignisse ist systembedingt gering und beeinträchtigt die Ortsauflösung, welche für $E = 662 \text{ keV}$ etwa 15 mm in einem Abstand von 50 mm beträgt. Eine Verbesserung der Auflösung ist durch die Algorithmen nicht möglich, sondern umfasst technische Maßnahmen, welche anhand dieser Arbeit in weiteren Studien umgesetzt werden können.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Single Plane Compton Imaging	3
2.1	Wechselwirkung von Gammastrahlung mit Stoffen	3
2.1.1	Inkohärente Streuung	4
2.1.2	Photoelektrischer Effekt	5
2.1.3	Exponentielles Schwächungsgesetz	6
2.2	Single Plane Compton Camera	6
2.3	Detektion und Lokalisation der Gammastrahlung	7
2.4	Speicherung der Messdaten und Konvention zur Notation	11
3	Bildrekonstruktion beim Single Plane Compton Imaging	13
3.1	Modell	13
3.2	Analytische Rekonstruktion	14
3.3	Iterative Rekonstruktion	15
3.3.1	Maximum-Likelihood Expectation-Maximization	15
3.3.2	Origin Ensemble	17
4	Materialien und Methoden	21
4.1	Konstruktion der Systemmatrix	21
4.2	Implementierung der Software	22
4.2.1	Implementierung von ML-EM	24
4.2.2	Implementierung von OE	25
4.3	Verifikation	26
4.4	Optimierung	27
4.5	Analyse von Systemparametern	28

5	Ergebnisse	31
5.1	Verifikation	31
5.2	ML-EM-Optimierung	32
5.2.1	Untersuchung des Exponenten	32
5.2.2	Minimal benötigte Anzahl der Energiebins	33
5.2.3	Minimal benötigte Anzahl der Projektionen	36
5.3	OE-Optimierung	39
5.3.1	Untersuchung des Priors	39
5.3.2	Minimal benötigte Anzahl der Energiebins	40
5.3.3	Minimal benötigte Anzahl der Projektionen	42
5.4	System- und Parameteranalyse	45
5.4.1	System-Intricacy	45
5.4.2	Kombinatorik der Detektorpaare	48
5.4.3	Ortsauflösung	48
5.5	Zusammenfassung der Ergebnisse	51
6	Diskussion	53
7	Zusammenfassung und Ausblick	57
	Literaturverzeichnis	x
	Abkürzungsverzeichnis	xi
	Abbildungsverzeichnis	xiv
	Tabellenverzeichnis	xv
	Selbstständigkeitserklärung	xvii
A	Herleitung des ML-EM Algorithmus	xix
B	Tieferegehende Informationen zu OE	xxi
C	C++-Code für die Bildrekonstruktion beim SPCI	xxiii

1 Einleitung

In der nuklearmedizinischen Bildgebung werden radioaktive Verbindungen, sogenannte Radiotracer, intravenös, inhalativ oder oral verabreicht und ihre Verteilungen im Organismus sichtbar gemacht. Handelt es sich bei der emittierten Strahlung um Gammastrahlung, also hochenergetische Photonen aus Kernabregungen, kommt häufig ein als Gammakamera bezeichnetes Messsystem für die Detektion und Bildgebung zum Einsatz. Die bekannteste Gammakamera ist die von Anger im Jahr 1957 erfundene *Anger-Kamera* [1], welche seither trotz bedeutender Verbesserungen in ihrem Prinzip unverändert ist. Ein monolithischer NaI:Tl-Szintillationskristall, der an eine Anordnung aus Sekundärelektronenvervielfachern gekoppelt ist, detektiert die Strahlung. Ein vorangeschalteter Kollimator begrenzt den Einfallswinkel der Strahlung auf den Kristall, indem Photonen größerer Einfallswinkel absorbiert werden. In der Folge begrenzt der Kollimator die Effizienz, d. h. die Anzahl detektierter Photonen, die zur Bildgebung beitragen. Die verabreichte Aktivität kann jedoch aus Gründen des Strahlenschutzes nicht beliebig erhöht werden. Daher ist die verfügbare Information über die räumliche Aktivitätsverteilung bei Anger-Kameras limitiert [2]. Das Messprinzip wird in Abbildung 1.1 skizziert.

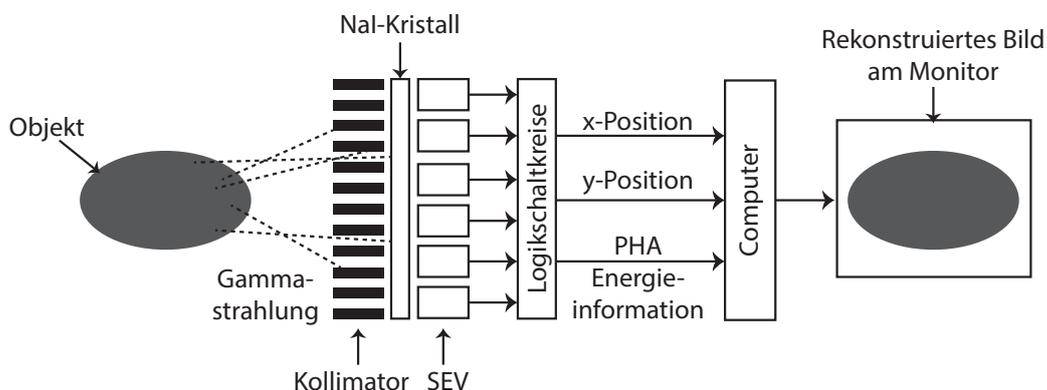


Abbildung 1.1: Messprinzip der Anger-Kamera. SEV = Sekundärelektronenvervielfacher. PHA = Pulshöhenanalysator. Grafik modifiziert nach [3].

Ein alternatives Messprinzip, das statt mechanischer eine elektronische Kollimation anwendet, wurde von Singh im Jahr 1983 vorgestellt [4]. Diese Methode beruht auf der Messung von sequenziell erfolgten Wechselwirkungen der Photonen in einem positions- und energieauflösenden Detektionssystem, das im Allgemeinen als *Compton Camera* (CC) bezeichnet wird. Der Entstehungsort eines koinzidenten Ereignisses liegt auf einem Kegelmantel. Dies nutzten Singh und Doria, um zu zeigen, dass eine Bildrekonstruktion mit CCs möglich ist [5]. Der Vorteil der elektronischen Kollimation liegt in der höheren Effizienz, da Photonen beliebiger Einfallswinkel genutzt werden können. Angesichts hoher Anforderungen an den Detektor und einer sehr rechenintensiven Bildrekonstruktion konnte sich die CC auf dem Gebiet der nuklearen Bildgebung noch nicht behaupten [6].

Im Jahr 2016 veröffentlichten Pausch, Golnik, Schulz und Enghardt [7] ein neues, auf elektronischer Kollimation basierendes Konzept für die Bildgebung von Gammastrahlung. Das Verfahren wird *Single Plane Compton Imaging* (SPCI) genannt. In den vorangegangenen Arbeiten [8, 9, 10] wurde das Potenzial des SPCI für einen Einsatz in der nuklearmedizinischen Bildgebung diskutiert. In einer Simulationsstudie konnten Punktquellen in einem zweidimensionalen Bildraum mittels iterativer Bildrekonstruktion lokalisiert werden [10]. Zusammenfassend lassen sich aus den erwähnten Publikationen folgende potenzielle Vorteile des SPCI ableiten:

- einfacherer Aufbau im Vergleich zur konventionellen CC,
- zwei Größenordnungen höhere Effizienz (für 140 keV) im Vergleich zur Anger-Kamera und die daraus resultierende Möglichkeit der Reduktion der Strahlendosis,
- energieaufgelöste Bildrekonstruktion zur Unterscheidung verschiedener Radionuklide innerhalb einer Messung.

Darüber hinaus konnte die Anwendung von SPCI zur Reichweitesteuerung in der Hadronentherapie in einer Machbarkeitsstudie aus dem Jahr 2018 [11] demonstriert werden.

Die vorliegende Arbeit stellt eine Fortführung der vorangegangenen Arbeiten dar. Das Ziel ist die Optimierung der Bildrekonstruktion von SPCI-Daten hinsichtlich geeigneter Algorithmen und deren Einstellungen. Hierzu werden zunächst in den Kapiteln 2 und 3 die Grundlagen zum SPCI und zur Bildrekonstruktion erläutert. Anschließend werden in Kapitel 4 die Implementierung der Software dargelegt sowie der für diese Arbeit zur Verfügung stehende Simulationsdatensatz beschrieben. Anhand dessen können weitere Eigenschaften des SPCI-Prinzips festgestellt und die Bildrekonstruktion optimiert werden. In den Kapiteln 5 und 6 werden die Ergebnisse dargestellt bzw. diskutiert. Zuletzt erfolgen in Kapitel 7 eine Zusammenfassung dieser Arbeit und ein Ausblick für die nächsten Schritte.

2 Single Plane Compton Imaging

Das Single Plane Compton Imaging (SPCI) ist ein neues Konzept zur dreidimensionalen Bildgebung von Gammastrahlung [7]. Das zugehörige Messsystem wird in dieser Arbeit als Single Plane Compton Camera (SPCC) bezeichnet. Die Idee beruht auf dem sogenannten *Directional Gamma Radiation Detector System* [12, 13]; ein System zur Bestimmung des Einfallswinkels von Gammastrahlung mit zwei in Koinzidenz geschalteten Detektoren. Die SPCC ist die Erweiterung dieses Aufbaus mit mehreren Detektoren.

Zum Verständnis des Messprinzips beim SPCI werden zunächst die zu messenden Effekte von Gammastrahlung mit Stoffen basierend auf Podgoršak [14] und Krieger [15] beschrieben. Im Anschluss wird ein möglicher Aufbau einer SPCC skizziert und das Messprinzip erläutert. Zum Abschluss wird auf die Speicherung von SPCI-Daten eingegangen und eine allgemeine Notation für diese Arbeit festgelegt.

2.1 Wechselwirkung von Gammastrahlung mit Stoffen

Im Allgemeinen können Photonen an Materie kohärent oder inkohärent streuen, einen photoelektrischen Effekt auslösen oder unter Paarbildung ein Elektron-Positron-Paar erzeugen. Die Wahrscheinlichkeiten dieser Prozesse sind abhängig von der Energie der Photonen und von den Materialeigenschaften. Sehr hohe Energien können außerdem zum Kernphotoeffekt führen.

Photonen, die durch Kernabregungen emittiert werden, werden als γ -Quanten bezeichnet. Auf dem Gebiet der nuklearmedizinischen Bildgebung mit Gammakameras befinden sich die Energien der Gammastrahlung typischerweise zwischen 30 keV und 250 keV [2]. In diesem Bereich wechselwirken γ -Quanten hauptsächlich durch kohärente und inkohärente Streuung und den photoelektrischen Effekt. Die kohärente Streuung führt zu einem Verlust der Intensität, löst aber aufgrund fehlender Energieübertragung keine Messeffekte aus und wird daher im Folgenden vernachlässigt.

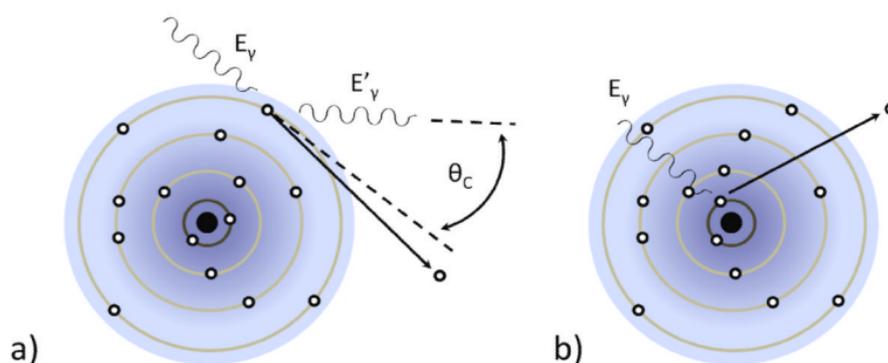


Abbildung 2.1: a) Inkohärente Streuung eines Photons an einem äußeren Hüllenelektron ($E'_{\gamma} < E_{\gamma}$) und b) photoelektrischer Effekt unter Absorption eines Photons. In a) und b) wird das gestoßene Hüllenelektron frei, welches im Detektor Energie deponieren kann. Grafik entnommen aus [2].

2.1.1 Inkohärente Streuung

Bei der inkohärenten Streuung überträgt, wie in Abbildung 2.1a gezeigt, ein Photon einen Teil seines Impulses auf ein Hüllenelektron und wird in der Folge um den Streuwinkel θ abgelenkt. Ferner wird das gestoßene Elektron frei, wenn der Energieübertrag die Bindungsenergie E_B übersteigt. Unter der Annahme eines quasi-freien (schwach gebundenen), stationären Hüllenelektrons ergibt sich der Compton-Effekt [16]. Diese Annahme ist gültig, wenn die Energie des Photons $E_{\gamma} \gg E_B$.

Beim Compton-Effekt wird ein einfallendes Photon mit der Energie E_{γ} vernichtet und ein gestreutes Photon mit der Energie $E'_{\gamma} < E_{\gamma}$ produziert. Das freie, sogenannte Compton-Elektron hat danach die kinetische Energie $E_K = E_{\gamma} - E'_{\gamma}$. Der Streuwinkel θ wird zwischen der Einfalls- und Streurichtung der entsprechenden Photonen angegeben und nimmt einen Wert zwischen $\theta = 0^{\circ}$ (Vorwärtsstreuung) und $\theta = 180^{\circ}$ (Rückstreuung) an. Die Energie des gestreuten Photons ergibt sich gemäß

$$E'_{\gamma}(E_{\gamma}, \theta) = E_{\gamma} \frac{1}{1 + \epsilon(1 - \cos \theta)} \quad (2.1)$$

mit $\epsilon = E_{\gamma}/m_e c^2$, wobei $m_e c^2$ die Ruheenergie des Elektrons (511 keV) und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ($3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$) bezeichnen. Die Wahrscheinlichkeit des Compton-Effekts über den Raumwinkel Ω kann mithilfe des differentiellen Wirkungsquerschnittes

$d\sigma_C^{KN}/d\Omega$ nach Klein und Nishina [18] angegeben werden:

$$\frac{d}{d\Omega}\sigma_C^{KN} = \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{E'_\gamma}{E_\gamma}\right)^2 \left(\frac{E'_\gamma}{E_\gamma} + \frac{E_\gamma}{E'_\gamma} - \sin^2\theta\right). \quad (2.2)$$

Dabei ist r_e^2 das Quadrat des klassischen Elektronenradius (2,82 fm). Aus Gleichung (2.2) folgt, dass die Vorwärtsstreuung mit zunehmender Photonenenergie wahrscheinlicher wird. Da $d\Omega = d\cos\theta d\phi$ mit dem gleichverteilten Azimutwinkel ϕ , befinden sich konstante Werte für $d\sigma_C^{KN}/d\Omega$ auf einem Kegelmantel. Für den Fall, dass die Photonenenergie im Bereich der Bindungsenergie des Hüllenelektrons liegt, reicht die vereinfachte Beschreibung der Streuung am quasi-freien Elektron nicht mehr aus. Für den Wirkungsquerschnitt der inkohärenten Streuung am gebundenen Elektron gilt dann

$$\sigma_{IS}^{KN} \propto \rho \frac{Z}{A} \sigma_C^{KN}, \quad (2.3)$$

wobei ρ , Z und A die Dichte, die Ordnungs- bzw. die Massenzahl des Atoms sind.

2.1.2 Photoelektrischer Effekt

Beim photoelektrischen Effekt oder einfach Photoeffekt wird ein Photon von einem Hüllenelektron vollständig absorbiert (Abbildung 2.1b). Im Gegensatz zum Compton-Effekt liegt beim Photoeffekt ein festgebundenes Hüllenelektron vor ($E_\gamma \gtrsim E_B$). Die Wahrscheinlichkeit für den Photoeffekt wird anhand des Photoabsorptionskoeffizienten τ angegeben:

$$\tau \propto \rho \frac{Z^n}{A \cdot (E_\gamma)^3} \quad (E_\gamma \ll 511 \text{ keV}) \quad (2.4)$$

$$\tau \propto \rho \frac{Z^n}{A \cdot E_\gamma} \quad (E_\gamma \gg 511 \text{ keV}). \quad (2.5)$$

Der Exponent n ist element- und energieabhängig und nimmt Werte zwischen 4 und 4,5 ein. Ferner wird τ für $E_\gamma = E_B$ maximal, was zu sogenannten Absorptionskanten führt. Die theoretische Vorhersage der Absorptionskanten ist schwer und erfordert Modifikationen an den Gleichungen (2.4) bzw. (2.5).

2.1.3 Exponentielles Schwächungsgesetz

Die Schwächung der Gammastrahlung und anderen ungeladenen Teilchen wird für monoenergetische Strahlenbündel über das exponentielle Schwächungsgesetz

$$N(x) = N_0 \cdot e^{-\int_0^x \mu dx'} \quad (2.6)$$

beschrieben, wobei $N(x)$, N_0 , μ und x die schichtdickenabhängige Anzahl der Teilchen, die ursprüngliche Anzahl der Teilchen, den linearen Schwächungskoeffizienten bzw. die Schichtdicke bezeichnen. Für den betrachteten Energienbereich gilt $\mu = \tau + \sigma_{IS}^{KN} + \sigma_{KS}$, mit σ_{KS} für den Wirkungsquerschnitt der kohärenten Streuung.

2.2 Single Plane Compton Camera

Eine Gammakamera besteht im Allgemeinen aus zwei Stufen, einem Konverter und einer Ausleseeinheit [2]. Im Konverter wechselwirkt die Gammastrahlung über die in Kapitel 2.1 diskutierten Prozesse und deponiert dabei Energie. Ein Teil dieser Energie wird nachfolgend so umgewandelt, dass sie von der Ausleseeinheit verwertet, digitalisiert und an eine Datenaufnahme geschickt werden kann. Im Anschluss wird die Bildrekonstruktion anhand der Messdaten mithilfe eines Computers ausgeführt (siehe Kapitel 3).

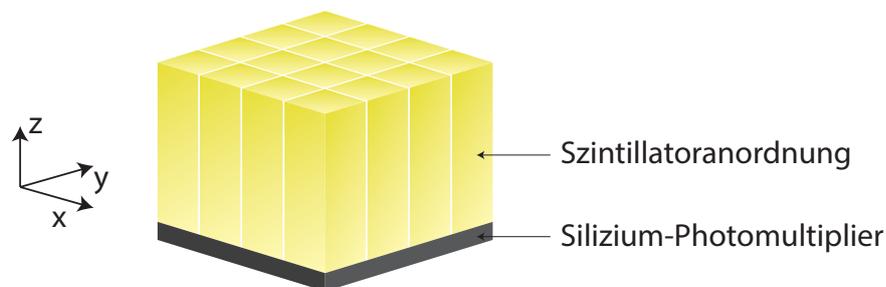


Abbildung 2.2: Schematischer Aufbau der Single Plane Compton Camera. Dargestellt sind 16 Szintillationskristalle (gelb), die individuell an die Untereinheiten, den sogenannten Dies, in einer (4×4) -Anordnung eines digitalen Silizium-Photomultipliers (grau) gekoppelt sind.

Die von Pausch et al. [7] vorgestellte SPCC basiert auf einer segmentierten Detektoranordnung und wird in Abbildung 2.2 dargestellt. Ein einzelner dieser Detektoren besteht aus einem Szintillator – dem Konverter – mit einem optisch gekoppelten digitalen Silizium-

Photomultiplier (dSiPM) – der Ausleseinheit. Szintillatoren wandeln unter Lumineszenz ionisierende in optische Strahlung um. Die Menge der optischen Strahlung ist abhängig von der absorbierten Energie und des Szintillatormaterials. Für Gammaenergien zwischen 200 keV und 700 keV kann bspw. mit Cer dotiertes Gadolinium-Aluminium-Gallium-Garnet (GAGG:Ce) verwendet werden [7]. Ist die Abhängigkeit über die Menge der optischen Strahlung bekannt, kann die absorbierte Energie mithilfe der dSiPMs bestimmt werden. Diese sind vom Aufbau her einzelphotonen-sensitive, pixelierte Photodioden. Unter Wirkung des Photoeffekts geben dSiPMs digitale Signale über die Anzahl der detektierten Szintillationsphotonen (und damit indirekt der Energie) sowie einen entsprechenden Zeitstempel aus (vgl. Schultz-Coulon [17]). Zwischen den Szintillatoren befindet sich eine optische Trennschicht, sodass nur der zugehörige dSiPM eines Szintillators anspricht.

Die segmentierte Anordnung einer SPCC, bestehend aus Konvertern und Ausleseeinheiten, unterscheidet sich von der konventionellen CC. Diese nutzt zwei eigenständige Detektionssysteme, welche klassischerweise in zwei Ebenen angeordnet werden (*two plane* CC). Ihr Aufbau wird in Kapitel 2.3 näher erläutert. Bei der SPCC werden diese zwei Ebenen zu einer Ebene kombiniert (*single plane*).

In Abbildung 2.3 werden beispielhaft die Wechselwirkungsquerschnitte für Photonen zum einen für GAGG:Ce und zum anderen für Wasser, als Näherung für Gewebematerial, dargestellt.

2.3 Detektion und Lokalisation der Gammastrahlung

Das Messprinzip beim SPCI basiert auf dem koinzidenten Nachweis einer inkohärenten Streuung eines einfallenden Photons in einem Szintillator und dem anschließenden Photoeffekt des gestreuten Photons in einem anderen. *Gültige Ereignisse* sind solche, die durch γ -Quanten des zu messenden Radionuklides entstehen. Hier wird angenommen, dass für zwei Detektoren d und c die Energien E_d bzw. E_c vorliegen, wobei

$$E_\gamma = E_d + E_c \quad (2.7)$$

und E_γ die Energie des γ -Quants des emittierenden Radionuklides ist. In der nuklearmedizinischen Diagnostik ist E_γ in der Regel bekannt, weshalb gültige Ereignisse dem Summenkriterium (2.7) entsprechend gefunden und zufällige Ereignisse strikt gefiltert werden können. Unter diesen Bedingungen kann für alle gültigen Ereignisse das Prinzip der elektronischen Kollimation nach Singh [4] zur Lokalisation des Emissionsortes angewandt

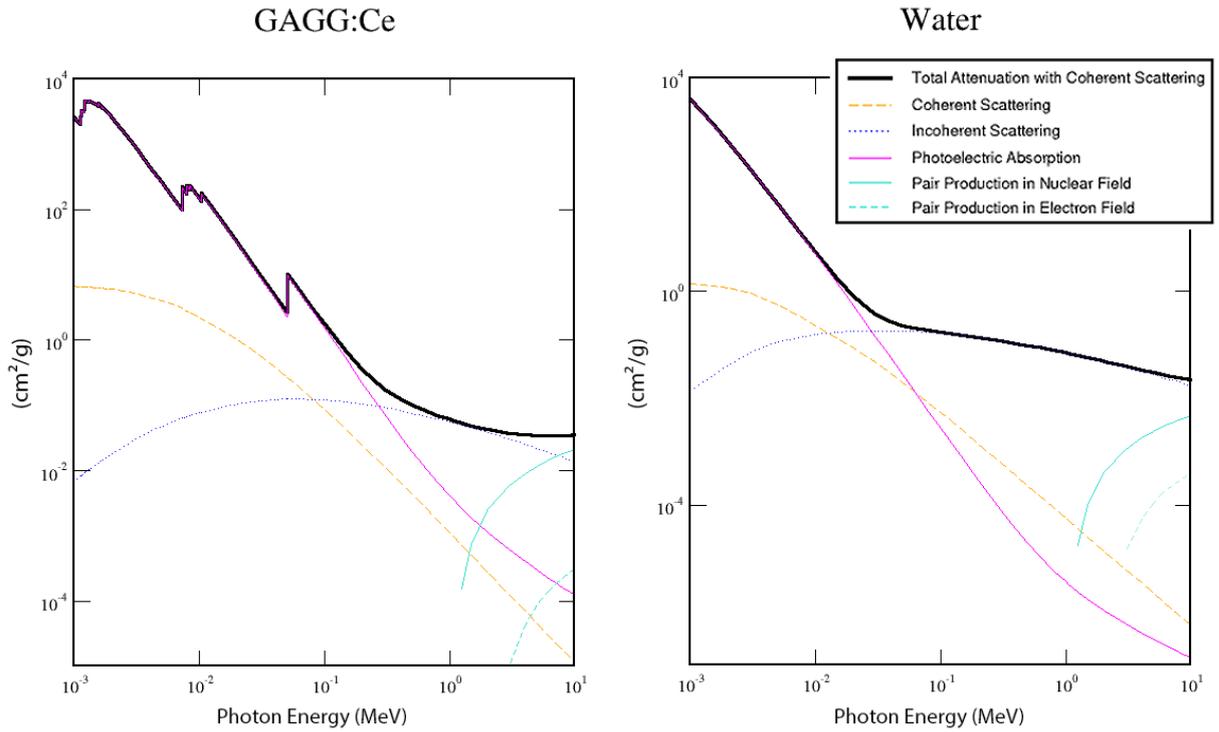


Abbildung 2.3: Linearer Schwächungskoeffizient und Wechselwirkungsquerschnitte von Photonen für GAGG:Ce (links) und Wasser aus [19].

werden. Die elektronische Kollimation wird zunächst anhand der konventionellen CC in Anlehnung an Sitek [20] erläutert.

