CARACTERIZACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE LIE NILPOTENTES Y SOLUBLES

ANGIE PAOLA OLAYA GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y DE LA EDUCACIÓN

ESCUELA DE PEDAGOGÍA Y BELLAS ARTES

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

VILLAVICENCIO

2018

CARACTERIZACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE LIE NILPOTENTES Y SOLUBLES

ANGIE PAOLA OLAYA GONZÁLEZ

Código: 141002912

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Licenciada en Matemáticas y Física

Dirigido por:

Mg. ARTURO ALEXANDER CASTRO GALVIS

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y DE LA EDUCACIÓN

ESCUELA DE PEDAGOGÍA Y BELLAS ARTES

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

VILLAVICENCIO

2018

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y DE LA EDUCACIÓN

AUTORIZACIÓN

Yo Angie Paola Olaya González mayor de edad, vecino de Villavicencio (Meta), identificado con la Cédula de Ciudadanía No. 1.121.940.608 de Villavicencio (Meta), actuando en nombre propio en mi calidad de autor del trabajo de tesis, monografía o trabajo de grado denominado CARACTERIZACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE LIE NILPOTENTES Y SOLUBLES, hago entrega del ejemplar y de sus anexos de ser el caso, en formato digital o electrónico (CD-ROM) y autorizo a la **UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS**, para que en los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia, con la finalidad de que se utilice y use en todas sus formas, realice la reproducción, comunicación pública, edición y distribución, en formato impreso y digital, o formato conocido o por conocer de manera total y parcial de mi trabajo de grado o tesis.

EL AUTOR – ESTUDIANTE, Como autor, manifiesto que el trabajo de grado o tesis objeto de la presente autorización, es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros; por tanto, la obra es de mi exclusiva autoría y poseo la titularidad sobre la misma; en caso de presentarse cualquier reclamación o acción por parte de un tercero en cuanto a los derechos de autor sobre la obra en cuestión, como autor, asumiré toda la responsabilidad, y saldré en defensa de los derechos aquí autorizados, para todos los efectos la Universidad actúa como un tercero de buena fe.

Para constancia, se firma el presente documento en dos (2) ejemplares del mismo valor y tenor en Villavicencio - Meta, a los 26 días del mes de abril de dos mil dieciocho (2018).

EL AUTOR – ESTUDIANTE

Firma

Nombre: Angie Paola Olaya González

C.C. No. 1.121.940.608 de Villavicencio

AUTORIDADES ACADÉMICAS

PABLO EMILIO CRUZ CASALLAS

Rector (E)

DORIS CONSUELO PULIDO DE GONZÁLEZ

Vicerrectora Académica

GIOVANNY QUINTERO REYES

Secretario General

MANUEL EDUARDO HOZMAN MORA

Decano de la Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación

SAID ABAD JIMÉNEZ MAYORGA

Director de la Escuela de Pedagogía y Bellas Artes

FREDY LEONARDO DUBEIBE MARÍN

Director del Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física

Notas de aceptación

FERNANDO CAMPOS POLO

Director Centro de Investigaciones FCHyE

FREDY LEONARDO DUBEIBE MARÍN

Director del Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física

FRANCISCO JAVIER GUTIÉRREZ

Evaluador

JAIME MONTESDEOCA

Evaluador

ARTURO ALEXANDER CASTRO

Director

Villavicencio, 26 de abril de 2018

AGRADECIMIENTOS

A mi padre Hermin Olaya Barrios por su apoyo, confianza, amor y aporte en cada etapa de mi formación personal y académica; porque me enseñó la importancia de la responsabilidad y el respeto, cualidades sin las cuales muchos de los objetivos que me llevan hoy a este logro no hubiesen sido cumplidos eficientemente. Es mi mayor ejemplo, mi guía y mi más grande motivación para culminar este logro, a él se lo debo todo.

A mis hermanas, en especial a Ingrid quien hizo de muchos obstáculos algo divertido, ameno y llevadero; su apoyo y alegría me alentaron a seguir adelante y estar donde estoy. A Carolina por su apoyo incondicional y siempre brindarme su colaboración en este proceso. A mis compañeros, que de una u otra forma han sido importantes en todo este recorrido y en especial a Samuel Steven Álvarez, quien me ha brindado su apoyo y comprensión en momentos cruciales de este proceso, gracias por su compañía.

A los docentes que me brindaron sus conocimientos amenamente generando el deseo en mí de ser docente de Matemáticas y Física. Consciente que son muchos y cada uno hizo su aporte, quiero agradecer especialmente a Arturo Alexander Castro Galvis y Francisco Javier Gutiérrez por que sus enseñanzas y su exigencia marcaron un nuevo objetivo en mi vida profesional, me hicieron ver la belleza oculta en las matemáticas.

A la Fundación Costurero Compartir, aunque se encuentra disuelta, depositaron confianza en mí y otorgaron beneficios importantes y determinantes sin los cuales no hubiese culminado la carrera. A los jurados Jaime Montesdeoca y Francisco Gutiérrez por su flexibilidad, comprensión, colaboración y aportes para la mejora de este proyecto.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Las álgebras de Lie surgieron de la tentativa del matemático noruego Marius Sophus Lie de obtener una teoría para el estudio de las ecuaciones diferenciales análogo a la teoría de Galois, para las ecuaciones polinomiales, mediante las transformaciones de contacto donde se asocia a cada ecuación diferencial en derivadas parciales una familia finita de transformaciones, que es cerrada, por lo que Lie la llamó grupo infinitesimal, término que Hermann Weyl cambiaría por álgebras de Lie en 1930.

La teoría que se conoce actualmente sobre las Álgebras de Lie, es el resultado de estudios realizados posteriormente por el propio Lie, Killing, Cartan, Serre, Engel, entre otros. Siendo los principales aportes de esta, el asociar a cada grupo de transformaciones continuas un Álgebra de Lie y el establecer una aplicación función del Álgebra de Lie. La correspondencia entre grupos de Lie y álgebras de Lie creó un importante vínculo entre el álgebra y la geometría que permite tratar varios problemas desde distintas perspectivas.

La teoría de Lie ha colaborado al desarrollo de la geometría diferencial, geometría algebraica y teoría de ecuaciones diferenciales en derivada parciales. En la actualidad las aplicaciones de la Teoría de Lie no son únicamente en el área de matemáticas, sino que cada vez es mayor su aplicación en la física teórica y teoría de super-cuerdas[1]. Las diferentes aplicaciones de la teoría de Lie en ciencias como Ingenierías, Economía, Finanzas y Física, que matemáticos como Juan Dieudonn se refieran a esta como un eje gigante en los avances científicos y que Albert Einstein las usará en sus cálculos para la Teoría General de la Relatividad hace pensar en lo importante de su estudio.

[1] NÚÑEZ VALDÉS, Juan. TENORIO VILLALÓN, Ángel. Biografías de matemáticos ilustres. DIVULGAMAT. RSME. [En línea]. Disponible en http://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/SophusLief1.asp.htm

Asimismo, Lie realizó importantes aportes al asociar a cada grupo de transformaciones continuas un álgebra de Lie y al establecer una aplicación del álgebra de Lie a través de los grupos a un parámetro.

Al realizar una revisión bibliográfica de esta teoría se ve que un aspecto importante en su estudio es la clasificación y/o caracterización de las Álgebras de Lie, cuyo problema se ha abordado desde principios del siglo XIX por Killing y Cartan entre otros donde no se ha logrado una clasificación general. Por ello, este proyecto tiene como objetivo caracterizar las Álgebras de Lie nilpotentes y solubles aplicando los teoremas de Lie y Engel; para esto se ha planteado la siguiente pregunta ¿Cuál es la caracterización de la estructura de las Álgebras de Lie nilpotentes y solubles si se usan los teoremas de Lie y Engel?, para ello debe estudiarse nociones básicas del Álgebra lineal y de las Álgebras de Lie.

Para abordar las álgebras de Lie se necesitan algunos estudios previamente sobre álgebra lineal y abstracta; por ello, el presente informe presenta en el marco teórico las definiciones, ejemplos, proposiciones, entre otros fundamentales para comprenderlas. Así mismo, el presente informe contiene un capítulo dedicado a los resultados obtenidos al aplicar definiciones del álgebra lineal y los teoremas de Lie y Engel a las álgebras de Lie, y su respectivo análisis.

1. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan fundamentos de álgebra lineal que permitirán comprender los diferentes elementos utilizados en las demostraciones, pruebas y demás para las álgebras de Lie y su caracterización. Abordaremos temáticas como matrices, espacios vectoriales y álgebras.

1.1. Matrices

A continuación, se presentan nociones básicas de la teoría de matrices.

Definición 1.1.1 Sea $\mathbb{F}$ un campo, una **matriz** es una formación rectangular de elementos del campo $\mathbb{F}$ en un arreglo de m columnas y n filas:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

De forma general una matriz con m filas y n columnas es llamada **rectangular** de orden $m \times n$. Se denota $A_{m\times n}$. Cuando $m = n$ la matriz es denominada **matriz cuadrada** y el número n, es llamado su *orden*. Los elementos que la constituyen son llamados las entradas de la matriz. La entrada ubicada en la intersección de la i-ésima fila y la j-ésima columna de la matriz $A_{m\times n}$ está marcada por la pareja (i, j). Como notación alternativa se puede utilizar la abreviación:

$$A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} \tag{1.2}$$

El conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en un campo $\mathbb{F}$ se denota por $M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

Ejemplo 1.1.1 Matriz cuadrada A de orden 3 en el campo $\mathbb{R}$

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.1.2 Matriz $B_{2\times 3}$ en el campo de los complejos

$$B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 3-i & 2i & 6+i \\ 4-3i & 1+4i & 7 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.1.2 La suma entre dos matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$, donde ambas son de dimensión $m \times n$, se define como la matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$, la cual tiene la misma dimensión que A y B y sus elementos son la suma de los correspondientes elementos de las matrices A y B:

$$C = A + B, \textit{ donde } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Ejemplo 1.1.3 Sean $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} y, B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$A_{2\times 3} + B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$$

$$A_{2\times 3}+B_{2\times 3}=C_{2\times 3}=\begin{pmatrix} a_1+c_1 & a_2+c_2 & a_3+c_3 \\ b_1+d_1 & b_2+d_2 & b_3+d_3 \end{pmatrix}.$$

Propiedades 1.1.1 Sean A, B y C matrices del mismo tamaño, entonces se cumple que:

1. $A+B=B+A.$
2. $A+(B+C)=(A+B)+C.$
3. *Existe una matriz (neutro aditivo) cero, tal que* $A+0=0+A=A.$
4. *Para toda matriz* A*, existe (inverso aditivo) la matriz* $-A$ *tal que* $A+(-A)=0.$

Definición 1.1.3 El producto de un número (escalar) α que pertenece al campo $\mathbb{F}$ por una matriz A, se define como la matriz del mismo orden de A tal que cada uno de sus elementos es la multiplicación de los elementos de A por el número α. En este caso no importa el orden de A. Es decir, si $A=(a_{ij})$, entonces $\alpha A=(\alpha a_{ij})$.

Ejemplo 1.1.4 Dada la matriz $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1/2 \end{pmatrix}$ y el escalar $\alpha=2$, la multiplicación αA es:

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 5 & 2\cdot 1/2\text{''} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Propiedades 1.1.2 Dadas las matrices A y B y los escalares α y β, entonces se cumple que:

1. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A).$

2. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.

3. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

4. $1A = A$.

Definición 1.1.4 Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$, y $B = (b_{ij})$ una matriz de orden $n \times p$. Entonces el producto entre A y B tiene como resultado una matriz $C = (c_{ij})$ de orden $m \times p$, en donde $c_{ij} =$ (renglón i de A)$\cdot$ (columna j de B).

Esto implica que la multiplicación de dos matrices A y B solo puede efectuarse si el número de columnas de la primera matriz es el mismo número de filas de la segunda matriz (nótese que entre matrices cuadradas del mismo orden siempre se puede efectuar la multiplicación de matrices). Es decir, si $A = (a_{ik})$ y $B = (b_{kj})$, entonces $C = (c_{ij})$ donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (a_{ik})(b_{kj})$$

.

Ejemplo 1.1.5 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, *entonces*

$$AB = \begin{pmatrix} 4-9-4 \\ 2+18-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.1.5 La matriz identidad de orden n es una matriz cuadrada de orden n, denotada I_n es el elemento neutro de las matrices, donde los elementos de la diagonal son iguales a 1 y los demás iguales a 0.

Ejemplo 1.1.6 La matriz identidad de las matrices cuadradas de orden 3.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Propiedades 1.1.3 Dadas las matrices A, B y C conformables[2] , entonces se cumple que:

1. $A(BC) = (AB)C$.
2. $AI = A$, donde I es la matriz identidad (adecuada).
3. $A(B+C) = AB + AC$.
4. $(A+B)C = AC + BC$.

En general la multiplicación de matrices es no conmutativa, es decir $AB \neq BA$.

Definición 1.1.6 Dada una matriz A se define la matriz transpuesta A^t, como aquella en la que se cambian las filas por columnas, es decir: Si $A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$, entonces $A^t_{n\times m} = (a_{ji})_{n\times m}$.

Ejemplo 1.1.7 Dada la matriz A de orden 3×2, $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$, entonces la matriz

[2] Dos matrices A y B se llaman conformables si se puede realizar la operación, en este caso la multiplicación de matrices

transpuesta de A está dada por:

$$A^t = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}.$$

Propiedades 1.1.4 Dadas las matrices A, B y α un número real, entonces se cumple que:

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$.
3. $(AB)^t = B^t A^t$.
4. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.
5. *Si* $A = A^t$*, la matriz se llama* ***simétrica****.*
6. *Si* $A^t = -A$*, la matriz se llama* ***antisimétrica****.*

Definición 1.1.7 Dada una matriz cuadrada A de orden n, se define la traza de la matriz A, como la cantidad obtenida al sumar los n elementos de la diagonal principal y se denota por $tr(A)$.