Die konventionelle CC besteht aus zwei pixelierten Ebenen mit separaten Ausleseeinheiten. Der prinzipielle Aufbau ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Der Streudetektor (erste Ebene) misst den Energieübertrag E_1 und den Ort \mathbf{r}_1 der inkohärenten Streuung. Der Absorptionsdetektor (zweite Ebene) misst den Energieübertrag E_2 und den Ort \mathbf{r}_2 des anschließenden Photoeffekts. Falls E_γ bekannt ist, genügt die Messung der deponierten Energie in einem der beiden Detektoren. Es sind δE_1 bzw. δE_2 die entsprechenden Unsicherheiten der in den Detektoren 1 und 2 deponierten Energien. Der Schätzer für die Energie des gestreuten Photons ergibt sich gemäß

$$\hat{E}'_\gamma = \frac{(E_\gamma - E_1)(\delta E_2)^2 + E_2(\delta E_1)^2}{(\delta E_1)^2 + (\delta E_2)^2} \quad (2.8)$$

und der Schätzer für den Streuwinkel entsprechend

$$\hat{\theta} = \arccos \left[1 - \frac{511 \text{ keV}}{E_\gamma} \left(\frac{E_\gamma}{\hat{E}'_\gamma} - 1 \right) \right]. \quad (2.9)$$

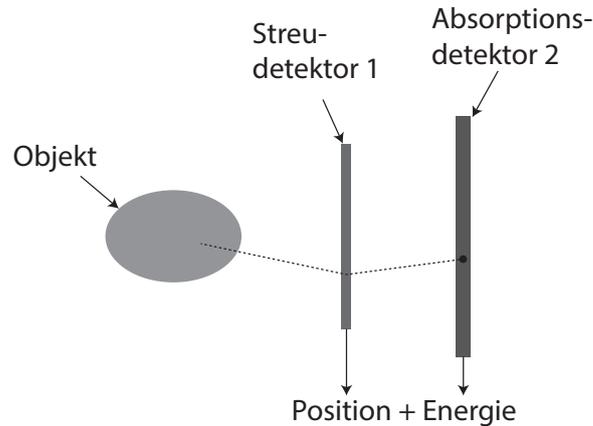


Abbildung 2.4: Bei der Compton Camera wird ein γ -Quant aus dem Objekt in Detektor 1 inkohärent gestreut und in Detektor 2 absorbiert; Grafik entnommen aus [20], modifiziert.

Der Ort der Emission liegt unter Berücksichtigung von Gleichung (2.2) auf einem Kegelmantel, dessen Achse auf der Geraden $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ und dessen Spitze in \mathbf{r}_1 liegt (siehe Abbildung 2.5). Dieser Kegelmantel bildet die sogenannte *Region of Response* (ROR), also diejenige Region im Raum, die den Emissionsort enthält. Bei CCs wird die ROR üblicherweise als Cone of Response (COR) bezeichnet. Der Ort einer Punktquelle liegt dann im Schnittpunkt mehrerer CORs.

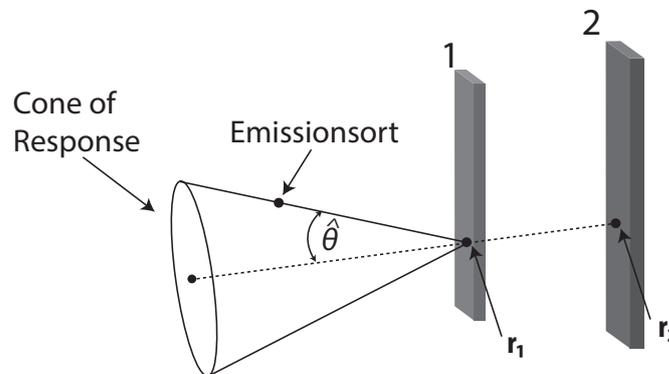


Abbildung 2.5: Veranschaulichung des Kegelmantels (Cone of Response) bei der Two Plane Compton Camera, auf dem sich der Emissionsort befindet.

Das Prinzip der elektronischen Kollimation wird auch bei der SPCC angewandt. Bei der SPCC sind die Rollen des Streu- und Absorptionsdetektors nicht vorgegeben. Dabei ist zu beachten, dass messtechnisch nicht unterschieden werden kann, welcher Effekt in welchem Szintillator (d oder c) stattfand. Dies gilt im Übrigen auch für die konventionelle CC. Da

sich die Streuung natürlich in beiden Szintillatoren ereignen kann, existieren für gültige Ereignisse zwei CORs – resultierend aus einer möglichen Vorwärts- oder Rückstreuung. Dies wird in Abbildung 2.6 verdeutlicht. In beiden Fällen werden im linken und rechten Detektor diesselben Energien E_R bzw. E_L deponiert. Die zwei unterschiedlich wahrscheinlichen Streuwinkel $\hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ führen zu den Öffnungswinkeln der Kegel von $2 \cdot \hat{\theta}_1$ und $2 \cdot (180^\circ - \hat{\theta}_2)$. Für den Fall, dass eine der beiden gemessenen Energien größer als die Compton-Kante ist, resultiert ausschließlich ein COR. Die Compton-Kante ergibt sich aus Gleichung (2.1) für $\theta = 180^\circ$ und anschließender Subtraktion von der Einfallsenergie. In diesem Fall ist eindeutig, in welchem der beiden Szintillatoren der Photoeffekt stattfand.

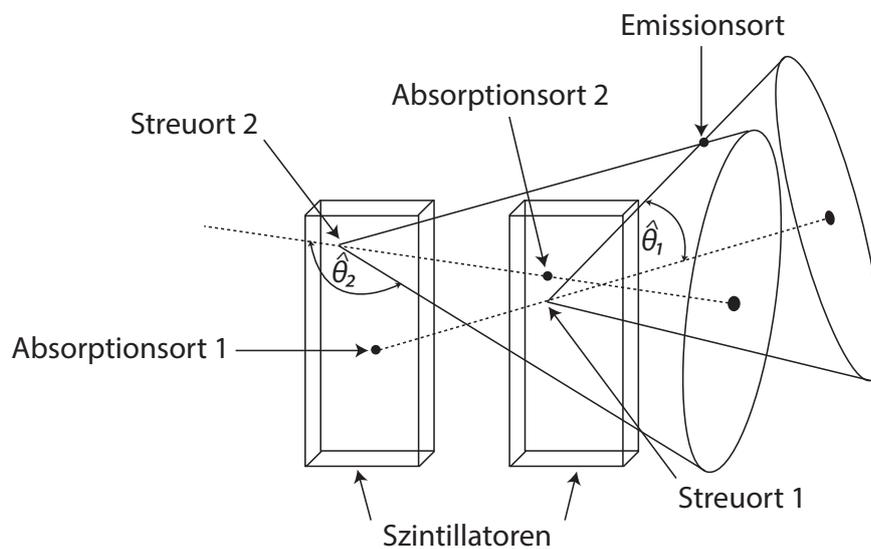


Abbildung 2.6: Beim SPCI mit niederenergetischen Photonen ($E < 150$ keV) besteht die Region of Response aus zwei zugehörigen Cones of Response, die aus der Vorwärtsstreuung (1) und der Rückstreuung (2) resultieren. Der Emissionsort liegt auf der Vereinigung der beiden Kegelmäntel.

Für Anwendungen im hochenergetischen Energiebereich, z. B. für die Reichweiteverifikation mittels prompter γ -Quanten wie in [11], die Messung von 511 keV Photonen bei der Positronen-Emissions-Tomographie oder von kosmischer Strahlung, kann die Rückstreuung aufgrund der geringen Wahrscheinlichkeit vernachlässigt werden. In [7, 8, 9, 10] wird allerdings der Einsatz der SPCC in der nuklearmedizinischen Bildgebung diskutiert. Für Energien unter ca. 150 keV muss dann die Rückstreuung berücksichtigt werden.

Die Positionsauflösung des gültigen Ereignisses erfolgt in (x, y) -Koordinaten anhand der Detektoren d und c mit den Ausdehnungen Δx_d und Δy_d bzw. Δx_c und Δy_c . Systembe-

dingt erfolgt keine Positionsauflösung orthogonal zur Ebene, d. h. entlang der Tiefe der Szintillatoren. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.2) und (2.6) liegen die Orte \mathbf{r}_1 für die Streuung und \mathbf{r}_2 für die Absorption, und damit die beiden Kegelachsen, als dreidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P(\mathbf{r}_1)$ bzw. $P(\mathbf{r}_2)$ vor. Der Emissionsort befindet sich also innerhalb einer dreidimensionalen Vereinigung vieler CORs. Analog zur CC wird für die Lokalisation die Schnittmenge aller entstandenen CORs gebildet.

2.4 Speicherung der Messdaten und Konvention zur Notation

Während der SPCI-Messung findet ein *Binning* (dt.: Gruppierung) der koinzidenten Ereignisse n statt. Hierfür wird vor der Messung eine Matrix mit einer Dimension für jedes betrachtete Attribut erstellt. Die Matrixelemente werden Bins genannt. Jedem Detektorelement des Messsystems wird ein Bin zugeordnet. Die Ereignisse werden entsprechend ihrer Attribute im zugehörigen Bin gespeichert.

Für SPCI sind die interessanten Attribute die in Koinzidenz geschalteten Detektoren (d, c) und die gemessenen Energien E_d bzw. E_c . Die Matrix besitzt somit drei Dimensionen (Indizes), die z. B. dem betroffenen Detektorpaar, E_d und E_c zugeordnet werden können. Für jedes Paar befinden sich gültige Ereignisse dann auf der Diagonalen $E_d = E_\gamma - E_c$. Die Anzahl der Bins der ersten Dimension ergibt sich direkt aus der Anzahl der Detektoren D und beträgt $D(D-1)/2$. Ferner gibt eine festgelegte Größe Δb die Anzahl der Energiebins B in der zweiten und dritten Dimension vor, wobei die Energieauflösung der Detektoren den Wertebereich von Δb begrenzt.

In [11] und in dieser Arbeit werden die zweite und dritte Dimension durch die Energiedifferenz $E_\Delta = E_d - E_c$ bzw. die Energiesumme $E_\Sigma = E_d + E_c$ festgelegt. Gültige Ereignisse für jedes Paar befinden sich demnach auf der Geraden $E_\Sigma = E_\gamma$. Die Energiedifferenz ist eine Funktion des Streuwinkels θ_d oder θ_c des gestreuten Photons in d oder c und enthält somit die Ortsinformation. Ferner gilt zudem für gültige Ereignisse $-E_\gamma < E_\Delta < E_\gamma$. Offensichtlich können die Energien E_d und E_c mit den Transformationen $E_d = (E_\Sigma + E_\Delta)/2$ bzw. $E_c = (E_\Sigma - E_\Delta)/2$ wieder erhalten werden.

Ein Bin ist entsprechend der Indexierung $(d,c)b$ oder kurz dcb vollständig definiert und enthält die Anzahl aller gültigen Ereignisse N_{dcb} , für die $x_{dcb} - \frac{1}{2}\Delta dcb \leq E_\Delta < x_{dcb} + \frac{1}{2}\Delta dcb$ gilt. Es ist x_{dcb} die kartesische Koordinate der Mitte und Δdcb die Breite des Bins.

Ein weiteres Speicherformat, welches auf das Binning verzichtet, ist das *List-Mode*-Format, das Barrett, White und Parra erstmalig für Rekonstruktionen nutzten [21]. Die Messdaten werden in einer einfachen Liste gespeichert. Die Attribute repräsentieren die Spaltenköpfe. Jede Art der Speicherung kann als eine abgeleitete Form des List-Modes betrachtet werden. Die Vorteile sind der Erhalt der vollständigen Information (Korrelationen aller Observablen) sowie die Reduktion des Aufwandes und potenziell des Speicherverbrauchs. Während die Anzahl der Elemente einer Matrix 2^{MB} beträgt, wobei M die Anzahl der Attribute und B die Genauigkeit der Attribute in bits bezeichnen, sind in einer Liste mit J Ereignissen insgesamt MJ Elemente [21]. Also ist für $MJ < 2^{MB}$ List-Mode die effizientere Methode.

Werden die Daten im List-Mode-Format mit einem Analog-Digital-Wandler digitalisiert, so handelt es sich bei den diskretisierten Daten genau genommen auch um gebinnte Daten. Im Unterschied zum konventionellen Binning ist die Breite der Bins beim List-Mode deutlich kleiner.

3 Bildrekonstruktion beim Single Plane Compton Imaging

Das Ziel der nuklearmedizinischen Bildgebung ist die Darstellung metabolischer Prozesse von Radiotracern in Patienten mit einer möglichst hohen Bildqualität. Die Anforderungen an die Bildqualität ergeben sich aus mehreren Faktoren, u. a. der individuellen Fragestellung, dem Signal-to-Noise-Ratio (SNR), der Radiotracerdynamik und der vorhandenen Technik [22]. In diesem Kapitel wird die Bildrekonstruktion in Bezug auf das SPCI vorgestellt.

3.1 Modell

Die Messung einer inkohärenten Photonenquelle wird standardmäßig nach dem Hauptsatz der Systemtheorie abbildender Systeme

$$N(\mathbf{s}) = \int_{\mathbf{s}'} p(\mathbf{s}|\mathbf{s}')\lambda(\mathbf{s}')d\mathbf{s}' + r(\mathbf{s}) \quad (3.1)$$

modelliert, wobei:

$N(\mathbf{s})$ – das observierte Bild (die Messdaten) am Ort \mathbf{s}

$p(\mathbf{s}|\mathbf{s}')$ – die *Point Spread Function* (PSF) des Messsystems

$\lambda(\mathbf{s}')$ – die unbekannte Emissionsdichteverteilung der Quelle am Ort \mathbf{s}'

$r(\mathbf{s})$ – das Rauschen am Ort \mathbf{s}

bezeichnen [23, 24]. Die PSF $p(\mathbf{s}|\mathbf{s}')$ ist die am Ort \mathbf{s} gemessene Antwortfunktion des Messsystems (gemessene Emissionsdichte oder kurz: Systemantwort) für eine Punktquelle am Ort \mathbf{s}' [24]. In der Regel wird die diskretisierte Matrixform mit dem Messraum $\mathbf{N} = (N_{dcb})$, der Systemmatrix $\mathbf{A} = (p_{dcb,v})$, dem Bildraum $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_v)$ und dem Rauschvektor $\mathbf{r} = (r_{dcb})$

gemäß

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{r} = E(\mathbf{N}) + \mathbf{r} \quad (3.2)$$

mit

$$E(\mathbf{N}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} \Leftrightarrow E(N_{dcb}) = \sum_v p_{dcb,v} \lambda_v \quad (3.3)$$

verwendet [24]. $E(\mathbf{N})$ ist der Erwartungswert der Messdaten. N_{dcb} ist die Anzahl der *Projektionen*, das heißt der gültigen Ereignisse, im dcb -ten Bin. In dieser Arbeit bezeichnet $dcb = \{1, \dots, DCB\}$ sowohl das Bin, als auch das ihm zugeordnete Detektorelement. $p_{dcb,v}$ ist die Projektionswahrscheinlichkeit, dass eine Emission aus dem v -ten Bildraumelement von Detektorelement dcb gemessen wird. λ_v ist die Anzahl der Emissionen aus dem Bildraumelement v . Bildraumelemente $v = \{1, \dots, V\}$ können z. B. Voxel (nicht-überlappende, diskretisierte Volumenelemente in einem dreidimensionalen gleichmäßigen Gitter) sein.

In der Bildrekonstruktion muss die unbekannte Emissionsdichte $\boldsymbol{\lambda}$ gefunden werden, wenn \mathbf{A} und \mathbf{N} gegeben sind. Es handelt sich hierbei um ein inverses Problem, da die Ursache (die Emissionsdichte) anhand der verrauschten Messung ermittelt wird. Dieses Problem ist *schlecht gestellt* (engl.: ill-conditioned). Die Summennotation aus Gleichung (3.3), aufgestellt als lineares Gleichungssystem, ist für CCs üblicherweise überbestimmt [25]. Es gibt also mehr Gleichungen als Unbekannte und ein Lösungsvektor existiert im Allgemeinen nicht. Das inverse Problem kann mithilfe von analytischen Verfahren unter der Annahme eines kontinuierlichen Modells oder von iterativen Algorithmen für diskretisierte Daten angegangen werden. Während analytische Methoden weniger rechenaufwendig sind, erlauben iterative Methoden mittels akkurater statistischer und physikalischer Modelle die Verbesserung der Bildqualität.

3.2 Analytische Rekonstruktion

Basko, Zeng und Gullberg [26] stellten eine effiziente Methode zur analytischen Rekonstruktion für die traditionelle CC mit zwei Ebenen vor. Wie in Kapitel 2.3 beschrieben, befinden sich die Emissionsorte auf Kegelmänteln. Die gemessenen Ereignisse sind Projektionen dieser Kegelmäntel. Die Autoren konnten einen Zusammenhang zwischen Kegelmantelprojektionen und Projektionen zweidimensionaler Ebenen auf der Basis von Kugelflächenfunktionen finden. Solche Ebenenprojektionen sind aus der 3D-Radon-Transformation bekannt. Sofern die Ebenenprojektionen berechnet werden können, kann dann die aus der Computertomographie bekannte *gefilterte Rückprojektion* zur Bestimmung der dreidimensionalen Emissionsdichte bestimmt werden. Für weitere Informationen zur Radon-Transformation und gefilterten

Rückprojektion sei z. B. auf Dössel [23] verwiesen.

Eine analytische Methode zur Lösung mit der SPCC existiert aktuell nicht.

Analytische Verfahren stoßen bei verrauschten Daten an ihre Grenzen. Oftmals werden daher iterative Verfahren verwendet, die eine Reduktion der Strahlendosis bei konstantem SNR ermöglichen können.

3.3 Iterative Rekonstruktion

Iterative Algorithmen berechnen unter Berücksichtigung eines statistischen Modells der Messdaten Punktschätzer $\hat{\lambda}_v$ für die Emissionsdichte in jedem Voxel. Im Folgenden werden der weitverbreitete, von Shepp und Vardi [27] für Emissions-Tomographie angepasste Maximum-Likelihood Expectation-Maximization-Algorithmus (ML-EM) von Dempster, Laird und Rubin [28, 29] (Kapitel 3.3.1) und der neue Bayes'sche Origin Ensemble-Algorithmus (OE) von Sitek [30] vorgestellt (Kapitel 3.3.2).

3.3.1 Maximum-Likelihood Expectation-Maximization

Der ML-EM-Algorithmus wird häufig für verrauschte Messdaten angewandt. Hierbei wird eine Likelihoodfunktion der Emissionsdichte aufgestellt und ihr Erwartungswert mit dem Expectation-Maximization-Algorithmus maximiert.

Die Anzahl der Projektionen $\mathbf{N} = (N_{dcb})$ kann als Poisson-verteilt angenommen werden. Dieser Poisson-Verteilung liegt die unbekannte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF, engl.: Probability Density Function) $p(\mathbf{N}|\boldsymbol{\lambda})$ zugrunde, welche die Wahrscheinlichkeit der Messung von $\mathbf{N} \in \mathcal{N}$ unter der Bedingung $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ beschreibt. \mathcal{N} und Λ bezeichnen den vollständigen Ereignisraum der möglichen Messungen bzw. Emissionsdichten.

Die Likelihoodfunktion weist $\boldsymbol{\lambda}$ eine Likelihood (dt.: Plausibilität) zu und kann erst nach der Messung angegeben werden. Sie wird definiert als $\mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda}) = p(\mathcal{N} = \mathbf{N}|\boldsymbol{\lambda})$. Hier bedeutet die Notation $\mathcal{N} = \mathbf{N}$, dass \mathbf{N} gemessen wurde (vgl. [20]). $\mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda})$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit für jedes $\boldsymbol{\lambda}$, dass $\mathcal{N} = \mathbf{N}$ erhalten wird und ist daher nur eine Funktion von $\boldsymbol{\lambda}$. Das Modell $p(\mathbf{N}|\boldsymbol{\lambda})$ dagegen ist eine Funktion sowohl von \mathbf{N} als auch $\boldsymbol{\lambda}$.

Das Likelihood-Prinzip besagt, sich für ein solches $\boldsymbol{\lambda}$ zu entscheiden, welches die Likelihood maximiert [31]. Aufgrund der Multidimensionalität der Likelihoodfunktion in diesem Anwendungsfall ist es unpraktisch, diese direkt zu maximieren. Stattdessen wird mit

dem Expectation-Maximization-Algorithmus der Erwartungswert der Likelihoodfunktion maximiert, um ihr Maximum zu finden. Für gebinnte Daten lautet das Verfahren:

$$\hat{\lambda}_v^{(k+1)} = \frac{c_v^{(k)}}{s_v} \hat{\lambda}_v^{(k)} \quad \forall v (\hat{\lambda}_v^{(k=0)} > 0) \quad (3.4)$$

mit dem multiplikativen Korrektionsfaktor

$$c_v^{(k)} = \sum_{dcb} p_{dcb,v} \frac{N_{dcb}}{\sum_{v'} p_{dcb,v'} \hat{\lambda}_{v'}^{(k)}} \quad (3.5)$$

und der Sensitivität

$$s_v = \sum_{dcb} p_{dcb,v}. \quad (3.6)$$

Hier bezeichnet k den aktuellen Iterationsschritt. Der Korrektionsfaktor ergibt sich voxelweise aus der *Rückprojektion* des Quotienten aus den Daten und der *Vorwärtsprojektion* des aktuellen Bildes $\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} \Leftrightarrow \sum_{v'} p_{dcb,v'} \hat{\lambda}_{v'}^{(k)}$. Die Sensitivität entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass eine Emission aus dem betroffenen Bildraumelement von einem beliebigen Detektorelement, d. h. vom gesamten System, detektiert wird. Die Bedingung $\forall v (\hat{\lambda}_v^{(k=0)} > 0)$ lässt nur positive Werte der Emissionsdichte zu. Eine Herleitung wird in Anhang A bereitgestellt. Für den Beweis der Konvergenz sei z. B. auf Dempster et al. [28] oder Jeff Wu [32] verwiesen.

Für List-Mode-Daten wird zur Berechnung von c_v nicht über die Bins, sondern über die gemessenen Projektionen $n = \{1, 2, \dots, N\}$ mit $N = \sum_{dcb} N_{dcb}$ summiert. Es wird angenommen, dass ein Bin infinitesimale Ausdehnung besitzt und nach einer Messung ein Bin höchstens ein Ereignis enthält, sodass $N_{dcb} \rightarrow 1$ oder $N_{dcb} \rightarrow 0$. Damit wird der Korrektionsfaktor über

$$c_v^{(k)} = \sum_{dcb_n} p_{dcb_n,v} \frac{1}{\sum_{v'} p_{dcb_n,v'} \hat{\lambda}_{v'}^{(k)}} \quad (3.7)$$

berechnet [21], wobei die Notation dcb_n ein Ereignis n bezeichnet, das von dcb gemessen wird. Allerdings folgt für die Sensitivität $s_v \neq \sum_{dcb} p_{dcb,v}$, da die gemessenen Ereignisse nicht mehr den vollständigen Messraum abbilden.

Als Startbild kann ein homogenes (rauschfreies) Bild gewählt oder auf Informationen *a priori* zugegriffen werden. Die Lösung ist ein lokales Maximum, das ausgehend vom Startbild erreicht wird. ML-EM zeichnet sich durch rechenintensive Operationen, eine langsame Konvergenz und eine ausgeprägte Anfälligkeit für Rauschen aus, weshalb vor Erreichen der Konvergenz abgebrochen werden sollte [33]. Ferner kann gezeigt werden,

dass ML-EM nicht zur Lösung schlecht gestellter, inverser Probleme geeignet ist [24]. In Abbildung 3.1 wird das Verfahren schematisch dargestellt.

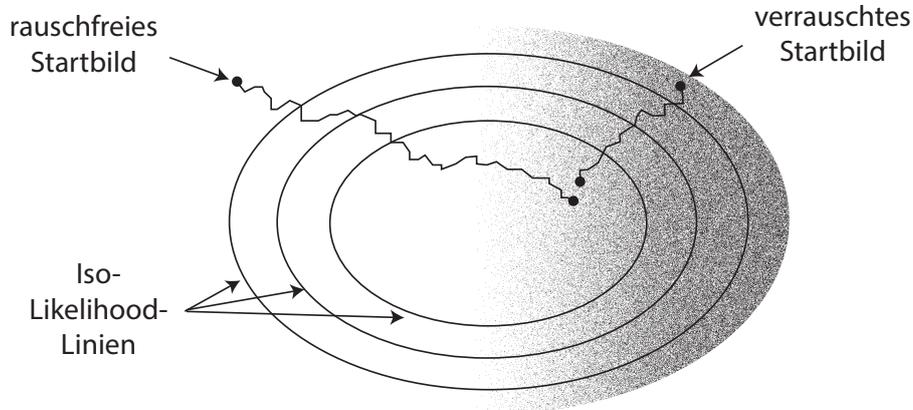


Abbildung 3.1: Veranschaulichung der Maximierung der Likelihoodfunktion bei ML-EM am Beispiel eines rauschfreien und eines verrauschten Startbildes. Die Likelihood erhöht sich mit zunehmender Iterationszahl. Ausgehend vom Startbild können unterschiedliche Ergebnisse erhalten werden.