Ejemplo 1.1.8 Sea la matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 6 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, entonces $tr(D) = 2+3+0+7 = 12$.

Propiedades 1.1.5 La traza de una matriz cumple las siguientes propiedades, donde A y B son dos matrices cuadradas de orden n[3] y sea α un número real:

1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.
2. $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$.
3. $tr(AB) = tr(BA)$.
4. $tr(AB - BA) = 0$.

Definición 1.1.8 Se dice que una matriz cuadrada A de orden n tiene inversa, si existe una matriz cuadrada B de orden n tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, siendo I_n la matriz identidad de orden n. Se denomina a la matriz B la **matriz inversa** de A y se denota A^{-1}.

Ejemplo 1.1.9 Sea la matriz cuadrada A de orden 2, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, entonces, la matriz inversa de A será la matriz cuadrada A^{-1} de orden 2, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Ya que:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1/2 & 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & 2 \cdot 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

y

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1/2 \cdot 2 & 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & 1/2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

A continuación presentamos la definición y ejemplos de algunas matrices necesarias

[3] También se cumple cuando $A_{m \times n}$ y $B_{n \times m}$.

para el abordaje del tema además de las matrices cuadradas y rectangulares y las ya nombradas:

En una matriz cuadrada $A = (a_{ij_{m\times n}})$, diremos que los elementos que conforman la **diagonal superior** son de la forma a_{ii}.

Definición 1.1.9 Una matriz es **triangular superior** si los elementos bajo la diagonal principal son nulos.Para el caso en que $n = 3$ las matrices triangulares superiores tienen la siguiente forma:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Definición 1.1.10 Una matriz es **triangular inferior** si los elementos sobre la diagonal principal son nulos.Para el caso en que $n = 3$ las matrices triangulares inferiores tienen la siguiente forma:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Definición 1.1.11 Una matriz es **diagonal** si es simultáneamente triangular superior e inferior. Para el caso en que $n = 3$ las matrices diagonales tienen la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Definición 1.1.12 Sea $A_{n\times n} = (a_{ij})$ una matriz con entradas en los complejos. $\overline{A}_{n\times n=(b_{ij})}$

se denomina la **matriz conjugada** de A,si $b_{ij} = \overline{a}_{ij}$.

Ejemplo 1.1.10 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2+i & 4+i \\ 5-i & 1 \end{pmatrix}$*, su matriz conjugada es:* $\begin{pmatrix} 2-i & 4-i \\ 5+1 & 1 \end{pmatrix}$.

Definición 1.1.13 Si la potencia n (número natural) de una matriz da como resultado la matriz nula entonces esta matriz se denomina **nilpotente**. Para que una matriz sea nilpotente debe ser cuadrada y se denominará como su índice u orden al menor número natural n para el cual la matriz es nilpotente.

Ejemplo 1.1.11 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ una matriz cuadrada de orden 2, A es nilpotente de índice 2 debido a que*:*

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} (1 \cdot 1) + (1 \cdot -1) & (1 \cdot 1) + (1 \cdot -1) \\ (-1 \cdot 1) + (-1 \cdot -1) & (-1 \cdot 1) + (-1 \cdot -1) \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Espacios vectoriales

Definición 1.2.1 Un espacio vectorial V sobre el campo $\mathbb{F}$ es un conjunto cuyos elementos se denominan vectores, unido a dos operaciones (suma de vectores y producto de un vector por un escalar) que cumplen las siguientes propiedades:

1. $u+v \in V$; $\forall u,v \in V$.

2. $u+v = v+u$; $\forall u,v \in V$.

3. $u+(v+w) = (u+v)+w$; $\forall u,v,w \in V$.

4. Existe un elemento $0 \in V$, tal que $0+u = u+0 = u$; $\forall u \in V$.

5. $\forall u \in V$ existe un vector v, tal que $u+v = 0$; $\forall u,v \in V$.

6. $ku \in V$; $\forall u \in V$ y $\forall k \in \mathbb{F}$.

7. $k(u+v) = ku+kv$; $\forall u,v \in V$ y $\forall k \in \mathbb{F}$.

8. $(k+l)u = ku+lu$; $\forall u \in V$ y $\forall k,l \in \mathbb{F}$.

9. $(kl)u = k(lu)$; $\forall u \in V$ y $\forall k,l \in \mathbb{F}$.

10. $1v = v$; $\forall v \in V$, donde 1 es el elemento neutro para la operación multiplicación en $\mathbb{F}$.

Ejemplo 1.2.1 Un ejemplo de espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ es el conjunto de las matrices de orden $m \times n$ en el campo $\mathbb{K}$, con la suma y la multiplicación por un escalar, usual para las matrices. Esto puede corroborarse revisando las 1.1.2 y 1.1.3 así como las 1.1.1 y 1.1.2.

Definición 1.2.2 Sea el espacio vectorial V sobre el campo $\mathbb{K}$, un subconjunto $W \subseteq V$ es llamado **subespacio** de V si cumple que:

1. $\forall w_1, w_2 \in W$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in W$, y

2. $\forall \alpha \in \mathbb{F}, w_1 \in W$, $\alpha_1 w_1 \in W$.

Nótese que la anterior operación resume las dos operaciones definidas para los espacios vectoriales. Los subespacios vectoriales también son espacios vectoriales.

Ejemplo 1.2.2 Sea V el espacio vectorial de las matrices $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, el subconjunto (S) de las matrices cuadradas de la forma $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Entonces debemos verificar las condiciones 1 y 2 de la 1.2.1, es decir:

1. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & a' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ *entonces:* $A+B = \begin{pmatrix} 0+0 & a+a' \\ b+b' & c+c' \end{pmatrix}$*, y por lo tanto* $A+B \in S$.

2. *Sea* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $A \in S$*, entonces* $\lambda \cdot A = \lambda \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \lambda b & \lambda c \end{pmatrix}$*, por consiguiente* $\lambda A \in S$.

De 1. y 2. obtenemos que S es un subespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Definición 1.2.3 Sean los vectores unitarios $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$ y $\mathbf{k} = (0,0,1)$ y sea $\vec{u} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ y $\vec{v} = d\,\mathbf{i} + e\,\mathbf{j} + f\,\mathbf{k}$ vectores en $\mathbb{R}^3$, el producto vectorial entre ellos se representa de forma compacta por medio de un determinante que está dado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix},$$

que se puede reescribir como $\vec{u} \times \vec{v} = (bf - ce)\mathbf{i} - (af - cd)\mathbf{j} + (ae - bd)\mathbf{k}$.