3.3.2 Origin Ensemble

Der OE Algorithmus, erstmals von Sitek im Jahr 2008 für List-Mode-Daten vorgestellt [30], ist Gegenstand aktueller Forschung im Bereich der Bildrekonstruktion [34, 35, 36, 37, 38, 39]. Sein Ansatz erlaubt die Vermeidung rechenintensiver Vorwärts- und Rückprojektionen zur Schätzung des Erwartungswerts und der Varianz der Emissionsdichte und damit einhergehend eine drastische Reduktion der Rekonstruktionszeit im Vergleich zu List-Mode-ML-EM. Im Folgenden wird der Algorithmus vereinfacht gemäß Sitek [20, 30, 34] erklärt.

Gültige Ereignisse dcb_n (n wurde von dcb gemessen) resultieren aus der Detektion eines γ -Quants, das infolge einer Kernabregung aus einem beliebigen Voxel v des Bildraums emittiert wurde. Das *Origin* bezeichnet die Kernabregung selbst oder genauer den Ort der Kernabregung. Zwar ist der Ort nicht bekannt, allerdings kann eine PDF $\pi_n(v)$ zur Beschreibung der Wahrscheinlichkeit für den Ort eines jeden n angenommen werden (Der Begriff PDF wird hier in Übereinstimmung mit der Literatur benutzt, obgleich es sich um diskrete Wahrscheinlichkeiten handelt [20, 30].):

$$\pi_n(v) \propto p_{dcb_n,v} \lambda_v = p_{dcb_n,v} \frac{O_v}{S_v}. \quad (3.8)$$

Hier ist o_v die unbekannte Anzahl der Origins im Voxel v , die sich gemäß $\lambda_v \cdot s_v$ ergibt. Gleichung (3.8) beschreibt die Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit des Aufenthaltes eines beliebigen Origins in einem Voxel v proportional zu der sich dort befindenden Anzahl der Origins ist. Für die PDF eines Systems mit N detektierten Photonen, die aus den Voxeln v_1, v_2, \dots, v_N emittiert wurden, folgt

$$\Pi(\mathbf{v}) = \prod_n^N \pi_n(v_n) \propto \prod_n^N p_{dcb_n, v_n} \frac{o_{v_n}}{s_{v_n}}, \quad (3.9)$$

wobei \mathbf{v} einen N -dimensionalen Vektor mit den Komponenten v_1, v_2, \dots, v_N definiert und einen möglichen Zustand eines Zustandsraums mit allen V^N möglichen Zuständen darstellt. Verschiedene Zustände können diesselben Werte für o_v enthalten, z. B. wenn zwei Origins aus zwei verschiedenen Voxel vertauscht werden. Unter Umständen können die Wahrscheinlichkeiten für konstante o_v unverändert bleiben. Beispielsweise existieren für ein einfaches Bildgebungssystem mit einem Detektorelement, zwei Voxel und fünf Ereignissen insgesamt $2^5 = 32$ Variationen. Es gibt allerdings nur sechs verschiedene Kombinationen, also Wahrscheinlichkeiten, gemäß Gleichung (3.9) ($\{5,0\}, \{4,1\}, \dots, \{1,4\}, \{0,5\}$).

Die Menge oder eine Teilmenge des Zustandsraums kann zu *statistischen Ensembles* $\Omega = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_Z\}$ mit $Z \leq V^N$ zusammengefasst werden. Das Origin Ensemble bezeichnet also ein solches Ensemble, das viele möglichen Zustände der Origins aller gemessenen Ereignisse enthält. Die PDF des Ensembles $p(\Omega)$ enthält Information über die Emissionsdichte λ , allerdings ist ihre analytische Berechnung unpraktisch, da diese eine Integration über das multidimensionale Ω erfordert. Mit Monte-Carlo-Methoden (MC) hingegen ist es vergleichsweise leicht, Stichproben aus $p(\Omega)$ zu ziehen. Eine genügend hohe Zahl von Stichproben liefert dann eine Näherung für $p(\Omega)$.

Monte-Carlo-Methoden können beispielsweise zur numerischen Integration angewandt werden. Bildlich gesprochen werden hierzu viele Punkte (Stichproben) zufällig gelost und anschließend das Verhältnis aus der Anzahl der Punkte unter der vorgegebenen Kurve und im gesamten Raum gebildet. So lässt sich beispielsweise die Kreiszahl π berechnen. Wenn eine PDF nicht direkt berechnet werden kann, dafür jedoch Funktionen proportional zur gesuchten Dichte (hier: $\Pi(\mathbf{v}) \propto p(\Omega)$), dann können Stichproben der gesuchten PDF mit dem Metropolis-Hastings-Algorithmus [40, 41] gelost werden. Dieser ist seinerseits eine Markov-Chain-Monte-Carlo-Methode (MCMC).

Eine Markov-Kette (engl: Markov-Chain) ist eine Folge von Zuständen in einem stochastischen Prozess, in dem der nächste Zustand \mathbf{v}_{z+1} nur vom vorherigen Zustand \mathbf{v}_z abhängt, unabhängig von der Geschichte der Folge. Hier unterscheiden sich die beiden Zustände

nur um das Voxel eines einzigen Origins. Unter bestimmten Bedingungen (siehe hierzu Anhang B), wird die Markov-Kette ausgehend von einem beliebigen Zustand mit $\Pi(\mathbf{v}) > 0$ nach einer endlichen Zahl von Schritten eine stationäre Verteilung $f(\Omega)$ annehmen, welche auch Equilibrium genannt wird. Im Equilibrium gilt: $f(\Omega) = p(\Omega)$ [42].

Der Metropolis-Hastings-Algorithmus generiert neue Zustände im Sinne eines *Random Walks* [42]. Hierfür wird für ein Ereignis dcb_n eine Übergangswahrscheinlichkeit vom zugehörigen Voxel v_n in einen zufällig ausgewählten Voxel v'_n definiert (vgl. [20], Gleichung (6.33)):

$$p(v_n \rightarrow v'_n) = \min \left[1, \frac{\Pi(\mathbf{v}_{z+1})}{\Pi(\mathbf{v}_z)} \right] = \min \left[1, \frac{s_{v_n} p_{dcb_n, v'_n} o_{v'_n} + 1}{s_{v'_n} p_{dcb_n, v_n} o_{v_n}} \right]. \quad (3.10)$$

Die Akzeptanz dieses Übergangs erfolgt stochastisch. Eine Iteration besteht aus der zufälligen Losung von N Ereignissen, für die mögliche Übergänge zufällig vorgeschlagen werden. Die Übergänge werden anschließend akzeptiert oder nicht akzeptiert. Es werden J Iterationen durchgeführt, um die stationäre Verteilung zu erreichen. Dabei ist J nicht bekannt, sondern wird zu Beginn des Algorithmus geschätzt und vorgegeben. Nach K weiteren Iterationen in der stationären Verteilung werden Stichproben $\mathbf{v}^{(k=0)}$, $\mathbf{v}^{(k=1)}$, ..., $\mathbf{v}^{(k=K)}$, deren Wahrscheinlichkeiten proportional zu $\Pi(\mathbf{v})$ sind, gezogen und gespeichert.

Im letzten Schritt wird der Mittelwert aus der Anzahl der Origins o_v aller Stichproben gebildet. Dies entspricht dem Erwartungswert für die Anzahl der Origins \hat{o}_v . Daraus wird im letzten Schritt ein Schätzer für die Emissionsdichte $\hat{\lambda}$ berechnet:

$$\hat{o}_v = \frac{1}{K} \sum_k^K o_v^{(k)} \quad (3.11)$$

$$\hat{\lambda}_v = \frac{\hat{o}_v}{s_v}. \quad (3.12)$$

In Abbildung 3.2 wird die Vorgehensweise des OE Algorithmus dargestellt. Das Verfahren ist besonders für komplexe Detektorgeometrien geeignet, z. B. wenn viele Detektorelemente Photonen aus demselben Bildraumelement messen können. Zur Lösung von 3D-Problemen kann der Algorithmus jedoch Millionen von Iterationen erfordern. Häufig weisen Lösungen „leere“ Voxel auf, da Origins eine Tendenz zur Gruppierung vorweisen. Mit Glättungsfiltren kann dies etwas reguliert werden.

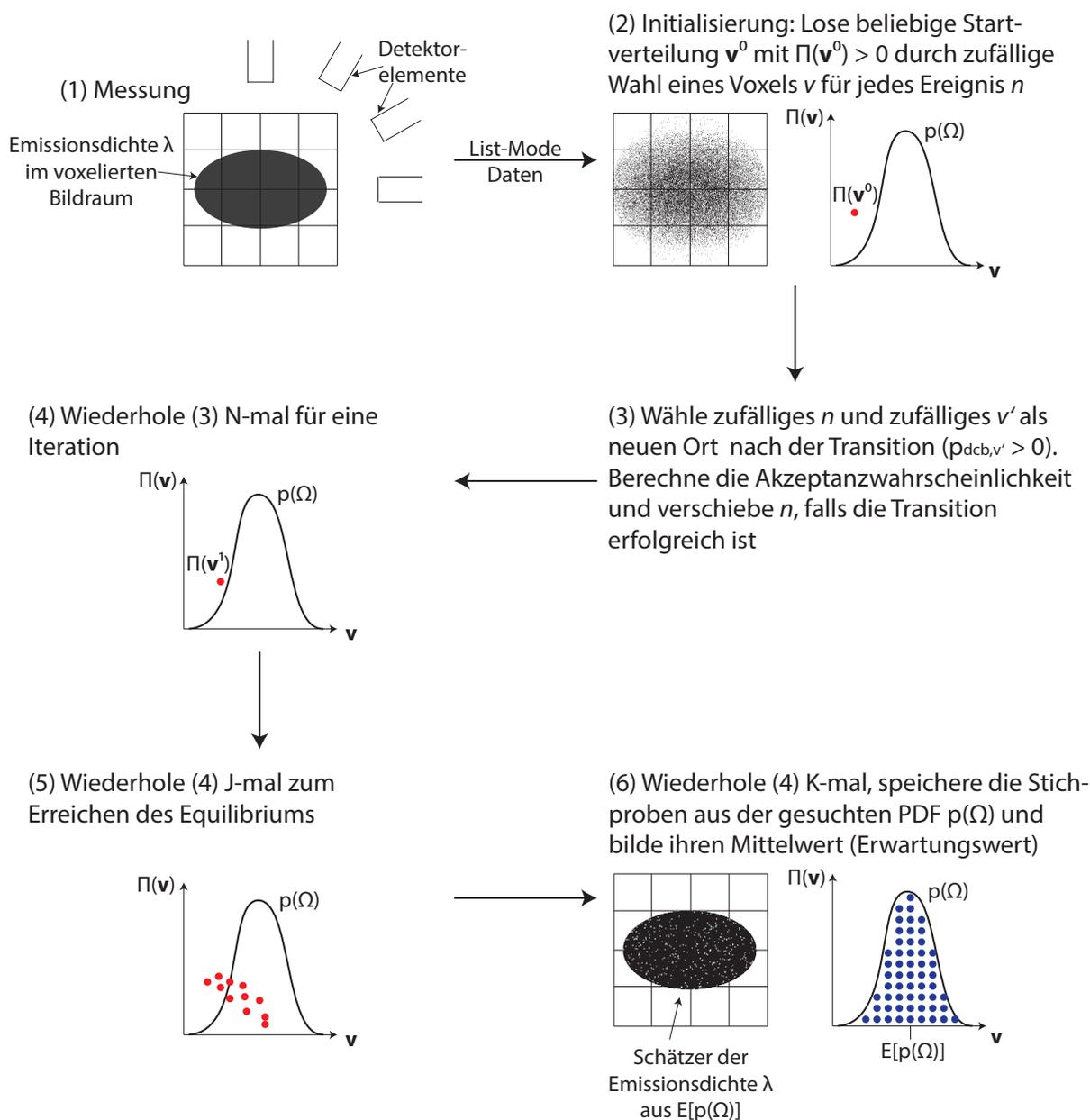


Abbildung 3.2: Veranschaulichung der Vorgehensweise bei Origin Ensemble. Im zweiten Schritt wird ein Startbild derart gelöst, dass sich jedes Origin irgendwo auf dem zugehörigen COR befindet. Der Übergang eines Origins in einen zufällig gelosten Voxel ist (je nach Implementierung) erfolgreich, wenn die Emissionsdichte im neuen Voxel höher ist. Es ist zu beachten, dass \mathbf{v} multidimensional ist und zur Vereinfachung der Darstellung eine eindimensionale Dichtefunktion gezeichnet wird.

4 Materialien und Methoden

4.1 Konstruktion der Systemmatrix

Im Allgemeinen werden zwei verschiedene Ansätze verfolgt, um die Projektionswahrscheinlichkeiten der Systemmatrix \mathbf{A} zu berechnen – entweder per numerische Approximation durch MC-Simulationen wie bei Schoene et al. [43] oder anhand analytischer Modelle wie z. B. in Wilderman et al. [44], Maxim et al. [45], Taya et al. [46] oder Muñoz et al. [47]. Simulationen sind wegen der Komplexität von Compton Cameras rechenaufwendig, da für eine ausreichende Statistik für die Projektionen in jedem Bin eine große Zahl von Emissionen aus jedem Voxel simuliert werden müssen – für jede zu messende Energie E_0 und Detektorgeometrie. Es ist zu beachten, dass sich die Anzahl der Detektorelemente für herkömmliche CCs mit zwei pixelierten, dünnen Ebenen in der Größenordnung um 10^{10} bis potenziell 10^{18} pro Voxel befindet [30, 44]. Bei der CC ist die Matrix mindestens fünfdimensional, mit x_1 und y_1 für den Ort der Streuung, x_2 und y_2 für den Ort der Absorption und \hat{E}'_γ für den Öffnungswinkel des CORs. Ferner ergeben sich hohe Speicheranforderungen. Manche Autoren berechnen die Systemmatrix daher nicht im Voraus, sondern ermitteln ihre Elemente *on-the-fly* [27], also während der Messung und nur dann, wenn sie benötigt werden. Im Allgemeinen wird dann ein List-Mode-Verfahren für die Rekonstruktion angewandt.

Infolge des einfacheren Aufbaus der SPCC im Vergleich zur konventionellen CC ist die Anzahl der Detektorelemente pro Voxel um einige Größenordnungen kleiner. Dies ermöglicht einen geringeren Speicherbedarf der Systemmatrix für vorberechnete Projektionswahrscheinlichkeiten. Im Rahmen einer vorangegangenen Machbarkeitsstudie [48] wurde ein Simulationsdatensatz zur Konstruktion einer Systemmatrix mit dem Geant4-Toolkit [49] erhalten. Diese Systemmatrix wird `SPCIBase441.root` genannt und zur Rekonstruktion in dieser Arbeit verwendet. Es wurde eine (4×4) -Detektoranordnung aus GAGG:Ce-Szintillatoren mit idealer Energieauflösung modelliert. Jeder Szintillator maß $7,05 \times 6,65 \times 20,0 \text{ mm}^3$. Die Anzahl der Bins für gültige Ereignisse pro Voxel betrug $DCB = 84000$ mit $B = 700$ und $\Delta b = 2 \text{ keV}$. Der Bildraum bestand aus $21 \times 21 \times 1$ Voxel mit Voxelvolumina von $5 \times 5 \times 5 \text{ mm}^3$ und befand sich zentriert und parallel über der Detektoroberfläche in einem

Abstand von $z = 50$ mm. Damit existieren etwa $3,7 \cdot 10^7$ Systemmatrixelemente. Aus jedem Voxelmittelpunkt wurden $q_\Omega = 5 \cdot 10^6$ Photonen einer Cs-137-Punktquelle ($E_\gamma = 661,7$ keV) in einen Raumwinkel $\Omega < 4\pi$ emittiert, welcher den Detektor vollständig enthielt. Die Projektionswahrscheinlichkeiten können dann gemäß

$$p_{dcb,v} = \frac{N_{dcb,v}}{q_\Omega} \cdot \frac{\Omega}{4\pi} \quad (4.1)$$

und die Sensitivitäten für jedes Voxel nach

$$s_v = \sum_{dcb} p_{dcb,v} = \sum_{dcb} \frac{N_{dcb,v}}{q_\Omega} \cdot \frac{\Omega}{4\pi} \quad (4.2)$$

berechnet werden, wobei $N_{dcb,v}$ die Anzahl der Projektionen in Bin dcb aus Voxel v ist. In Abbildung 4.1 wird die für diese Arbeit vorgegebene Voxel- bzw. Detektornotation für `SPCIBase441.root` gezeigt.

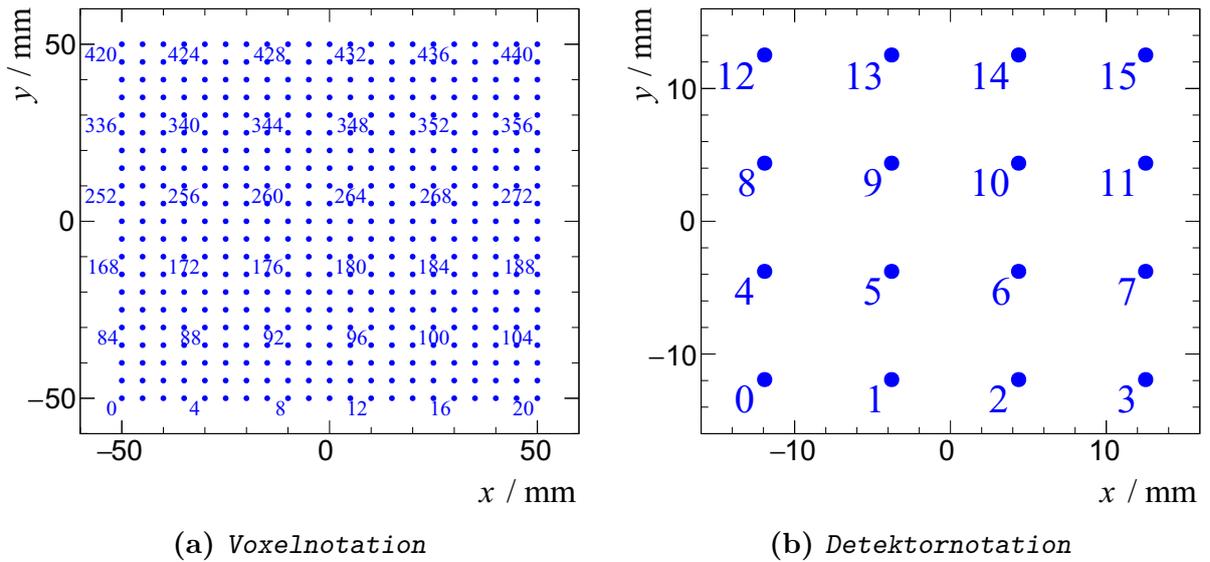


Abbildung 4.1: Die Nummerierung der Voxel und Detektoren nimmt spaltenweise nach rechts, dann reihenweise nach oben um jeweils 1 zu und beginnt bei 0 jeweils am Ort $(-x_{max}, -y_{max})$ in den entsprechenden Koordinatensystemen.

4.2 Implementierung der Software

Die verwendeten Methoden für die Bildrekonstruktion sind der ML-EM-Algorithmus für gebinnte Daten (Kapitel 3.3.1) und der OE-Algorithmus für List-Mode-Daten (Kapitel 3.3.2).

Die Ergebnisse beider Methoden werden im Anschluss auf 1 normiert und können so, als Wahrscheinlichkeiten der Emissionsdichte betrachtet, besser verglichen werden. In Abbildung 4.2 wird ein Fließschema zur Software dargestellt.

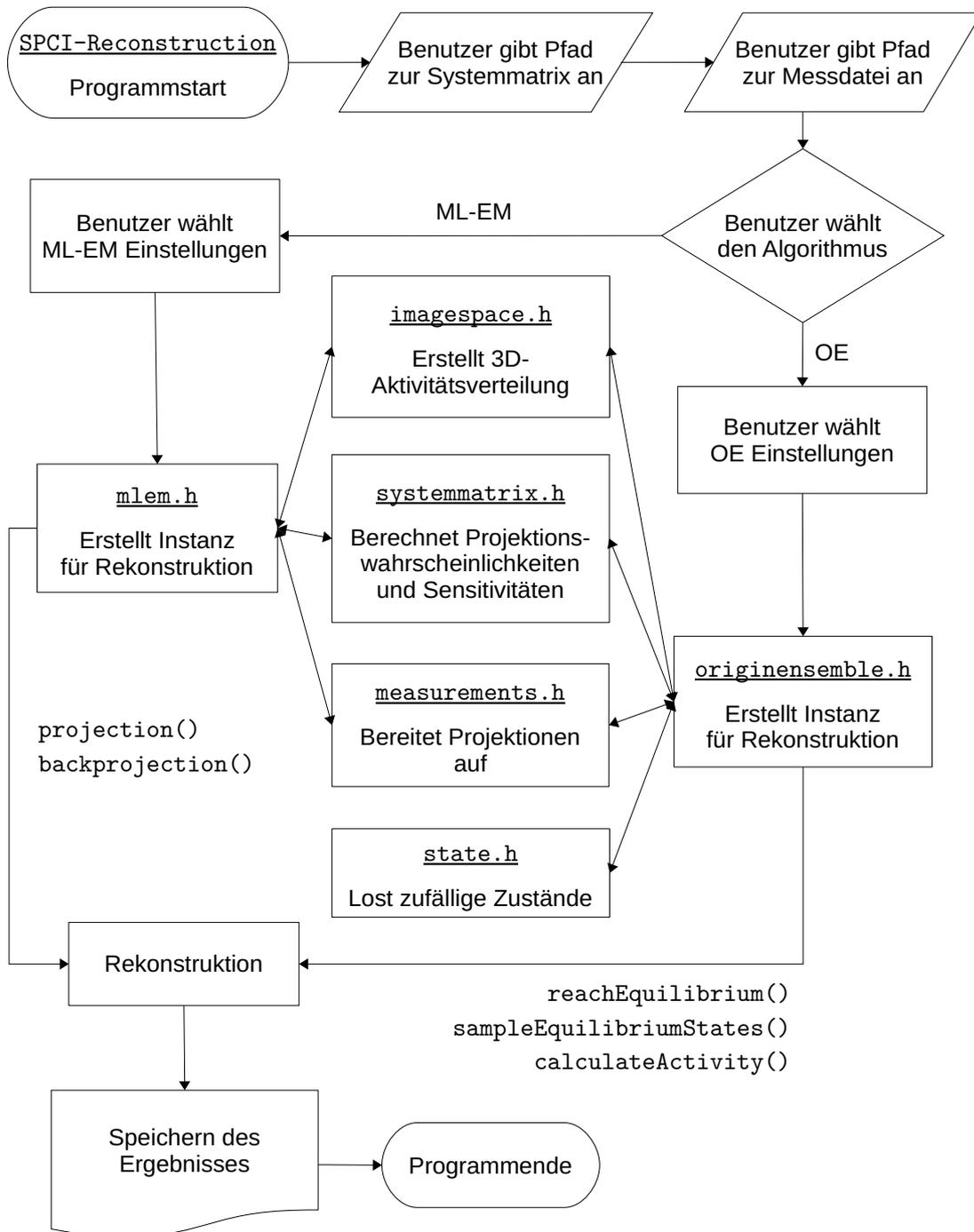


Abbildung 4.2: Fließschema für die Software *SPI-Reconstruction*.

Die Software `SPCI-Reconstruction` für die Bildrekonstruktion beim SPCI wird in `C++` unter Verwendung des `ROOT`-Frameworks in der Version 6.12.04 [50] geschrieben. `ROOT` ist eine am CERN entwickelte, hauptsächlich in `C++` geschriebene Bibliothek zur statistischen Datenanalyse und Visualisierung. Der Code einschließlich Erläuterungen kann aus Anhang C entnommen werden.

4.2.1 Implementierung von ML-EM

Es wird folgende ML-EM-Variante für gebintete Daten implementiert:

$$\hat{\lambda}_v^{(k+1)} = \frac{c_v^{(k)}}{s_v} \hat{\lambda}_v^{(k)} \quad \forall v (\hat{\lambda}_v^{(k=0)} = 1) \quad (4.3)$$

$$c_v^{(k)} = \left(\sum_{dcb} p_{dcb,v} \frac{N_{dcb}}{\sum_{v'} p_{dcb,v'} \hat{\lambda}_{v'}^{(k)}} \right)^\beta. \quad (4.4)$$

Die Standard-Formulierung laut den Gleichungen (3.4) und (3.5) wird hierbei um den Exponenten für den Korrektionsfaktor β erweitert. Die Konvergenz kann dann ungefähr um den Faktor β beschleunigt werden. Dies wird z. B. in Llacer [51] untersucht und von Hwang und Zeng [52] bewertet. Für $\beta \geq 3$ sind die Ergebnisse angesichts von Oszillationen und Divergenzen sowie fehlenden Normierungen nach jedem Iterationsschritt instabil. In Kontaxakis und Strauss [53] wird $1 \leq \beta \leq 2$ konstatiert. Ohne *a priori* Informationen über $\boldsymbol{\lambda}$ wird das Startbild $\hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(k=0)}$ Herbert [33] zufolge optimalerweise mit einem rauschfreien Bild (siehe Gleichung (4.3)) initialisiert. Da der Algorithmus daraus ein verrauschtes Ergebnis berechnet, beeinflusst die ursprüngliche Homogenität das SNR des Ergebnisses positiv (vgl. Abbildung 3.1).