Ejemplo 1.2.3 Sean los vectores $\vec{u} = 3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - 1\,\mathbf{k}$ y $\vec{v} = 4\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$, el producto vectorial entre ellos es:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = (4-5)\boldsymbol{i} - (6+4)\boldsymbol{j} + (-15-8)\boldsymbol{k}.$$

Propiedades 1.2.1 Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vectores $\in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{F}$. El producto vectorial cumple con las siguientes propiedades:

1. $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = 0.$
2. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}.$
3. $(\vec{u} \times \vec{v}) = -(\vec{v} \times \vec{u}).$
4. $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v}).$

Definición 1.2.4 Dados los espacios vectoriales V y W cualesquiera sobre el campo $\mathbb{F}$, entonces una aplicación $T : V \to W$ es llamada una ***transformación lineal*** si para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ y todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$ se cumple que:

1. $T(\alpha\vec{v}) = \alpha T(\vec{v}).$

2. $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}).$

Ejemplo 1.2.4 Sean los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3$ y $M_{2\times 2}$ la aplicación $T : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}$ definida por $T = (x, y, z) = \begin{pmatrix} x+y & -y \\ -z & y+z \end{pmatrix}$ es una transformación lineal.

De acuerdo a la 1.2.4 se debe cumplir que:

1. $T(\alpha\vec{v}) = \alpha T(\vec{v})$. Sea $\alpha \in \mathbb{F}$, entonces:

$$\begin{aligned}
T\left(\alpha(x,y,z)\right) &= (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha y & -\alpha y \\ -\alpha z & \alpha y + \alpha z \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} x+y & -y \\ -z & y+z \end{pmatrix} \\
&= \alpha T(\vec{v}).
\end{aligned}$$

2. $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$. Sean $\vec{v} = (x,y,z)$ y $\vec{u} = (x',y',z')$. Entonces

$$\begin{aligned}
T(\vec{v}+\vec{u}) &= \begin{pmatrix} (x+x')+(y+y') & -(y+y') \\ -(z+z') & (y+y')+(z+z') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x+y)+(x'+y') & (-y)+(-y') \\ (-z)+(-z') & (y+z)+(y'+z') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x+y & -y \\ -z & y+z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y' & -y' \\ -z' & y'+z' \end{pmatrix} \\
&= T(\vec{v}) + T(\vec{u}).
\end{aligned}$$

Por 1. y 2. tenemos que T es una transformación lineal.

Relacionados a la **transformación lineal** T existen dos subespacios:

1. El kernel o núcleo de T es el subespacio $ker(T) \subseteq V$ de todo $v \in V$ para el cual $T(v) = 0$, es decir, $ker(T) = \{v \in V, T(v) = 0\}$.

2. El rango de T es el subespacio $ran(T) \subseteq W$ de todos los vectores $w \in W$ de la forma $w = T(v)$ para algún $v \in V$.

Definición 1.2.5 Supongamos que W es un subespacio de un espacio vectorial V. Una ***clase*** de W es un conjunto de la forma:

$$v + W := \{v + w : w \in W\}.$$

Es importante notar que a menos que $W = \{0\}$, cada clase de equivalencia puede tener varias formas de denotarse, en efecto $v + W = v' + W$ si y sólo si $v - v' \in W$.

Definición 1.2.6 El ***espacio cociente*** denotado por V/W es el conjunto de todas las clases de W. El espacio cociente, es un espacio vectorial con la adición definida por:

$$(v + W) + (v' + W) = (v + v') + W \ \forall v, v' \in V.$$

Y la multiplicación por un escalar:

$$\alpha(v + W) = \alpha v + W \ \forall v \in V, \alpha \in \mathbb{F}.$$

Definición 1.2.7 Un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{F}$, es un espacio con **producto interno** si para cada par ordenado de vectores u y v en V, existe un único número denotado por (u, v) en el campo $\mathbb{F}$ llamado producto interno de u y v, tal que si u, v y w están en V y $\alpha \in \mathbb{F}$, entonces:

1. $(v, v) \geq 0$.

2. $(v, v) = 0$ si y solo si $v = 0$.

3. $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$.

4. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$.

5. $(u, v) = \overline{(v, u)}$.

6. $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$.

7. $(u, \alpha v) = \overline{\alpha}(u, v)$.

La barra de las condiciones 5 y 7, denota el conjugado del número (si el campo son los $\mathbb{C}$).

Se dice que un producto interno es *no degenerado* si además satisface que: si v es un elemento de V y $(v, w) = 0$ para todo $w \in V$, entonces $v = 0$.

1.3. Álgebras

Definición 1.3.1 Un espacio vectorial B sobre $\mathbb{F}$, junto con una operación binaria definida entre vectores, es un álgebra sobre un campo $\mathbb{F}$. Es decir,

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot) : & B \times B \longrightarrow B \\ & (x, y) \rightarrow xy. \end{aligned}$$

Donde xy es el producto entre x y y tal que es bilineal y distributiva respecto a la suma.

Diremos que el espacio vectorial B es un álgebra sobre un campo $\mathbb{F}$ si posee una operación binaria interna definida entre vectores tal que $\forall x,\ y,\ z \in B, \lambda \in \mathbb{F}$ se cumple:

1. $x(y+z) = xy + xz$.

2. $(x+y)z = xz + yz$.

3. $x(\lambda y) = (\lambda x)y = \lambda(xy)$.

Se dice que un álgebra es *asociativa* si $\forall x, y, z \in B$ se cumple que:

$$(xy)z = x(yz).$$

Definición 1.3.2 El álgebra B se dice que es *unitaria (con unidad o unital)* si existe un elemento 1 en el álgebra con la propiedad $1a = a1 = a; \forall a \in B$

Ejemplo 1.3.1 Sea $M_{n\times n}$ El conjunto de las matrices cuadradas con entradas en el campo conmutativo $\mathbb{K}$, $M_{n\times n}$ es un álgebra con las operaciones usuales de suma, multiplicación por escalar y multiplicación de matrices. Adicionalmente es un álgebra asociativa y es un álgebra unitaria, donde el **1** es la **matriz identidad**(I_n).

Definición 1.3.3 Un álgebra B sobre un campo $\mathbb{F}$ es un *álgebra de división* sobre $\mathbb{F}$ si B tiene unitario para la multiplicación y contiene un inverso multiplicativo para cada elemento distinto de cero.

Definición 1.3.4 Sea B un álgebra, una subálgebra de esta es un conjunto $B_0 \subseteq B$ tal que B_0 por sí misma es un álgebra.

Definición 1.3.5 Un subconjunto $\mathfrak{J} \subseteq B$ es un *ideal* de B si se cumple que $az \in \mathfrak{J}$ *y* $za \in \mathfrak{J}$ $\forall a \in B$ *y* $\forall z \in \mathfrak{J}$.

Ejemplo 1.3.2 Sea $A = \{X \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) | det(X) \neq 0\} \cup \{0_{n\times n}\}$, A es una subálgebra de $M_{n\times n}$ y es un álgebra con división ya que posee inverso para cada uno de sus elementos distintos de cero (inversa de una matriz).

Existen otro tipo de álgebras que son llamadas como **álgebras no asociativas**, entre ellas las álgebras de Lie, las cuales son objeto de nuestro estudio.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

Este trabajo tuvo las características de la investigación pura y/o básica ya que "se propone enriquecer el conocimiento sin preocuparse por la aplicación directa o inmediata de los resultados"[4], en este caso específico se propone enriquecer la caracterización de las álgebras de Lie nilpotente y solubles utilizando los teoremas de Lie y Engel. Se implementó una metodología teórica. Además, se enmarca dentro de la línea de investigación: Matemáticas y Física. Esta línea de investigación hace parte del saber específico y el área de formación básica del Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Ciencias Humanas y la Educación de la Universidad de los Llanos.

El proyecto se ejecutó teniendo en cuenta las siguientes fases:

- **Recolección de información:** En esta fase se realizó una revisión bibliográfica, sobre álgebra lineal, álgebra abstracta y finalmente álgebras de Lie; que constituyen los conocimientos necesarios para la descripción y comprensión de los resultados. Teniendo referentes teóricos como Nicolás Bourbaki, Félix Gantmacher, Robert Gilmore, Elong Lima, Luiz A. B., Sofía Pinzón, Marlio Paredes, Arturo Castro, entre otros.

- **Aplicación y producción de resultados:** En esta fase se realizó el estudio de los diferentes conceptos necesarios para definir la estructura de un álgebra, y en especial las álgebras de Lie, se incluye los conceptos básicos de la teoría de Lie. También se estudió la teoría de las representaciones de las álgebras de Lie, las álgebras nilpotentes y solubles y se caracterizaron mediante los teoremas de Lie y

[4]GARZA MERCADO, Ario. Manual de técnicas de investigación para estudiantes de ciencias sociales y humanidades. 7ma ed. México D.F.: El colegio de México, Biblioteca Daniel Cosío Villegas, 2007. ISBN 968-12-1298-3. Pág. 15

Engel. Además, se demuestran los teoremas de isomorfismo aplicado a las álgebras de Lie.

- **Presentación del informe final:** Fase actual del proceso que comprende la presentación del informe de los resultados de la investigación usando el compilador LaTeX y el editor TeXnicCenter en su versión de prueba generando como producto un archivo de extensión .pdf con los resultados obtenidos.

3. RESULTADOS

En este capítulo se presentan la teoría de álgebras de Lie junto, se incluyen las demostraciones de los teoremas de isomorfismo aplicados a las álgebras de Lie las cuales normalmente no se encuentran en textos clásicos, la teoría de representaciones y por último se presentan las álgebras de Lie nilpotentes y solubles junto a los teoremas que las caracterizan, los teoremas de Engel y Lie respectivamente.

3.1. Álgebras de Lie

Definición 3.1.1 Un álgebra de Lie consiste en un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ sobre un campo $\mathbb{F}$ dotado de una operación corchete o conmutador denotado por:

$$\begin{aligned}[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g}.\\ (X,Y) &\longmapsto [X,Y].\end{aligned}$$

La cual satisface las siguientes propiedades:

1. Bilinealidad, es decir, que para todo $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$ y $a,b\in\mathbb{F}$ se cumple que

$$[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z],$$

$$[Z,aX+bY]=a[Z,X]+b[Z,Y].$$

2. Antisimetría, es decir que para todo $X,Y\in\mathfrak{g}$ tenemos que

$$[X,Y]=-[Y,X].$$

3. La identidad de Jacobi, esto es, para cualesquiera $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$ tenemos que

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

Lo que puede ser reescrito alternativamente de la siguiente forma:

$$[X,[Y,Z]]=[[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]].$$

Proposición 3.1.1 A partir de la anterior definición obtenemos que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Para todo $X,Y \in \mathfrak{g}, [X,Y]=-[Y,X]$.
2. Para todo $X \in \mathfrak{g}, [X,X]=0$.

Demostración:

1. $\Rightarrow$ 2. Sean $X,Y \in \mathfrak{g}$ entonces tenemos que:

$$[X+Y,X]=-[X,X+Y].$$

Sumando a ambos lados $[X,X+Y]$ obtenemos que $[X,X+Y]+[X+Y,X]=0$. Luego, aplicando la bilinealidad del corchete obtenemos $[X,X]+[X,Y]+[X,X]+[Y,X]=0$. Y por hipótesis $[X,Y]=-[Y,X]$, entonces:

$$2[X,X]=0,$$

Finalmente

$$[X,X]=0.$$

2. $\Rightarrow$ 1. Sean $X,Y \in \mathfrak{g}$ entonces tenemos que:

$$[X+Y, X+Y] = 0.$$

$$[X,X] + [X,Y] + [Y,X] + [Y,Y] = 0.$$

Por hipótesis $[X,X] = 0$ y $[Y,Y] = 0$, entonces $[X,Y] + [Y,X] = 0$.

Por lo tanto, $\forall X,Y \in \mathfrak{g}$ se cumple que $[X,Y] = -[Y,X]$.

Ejemplo 3.1.1 Sea $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ el conjunto de todas las transformaciones de un espacio vectorial de dimensión n en $\mathbb{F}$ o sea, el álgebra de matrices $n \times n$ cuyas componentes pertenecen al campo $\mathbb{F}$.

Sean X,Y,Z matrices de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ y $a,b \in \mathbb{F}$ y $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ es un álgebra de Lie donde el corchete está dado por el conmutador, esto es $[X,Y] = XY - YX$ con $X,Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$. Se comprobaran todas las propiedades de la definición 4.1.1, veamos:

1. Bilinealidad. Se verificará que $[aX+bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$. Entonces:

$$\begin{aligned}
[aX+bY, Z] &= (aX+bY)Z - Z(aX+bY). \\
&= aXZ + bYZ - ZaX - ZbY. \\
&= aXZ + bYZ - aZX - bZY. \\
&= aXZ - aZX + bYZ - bZY. \\
&= a(XZ - ZX) + b(YZ - ZY). \\
&= a[X,Z] + b[Y,Z].
\end{aligned}$$

Y además se debe verificar que $[Z, aX+bY] = a[Z,X]+b[Z,Y]$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
[Z, aX+bY] &= Z(aX+bY)-(aX+bY)Z. \\
&= ZaX+ZbY-aXZ-bYZ. \\
&= aZX+bZY-aXZ-bYZ. \\
&= aZX-aXZ+bZY-bYZ. \\
&= a(ZX-XZ)+b(ZY-YZ). \\
&= a[Z,X]+b[Z,Y].
\end{aligned}
$$

2. Antisimetría. Se debe comprobar que $[X,X]=0$, aplicando la Proposición 3.1.1 tenemos que $[X,X]=XX-XX$, entonces tenemos que $[X,X]=0$.