Zur Beobachtung der Konvergenz muss die Likelihoodfunktion berechnet werden. Wegen der einfacheren Berechnung wird die Log-Likelihoodfunktion angegeben, die sich in Analogie zu Gleichung (A.5) aus Anhang A und Vernachlässigung sämtlicher Konstanten folgendermaßen ergibt:

$$\log \mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda}^{(k)}) = \sum_{dcb} N_{dcb} \log \left(\hat{N}_{dcb}^{(k)} \right) - \hat{N}_{dcb}^{(k)} \quad (4.5)$$

mit

$$\hat{N}_{dcb}^{(k)} = \sum_v p_{dcb,v} \hat{\lambda}_v^{(k)}. \quad (4.6)$$

Die Methodik lautet demnach: (1) *Initialisiere* $\boldsymbol{\lambda}^{k=0}$, (2) *berechne* $\boldsymbol{\lambda}^{k+1}$, (3) *berechne* $\log \mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda})$, (4) *wiederhole Schritte (2) und (3) K-mal*.

4.2.2 Implementierung von OE

Daten im List-Mode-Format können aus gebinnnten Daten durch Aufhebung der Gruppierung erhalten werden. Dazu wird eine Liste für jede Projektion dcb_n erstellt, wobei n das durch dcb detektierte Ereignis bezeichnet.

Für den MCMC-Algorithmus werden drei unterschiedliche Akzeptanzwahrscheinlichkeiten nach Sitek [20] implementiert:

$$p_F = \min \left[1, \frac{s_v p_{dcb,v'} o_{v'} + 1}{s_{v'} p_{dcb,v} o_v} \right] \quad (4.7)$$

$$p_J = \min \left[1, \frac{s_v p_{dcb,v'} o_{v'} + \frac{1}{2}}{s_{v'} p_{dcb,v} o_v - \frac{1}{2}} \right] \quad (4.8)$$

$$p_E = \min \left[1, \frac{s_v p_{dcb,v'}}{s_{v'} p_{dcb,v}} \left(\frac{o_{v'} + 1}{o_v} \right)^{1-\beta} \right]. \quad (4.9)$$

Die Akzeptanzwahrscheinlichkeit p_F ergibt sich anhand eines *Flat Priors*, also wenn keine *a priori* Informationen vorliegen und nicht ausgeschlossen werden kann, dass jedes $\boldsymbol{\lambda}$ dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt. Für p_J wird *Jeffrey's Prior* angenommen, wobei die A-Priori-Verteilung für $\boldsymbol{\lambda}$ vereinfacht ausgedrückt proportional zu einer varianzähnlichen Größe (die Wurzel der Determinanten der Fisher-Informationsmatrix) ist. Für p_E wird nach der Maximum-Entropie-Methode vorgegangen, die besagt, dass als A-Priori-Verteilung eine solche verwendet werden sollte, welche die Entropie von $\boldsymbol{\lambda}$ maximiert, d. h. $\beta = 1$. Für tiefere Informationen über das Jeffrey's Prior und das Entropie Prior sei an dieser Stelle jedoch auf [20] verwiesen.

Nicht trivial ist die Frage, wann die Markov-Kette das Equilibrium erreichen wird. Analog zu Sitek [30] wird hier als Größe für die Konvergenz der Anteil erfolgreicher Übergänge r^{OE} innerhalb einer Iteration vorgegeben, sodass die Konvergenz empirisch und retrospektiv bewertet werden kann:

$$r^{OE} = \frac{\text{Anzahl der erfolgreichen Übergänge}}{\text{Anzahl der Projektionen}}. \quad (4.10)$$

Zuletzt muss die Anzahl der Stichproben festgelegt werden, während sich die Markov-Kette im Equilibrium befindet. Es gilt, dass eine Erhöhung der Stichprobenanzahl zu

einer Verminderung der Varianz des Schätzers $\hat{\lambda}$ führt. Dies ist offensichtlich eine Frage der verfügbaren Rechenleistung und -zeit und wird fallspezifisch vorgegeben. Zur Bildung von $\hat{\lambda}$ wird voxelweise der Mittelwert von allen Stichproben berechnet. Das Ergebnis wird anschließend mittels der ROOT-Funktion `TH2::Smooth`, die intern einen 3×3 -Kernel verwendet, geglättet.

Damit lautet das Verfahren: (1) Lose $\mathbf{v}^{(k=0)}$ mit $\Pi(\mathbf{v}^{(k=0)}) > 0$, (2) lose ein zufälliges Ereignis n und einen neuen Ort v' , (3) berechne die Akzeptanzwahrscheinlichkeit p_a , (4) lose eine gleichverteilte Zahl z zwischen 0 und 1, (5) falls $z \leq p_a$, akzeptiere v' und erhöhe/erniedrige o'_v/o_v um $+1/-1$, (6) wiederhole Schritte (2)–(5) N -mal, (7) berechne r^{OE} , (8) wiederhole Schritt (6) J -mal, um das Equilibrium zu erreichen, (9) wiederhole Schritt (6) K -Mal und speichere den Zustand $\lambda^{(k)}$, (10) berechne $\hat{\lambda}_v = (\frac{1}{K} \sum_k o_v^{(k)})/s_v$.

4.3 Verifikation

Die Verifikation der Rekonstruktionsalgorithmen erfolgt mittels *Inverse Crime* [54]. Hierbei wird ein Messdatensatz basierend auf demselben theoretischen Modell synthetisiert und anschließend zur Lösung mit demselben Modell wieder invertiert. Im vorliegenden Fall entspricht dies einem Messdatensatz einer fiktiven Quelle, der auf einer Vorwärtsprojektion ausgewählter Voxel aus der Systemmatrix basiert, und welcher dann mit derselben Systemmatrix rekonstruiert wird. Reale Messungen unterscheiden sich wenigstens durch statistisches Rauschen (vgl. Gleichung (3.1)), sodass sich \mathbf{N} bei einer Wiederholung des Experiments unter denselben Bedingungen jedes Mal unterscheiden wird. Dies ist bei *Inverse Crime* nicht der Fall und folglich wird die rekonstruierte Emissionsdichte nach einer endlichen Iterationszahl exakt der vorgegebenen Emissionsdichte entsprechen. Auf diese Weise kann die Existenz von Fehlern in der Rekonstruktion bzw. dem implementierten Code nachgewiesen werden. Es soll hier jedoch angemerkt sein, dass mit *Inverse Crime* nicht die Richtigkeit des zugrundeliegenden Modells bewiesen werden kann.

Es wird ein Messdatensatz `Verification.root` aus drei unterschiedlich positionierten und gewichteten Punktquellen mittels des Makros `CreateSource.cpp` und der Systemmatrix `SPCIBase441.root` generiert (siehe Abbildung 4.3a). Dies dient zum Nachweis eines korrekten Koordinatensystems und von richtigen Korrekturfaktoren (ML-EM) bzw. Akzeptanz- und Übergangswahrscheinlichkeiten (OE). Die Punktquellen bestehen aus jeweils vier quadratisch angeordneten Voxel an den Orten (0, 30) mm, (−35, −20) mm und (35, −20) mm mit den Gewichten 1, 0,5 bzw. 0,25. Die Anzahl der Projektionen wird durch Skalierung auf $N \approx 5 \cdot 10^6$ gesetzt.

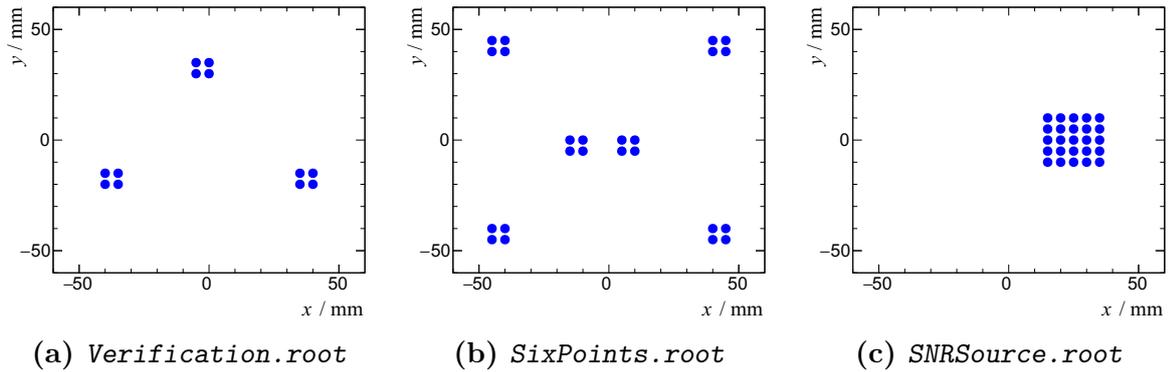


Abbildung 4.3: Ausgewählte Voxel für alle synthetisierten Messdatensätze.

4.4 Optimierung

Das Ziel dieser Arbeit ist die Optimierung beider Algorithmen. Diese können aufgrund ihrer Implementierung für verschiedene Messmodi eingesetzt werden. ML-EM für gebinnete Daten eignet sich dann, wenn die Anzahl der Projektionen N viel größer als die Anzahl der Detektorelemente DCB oder Energiebins B ist, da die Rechenzeit proportional zu DCB bzw. B ist. Die Rechenzeit von OE ist proportional zur Anzahl der Projektionen N .

Ein direkter Vergleich, welcher Algorithmus „besser“ ist, ist aufgrund der unterschiedlichen Messmodi bzw. Implementierungen nicht möglich. Sitek hat bereits mathematisch gezeigt, dass der OE-Schätzer eine Approximation des ML-EM-Schätzers ist und beide Verfahren Rauschartefakte erzeugen können [34].

Die Optimierung umfasst die Untersuchung geeigneter Parameter zur Effizienzsteigerung der Bildrekonstruktion, d. h. es wird eine Reduktion der Rechenzeit und eine Verbesserung der Konvergenz und des SNRs angestrebt. Das SNR dient als Maß für die Bildqualität und wird in dieser Arbeit folgendermaßen berechnet:

$$\text{SNR} = \frac{\mu_{\lambda_{\text{Signal}}}}{\sigma_{\lambda_{\text{Signal}}}} \quad (4.11)$$

mit $\mu_{\lambda_{\text{Signal}}}$ für den Mittelwert und $\sigma_{\lambda_{\text{Signal}}}$ für die Standardabweichung des Signals.

Für den ML-EM-Algorithmus sind die relevanten Parameter zur Optimierung der Exponent β und die Anzahl der Energiebins B . Zur Untersuchung der Konvergenz in Abhängigkeit von β wird Gleichung (4.5) verwendet. Bleibt die Gesamtstatistik erhalten, dann kann gezeigt werden, dass sich die Konvergenz für verschiedene B nicht ändert. Die Konvergenz ist somit ungeeignet zur Bewertung verschiedener B und $N = \text{const}$. Als alternativer Ansatz

wird Pearsons χ_p^2 -Testgröße berechnet:

$$(\chi_p^2)^{(k)} = \sum_{dcb} \frac{[N_{dcb} - \hat{N}_{dcb}^{(k)}]^2}{\hat{N}_{dcb}^{(k)}}. \quad (4.12)$$

Herbert [33] zeigte, dass χ_p^2 unter den Voraussetzungen $V \ll \sum N_{dcb}$ und eines homogenen Startbildes eine asymptotische χ_p^2 -Verteilung annimmt. Da erwartet wird, dass ein größeres B die Bildqualität verbessert, weil mehr Information vorhanden ist, sollte χ_p^2 entsprechend schneller abnehmen. Dadurch sinkt auch die Anzahl der Iterationen, bis eine nutzbare Bildqualität erhalten wird.

Für OE sind die zu untersuchenden Parameter die Akzeptanzwahrscheinlichkeit p und die Anzahl der Projektionen N .

Es werden zwei Messdatensätze `SixPoints.root` und `SNRSource.root` (siehe Abbildung 4.3b bzw. 4.3c) gemäß Inverse Crime und zusätzlichem Hinzufügen von Pseudo-Poissonrauschen mittels der ROOT-Funktion `TH1::FillRandom` erzeugt. `SixPoints.root` enthält sechs gleichgewichtete Punktquellen zu je vier Voxel an den Orten $(-40, -40)$ mm, $(-40, 40)$ mm, $(-10, 0)$ mm, $(10, 0)$ mm, $(40, -40)$ mm und $(40, 40)$ mm. `SNRSource.root` besteht aus markierten Voxel in einem 5×5 -Feld am Ort $(25, 25)$ mm. Diese werden zur Bestimmung von β und B für ML-EM sowie p und N für OE unter Berücksichtigung der Rechenzeit, der Konvergenz und des SNRs verwendet.

Die Software wird nicht parallelisiert, damit die Rekonstruktionszeiten der beiden Algorithmen besser verglichen werden können.

4.5 Analyse von Systemparametern

Da die Emissionsorte in Schnittmengen von verschiedenen CORs liegen (vgl. Kapitel 2.3), wird eine gewisse Anzahl an Projektionen für deren Lokalisation benötigt, um die Schnittmenge zu verkleinern. Die Lokalisation ist „eindeutiger“, je kleiner die Volumina der Regions of Responses im Bildraum sind. Dies kann durch die *Intricacy* ζ (dt.: Kniffligkeit) getreu Sitek [20] im Sinne der Shannon-Entropie beschrieben werden.

Die Intricacy ist $\zeta = 0$ für ein *Point of Response* (gleichbedeutend mit der „idealen“ ROR) und $\zeta = \log_2 V$, wenn eine Lokalisation nicht mehr möglich ist, weil die ROR dann alle Voxel des Bildraums einnimmt. Die Bedeutung der Intricacy wird in Abbildung 4.4 verdeutlicht. Die Intricacy für jeden COR, welcher je einem Detektorelement zugeordnet

ist, ergibt sich über

$$\zeta_{dcb} = - \sum_v \frac{p_{dcb,v}}{\sum_{v'} p_{dcb,v'}} \log_2 \left[\frac{p_{dcb,v}}{\sum_{v'} p_{dcb,v'}} \right] \quad (4.13)$$

und die System-Intricacy ζ^S über

$$\zeta^S = \frac{1}{DCB} \sum_{dcb=1}^{DCB} \zeta_{dcb}. \quad (4.14)$$

Die Anzahl der CORs ist abhängig von der Anzahl der Energiebins B . Folglich führt ein *Rebinning* (hier: Zusammenfassen benachbarter Energiebins) zu einer Verschlechterung der Lokalisationsfähigkeit, da die entsprechenden CORs addiert werden und sich damit die Intricacy erhöht. Der mittlere Informationsgehalt pro Ereignis sinkt dadurch. Demgegenüber erhöht sich die Statistik in jedem Detektorelement, wodurch im Gegenzug ein positiver Effekt auf das SNR erwartet werden kann. Wenn die überlagerten CORs nicht zu groß werden, wird die Lokalisationsfähigkeit nur wenig beeinträchtigt. Haben die Ereignisse keine Ortsinformation mehr ($\zeta_{dcb} = 1$), dann ist die Lokalisation unmöglich.

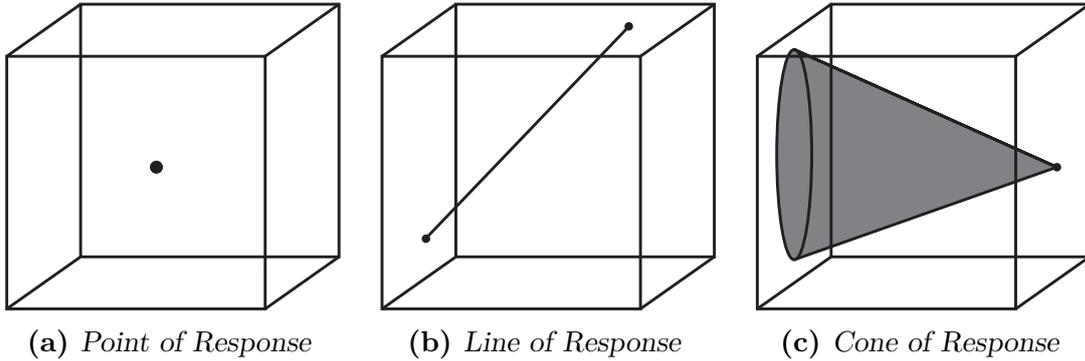


Abbildung 4.4: Darstellung von Region of Responses im Bildraum bei verschiedenen Gammakameras. (a) beschreibt einen Punkt, (b) eine Linie und (c) einen Kegel, auf denen der Entstehungsort eines Ereignisses bei der verwendeten Kamera liegen kann. (a) beschreibt eine ideale Gammakamera. Je kleiner die Region of Response, desto mehr Ortsinformation liegt pro Ereignis vor.

Die minimal benötigte Anzahl von Energiebins B und Projektionen N für eine erfolgreiche Rekonstruktion wird in Kapitel 4.4 untersucht. Mit der Intricacy steht ein weiterer Parameter zur Verfügung, um das Messsystem zu bewerten.

Die Anzahl und Kombinatorik der verwendeten Detektorpaare in Bezug auf die Lokalisationsfähigkeit wird analysiert. Erwartungsgemäß verbessert sich die Rekonstruktion je mehr Detektorpaare berücksichtigt werden. Hierzu wird die Quelle `SixPoints.root` mit allen Detektorpaaren, die sich aus einer (2×2) -, (3×3) - und (4×4) -Anordnung ergeben,

rekonstruiert. Ferner werden zwei Anordnungen aus entfernten Detektorpaaren untersucht. Dazu wurden die Detektoren $d = \{0, 2, 8, 10\}$ bzw. $d = \{0, 3, 12, 15\}$ ausgewählt.

Zuletzt wird die Ortsauflösung der SPCC bestimmt. Darunter wird in diesem Fall der minimale Abstand zweier Punktquellen verstanden, welche von der Kamera und dem jeweiligen Rekonstruktionsalgorithmus gerade noch getrennt aufgelöst werden können. Hierzu werden Messdatensätze synthetisiert, in denen sich der Abstand von zwei Punktquellen linear vergrößert, und anschließend die Full Width at Half Maximum (FWHM) bei erfolgreicher Auftrennung berechnet. Unter der FWHM wird die Breite einer Verteilung bei 50% des Maximums der Intensität verstanden.

5 Ergebnisse

5.1 Verifikation

Es wurde der Messdatensatz `Verification.root` mit beiden Algorithmen rekonstruiert. Für ML-EM ($\beta = 1$) wurden 1000 Iterationen durchgeführt. Für OE (Flat Prior) wurden $J = 5000$ Zustände für das Equilibrium gelöst und anschließend $K = 1000$ Stichproben gezogen. In Abbildung 5.1 werden die Ergebnisse dargestellt.

Die Lokalisation von drei unterschiedlich gewichteten Quellen ist für beide Algorithmen erfolgreich. Es wird angenommen, dass die Algorithmen richtig implementiert wurden. Obwohl der Messdatensatz gemäß Inverse Crime erstellt wurde und die Emissionsdichte nach einer endlichen Iterationszahl nur an den Orten der Punktquellen erhöht sein sollte, ist eine Verschmierung mit dem Hintergrund erkennbar. Anhand der nachfolgenden Ergebnisse kann hier festgehalten werden, dass die Iterationszahlen zu niedrig waren. Aufgrund der langsamen Konvergenz und hohen Rechenzeit konnten jedoch nicht mehr Iterationen durchgeführt werden. Dies ist ohne Einfluss auf den Zweck der Verifizierung, die zunächst den Nachweis fehlerfreier Software erbringt.

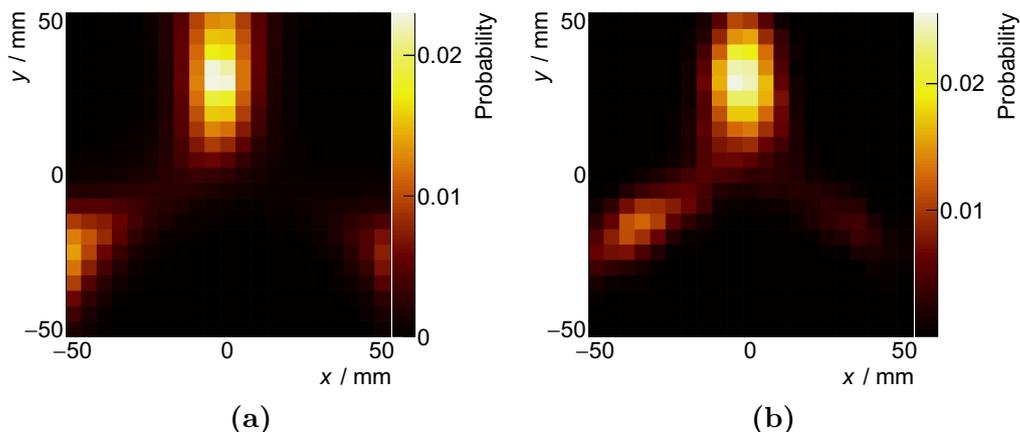


Abbildung 5.1: Ergebnisse der Verifikation für (a) ML-EM und (b) OE mit dem Messdatensatz `Verification.root`.

5.2 ML-EM-Optimierung

5.2.1 Untersuchung des Exponenten

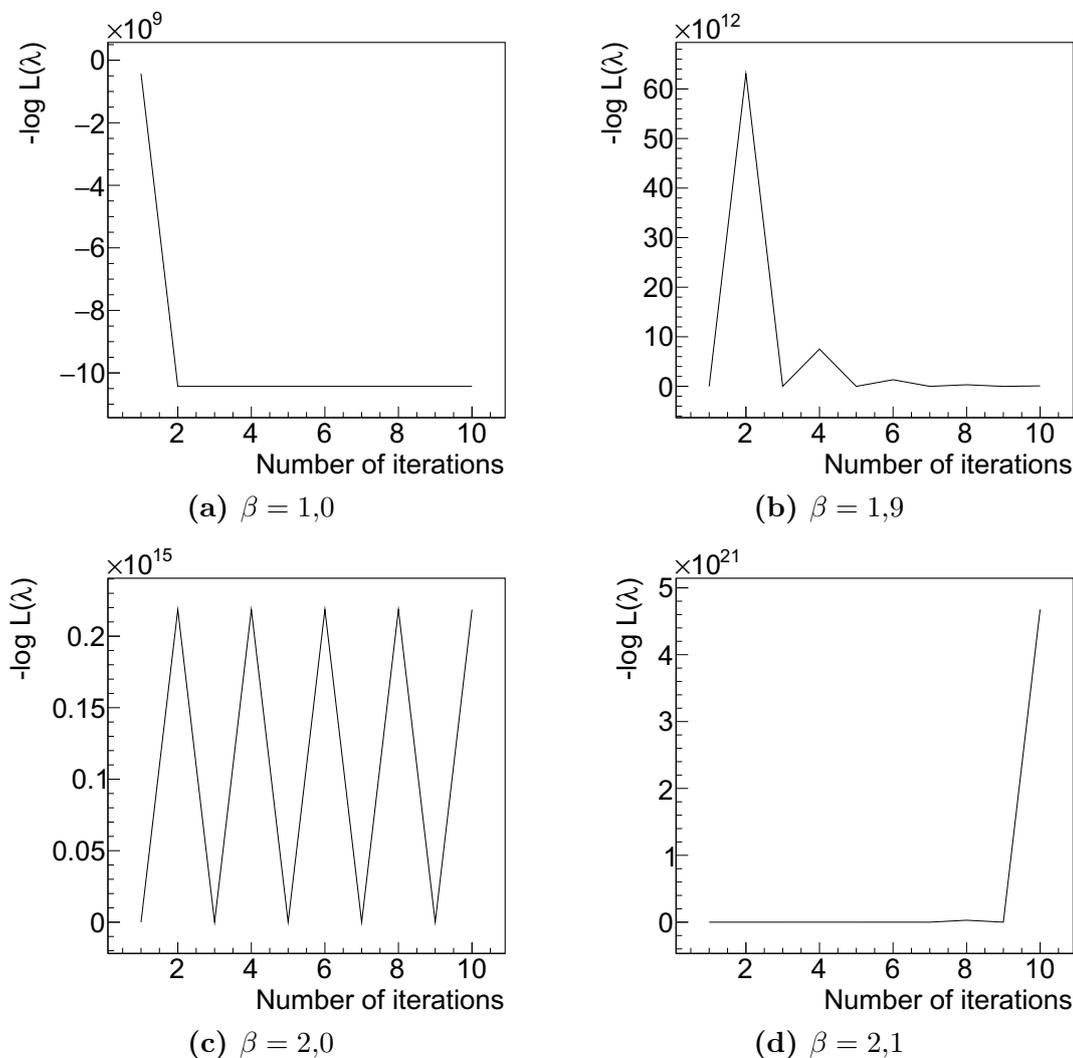


Abbildung 5.2: Konvergenzverhalten der negativen Log-Likelihoodfunktion $-\log \mathcal{L}(\lambda)$ bei der Rekonstruktion mit ML-EM in Abhängigkeit vom Exponenten β .