3. Identidad de Jacobi. Se debe comprobar que $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$.

$$
\begin{aligned}
[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]] =& [X, YZ-ZY]+[Y, ZX-XZ]+[Z, XY-YX] \\
=& X(YZ-ZY)-(YZ-ZY)X+Y(ZX-XZ) \\
& -(ZX-XZ)Y+Z(XY-YX) \\
& -(XY-YX)Z \\
=& XYZ-XZY-YZX+ZYX+YZX-YXZ-ZXY \\
& +XZY+ZXY-ZYX-XYZ+YXZ \\
=& 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ es un álgebra de Lie con la operación corchete(Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$) $[X,Y]=XY-YX$.

Ejemplo 3.1.2 El espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con la operación corchete $[X,Y]=X\times Y$ es un álgebra de Lie. Veamos:

Sean $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ vectores $\in \mathbb{R}^3$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{F}$. Recordemos que el producto vectorial en $\mathbb{R}^3$ cumple las **Propiedades 1.2.1**

1. Bilinealidad: Se debe comprobar que $[\alpha\vec{u}+\beta\vec{v},\vec{w}] = \alpha[\vec{u},\vec{w}]+\beta[\vec{v},\vec{w}]$.

$$\begin{aligned}
[\alpha\vec{u}+\beta\vec{v},\vec{w}] &= \{(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\times\vec{w}\}. \\
&= (\alpha\vec{u}\times\vec{w})+(\beta\vec{v}\times\vec{w}). \\
&= \alpha(\vec{u}\times\vec{w})+\beta(\vec{v}\times\vec{w}). \\
&= \alpha[\vec{u},\vec{w}]+\beta[\vec{v},\vec{w}].
\end{aligned}$$

   Además, se debe comprobar que: $[\vec{w},\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}] = \alpha[\vec{w},\vec{u}]+\beta[\vec{w},\vec{v}]$.

$$\begin{aligned}
[\vec{w},\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}] &= \vec{w}\times(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}). \\
&= (\vec{w}\times\alpha\vec{u})+(\vec{w}\times\beta\vec{v}). \\
&= \alpha(\vec{w}\times\vec{u})+\beta(\vec{w}\times\vec{v}). \\
&= \alpha[\vec{w},\vec{u}]+\beta[\vec{w},\vec{v}].
\end{aligned}$$

2. Antisimetría: Se debe comprobar que $[\vec{u},\vec{u}] = 0$, es decir que $(\vec{u}\times\vec{u}) = 0$.

$$\begin{aligned}
[\vec{u},\vec{u}] &= (\vec{u}\times\vec{u}). \\
&= (bc-cb)\hat{i}+(ac-ca)\hat{j}+(ab-ba)\hat{k}. \\
&= 0\hat{i}+0\hat{j}+0\hat{k}. \\
&= 0.
\end{aligned}$$

.

3. Identidad de Jacobi: Se debe comprobar que $[\vec{U},[\vec{V},\vec{W}]]+[\vec{V},[\vec{W},\vec{U}]]+[\vec{W},[\vec{U},\vec{V}]]=\vec{0}$, sea $\vec{u}=a\hat{\imath}+b\hat{\jmath}+c\hat{k}$.

$$
\begin{aligned}
&[\vec{U},[\vec{V},\vec{W}]]+[\vec{V},[\vec{W},\vec{U}]]+[\vec{W},[\vec{U},\vec{V}]]=\\
&[\vec{U}\times(\vec{V}\times\vec{W})]+[\vec{V}\times(\vec{W}\times\vec{U})]+[\vec{W}\times(\vec{U}\times\vec{V})]=\\
&[\vec{U}\times[(V_yW_z)-(V_zW_y)]\hat{\imath}-[(V_xW_z)-(V_zW_x)]\hat{\jmath}+[(V_xW_y)-(V_yW_x)]\hat{k}\\
&+[\vec{V}\times[(W_yU_z)-(W_zU_y)]\hat{\imath}-[(W_xU_z)-(W_zU_x)]\hat{\jmath}+[(W_xU_y)-(W_yU_x)]\hat{k}\\
&+[\vec{W}\times[(U_yV_z)-(U_zV_y)]\hat{\imath}-[(U_xV_z)-(U_zV_x)]\hat{\jmath}+[(U_xV_y)-(U_yV_x)]\hat{k}=\\
&[(U_yV_xW_y)-(U_yV_yW_x)-(U_zV_xW_z)+(U_zV_zW_x)]\hat{\imath}\\
&-[(U_xV_xW_y)-(U_xV_yW_x)-(U_zV_yW_z)+(U_zV_zW_y)]\hat{\jmath}\\
&+[(U_xV_xW_z)-(U_xV_zW_x)-(U_yV_yW_z)+(U_yV_zW_y)]\hat{k}\\
&+[(U_yV_yW_x)-(U_xV_yW_y)-(U_zV_zW_x)+(U_xV_zW_z)]\hat{\imath}\\
&-[(U_yV_xW_x)-(U_xV_xW_y)-(U_zV_zW_y)+(U_yV_zW_z)]\hat{\jmath}\\
&+[(U_zV_xW_x)-(U_xV_xW_z)-(U_zV_yW_y)+(U_yV_yW_z)]\hat{k}\\
&+[(U_xV_yW_y)-(U_yV_xW_y)-(U_xV_zW_z)+(U_zV_xW_z)]\hat{\imath}\\
&-[(U_xV_yW_x)-(U_yV_xW_x)-(U_yV_zW_z)+(U_zV_yW_z)]\hat{\jmath}\\
&+[(U_xV_zW_x)-(U_zV_yW_x)-(U_yV_zW_y)+(U_zV_yW_y)]\hat{k}=\\
&0\hat{\imath}-0\hat{\jmath}+0\hat{k}=\\
&\vec{0}=0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R}^3,\times)$ con la operación corchete es un álgebra de Lie.

Definición 3.1.2 Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, se dice que es un **álgebra de Lie abeliana** si cumple que $[X,Y]=0$ para todo $X,Y\in\mathfrak{g}$.

Ejemplo 3.1.3 El campo $(\mathbb{F})$ con el conmutador $[X,Y]=XY-YX$ es una subálgebra de Lie abeliana. Ya que: $\forall X,Y\in\mathbb{F}$ se cumple que $[X,Y]=XY-YX=0$ ya que $\mathbb{F}$ cumple la propiedad conmutativa con las operaciones usuales.

Definición 3.1.3 Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Una subálgebra de ella es un subespacio vectorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que es cerrado por el corchete, es decir, $[X,Y]\in\mathfrak{h}$, si $X,Y\in\mathfrak{h}$.

Ejemplo 3.1.4 $\mathfrak{so}(n,\mathbb{F})=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}),X+X^t=0\}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$. Aqui X^t es la transpuesta de X y $n\geq 2$.