In Abbildung 5.2 wird der Einfluss von β auf das Konvergenzverhalten am Beispiel für den Datensatz `SixPoints.root` gezeigt. Für $\beta = 1,0$ nimmt die Likelihood nach der ersten Iteration zu und hat bereits die Konvergenz erreicht. Nachfolgende Iteration erhöhen die Likelihood kaum. Für $\beta = 1,9$ weisen die ersten Iterationen Oszillationen auf, die anschließend wieder abnehmen, sodass die Konvergenz stabil bleibt. Für $\beta = 2,0$ werden die Oszillationen nicht mehr gedämpft; die Rekonstruktion ist allerdings noch gelungen. Für $\beta = 2,1$ verstärken sich die Oszillationen so, dass die Berechnung nach wenigen

Iterationen abbricht. Als maximaler Wert für eine stabile Rekonstruktion wird folglich $\beta = 1,9$ festgestellt. Dies stimmt mit Kontaxakis [53] überein. Dadurch kann die Anzahl der Rekonstruktionsschritte und somit auch die Rechenzeit bei gleichem Ergebnis annähernd halbiert werden.

5.2.2 Minimal benötigte Anzahl der Energiebins

Es wurde der Datensatz `SixPoints.root` mit $N = \text{const}$ und variabler Anzahl der Energiebins B mit je 1000 Iterationen rekonstruiert. Im Anschluss werden die Ergebnisse hinsichtlich Rekonstruktionsgüte und Rechenzeit verglichen. Die Resultate dazu können Abbildung 5.3 bzw. 5.4 entnommen werden.

Die Rekonstruktion mit $B = 2$, das heißt bei Unterteilung des Energiespektrums in zwei gleichbreite Bereiche, war erwartungsgemäß die schnellste, lieferte jedoch auch die schlechteste Bildqualität. Es konnten keine Punktquellen lokalisiert werden. Für $B \geq 10$ sind die Ergebnisse hinsichtlich der Emissionsdichten sehr ähnlich. Während die Punktquellen an den Ecken gefunden wurden, war eine Auftrennung der beiden Quellen in der Bildmitte nicht möglich. Die Positionen der tatsächlichen Punktquellen an den Ecken unterscheiden sich um jeweils eine Voxelreihe und -spalte zur Bildmitte hin von den wahren Positionen. Die Punktquellen bestehen jeweils aus vier gleichgewichteten Voxel, welche noch nicht richtig rekonstruiert wurden. Für die Positionsbestimmung wurden die Voxel mit der höchsten Intensität gewählt.

Die stärkste Änderung der χ_p^2 -Testgröße befindet sich für alle Fälle zwischen dem Startbild und dem Ergebnis der ersten Iteration. Dies ist der Standardfall für homogene Startbilder [33]. Ab ca. 75 Iterationen weist χ_p^2 nur noch geringe Änderungen vor, ab etwa 500 Schritten ist $\chi_p^2 \approx \text{const}$. Es ist bekannt, dass ML-EM anfänglich schnell konvergiert, gemäß Kontaxakis [53] innerhalb von etwa 30 bis 60 Iterationen. Zur Rekonstruktion hoher Ortsfrequenzen, in diesem Fall jeweils vier Voxel pro Punktquelle, benötigt ML-EM jedoch hunderte Iterationen. Da sich das Bild ab etwa 75 Iterationen nur noch sehr langsam ändert, sind vermutlich mehrere tausend Iterationen für eine exakte Rekonstruktion notwendig.

Entsprechend [33] sollte das Verfahren für gute Ergebnisse abgebrochen werden, bevor die Konvergenz erreicht wird. Anderenfalls wird die Bildqualität durch exzessives Rauschen beeinträchtigt. Obwohl die Rekonstruktionen mit pseudo-verrauschten Messdaten mit weitaus mehr Iterationen nach Erreichen der Konvergenz durchgeführt wurden, konnte dies nicht festgestellt werden. Möglicherweise führte hier die hohe Anzahl der Projektionen ($N \approx 9 \cdot 10^8$) zu einer Unempfindlichkeit gegenüber Rauschen.

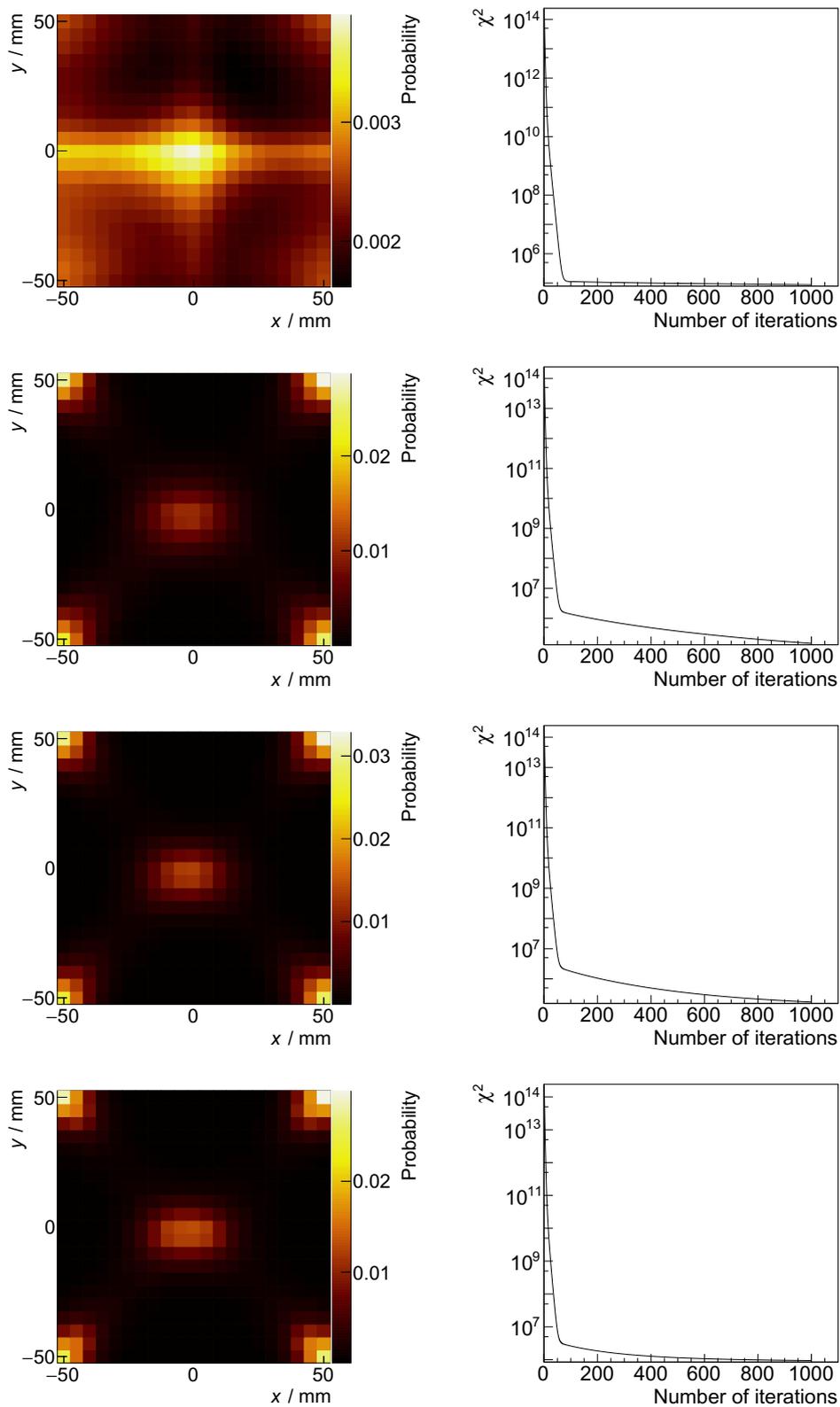


Abbildung 5.3: Bildqualität in Abhängigkeit von der Anzahl der Energiebins B für ML-EM für je 1000 Iterationen. Von oben nach unten: $B = 2, 10, 50, 700$.

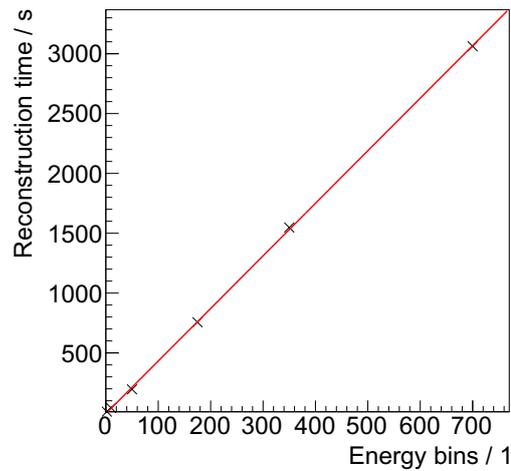


Abbildung 5.4: *Abhängigkeit der Rekonstruktionszeit von der Anzahl der Energiebins B für ML-EM für je 1000 Iterationen.*

Die Linearität zwischen der Rechenzeit und B konnte bestätigt werden. Die Rechenzeit erhöht sich um ca. $4,39 \pm 0,02$ s pro zusätzlichem Energiebin und 1000 Iterationen.

In Tabelle 5.1 sind die für den Datensatz `SNRSource.root` bestimmten Werte des SNRs für verschiedene B und 500 Iterationen aufgelistet. Das SNR für $B = 2$ ist höher als für die anderen Fälle, da nach 500 Schritten noch Scheinsignal aus dem homogenen Startbild vorhanden war. Bei Initialisierung eines rauschfreien Startbildes mit einem theoretischen SNR von Unendlich muss das SNR im Verlauf der Rekonstruktion kleiner werden. Für $B \geq 50$ waren die Ergebnisse gleichwertig, was zu einem robusten SNR führt.

Tabelle 5.1: *SNR in Abhängigkeit von der Anzahl der Energiebins B bei ML-EM.*

Anzahl der Energiebins B	SNR
2	5,55
10	3,01
50	2,62
175	2,61
350	2,61
700	2,62

Da die Ergebnisse für $B \geq 50$ gleichwertig sind und die Bildqualität nicht durch Rauschen

bei hohen Iterationszahlen vermindert wird, ergibt sich trotz langsamer Konvergenz die Möglichkeit sehr hoher Iterationszahlen bei kleinem B und praktikabler Rechenzeit. In Abbildung 5.5 ist das Ergebnis für $B = 50$ und 20000 Iterationen dargestellt. Obwohl die gefundenen Quellen näher an ihren wahren Positionen sind und ihre Emissionsdichten ebenfalls genauer bestimmt wurden, waren 20000 Iterationsschritte für eine exakte Rekonstruktion weiterhin zu wenig. Da im Gegensatz zu dem Fall $B = 700$ und konstanter Rechenzeit bessere Ergebnisse erhalten werden können, ist ein feineres Energiebinning während der Messung nicht notwendig.

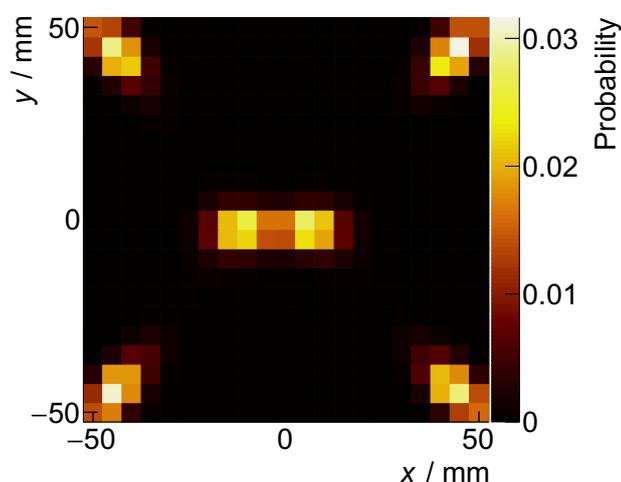


Abbildung 5.5: *Sixpoints.root* für $B = 50$ und 20000 Iterationen.

5.2.3 Minimal benötigte Anzahl der Projektionen

Es wurde der Datensatz `SixPoints.root` mit $B = 50$ und steigender Anzahl der gültigen (gemessenen) Ereignisse N mit je 10000 Iterationen rekonstruiert. Die Resultate und die entsprechenden Rechenzeiten können Abbildung 5.6 bzw. 5.7 entnommen werden.

Zunächst ist erkennbar, dass für $N = 5 \cdot 10^4$ die Lokalisation der vorgegebenen Emissionsdichte nicht gelungen ist. Für $N \geq 5 \cdot 10^5$ konnten Quellen in den Bildecken und der -mitte gefunden werden. Die Bildqualität wird natürlich für größere N besser, da mehr Ortsinformation vorliegt. Für den Fall $B = 50$ sind für die Rekonstruktion der vorliegenden Messdaten mindestens $N = 5 \cdot 10^6$ Ereignisse, also rund 11000 Ereignisse pro Voxel, notwendig.

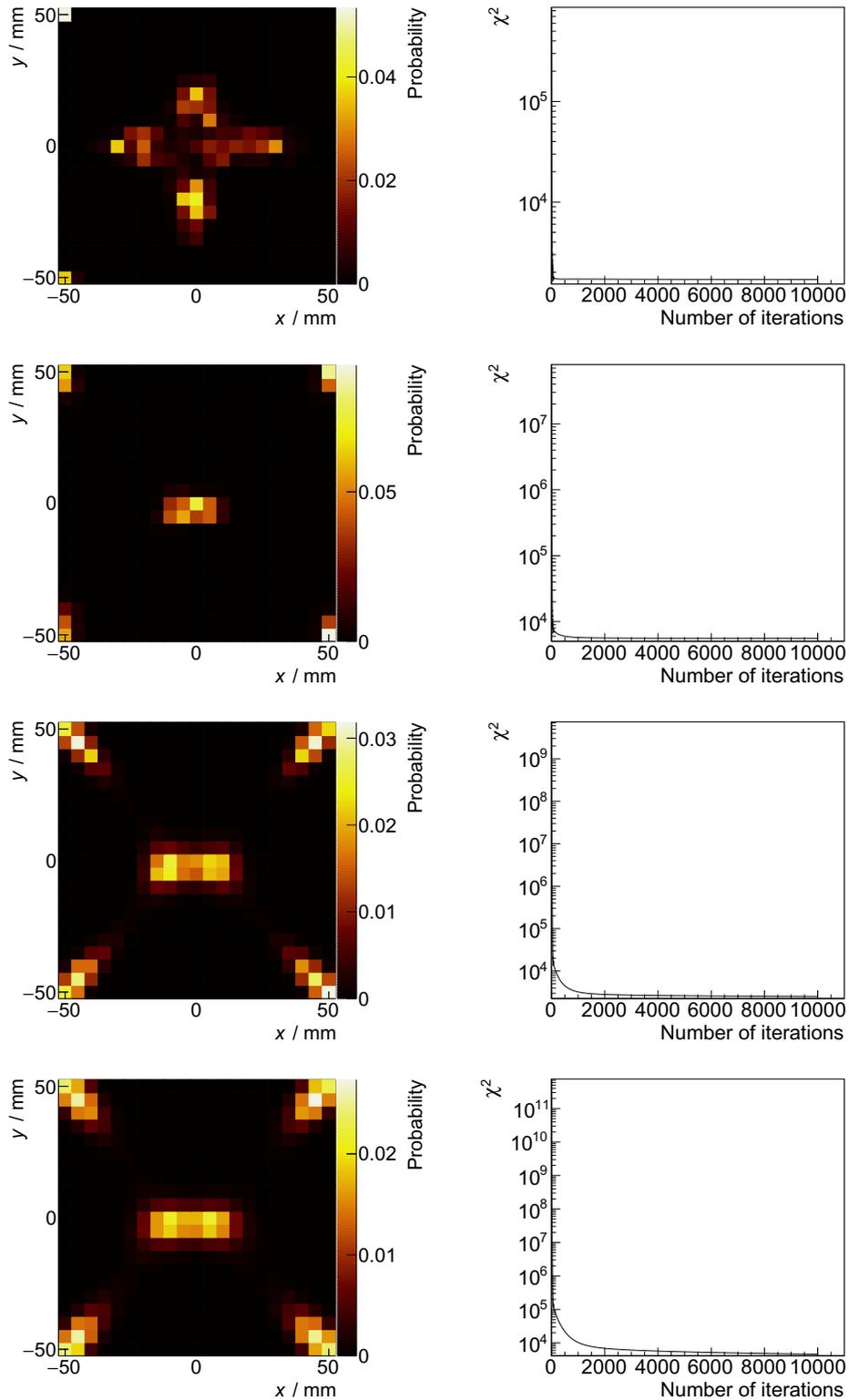


Abbildung 5.6: Bildqualität in Abhängigkeit von der Anzahl der Projektionen N für ML-EM für je 10000 Iterationen. Von oben nach unten: $N = 5 \cdot 10^4, 5 \cdot 10^5, 5 \cdot 10^6, 5 \cdot 10^7$.

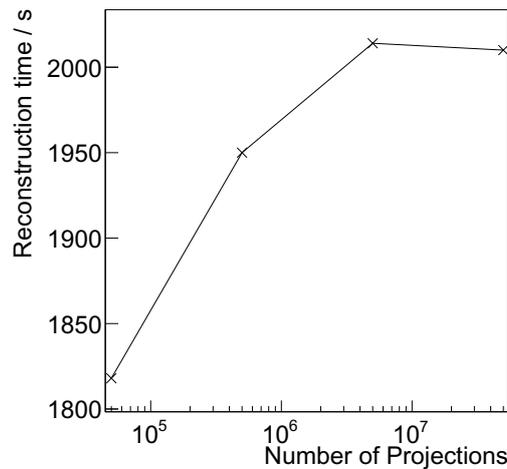


Abbildung 5.7: Abhängigkeit der Rekonstruktionszeit von der Anzahl der Projektionen N für ML-EM für je 1000 Iterationen.

Aus der Verteilung der χ_p^2 -Testgröße wird ersichtlich, dass die Änderungsrate kleiner ist, je weniger Ereignisse gemessen wurden. Dementsprechend sind dann auch weniger Iterationen notwendig. Anhand des Kurvenverlaufs wird nicht vermutet, dass eine richtige Lokalisation der Quellen beispielsweise für der Fall $N = 5 \cdot 10^4$ unter Erhöhung der Iterationszahl gelingt. Es wird zunehmend deutlich, dass für eine bessere Rekonstruktion die Ortsinformation in der Zählstatistik, d. h. die mittlere Information pro Ereignis, erhöht werden muss.

Aus Abbildung 5.7 geht hervor, dass die Rekonstruktionszeit für $N \geq 5 \cdot 10^6$ konstant und damit unabhängig von der Anzahl der Projektionen ist. Für $N < 5 \cdot 10^6$ existieren leere Energiebins. Aufgrund dieser fehlenden Ereignisse überspringt die entsprechende for-Schleife die betroffenen Bins. Dies führt zu einer Reduktion der Rechenzeit.

5.3 OE-Optimierung

5.3.1 Untersuchung des Priors

In Abbildung 5.8 sind die Ergebnisse für verschiedene Akzeptanzwahrscheinlichkeiten dargestellt. Es wurden jeweils $J = 10000$ Iterationen durchgeführt, um die stationäre Verteilung zu erreichen, und anschließend $K = 100$ Stichproben gespeichert. Dazu wurde der Datensatz `SixPoints.root` mit $B = 700$ und $N \approx 5 \cdot 10^6$ benutzt.

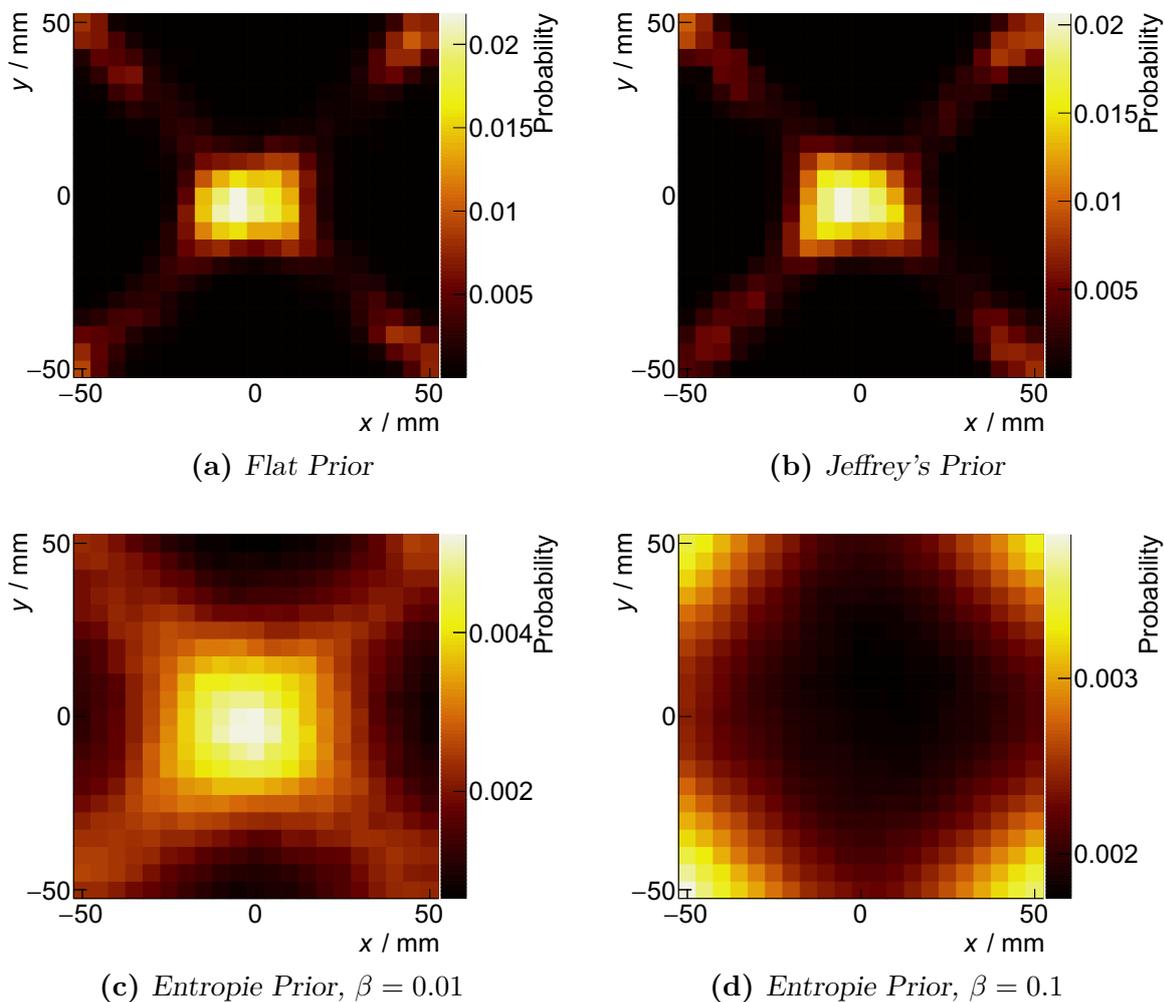


Abbildung 5.8: Untersuchung der Akzeptanzwahrscheinlichkeit hinsichtlich der Rekonstruktion bei OE für je 10000 Iterationen und 100 Stichproben.

Zunächst kann festgehalten werden, dass das Entropie Prior für das SPCI nicht geeignet ist. Geeignete Werte für β befinden sich vermutlich nahe Null, sodass das Entropie Prior fast mit dem Flat Prior übereinstimmt. Die zusätzliche Berechnung des Potenzterms führte

jedoch zu einer rund 2,4-fach längeren Rechenzeit. Im Folgenden wird auf die Verwendung des Entropie Priors verzichtet.

Da der OE-Algorithmus eine MC-Methode ist, gleichen sich die Ergebnisse bei einer erneuten Rekonstruktion nicht exakt. Die Varianz der Ergebnisse wird zudem kleiner, je mehr Stichproben generiert werden. Ob das Jeffrey's Prior oder das Flat Prior besser geeignet ist, kann in diesem Fallbeispiel nicht endgültig beantwortet werden, da nicht beurteilt werden kann, welches Ergebnis die bessere Bildqualität aufweist. Für das Jeffrey's Prior waren im Durchschnitt 22,9% der Übergänge erfolgreich, für das Flat Prior waren es 23,4%. Ein kleiner relativer Anteil erfolgreicher Übergänge deutet darauf hin, dass sich die Mehrheit der Origins bereits in den „richtigen“ Voxel befinden. Die folgenden Optimierungen nutzen das Jeffrey's Prior.

5.3.2 Minimal benötigte Anzahl der Energiebins

Es wurde der Datensatz `SixPoints.root` mit $N = 5 \cdot 10^6$ und variabler Anzahl der Energiebins B mit je $J = 10000$ Zuständen und $K = 100$ Stichproben rekonstruiert. Die Resultate und die entsprechenden Rechenzeiten können Abbildung 5.9 bzw. 5.10 entnommen werden.