Debemos comprobar que si $X,Y\in\mathfrak{so}(n,\mathbb{F})$ entonces $[X,Y]\in\mathfrak{so}(n,\mathbb{F})$. Para que $[X,Y]\in\mathfrak{so}(n,\mathbb{F})$ se debe cumplir que $[X,Y]+[X,Y]^t=0$ veamos

$$\begin{aligned}[X,Y]+[X,Y]^t &= XY-YX+(XY-YX)^t\\ &= XY-YX+(XY)^t-(YX)^t\\ &= XY-YX+Y^tX^t-X^tY^t\\ &= XY-YX+YX-XY=0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $[X,Y]\in\mathfrak{so}(n,\mathbb{F})$ y se demuestra que $\mathfrak{so}(n,\mathbb{F})$ es subálgebra de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$.

Ejemplo 3.1.5 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}),tr(X)=0\}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$. Debemos comprobar que si $X,Y\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ entonces $[X,Y]\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$. Para que $[X,Y]\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ se debe cumplir que $tr([X,Y])=0$, veamos:

$$\begin{aligned}tr([X,Y]) &= tr(XY-YX)\\ &= tr(XY)-tr(YX)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= tr(XY) - tr(XY) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.1.6 $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{F}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{F}) | XJ + JX^t = 0\}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ donde J esta dada en bloques de tamaño n

$$
J = \begin{pmatrix} 0 & -1_{n\times n} \\ 1_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}
$$

aqui $1_{n\times n}$ representa la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

Debemos comprobar que si $X,Y \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{F})$ entonces $[X,Y] \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{F})$, esto es, se debe cumplir que $[X,Y]J + J[X,Y]^t = 0$. Como $X,Y \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{F})$ entonces $XJ + JX^t = 0$ y $YJ + JY^t = 0$ por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
[X,Y]J + J(X,Y]^t &= (XY - YX)J + J(XY - YX)^t \\
&= XYJ - YXJ + J(XY)^t - J(YX)^t \\
&= XYJ - YXJ + (JY^t)X^t - (JX^t)Y^t \\
&= XYJ - YXJ - Y(JX^t) + X(JY^t) \\
&= XYJ - YXJ + YXJ - XYJ \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.1.7 $\mathfrak{o}(n,\mathbb{F}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n+1,\mathbb{F}) | XJ + JX^t = 0\}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ donde J esta dada en bloques de tamaño $n \times n$.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n\times n} \\ 0 & 1_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Debemos comprobar que si $X,Y \in \mathfrak{o}(n,\mathbb{F})$ entonces $[X,Y] \in \mathfrak{o}(n,\mathbb{F}),$ esto es, se debe cumplir que $[X,Y]J + J[X,Y]^t = 0$. Como $X,Y \in \mathfrak{o}(n,\mathbb{F})$ entonces $XJ + JX^t = 0$ y $YJ + JY^t = 0$ por lo tanto:

$$\begin{aligned} [X,Y]J + J(X,Y]^t &= (XY - YX)J + J(XY - YX)^t \\ &= XYJ - YXJ + J(XY)^t - J(YX)^t \\ &= XYJ - YXJ + (JY^t)X^t - (JX^t)Y^t \\ &= XYJ - YXJ - Y(JX^t) + X(JY^t) \\ &= XYJ - YXJ + YXJ - XYJ \\ &= 0. \end{aligned}$$

Definición 3.1.4 Una subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ es un álgebra de Lie con una estructura heredada de la estructura de $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 3.1.8 El subespacio generado por las matrices triangulares superiores de tamaño 3×3 son una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$, las matrices son de la forma

$$\begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

3.2. Generalidades algebraicas

Las generalidades algebraicas a las que se hace referencia en esta sección es a aquellas que funcionan y tienen sentido de la misma manera para varias estructuras algebraicas como las nociones de morfismos, ideales y cocientes.

Definición 3.2.1 Una transformación lineal $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, donde $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son álgebras de Lie, es un:

1. Homomorfismo si $\varphi\,[X,Y]$ = $[\varphi X, \varphi Y]$.
2. Isomorfismo si es un homomorfismo biyectivo.
3. Automorfismo si es un isomorfismo y $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$.

Definición 3.2.2 Las álgebras $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son isomorfas si existe un isomorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$. Se denotarán con

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}.$$

Siendo φ un homomorfismo es evidente que:

1. *El kernel de* (φ)

$$\ker(\varphi) = \{[X,Y] | [\varphi(X), \varphi(Y)] = 0\}.$$

2. *El conjunto de las imágenes de* (φ)

$$Im(\varphi) = \{\varphi[X,Y] \in \mathfrak{h} | X,Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Ejemplo 3.2.1 Si $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es un homomorfismo y $\mathfrak{h}$ es abeliana entonces $ker(\varphi)$ contiene todos los elementos de la forma $[X,Y]$, con $X,Y \in \mathfrak{g}$, ya que $\varphi[X,Y] = [\varphi X, \varphi Y] = 0$.

Por definición un álgebra abeliana es aquella en la que el corchete entre dos elementos es igual a 0. Y el $ker\varphi = \{[X,Y] \in \mathfrak{h} : \varphi[X,Y] = 0\}$.

Ejemplo 3.2.2 La aplicación traza $tr : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ es un homomorfismo que $A \mapsto tr(A)$. Aplicando las propiedades de la traza y la definición de la operación corchete en matrices tenemos que:

a. $tr[X,Y] = tr(XY - YX) = 0$, y

b. $[tr(X), tr(Y)] = tr(X)tr(Y) - tr(Y)tr(X) = 0$.

Luego,

$$tr[X,Y] = 0 = [tr(X), tr(Y)].$$

Por lo tanto la aplicación traza $tr : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ es un homomorfismo.

Ejemplo 3.2.3 Sea $\{\mathbf{i} = (1,0,0), \mathbf{j} = (0,1,0), \mathbf{k} = (0,0,1)\}$ una base de $(\mathbb{R}^3, \times)$ y $\{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ una base de $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$.

Definimos la transformación lineal $\phi : (\mathbb{R}^3, \times) \to \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ tal que al realizar la operación corchete entre los elementos de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathfrak{so}(3,\mathbb{F})$ se obtienen los resultados que se muestran en la **tabla 3.1**. De ella se concluye que $\phi(\mathbf{i}) = A, \phi(\mathbf{j}) = B, \phi(\mathbf{k}) = C$.