In Übereinstimmung mit den ML-EM-Ergebnissen führt $B = 2$ auch für OE zu einer nicht nutzbaren Rekonstruktion. Für $B = 10$ und $B = 50$ werden kaum Unterschiede festgestellt. Es werden eine in x -Richtung ausgedehnte Quelle in der Bildmitte und vier Quellen an den Bildecken lokalisiert, wobei für $B = 50$ homogenere Quellstärken erhalten wurden. Unerwarteterweise sinken für $B = 700$ die Emissionsdichten an den Bildecken wieder und die Ausdehnung der Quelle in der Bildmitte nimmt auch in y -Richtung zu.

Eine große Änderungsrate der relativen Anzahl erfolgreicher Übergänge in den ersten Iterationen und ein möglichst konstantes Niveau in den folgenden Iterationen ist bei OE wünschenswert. Dies wird am ehesten mit $B = 700$ erreicht.

Wie zu vermuten war, ist auch die Rechenzeit nicht linear von B abhängig. Innerhalb derselben Größenordnung ist eine Zunahme der Rechenzeit mit steigendem B zu erkennen. Dies liegt möglicherweise an längeren Zugriffszeiten aufgrund der komplexeren Systemmatrix. Ein Vorteil von List-Mode-Verfahren ist die Verwendung vieler Bins und dadurch einer potenziell besseren Lokalisation bei meist unerheblicher Änderung des Zeitaufwandes. Für die SPCC kann auch mit OE gezeigt werden, dass $B = 50$ ausreichend ist, da sich das Lokalisationsvermögen für $B \geq 50$ nicht mehr drastisch verbessert.

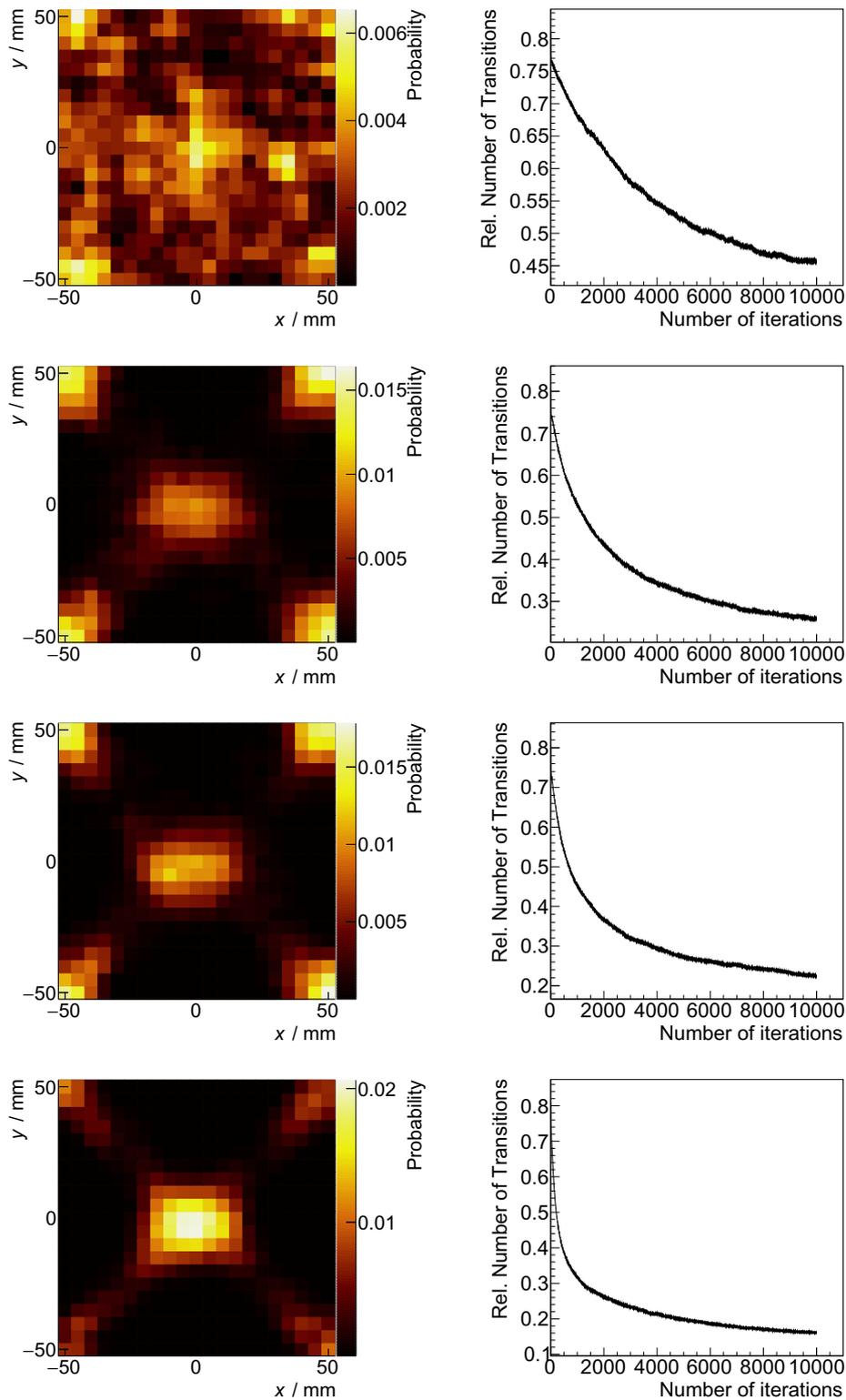


Abbildung 5.9: Bildqualität in Abhängigkeit von der Anzahl der Energiebins B für OE für je $J = 10000$ Zustände und $K = 100$ Stichproben. Von oben nach unten: $B = 2, 10, 50, 700$.

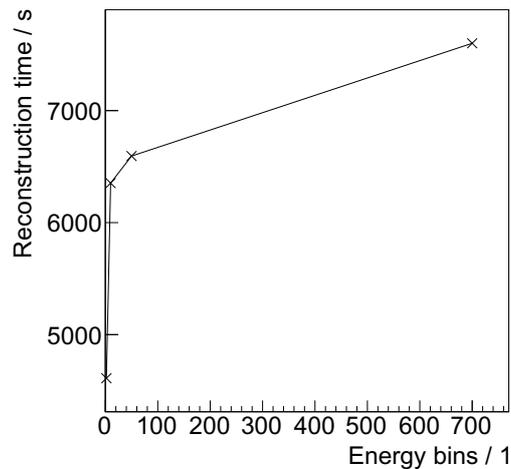


Abbildung 5.10: *Abhängigkeit der Rekonstruktionszeit von der Anzahl der Energiebins B für OE für je $J = 10000$ Zustände und $K = 100$ Stichproben.*

5.3.3 Minimal benötigte Anzahl der Projektionen

Mit je $J = 10000$ Zuständen und $K = 100$ Stichproben wurde `SixPoints.root` für $B = 700$ und einer steigenden Zahl von Projektionen N rekonstruiert. Die Resultate und die entsprechenden Rechenzeiten sind in den Abbildungen 5.9 bzw. 5.10 enthalten.

Aus Abbildung 5.11 kann entnommen werden, dass zur Rekonstruktion von Quellen in den äußeren Bildbereichen eine höhere Zählstatistik benötigt wird. Die Lokalisation von Quellen in der Bildmitte ist einfacher, weil dort die Projektionswahrscheinlichkeiten größer sind (siehe Kapitel 5.4.1). Die Stabilität des Konvergenzverhaltens nimmt mit der Menge der Messdaten erwartungsgemäß zu, während für das Erreichen der Konvergenz mehr Iterationen notwendig sind.

In Abbildung 5.12 wird die Linearität zwischen der Rechenzeit und der Anzahl der Projektionen N ersichtlich. Die Rechenzeit erhöht sich bei der verwendeten Rechnerkonfiguration um ca. $0,0011$ s pro zusätzlichem Ereignis und 10000 zufällig generierten Zuständen.

Weiterhin wurde der Datensatz `SNRSource.root` auf die Beziehung zwischen SNR und N untersucht. Die Werte sind in Tabelle 5.2 aufgelistet. Wie anzunehmen war, reduziert sich das Rauschverhalten für größere N , weil das Signal in den betroffenen Voxel entsprechend zunimmt.

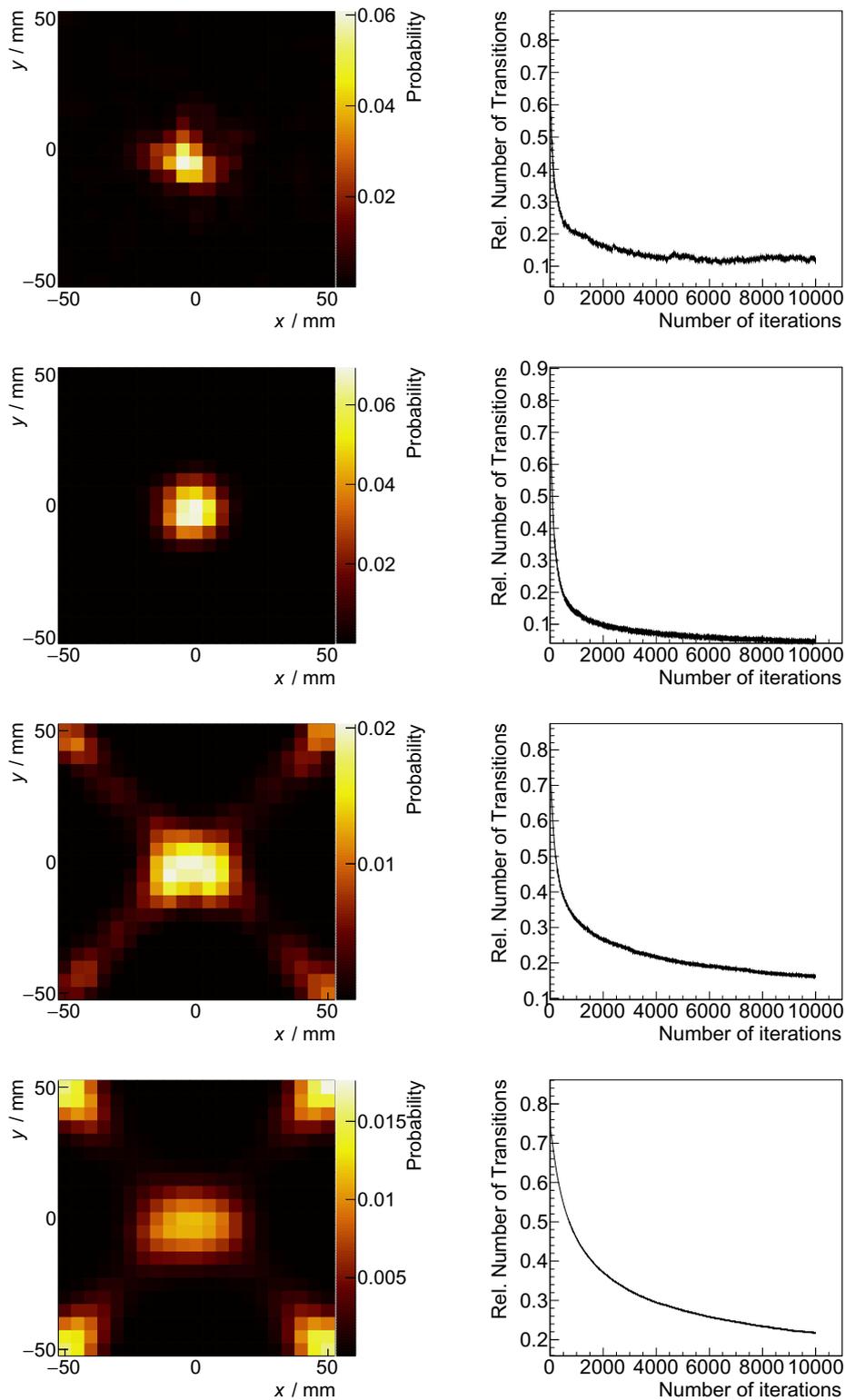


Abbildung 5.11: Bildqualität in Abhängigkeit von der Anzahl der Projektionen N für OE für je $J = 10000$ Zustände und $K = 100$ Stichproben. Von oben nach unten: $N = 5 \cdot 10^4, 5 \cdot 10^5, 5 \cdot 10^6, 5 \cdot 10^7$.

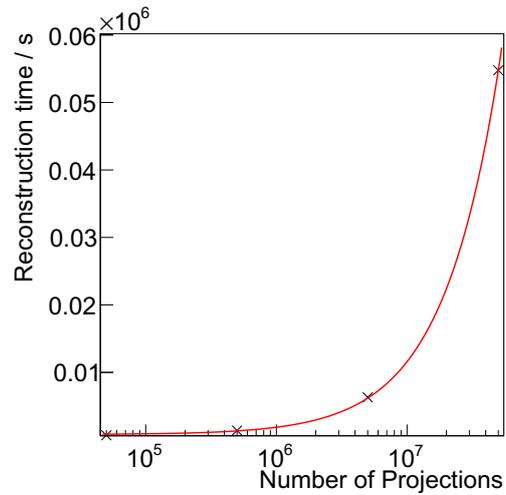


Abbildung 5.12: *Abhängigkeit der Rekonstruktionszeit von der Anzahl der Projektionen N für OE für je 10000 Iterationen in einfach logarithmischer Darstellung.*

Tabelle 5.2: *SNR in Abhängigkeit von der Anzahl der Projektionen N bei OE.*

Anzahl der Projektionen N	SNR
$5 \cdot 10^4$	0,85
$5 \cdot 10^5$	1,79
$5 \cdot 10^6$	1,99
$5 \cdot 10^7$	3,24

5.4 System- und Parameteranalyse

5.4.1 System-Intricacy

Wie in Kapitel 4.5 beschrieben, ist die System-Intricacy $\zeta^S = 0$ für das ideale Bildgebungssystem. Die Lokalisation einer Aktivitätsverteilung ist unmöglich für $\zeta^S / \log_2 V = 1$ mit V für die Anzahl der Voxel im Bildraum. Im Zusammenhang mit der Anzahl gemessener Ereignisse bedeutet dies, dass mehr Ereignisse benötigt werden, je höher die Intricacy ist. Es ist naheliegend, dass für $\zeta^S = 0$ ein einziges Ereignis für eine exakte Lokalisation im Bildraum ausreicht. Ferner ist nur eine Iteration nötig, da die erste Rückprojektion zum Erhalten des richtigen Bildes genügt. Umgekehrt sind viele Ereignisse und viele Iterationen notwendig, um eine Näherung des Bildes für hohe Werte für ζ^S zu erhalten.

In Tabelle 5.3 sind die normierten System-Intricacy-Werte $\zeta^S / \log_2 V$ aufgelistet. Es wird deutlich, dass die SPCC eine inhärent hohe Intricacy aufweist. Für $B = 2$ ist $\zeta^S / \log_2 V$ annähernd 1 und die Lokalisationsfähigkeit fast nicht mehr vorhanden. Dies erklärt retrospektiv die schlechten Ergebnisse für $B = 2$ aus den vorherigen Kapiteln. Für $B = 10$ ist die System-Intricacy geringfügig höher als für den kleinsten Wert für $B = 700$. Somit sind die Ergebnisse für $B = 10$ zwar ein wenig schlechter, allerdings ist bei ML-EM eine deutliche Reduktion der Rechenzeit möglich. Für $B = 50$ lassen sich die Systemressourcen ebenfalls reduzieren, wobei Unterschiede zu den Ergebnissen für $B = 700$ subjektiv nicht mehr feststellbar sind ($< 1\%$). Daher liegt das Optimum zwischen Rechenzeit und Bildqualität vermutlich im Bereich zwischen 10 und 50 Energiebins.

Tabelle 5.3: System-Intricacy in Abhängigkeit von der Anzahl der Energiebins B .

Anzahl der Energiebins B	System-Intricacy $\zeta^S / \log_2 V$	Zunahme / %
2	0,9768	12,25
10	0,8835	1,524
50	0,8722	0,226
175	0,8714	0,140
350	0,8714	0,142
700	0,8702	—

Zum Vergleich sei hier auf den Wert der System-Intricacy einer herkömmlichen CC in der Größenordnung von etwa $0,66 \log_2 V$ verwiesen [20]. Dieser Wert ist kleiner als

bei der verwendeten SPCC, da die CORs bei herkömmlichen CCs Kegelmäntel sind. Im Gegensatz liegen bei der SPCC massive Kegel vor, welche durch eine Überlagerung unendlich vieler Kegelmäntel entstehen. Die hohe Intricacy bei der SPCC erklärt, warum mehr als 1000 Iterationen notwendig sind, während für konventionelle CCs oftmals weniger als 100, teilweise weniger als 10 Schritte durchgeführt werden [43, 44, 46, 47]. Zum einen sind inhärent weniger Iterationen notwendig, zum anderen wird die Bildqualität beim klassischen Compton Imaging nach wenigen Schritten durch starkes Rauschen beeinträchtigt. Die Möglichkeit sehr hoher Iterationszahlen bei konstantem SNR kann als Vorteil gesehen werden, welcher durch eine hohe Rechenleistung erkaufte wird. Hiermit geht der Nachteil eines verminderten Lokalisationsvermögens einher.

In Abbildung 5.13 sind die Projektionswahrscheinlichkeiten der Systemmatrix im Bildraum visualisiert. Eine solche Darstellungsform zeigt die CORs zugehöriger Detektorelemente in einer Schnittbilddarstellung. Die CORs sind voxelweise durch die Farbcodierung entsprechend den Projektionswahrscheinlichkeiten gewichtet. Die oberste Reihe zeigt die Gesamtwahrscheinlichkeit der Detektion für die zugehörigen Detektorpaare (d,c) . Spaltenweise werden die CORs für jeweils zwei ausgewählte, dem Detektorpaar zugeordnete Detektorelemente abgebildet. Die Gesamtwahrscheinlichkeiten der Detektion durch die Paare wird durch voxelweise Summation der Wahrscheinlichkeiten aller ihnen zugeordneten Detektorelementen erhalten.

Mit einer solchen Darstellungsform werden für konventionelle CCs (Teil-)Ringe erhalten. Da es sich bei den CORs der SPCC um massive Kegel handelt, werden diese Ringe zu Kreisflächen. Offenbar ist die Wahrscheinlichkeit der Detektion aus der Mitte des Kegels höher.

Es ist ersichtlich, dass bezüglich der Detektormitte zueinander um 90° -gedrehte Detektorpaare das gleiche Bild um 90° gedreht messen (erste und zweite Spalte der Abbildung 5.13). Die Daten eines der beiden Detektorpaare sind damit redundant, denn diese können aus dem anderen Detektorpaar abgeleitet werden. Die verzerrte Darstellung erschwert hier die visuelle Wahrnehmung der Symmetrie.

Als nächstes ist erkennbar, dass Ereignisse durch entfernte Detektorpaare bevorzugt aus äußeren Bereichen des Bildraums gemessen werden (dritte Spalte der Abbildung 5.13). Dies ist geometrisch erklärbar. Hochenergetische Photonen, die bevorzugt vorwärtsstreuen und aus der Bildmitte emittiert werden, gelangen nur mit geringer Wahrscheinlichkeit zu entfernten Detektoren, da ein großer Streuwinkel erforderlich ist. Der Einfallswinkel der Photonen auf den Detektor muss daher groß sein, was für äußere Bildraumbereiche der Fall ist. Die um 2 bis 3 geringere Größenordnung der Projektionswahrscheinlichkeiten für solche

Ereignisse lässt sich anhand des exponentiellen Schwächungsgesetzes gemäß Gleichung (2.6) erklären.

Die COR-Intricacy beschreibt nun den mittleren Ortsinformationsgehalt, der in den einzelnen Abbildungen enthalten ist. Dieser ist umso größer, je kleiner die voxelspezifischen Projektionswahrscheinlichkeiten für ein Detektorelement sind. Natürlich steigt der Informationsgehalt auch, wenn weniger Voxel von einem Detektorelement gesehen werden können. Folglich besitzen Ereignisse, die durch entfernte Detektorpaare gemessen werden, mehr Information, ihre Statistik ist im Gegenzug jedoch kleiner.

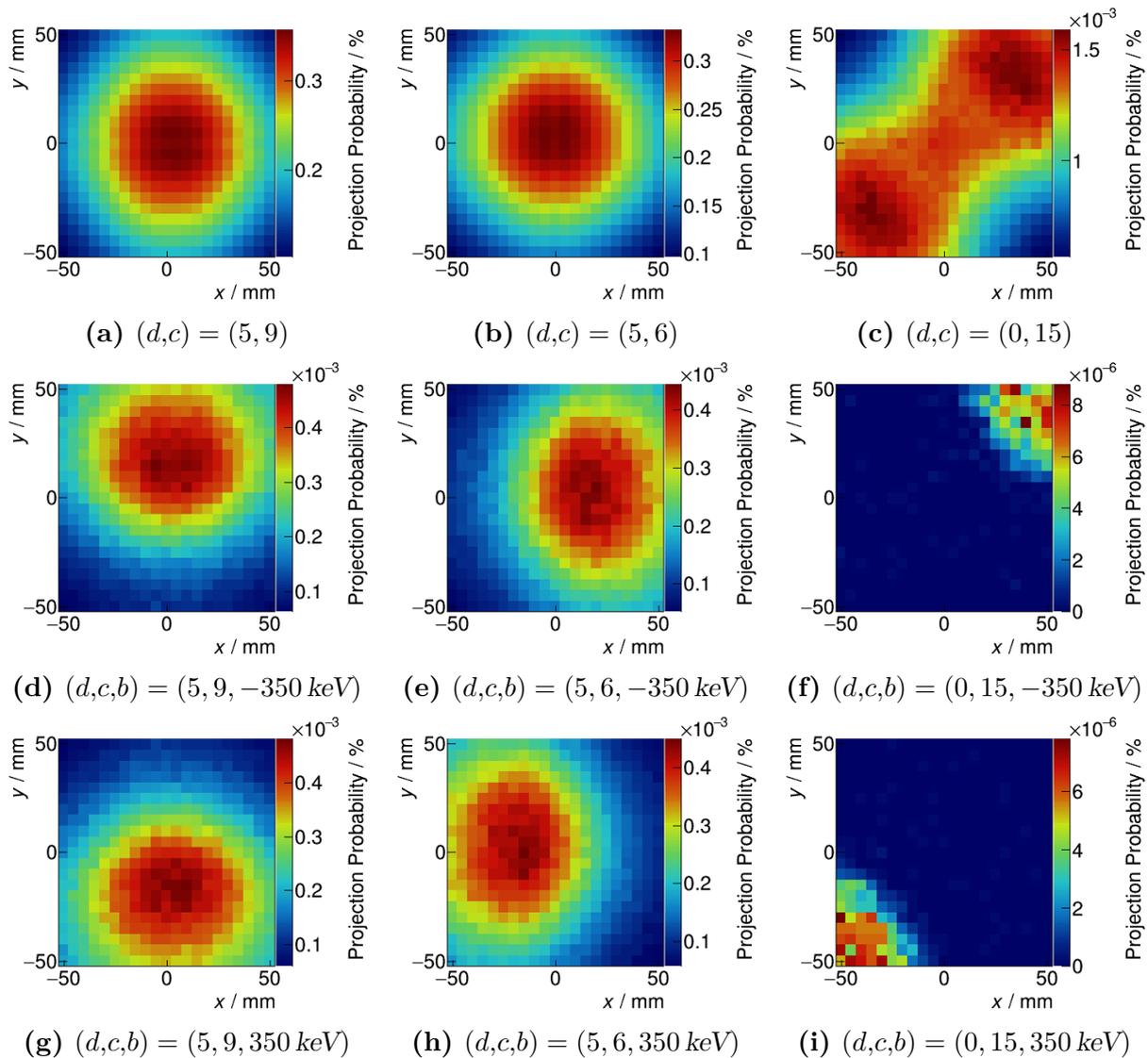


Abbildung 5.13: Projektionswahrscheinlichkeiten ausgewählter Detektorpaare und Detektorelemente im Bildraum. Oberste Reihe: Detektorpaare. Folgende Reihen: Auswahl zugehöriger Detektorelemente.

5.4.2 Kombinatorik der Detektorpaare

Es wurden verschiedene Kombinationen der koinzidenten Detektorpaare hinsichtlich der Bildqualität untersucht. Die Rekonstruktionen mit ML-EM und die entsprechenden Detektorpaare sind in Abbildung 5.14 bzw. 5.15 dargestellt.

Werden alle möglichen Kombinationen genutzt, die sich aus einer (2×2) -, (3×3) - oder (4×4) -Szintillatoranordnung ergeben, verbessert sich die Bildqualität für mehr Detektoren den Erwartungen entsprechend, weil mehr Daten vorliegen. Aus der vorherigen Diskussion über die System-Intricacy (Kapitel 5.4.1) geht hervor, dass benachbarte Detektoren aufgrund der größeren Projektionswahrscheinlichkeiten mehr Ereignisse messen. Im Vergleich zu einer (4×4) -Anordnung reduzierte sich die Anzahl der Ereignisse N für eine (3×3) -Anordnung um 46,0 % und für eine (2×2) -Anordnung um 86,6 %. Bei entfernten Detektorpaaren reduzierte sich N für $d = \{5, 7, 13, 15\}$ um 98,7 % und für $d = \{0, 3, 12, 15\}$ um 99,7 %. Dies ist in Übereinstimmung mit Schulz [10]. Erwartungsgemäß kann für entfernte Detektorpaare eine Erhöhung der Ortsauflösung unter dem Nachteil eines kleineren SNR erzielt werden. So sind für den Fall $d = \{0, 3, 12, 15\}$ erstmals sowohl die Quellen in den Bildecken in den richtigen Voxel als auch zwei separate Quellen in der Bildmitte lokalisiert worden. Um das SNR zu erhöhen, könnten alle möglichen Kombinationen aller Detektoren genutzt werden, die nicht unmittelbar benachbart sind.

5.4.3 Ortsauflösung

Um die Ortsauflösung (FWHM) zu bestimmen, wurde der Abstand zwischen zwei Signalvoxel linear erhöht, bis sich die Intensität zwischen den beiden Signalkurven bei ML-EM auf 50 % reduzierte. In x -Richtung und y -Richtung wurden 15 mm bzw. 15 mm festgestellt. Damit ist die PSF im Bildraum isotrop.

Die bestmögliche Auflösung, die mit der vorliegenden Systemmatrix erreicht werden kann, ist die Auflösung, welche in der Simulation vorgegeben wurde (hier: 5 mm in beide Richtungen). Wegen des geringen Lokalisationsvermögens und des Pseudo-Rauschens kann die maximale Auflösung unter praktikablen Rechenzeiten nicht erreicht werden.

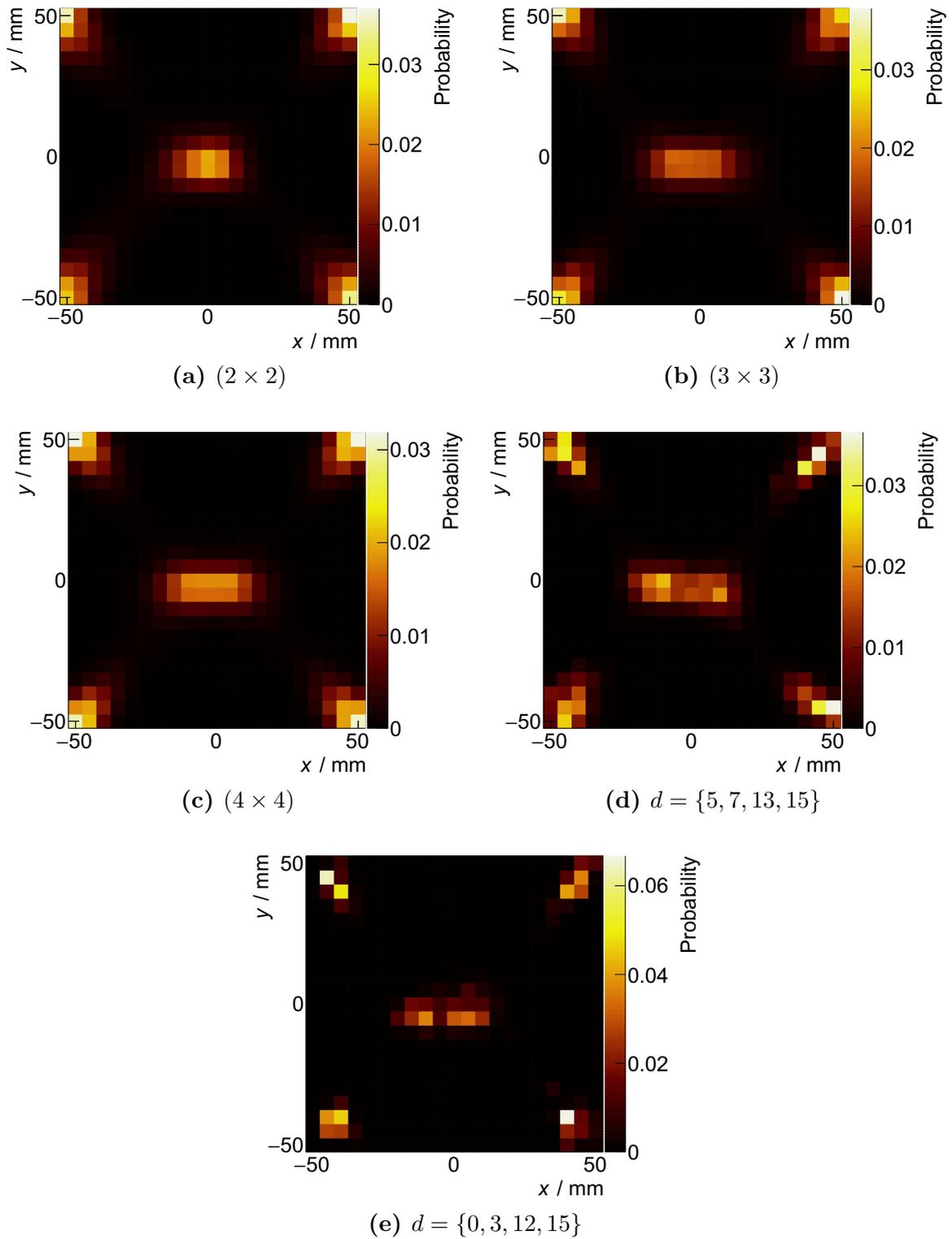


Abbildung 5.14: Bildqualität in Abhängigkeit von der Kombinatorik der Detektorpaare mit ML-EM. Die verwendeten Paare können Abbildung 5.15 entnommen werden.

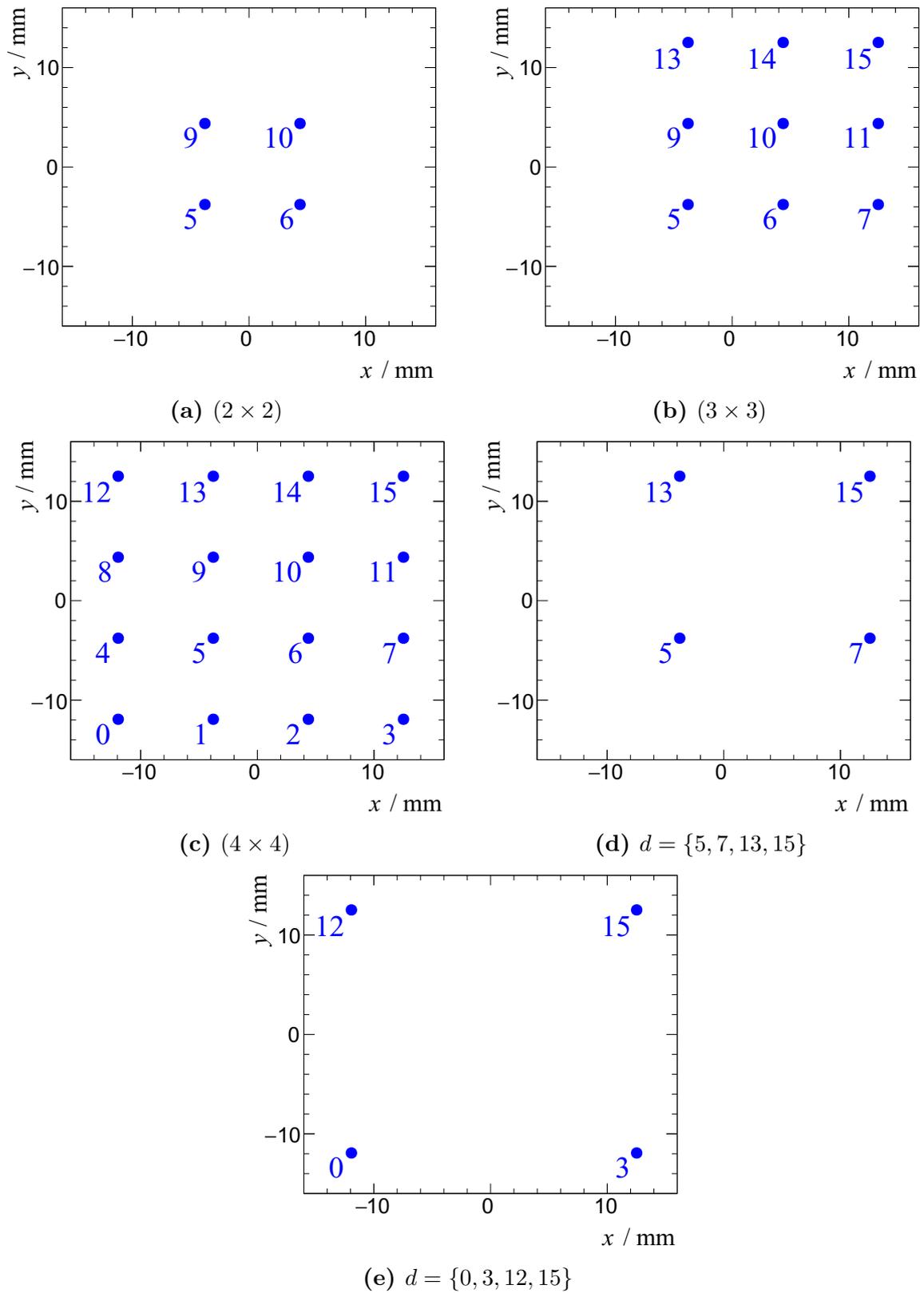


Abbildung 5.15: Kombinatorik der Detektorpaare für die Ergebnisse in Abbildung 5.14.

5.5 Zusammenfassung der Ergebnisse

1. Die Rekonstruktionszeit mit ML-EM kann bei gleichwertigem Ergebnis für $\beta = 1,9$ auf ca. 50 % gesenkt werden,
2. geeignete Priors für OE sind das Flat Prior und das Jeffrey's Prior,
3. die minimale Anzahl benötigter Energiebins B befindet sich in einem Bereich zwischen 10 und 50,
4. die minimale Anzahl benötigter Ereignisse befindet sich in der Größenordnung von 10^4 pro Voxel,
5. die System-Intricacy ist sehr hoch und erschwert dadurch die Lokalisation,
6. die Lokalisationsfähigkeit kann zulasten des SNR erhöht werden, wenn sich zwischen koinzidenten Detektoren mindestens ein weiterer Detektor befindet,
7. die Ortsauflösung (FWHM) beträgt jeweils rund 15 mm in x - und y -Richtung,
8. die Algorithmen können die fehlende Ortsinformation nicht durch Erhöhung der Iterationen kompensieren.

6 Diskussion

Ausgehend von den Ergebnissen zu den Systemparametern der hier behandelten SPCC konnten bedeutende Erkenntnisse zum Messprinzip gewonnen werden. Zunächst wird das allgemeine Messsystem diskutiert. Im Anschluss wird die Bildrekonstruktion bewertet, welche an das Messsystem angepasst werden sollte. Zuletzt werden die Grenzen dieser Arbeit festgehalten und mögliche Schritte für zukünftige Studien vorgeschlagen.

Pausch et al. und Beyer [7, 9] heben in ihren Publikationen die um zwei Größenordnungen höhere Nachweiseffizienz der SPCC im Vergleich zur Anger-Kamera hervor. In Schulz wird die Detektorkonfiguration und das -material hinsichtlich einer höheren Nachweiseffizienz weiter optimiert [10]. Der Fokus wird auf die Nachweiseffizienz gelegt, um die Möglichkeit einer verbesserten Bildqualität (SNR, Ortsauflösung) bei gleicher Statistik oder eine Reduktion der Strahlendosis bei gleicher Bildqualität im Bereich der nuklearmedizinischen Bildgebung zu erschließen.

Eine Erhöhung der Zählstatistik ist zwar wünschenswert, allerdings können damit Nachteile einhergehen, welche nicht immer offensichtlich sind [2]. Auch in dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass eine Erhöhung der Zählstatistik nicht zwangsläufig die Bildqualität bezüglich der Ortsauflösung verbessert. Jedes Ereignis beinhaltet eine gewisse Informationsmenge über seinen Entstehungsort im Bildraum. Diese Ortsinformation wird unter anderem durch das Messsystem begrenzt. Die Anger-Kamera beispielsweise misst im Vergleich zur SPCC aufgrund der mechanischen Kollimation wenig Ereignisse. Jedes Ereignis beinhaltet jedoch eine hohe Ortsinformation, da sich jeder Entstehungsort idealerweise nur auf einer Projektionslinie, der sogenannten *Line of Response*, befinden kann. Im Gegensatz befinden sich die Orte der Ereignisse bei der herkömmlichen CC und der SPCC auf Kegelmänteln bzw. innerhalb von Kegelvolumina. Die Ortsinformation ist also unspezifischer. Es muss daher festgehalten werden, dass eine verbesserte Bildqualität bei gleicher Statistik ohne Weiteres nur dann erreicht werden kann, wenn die Ortsinformation eines jeden Ereignisses nicht verringert wird. Die Lokalisationsfähigkeit eines Messsystems kann durch die System-Intricacy quantifiziert werden. Für Anger-Kameras liegt sie im Bereich von rund $0,33 \log_2 V$, eine herkömmliche CC liegt bei etwa $0,66 \log_2 V$ (vgl. [20]) und die hier behandelte SPCC

bei ca. $0,87 \log_2 V$. Es ist ersichtlich, dass das Prinzip der elektronischen Kollimation eine Verminderung der Ortsinformation zur Folge hat.

Die Bildqualität beim SPCI bezüglich des SNRs scheint sehr robust zu sein. Dies liegt an der Anwendung des Summenkriteriums (2.7), welches Emissionen, die nicht aus der gesuchten Quelle stammen, strikt filtert. Ein anderer Grund ist die hohe Statistik, welche dadurch unempfindlich gegenüber Rauschen wird.

Die hohe Nachweiseffizienz bei der SPCC resultiert aus ihrem Aufbau. Dieser ist symmetrisch, um die Gleichverteilung des Azimutwinkels der inkohärenten Streuung zu berücksichtigen. Zum einen können verschiedene Detektorpaare Emissionen aus demselben Bildraumelement messen, zum anderen können viele Bildraumelemente durch ein Detektorpaar gesehen werden. Viele Ereignisse sind redundant und werden daher nicht unbedingt benötigt. Dies beschreibt die Tatsache, dass das inverse Problem der Bildrekonstruktion *schlecht gestellt* ist und die Lösung folglich nicht eindeutig. Es ist ratsam, die Nachweiseffizienz zu limitieren, und dafür nur gültige Ereignisse mit einer höheren Ortsinformation zuzulassen.

So wurde hier gezeigt, dass eine Bildrekonstruktion unter Verwendung entfernter Detektorpaare die Lokalisationsfähigkeit verbessert. Hierfür werden weniger als 1% der ursprünglichen Zählereignisse verwendet [10], und zwar solche mit einer höheren Ortsinformation. Diese Ereignisse sind aufgrund des exponentiellen Schwächungsgesetzes nach Gleichung (2.6) allerdings seltener. Die Verwendung entfernter Detektorpaare für Anwendungen mit niederenergetischen Photonen ($E < 150 \text{ keV}$) scheint nicht sinnvoll. Aufgrund des höheren Wechselwirkungsquerschnitts bei niedrigeren Energien wird vermutet, dass gestreute Photonen bereits im selben oder im benachbarten Szintillator absorbiert werden und daher kaum gültige Ereignisse zwischen entfernten Paaren gemessen werden.

Eine weitere Möglichkeit, die Ortsinformation für höherenergetische Anwendungen zu erhöhen, etwa ab 150 keV, ist die Messung drei koinzidenter Ereignisse in drei verschiedenen Szintillatoren e , d und c für ein gültiges Ereignis. Aufgrund der hohen Nachweiseffizienz sollten auch genügend koinzidente Ereignisse, die aus Mehrfachstreuung und anschließender Absorption entstehen, gemessen werden. Bei einer CC mit *drei* Ebenen führt eine zweifache Streuung in den ersten beiden Ebenen zu einer Polarisierung des Photons, was zu einer Einschränkung der Gleichverteilung des Azimutwinkels führt. Hier liegen die Orte der Ereignisse nicht mehr auf dem gesamten Kegelmantel, sondern auf zwei Linien entlang des Kegelmantels (sogenannte V-Projektionen) [55, 56]. Es wird vermutet, dass dann auch der mögliche Emissionsort beim SPCI besser lokalisiert und dadurch die System-Intricacy gesenkt werden kann. Eventuell muss dazu die Anzahl der Detektoren und die Detektorgröße

angepasst werden. Der verwendete digitale Silizium-Photomultiplier kann statt (4×4) auch mit (8×8) Szintillationskristallen betrieben werden, durch entsprechende Aufteilung und somit ohne Erhöhung der Kosten. Gegebenenfalls könnte sich eine Verlängerung der Kristalle als positiv erweisen, da höherenergetische Photonen bevorzugt vorwärtsstreuern.

Daraus lässt sich ableiten, dass mit derselben Detektorgeometrie sowohl mittel- als auch hochenergetische Photonen gemessen werden können, wenn die Definition eines gültigen Ereignisses und/oder die Wahl der koinzidenten Detektorpaare entsprechend angepasst wird. Es ist natürlich zu berücksichtigen, dass die Rückstreuung für niederenergetische Photonen nicht vernachlässigt werden kann und sich die System-Intricacy damit weiter erhöht, da die ROR dann aus zwei Kegelvolumina besteht.

Es wird nicht empfohlen, die Szintillatoren entlang der z -Richtung zu pixelieren. Dies würde zwar zu einer geringeren COR-Intricacy führen, da die massiven Kegel dann zu Kegelmäntel würden, allerdings auch einen komplizierteren Aufbau, eine höherdimensionale Systemmatrix und damit aufwendigeren Bestimmung dieser vermuten. Das SNR würde empfindlicher werden, weil die Statistik in jedem Bin entsprechend sinkt.

Bezüglich der Bildrekonstruktionsalgorithmen lässt sich festhalten, dass List-Mode-Verfahren aufgrund der hohen Statistik nicht optimal sind. Die Rechenzeit hierbei ist proportional zu der Anzahl der Ereignisse. Wie gezeigt wurde, sind jedoch sehr viele Ereignisse (durchschnittlich über 10^4 Emissionen pro Voxel) aufgrund der hohen System-Intricacy notwendig. Des Weiteren wurde gezeigt, dass mit wenigen, dafür breiten, Energiebins und derselben Gesamtstatistik gleichwertige Rekonstruktionsergebnisse produziert werden können. Die Annahme von infinitesimal-schmalen Bins beim List-Mode, so, dass jedes Detektorelement höchstens ein Ereignis misst, würde verletzt und daher auch gegen die Anwendung von List-Mode-Verfahren sprechen. Sollte die Nachweiseffizienz hinsichtlich Ereignissen mit höherer Ortsinformation limitiert werden, könnten List-Mode-Verfahren jedoch wieder sinnvoll werden.

Daher scheinen Rekonstruktionsalgorithmen mit gebinnnten Daten für das SPCI sinnvoller, da sowohl der Speicheraufwand als auch die Rechenzeit reduziert werden können. Mit weiteren Modifikationen der Implementierung, zum Beispiel die Anwendung von *Ordered Subset Expectation Maximization* [57], einer Variante des ML-EM-Algorithmus, kann die Effizienz der Rekonstruktion erhöht werden.

Alle Ergebnisse dieser Arbeit wurden mittels eines Simulationsdatensatzes hergeleitet. Hierfür wurde eine Cs-137-Quelle in einem zweidimensionalen (21×21) -Voxel-Bildraum mit vorgegebenen Abstand ($z = 50$ mm) simuliert. Die Energieauflösung, die für GAGG:Ce

bei etwa 6,6 % für $E = 662$ keV liegt [58], wurde in der Simulation nicht beachtet. Bei einer experimentellen Anwendung der SPCC führt dies vermutlich zu einer Abschwächung der Stärke des Summenkriteriums und somit einem kleineren SNR. Zudem muss das hier gezeigte, robuste SNR für ML-EM mit echten, verrauschten Messdatensätzen bestätigt werden. Des Weiteren wurde die System-Intricacy hier nicht für einen echten dreidimensionalen Bildraum ermittelt. Es besteht daher die Möglichkeit, dass diese vom hier festgestellten Wert abweicht.

Eine reale SPCC, die sich für eine Anwendung in der Nuklearmedizin eignet, wird wohl bevorzugt für höherenergetische Photonen angepasst werden müssen. Es werden sicherlich mehr Detektoren benötigt werden. Da sich der Rechenaufwand mit MC-Methoden dann zunehmend vergrößert, wird zu einer analytischen Bestimmung der Systemmatrix geraten. Eine analytische Bestimmung vermeidet statistisches Rauschen und ermöglicht eine freie Wahl der Voxel- und Bildraumgröße. Ob diese weiterhin aus Gründen des Speicherplatzes im Voraus berechnet werden kann, muss in einem weiteren Schritt untersucht werden. Eine Systemmatrix für reale Anwendungen beinhaltet ferner nicht nur die rein geometrischen Projektionswahrscheinlichkeiten im Vakuum, sondern weitere Faktoren, beispielsweise Absorptionseffekte. Dies macht die Systemmatrixelemente objektabhängig.

Der klassische Fall hochenergetischer Photonen in der Nuklearmedizin sind die 511 keV-Annihilationsquanten. Es ist denkbar, dass Messdaten von Positronen-Emissions-Tomographen auf Basis von GAGG:Ce-dSiPM-Detektoren für eine kombinierte Rekonstruktion genutzt werden können. So könnte sich die gute Ortsauflösung solcher Geräte positiv auf das SPCI-Ergebnis auswirken, während die hohe Nachweiseffizienz das SNR des Positron-Emissions-Tomogramms verbessert. Den ersten Prototypen untersuchten Schneider, Shimazoe, Somlai-Schweiger und Ziegler im Jahr 2015 [59]. Der Ansatz einer simultanen Hybridbildgebung wird von Shimazoe et al. weiter verfolgt [60].

Der Zweck der Bildgebung liegt in der Entscheidung des weiteren Verlaufs durch den behandelnden Arzt. Dieser ist auf eine gute Bildqualität angewiesen. Die Reduktion der Strahlendosis ist zwar erstrebenswert, rechtfertigt jedoch nicht die höhere Wahrscheinlichkeit einer falschen Diagnose aufgrund einer verminderten Bildqualität. Als nächster logischer Schritt sollte der Fokus auf die Erhöhung der Ortsauflösung gelegt werden.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Das SPCI ist ein Verfahren zur Bildgebung von Gammastrahlung. Dieses nutzt die elektronische Kollimation [4] zur Bestimmung der Orte von in Koinzidenz gemessenen Ereignissen.

In der vorliegenden Arbeit wurden zwei iterative Algorithmen für das SPCI in C++ zur Rekonstruktion dreidimensionaler Aktivitätsverteilungen implementiert. Zum einen wurde der weitverbreitete ML-EM-Algorithmus [27] für gebinnte Messdaten implementiert. ML-EM entstammt der Regressionsanalyse und zeichnet sich durch eine langsame Konvergenz sowie rechenintensive Operationen aus. Zum anderen wurde der neue OE-Algorithmus [30] für Daten im List-Mode-Format implementiert. OE basiert auf einer effizienten und schnellen MC-Methode zur Schätzung der Aktivitätsverteilung.

Die Analyse des Messprinzips ergab, dass der mittlere Ortsinformationsgehalt pro detektiertem Ereignis sehr niedrig ist. Dies erfordert sowohl eine hohe Anzahl von Ereignissen, um die statistische Unsicherheit zu reduzieren, als auch eine hohe Anzahl von Iterationsschritten und damit leistungsfähige Computer. Aufgrund dessen ist die Anwendung von List-Mode-Algorithmen weniger geeignet, da der Vorteil der kürzeren Rechenzeit bei vielen gemessenen Ereignissen nicht gilt. Die Anwendung von SPCI im niederenergetischen Bereich ($E < 150$ keV) scheint nicht praktikabel, da ein weiterer Verlust von Ortsinformation vermutet wird.

Die Algorithmen sind nicht in der Lage, die systembedingte fehlende Ortsinformation zu kompensieren. Um die Bildqualität zu verbessern, sollte daher in zukünftigen Arbeiten versucht werden, die Ortsauflösung der SPCC zu erhöhen. Dies erfordert Maßnahmen am Detektoraufbau und eine Änderung des Kriteriums zum Auffinden gültiger Ereignisse. Hierfür eignen sich solche aus einer Mehrfachstreuung. Mithilfe der vorgestellten Methoden zur analytischen Bestimmung der Systemmatrix können im Anschluss weitere Systemparameter wie beispielsweise die Abstands- und Winkelabhängigkeit in einem größeren Bildraum untersucht werden. Für einen besseren Vergleich der Bildqualität hinsichtlich des SNRs und der Ortsauflösung mit etablierten Systemen in der nuklearmedizinischen Bildgebung sollten experimentelle Messdaten, etwa am Derenzo-Phantom, verwendet werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Anger HO. *A new instrument for mapping gamma-ray emitters*. Biol Med Quart Rep UCRL 1957; 3653:38.
- [2] Peterson TE, Furenlid LR. *SPECT detectors: the Anger Camera and beyond*. Phys Med Biol. 2011 September; 56(17):R145-R182.
- [3] Fischman AJ, Alpert NM, Rubin RH. *Pharmacokinetic imaging: a noninvasive method for determining drug distribution and action*. Clin Pharmacokinet. 2002 February; 41(8):581-602.
- [4] Singh M. *An electronically collimated gamma camera for single photon emission computed tomography. Part I: Theoretical considerations and design criteria*. Med Phys. 1983 Jul-Aug; 10(4):421-7.
- [5] Singh M, Doria D. *An electronically collimated gamma camera for single photon emission computed tomography. Part II: Image reconstruction and preliminary experimental measurements*. Med Phys. 1983 Jul-Aug; 10(4):428-35.
- [6] Han L, Rogers WL, Huh SS, Clinthorne N. *Statistical performance evaluation and comparison of a Compton medical imaging system and a collimated Anger camera for higher energy photon imaging*. Phys. Med. Biol. 2008; 53: 7029-45.
- [7] Pausch G, Golnik C, Schulz A, Enghardt W. *A Novel Scheme of Compton Imaging for Nuclear Medicine*. 2016 IEEE Nuclear Science Symposium, Medical Imaging Conference and Room-Temperature Semiconductor Detector Workshop (NSS/MIC/RTSD). 978-1-5090-1642-6.
- [8] Jannusch P. *Untersuchung eines alternativen Konzepts zur bildgebenden Messung von Gammastrahlung in der Nuklearmedizin*. TU Dresden. 2014; Bachelor's thesis.
- [9] Beyer F. *Untersuchung eines neuen Konzepts für eine Bildgebung anhand der richtungsauflösenden Gammadetektion*. TU Dresden. 2014; Master's thesis.

- [10] Schulz A. *Untersuchung eines alternativen Konzepts der nuklearmedizinischen Bildgebung mittels kollimatorfreier Detektionssysteme*. TU Dresden. 2015; Master's thesis.
- [11] Berthold J. *Single Plane Compton Imaging for Range Verification in Proton Therapy. A Proof-of-Principle Study*. TU Dresden. 2018; Master's thesis.
- [12] Gueorguiev A, Preston J, Hoy L, Pausch G, Herbach C, Stein J. *A Novel Method to Determine the Directionality of Radiation Sources with Two Detectors Based on Coincidence Measurements*. IEEE Nuclear Science Symposium & Medical Imaging Conference. 2011 June; 1521-30.
- [13] Gueorguiev A, Pausch G, Herbach C, Hoy L. *Directional Gamma Radiation Detector System*. Patent No.: US 8,299,441 B2. 2012 October.
- [14] Podgoršak EB. *Radiation Physics for Medical Physicists*. Springer International Publishing Switzerland 2006, 2010, 2016. Third Edition. 978-3-319-25380-0.
- [15] Krieger H. *Grundlagen der Strahlungsphysik und des Strahlenschutzes*. Springer-Verlag GmbH Deutschland 2004, 2007, 2009, 2012, 2017. Fifth Edition. 978-3-662-55759-4.
- [16] Compton AH. *A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements*. Phys. Rev. 1923 May; 21(5):483-502.
- [17] Schultz-Coulon H. *Silicon Photomultipliers and their application in HEP and Medical Imaging*. Universität Heidelberg. 2014; LHCb Retreat.
- [18] Klein O, Nishina Y. *Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac*. Z. Physik 1929 November; 52(11-12): 853-68.
- [19] National Institute Of Standards And Technology. *XCOM: Photon Cross Sections Database*. <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html> as at 2019 August.
- [20] Sitek A. *Statistical Computing in Nuclear Imaging*. CRC Press; Taylor & Francis Group, LLC. 2015; 978-1-4987-2930-7.
- [21] Barrett HH, White T, Parra LC. *List-mode likelihood*. J Opt Soc Am A Opt Image Sci Vis. 1997 November; 14(11): 2914-23.
- [22] Hrsg.; Bailey DL, Townsend DW, Valk PE, Maisey MN. *Positron Emission Tomography*. Springer. 2008; 978-1-84628-007-8.
- [23] Dössel, O. *Bildgebende Verfahren in der Medizin*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2016; 978-3-642-54406-4.

-
- [24] Thiébaud, E. *Introduction to Image Reconstruction and Inverse Problems*. In: Foy R., Foy F. (eds) *Optics in Astrophysics*. 2006. NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, Vol 198. Springer, Dordrecht.
- [25] Terzioglu F, Kuchment P, Kunyansky L. *Compton camera imaging and the cone transform: a brief overview*. *Inverse Problems*. 2018 April; 34 054002.
- [26] Basko R, Zeng GL, Gullberg GT. *Application of spherical harmonics to image reconstruction for the Compton camera*. *Phys. Med. Biol.* 1998; 43:887-94.
- [27] Shepp LA, Vardi Y. *Maximum likelihood reconstruction for emission tomography*. *IEEE Trans Med Imaging*. 1982; 1(2):113-22.
- [28] Dempster AP, Laird NM, Rubin DB. *Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm*. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*. 1977; 39(1):1-38.
- [29] Lange K, Carson R. *EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography*. *J Comput Assist Tomogr*. 1984 April; 8(2):306-16.
- [30] Sitek A. *Representation of photon limited data in emission tomography using origin ensembles*. *Phys Med Biol*. 2008 June; 53(12):3201-3216.
- [31] Steland A. *Basiswissen Statistik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007, 2010. Second Edition. 978-3-642-02666-9.
- [32] Jeff Wu CF. *On the Convergence Properties of the EM Algorithm*. *The Annals of Statistics*. 1983 March; 11(1):95-103.
- [33] Herbert TJ. *Statistical stopping criteria for iterative maximum likelihood reconstruction of emission images*. *Phys. Med. Biol.* 1990; 35(9):1221-32.
- [34] Sitek A. *Reconstruction of Emission Tomography Data Using Origin Ensembles*. *IEEE Trans Med Imaging*. 2011 April; 30(4):946-56.
- [35] Andreyev A, Sitek A, Celler A. *Fast image reconstruction for Compton camera using stochastic origin ensemble approach*. *Med Phys*. 2011 January; 38(1):429-38.
- [36] Wülker C, Sitek A, Prevrhal S. *Time-of-flight PET image reconstruction using origin ensembles*. *Phys Med Biol*. 2015 March; 60(5):1919-44.
- [37] Andreyev A, Celler A, Ozsahin I, Sitek A. *Resolution recovery for Compton camera using origin ensemble algorithm*. *Med Phys*. 2016 August; 43(8):4866-76.

-
- [38] Schaar M, Buzug TM, Rafecas M. *PET image reconstruction using the Origin Ensemble algorithm and geometric constraints*. Current Directions in Biomedical Engineering 2017; 3(2):549-53.
- [39] Yao Z, Xiao Y, Chen Z, Wang B, Hou Q. *Compton-based prompt gamma imaging using ordered origin ensemble algorithm with resolution recovery in proton therapy*. Scientific Reports. 2019; 9:1133.
- [40] Metropolis N, Rosenbluth AW, Rosenbluth MN, Teller AH, Teller E. *Equation of State Calculations by Fast Computing Machines*. J. Chem. Phys. 1953; 21(6):1087-92.
- [41] Hastings WK. *Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications*. Biometrika. 1970 April; 57(1):97-109.
- [42] Drouin P. *Markov chain Monte Carlo and stochastic origin ensembles methods*. DRDC-RDDC-2016-R124. 2016 September.
- [43] Schoene S, Enghardt W, Fiedler F, Golnik C, Pausch G, Rohling H, Kormoll T. *An Image Reconstruction Framework and Camera Prototype Aimed for Compton Imaging for In-vivo Dosimetry of Therapeutic Ion Beams*. IEEE Trans. Nucl. Sci. 2017 January; 1(1):96-107.
- [44] Wilderman SJ, Fessler JA, Clinthorne NH, LeBlanc JW, Rogers WL. *Improved modeling of system response in list mode EM reconstruction of Compton scatter camera images*. IEEE Trans. Nuclear Science. 2001 February; 48(1):111-6.
- [45] Maxim V, Lojaco X, Hilaire E, Krimmer J, Testa E, Dauvergne D, Magnin I, Prost R. *Probabilistic models and numerical calculation of system matrix and sensitivity in list-mode MLEM 3D reconstruction of Compton camera images*. Phys Med Biol. 2016 January; 61(1):243-64.
- [46] Taya T, Kataoka J, Kishimoto A, Tagawa L, Mochizuki S, Toshito T, Kimura M, Nagao Y, Kurita K, Yamaguchi M. *Optimization and verification of image reconstruction for a Compton camera towards application as an on-line monitor for particle therapy*. 2017 JINST 12 P07015.
- [47] Muñoz E, Barrio J, Bernabéu J, Etxebeste A, Lacasta C, Llosá G, Ros A, Roser J, Oliver JF. *Study and comparison of different sensitivity models for a two-plane Compton camera*. Phys Med Biol. 2018 June; 63(13):135004.

- [48] Kögler T, Berthold J, Deneva B, Enghardt W, Roemer K, Straessner A, Wagner A, Werner T, Pausch, G. *Proving the Concept of Single Plane Compton Imaging for Radionuclide and Prompt Gamma-Ray Imaging*. Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf. 2018 November. <https://www.hzdr.de/publications/Publ-27404>.
- [49] Allison J et al. *Recent Developments in Geant4*. Nucl. Instrum. Meth. 2016; A 835:186-225.
- [50] CERN. *ROOT – Data Analysis Framework*. Release 6.12/04 - 2017-12-13. <https://root.cern.ch/content/release-61204>.
- [51] Llacer J, Veklerov E, Coakley KJ, Hoffman EJ, Nunez J. *Statistical analysis of maximum likelihood estimator images of human brain FDG PET studies*. IEEE Trans. Med. Imag. 1993 June; 12(2):215-31.
- [52] Hwang D, Zeng GL. *Convergence study of an accelerated ML-EM algorithm using bigger step size*. Phys. Med. Biol. 2006 January; 51(2):237-52.
- [53] Kontaxakis G, Strauss LG. *Maximum Likelihood Algorithms for Image Reconstruction in Positron Emission Tomography*. Radionuclides for Oncology – Current Status and Future Aspcts. Athens. 1998; 73-106.
- [54] Wirgin A. *The inverse crime*. 2004 January; arXiv:math-ph/0401050v1.
- [55] Dogan N, Wehe DK, Akcasu AZ. *A Source Reconstruction Method for Multiple Scatter Compton Cameras*. IEEE Trans. NUC. Sci. 1992 October; 39(5):1427-30.
- [56] Basko R, Zeng, Gullberg GT. *Fully three dimensional image reconstruction from “V”-projections acquired by Compton camera with three vertex electronic collimation*. IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record. 1997 November: 1077-81.
- [57] Hudson HM, Larkin RS. *Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data*. IEEE Transactions On Medical Imaging. 1994 December; 13(4):601-9.
- [58] Sibczynski P, Broslawski A, Gojska A, Kiptily V, Korolczuk S, Kwiatkowski R, Mianowski S, Moszyński M, Rządkiwicz J, Swiderski L, Szydłowski A, Zychor I. *Characterization of some modern scintillators recommended for use on large fusion facilities in γ -ray spectroscopy and tomographic measurements of γ -emission profiles*. NUKLEONIKA. 2017 January; 62(3):223-8.
- [59] Schneider FR, Shimazoe K, Somlai-Schweiger I, Ziegler SI. *A PET detector prototype based on digital SiPMs and GAGG scintillators*. Phys. Med. Biol. 2015 January; 60(4):1667-79.

-
- [60] Shimazoe K, Yoshino M, Ohshima Y, Uenomachi M, Oogane K, Orita T, Takahashi H, Kamada K, Yoshikawa A, Takahashi M. *Development of simultaneous PET and Compton imaging using GAGG-SiPM based pixel detectors*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. To be published.

Akronyme

CC	Compton Camera
COR	Cone of Response
FWHM	Full Width at Half Maximum
GAGG:Ce	Mit Cer dotiertes Gadolinium-Aluminium-Gallium-Garnet
MC	Monte-Carlo
MCMC	Markov-Chain Monte-Carlo
ML-EM	Maximum-Likelihood Expectation-Maximization
NaI:Tl	Mit Thallium dotiertes Natriumiodid
OE	Origin Ensemble
PDF	Probability Density Function
PSF	Point Spread Function
ROR	Region of Response
SiPM	Silizium-Photomultiplier
SNR	Signal-to-Noise-Ratio
SPCC	Single Plane Compton Camera
SPCI	Single Plane Compton Imaging

Abbildungsverzeichnis

1.1	Messprinzip der Anger-Kamera	1
2.1	Inkohärente Streuung und photoelektrischer Effekt	4
2.2	Aufbau der Single Plane Compton Camera	6
2.3	Linearer Schwächungskoeffizient von Photonen für GAGG:Ce und Wasser	8
2.4	Funktionsweise der Compton Camera	9
2.5	Cone of Response bei der Compton Camera	9
2.6	Cones of Response beim Single Plane Compton Imaging	10
3.1	Maximum-Likelihood Expectation-Maximization	17
3.2	Origin Ensemble	20
4.1	Festlegung der Voxel- und Detektornotation	22
4.2	Fließschema für die Software SPCI-Reconstruction	23
4.3	Verification.root, Sixpoints.root und SNRSource.root	27
4.4	Region of Responses bei verschiedenen Gammakameras	29
5.1	Ergebnisse der Verifikation	31
5.2	Konvergenzverhalten in Abhängigkeit von β bei der Rekonstruktion mit ML-EM	32
5.3	Bildqualität in Abhängigkeit von der Anzahl der Energiebins B für ML-EM	34
5.4	Abhängigkeit der Rekonstruktionszeit von der Anzahl der Energiebins B für ML-EM	35
5.5	Sixpoints.root für $B = 50$ und 20000 Iterationen	36
5.6	Bildqualität in Abhängigkeit von der Anzahl der Projektionen N für ML-EM	37
5.7	Abhängigkeit der Rekonstruktionszeit von der Anzahl der Projektionen N für ML-EM	38
5.8	Untersuchung der Akzeptanzwahrscheinlichkeit	39
5.9	Bildqualität in Abhängigkeit von der Anzahl der Energiebins B für OE	41

5.10	Abhängigkeit der Rekonstruktionszeit von der Anzahl der Energiebins B für OE	42
5.11	Bildqualität in Abhängigkeit von der Anzahl der Projektionen N für OE	43
5.12	Abhängigkeit der Rekonstruktionszeit von der Anzahl der Projektionen N für OE	44
5.13	Projektionswahrscheinlichkeiten ausgewählter Detektorpaare und -elemente im Bildraum	47
5.14	Bildqualität in Abhängigkeit von der Kombinatorik der Detektorpaare	49
5.15	Kombinatorik der Detektorpaare	50

Tabellenverzeichnis

5.1	SNR in Abhängigkeit von der Anzahl der Energiebins B bei ML-EM. . . .	35
5.2	SNR in Abhängigkeit von der Anzahl der Projektionen N bei OE.	44
5.3	System-Intricacy in Abhängigkeit von der Anzahl der Energiebins B	45

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die am heutigen Tage eingereichte Masterarbeit zum Thema

Anwendung von Maximum-Likelihood Expectation-Maximization und Origin Ensemble zur Rekonstruktion von Aktivitätsverteilungen beim Single Plane Compton Imaging (SPCI)

vollkommen selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Dresden, den 30.08.2019

A Herleitung des ML-EM Algorithmus

Es wird angenommen, dass N_{dcb} statistisch unabhängig und Poisson-verteilt ist. Dann gilt für den Erwartungswert

$$E(N_{dcb}) = \bar{N}_{dcb} = \sum_v p_{dcb,v} \lambda_v = \sum_v \bar{N}_{dcb,v} \quad \forall v (\lambda_v > 0). \quad (\text{A.1})$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass N_{dcb} erhalten wird, folgt:

$$\text{Poisson}(N_{dcb}) = \frac{(\bar{N}_{dcb})^{N_{dcb}}}{N_{dcb}!} e^{-\bar{N}_{dcb}} \equiv p(N_{dcb} | \boldsymbol{\lambda}). \quad (\text{A.2})$$

Die Messung $\mathbf{N} \in \mathcal{N}$ ist *unvollständig*, weil die Emissionsdichteverteilung $\boldsymbol{\lambda}$ und damit $N_{dcb,v}$ unbekannt ist. Es werden die vollständigen Daten $\tilde{\mathbf{N}}$ benötigt, um die Likelihoodfunktion $\mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda})$ zu definieren. Es gilt:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda}) = p(\mathcal{N} = \tilde{\mathbf{N}} | \boldsymbol{\lambda}) = \prod_v \prod_{dcb} p(\mathcal{N} = \tilde{N}_{dcb,v} | \boldsymbol{\lambda}) \quad (\text{A.3})$$

und für den Parameter, der die Likelihoodfunktion maximiert

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \arg \max_{\boldsymbol{\lambda}} (\mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda})) = \arg \max_{\boldsymbol{\lambda}} (\log \mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda})) \quad (\text{A.4})$$

mit

$$\log \mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_v \sum_{dcb} \tilde{N}_{dcb,v} \log (\bar{N}_{dcb,v}) - \log (\tilde{N}_{dcb,v}!) - \bar{N}_{dcb,v}. \quad (\text{A.5})$$

Die Maximierung der Likelihoodfunktion $\mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda})$ mit dem unbekanntem Parameter $\boldsymbol{\lambda}$ ist nicht trivial. Stattdessen kann mit dem Expectation-Maximization-Algorithmus der Parameter $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ über den bedingten Erwartungswert gemäß

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(k+1)} = \arg \max_{\boldsymbol{\lambda}} E(\log \mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda}) | \mathbf{N}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}) \quad (\text{A.6})$$

geschätzt werden. Im Expectation-Schritt wird nun der bedingte Erwartungswert

$$\mathbb{E}(\log \mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda}) | \mathbf{N}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}) = \sum_v \sum_{dcb} M_{dcb,v} \log(\bar{N}_{dcb,v}) - \bar{N}_{dcb,v} + \text{const} \quad (\text{A.7})$$

mit

$$M_{dcb,v} = \mathbb{E}(\tilde{N}_{dcb,v} | \mathbf{N}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}) = \hat{\lambda}_v^{(k)} \frac{p_{dcb,v} N_{dcb}}{\sum_{v'} p_{dcb,v'} \hat{\lambda}_{v'}^{(k)}} \quad (\text{A.8})$$

berechnet und im Maximization-Schritt partiell abgeleitet

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_v} \mathbb{E}(\log \mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda}) | \mathbf{N}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}) = \frac{1}{\lambda_v} \sum_{dcb} M_{dcb,v} - \sum_{dcb} p_{dcb,v}. \quad (\text{A.9})$$

Der vollständige rekursive ML-EM-Algorithmus kann dann nach Null Setzen und Einsetzen in (A.6) erhalten werden:

$$\hat{\lambda}_v^{(k+1)} = \frac{\lambda_v^{(k)}}{\sum_{dcb} p_{dcb,v}} \sum_{dcb} \frac{p_{dcb,v} N_{dcb}}{\sum_{v'} p_{dcb,v'} \hat{\lambda}_{v'}^{(k)}} \quad \forall v (\hat{\lambda}_v^{(k=0)} > 0) \quad (\text{A.10})$$

B Tiefergehende Informationen zu OE

Origin Ensemble verwendet den Metropolis-Hastings-Algorithmus zum Aufbau einer stationären Markov-Kette. Diese wird gefunden, wenn die Wahrscheinlichkeiten der Zustände $\Pi(\mathbf{v}) \propto p(\Omega)$ entsprechend Gleichung (3.9) berechnet werden können. Jene Gleichung sei hier nochmals aufgestellt:

$$\Pi(\mathbf{v}) \propto \prod_n^N p_{dcb_n, v_n} \frac{O_{v_n}}{S_{v_n}} \quad (\text{B.1})$$

Aus der stationären Verteilung $f(\Omega) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_Z)$ der Markov-Kette können Stichproben der gesuchten Dichtefunktion $p(\Omega)$ gezogen werden, wenn $f(\mathbf{v}) = \Pi(\mathbf{v})$. Zum einen muss dafür die Bedingung des detaillierten Gleichgewichts

$$f(\mathbf{v}_z)p(\mathbf{v}_z \rightarrow \mathbf{v}_{z+1}) = f(\mathbf{v}_{z+1})p(\mathbf{v}_{z+1} \rightarrow \mathbf{v}_z) \quad (\text{B.2})$$

erfüllt sein. Hier bezeichnet die Notation $p(\mathbf{v}_z \rightarrow \mathbf{v}_{z+1})$ die Übergangswahrscheinlichkeit von einem Zustand \mathbf{v}_z in den nächsten Zustand \mathbf{v}_{z+1} . Dies wird folgendermaßen gefordert:

$$\Pi(\mathbf{v}_z)p(\mathbf{v}_z \rightarrow \mathbf{v}_{z+1}) = \Pi(\mathbf{v}_{z+1})p(\mathbf{v}_{z+1} \rightarrow \mathbf{v}_z) \quad (\text{B.3})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Pi(\mathbf{v}_{z+1})}{\Pi(\mathbf{v}_z)} = \frac{p(\mathbf{v}_z \rightarrow \mathbf{v}_{z+1})}{p(\mathbf{v}_{z+1} \rightarrow \mathbf{v}_z)}. \quad (\text{B.4})$$

Der nächste Zustand \mathbf{v}_{z+1} unterscheidet sich nur durch das betroffene Voxel v_n eines Ereignisses dcb_n . Zur Vereinfachung der Notation wird die Schreibweise $p(\mathbf{v}_z \rightarrow \mathbf{v}_{z+1}) = p(v \rightarrow v')$ eingeführt.

Zum anderen muss die Bedingung der Ergodizität erfüllt sein. Das bedeutet, dass jeder mögliche Zustand von einem anderen beliebigen Zustand in einer endlichen Anzahl an Schritten erreichbar sein muss. Da sich die Zustände nur um einen Voxel unterscheiden, kann jeder beliebige Zustand erreicht werden, indem schrittweise die betroffenen Origins in die Zielvoxel verschoben werden.

Die Übergangswahrscheinlichkeit wird als ein Produkt aus einer *Proposal*-Funktion $p_{prop.}(v \rightarrow v')$ und einer *Acceptance*-Funktion $p_{acc.}(v \rightarrow v')$ definiert, sodass beide Bedin-

gungen erfüllt sind [42]. Unter Verwendung von Gleichung (B.4) folgt

$$\frac{p_{acc.}(v \rightarrow v')}{p_{acc.}(v' \rightarrow v)} = \frac{p_{prop.}(v' \rightarrow v)\Pi(v')}{p_{prop.}(v \rightarrow v')\Pi(v)} \quad (\text{B.5})$$

Beim Metropolis-Hastings-Algorithmus wird die Akzeptanzwahrscheinlichkeit folgendermaßen festgelegt:

$$p_{acc.}(v \rightarrow v') = \min \left[1, \frac{p_{prop.}(v' \rightarrow v)\Pi(v')}{p_{prop.}(v \rightarrow v')\Pi(v)} \right]. \quad (\text{B.6})$$

Für den OE-Algorithmus ergeben sich je nach Modell ($p_{prop.}(v \rightarrow v')$ und/oder $\Pi(v)$) verschiedene Akzeptanzwahrscheinlichkeiten, z. B.

$$p_{acc.}(v \rightarrow v') = \min \left[1, \frac{p_{dcbn,v'_n} s_{v_n} (o_{v_n} - 1)^{o_{v_n} - 1} (o_{v'_n} + 1)^{o_{v'_n} + 1}}{p_{dcbn,v_n} s_{v'_n} (o_{v_n})^{o_{v_n}} (o_{v'_n})^{o_{v'_n}}} \right] \quad (\text{B.7})$$

gemäß [34], Gleichung (7) oder

$$p_{acc.}(v \rightarrow v') \approx \min \left[1, \frac{s_{v_n} o_{v'_n} + 1}{s_{v'_n} o_{v_n}} \right] \quad (\text{B.8})$$

gemäß [35], Gleichung (1) oder

$$p_{acc.}(v \rightarrow v') = \min \left[1, \frac{s_{v_n} p_{dcbn,v'_n} o_{v'_n} + 1}{s_{v'_n} p_{dcbn,v_n} o_{v_n}} \right] \quad (\text{B.9})$$

gemäß [20], Gleichung (6.33) oder

$$p_{acc.}(v \rightarrow v') = \min \left[1, \frac{s_{v_n} p_{dcbn,v'_n} o_{v'_n} + \frac{1}{2}}{s_{v'_n} p_{dcbn,v_n} o_{v_n} - \frac{1}{2}} \right] \quad (\text{B.10})$$

gemäß [20], Gleichung (6.37) oder

$$p_{acc.}(v \rightarrow v') = \min \left[1, \frac{s_{v_n} p_{dcbn,v'_n} \left(\frac{o_{v'_n} + 1}{o_{v_n}} \right)^{1-\beta}}{s_{v'_n} p_{dcbn,v_n}} \right] \quad (\text{B.11})$$

gemäß [20], Gleichung (6.39).

C C++-Code für die Bildrekonstruktion beim SPCI

Daten-CD mit allen in dieser Masterarbeit durch den Autor geschriebenen Programmen.