De lo anterior se deduce que $\phi(a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}) = a\phi(\mathbf{i})+b\phi(\mathbf{j})+c\phi(\mathbf{k})$. Por lo tanto, la transformación lineal ϕ es un homomorfismo biyectivo y por ende un isomorfismo. Por consiguiente $(\mathbb{R}^3,\times) \cong \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$

$(\mathbb{R}^3,\times)$	$\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$
$[\mathbf{i},\mathbf{i}] = \mathbf{0}$	$[A,A] = 0$
$[\mathbf{i},\mathbf{j}] = \mathbf{k}$	$[A,B] = C$
$[\mathbf{i},\mathbf{k}] = \mathbf{-j}$	$[A,C] = -B$
$[\mathbf{j},\mathbf{i}] = \mathbf{-k}$	$[B,A] = -C$
$[\mathbf{j},\mathbf{j}] = \mathbf{0}$	$[B,B] = 0$
$[\mathbf{j},\mathbf{k}] = \mathbf{i}$	$[B,C] = A$
$[\mathbf{k},\mathbf{i}] = \mathbf{j}$	$[C,A] = B$
$[\mathbf{k},\mathbf{j}] = \mathbf{-i}$	$[C,B] = -A$
$[\mathbf{k},\mathbf{k}] = \mathbf{0}$	$[C,C] = 0$

Tabla 3.1: Resultados al aplicar la transformación lineal.

Definición 3.2.3 Un subespacio $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es un ideal si $\forall Y \in \mathfrak{h}, \forall X \in \mathfrak{g}, [X,Y] \in \mathfrak{h}$, esto significa que, $[\mathfrak{g},\mathfrak{h}] = \{[X,Y] | X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}\}$.

Es evidente que todo ideal es una subálgebra, sin embargo, no toda subálgebra es un ideal.

Ejemplo 3.2.4 El subespacio generado por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es un subálgebra por ser unidimensional. No es un ideal pues

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Definición 3.2.4 Todo subespacio de una álgebra abeliana es un ideal.

Si existe un homomorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ se cumple que:

1. $ker(\varphi)$ es un ideal,
2. $im(\varphi)$ es una subálgebra de $\mathfrak{h}$.

3.3. Teoremas de Isomorfismos

Antes de abordar los teoremas de isomorfismos se debe definir el espacio vectorial cociente

Definición 3.3.1 Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un ideal. Un espacio vectorial cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ se define como:

$$[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X,Y]}.$$

Donde $\overline{X}$ denota la clase $X + \mathfrak{h}$.

Se tiene como proyección canónica:

$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}.$$

$$X \to \overline{X}.$$

Es un homomorfismo sobreyectivo de las álgebras de Lie.

Relacionado a esto existen los teoremas de isomorfismo que serán enunciados y demostrados a continuación.

Teorema 3.3.1 (Primer teorema de isormorfismos:) Sea $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un homomorfismo. Entonces:

$$\frac{\mathfrak{g}}{\ker \psi} \cong im\psi$$

Donde el isomorfismo es dado por $\overline{X} \in \dfrac{\mathfrak{G}}{\ker \psi} \mapsto \psi(X) \in im\psi$.

Demostración: Sea $\phi : \dfrac{\mathfrak{g}}{\ker \psi} \to im\psi$ definida por $\phi([\overline{X,Y}]) = \psi[X,Y], \forall [\overline{X,Y}] \in \dfrac{\mathfrak{g}}{\ker \psi}$. Se debe demostrar que ψ está bien definida, es un homomorfismo y es sobreyectivo e inyectivo.

1. **Bien definida.** Sea $[X,Y],[X',Y'] \in \mathfrak{g}$ tales que $[\overline{X,Y}] = [\overline{X',Y'}]$ se debe probar que $\psi[\overline{X,Y}] = \psi[\overline{X',Y'}]$. Como $[\overline{X,Y}] = [\overline{X',Y'}]$, entonces $\phi[\overline{X,Y}] = \psi[\overline{X,Y}]$ y $X' = X+U$ y $Y' = Y+V$ con $U,B \in \ker \psi$, entonces:

$$\psi(0) = \psi([\overline{X',Y'}] - [\overline{X,Y}]) = \psi([\overline{X+U,Y+V}] - [\overline{X,Y}])$$

$$= \psi([\overline{X,Y}] + [\overline{X,V}] + [\overline{U,Y}] + [\overline{U,V}] - [\overline{X,Y}] = \psi([X,Y] + [X,V] + [U,Y] + [U,V] - [X,Y]$$

$$= \psi([X,V] + [U,Y] + [U,V].$$

Como $U,V \in \ker \psi$, y $\ker \psi$ es un ideal, al operar un elemento de $\mathfrak{g}$ con ellos la operación absorbe, es decir, lleva al $\ker\psi$.

2. **Inyectiva.** Supóngase que $\phi([\overline{X_1,Y_1}]) = \phi([\overline{X_2,Y_2}])$ entonces $\psi([X_1,Y_1]) = \psi([X_2,Y_2])$ y así $\psi([X_1,Y_1]-[X_2,Y_2]) = 0$, lo que implica que $[X_1,Y_1]-[X_2,Y_2] \in \ker\psi$. Y por lo tanto $[\overline{X_1,Y_1}] = [\overline{X_2,Y_2}]$

3. **Sobreyectiva.** Si un elemento $b \in im\psi \Rightarrow \exists$ algún $[X,Y] \in \mathfrak{g}$ para el cual $b = \psi([X,Y])$ y así: $b = \phi([\overline{X,}Y])$.

4. **Homomorfismo.** Por definición tenemos que $[\overline{X,Y}] = [\overline{X},\overline{Y}]$ y $\psi[X,Y] = [\psi X, \psi Y]$. Entonces

$$\phi([\overline{X,Y}]) = \psi[X,Y] = [\psi X, \psi Y],$$

Luego

$$\phi[\overline{X},\overline{Y}] = [\psi X, \psi Y],$$

Y por lo tanto

$$[\phi\overline{X}, \phi\overline{Y}] = \psi[X,Y].$$

Teorema 3.3.2 (Segundo teorema de isomorfismos) *Si $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ son ideales de $\mathfrak{g}$, donde el isomorfismo está dado naturalmente (el canónico), entonces:*

$$\frac{\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2}{\mathfrak{h}_1} \cong \frac{\mathfrak{h}_2}{\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2}.$$

Además $X_1+X_2 \in \mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2 \to \bar{X}_2 \in \dfrac{h_2}{h_1\cap h_2}$.

Demostración: Sea $f : \dfrac{\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2}{\mathfrak{h}_1} \to \dfrac{\mathfrak{h}_2}{\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2}$, definida como $f(X_1+X_2) = \bar{X}_2$.
Bien definida. Si $[X,Y] = [X',Y']$ entonces $[\overline{X,Y}] = [X',Y']$ Luego, $X' = X+U$ y $Y' = Y+V$,

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
[X,Y] =& [X^{'},Y^{'}] \\
[X,Y]+h_1 =& [X^{'},Y']+h_1 \\
[X+h_1,Y+h_1] =& [X^{'}+h_1,Y^{'}+h_1] \\
[\overline{X},\overline{Y}] =& [\overline{X'},\overline{Y'}] \\
f([X,Y]) =& f([X^{'},Y^{'}]).
\end{aligned}$$

Por el primer teorema de isomorfismo, tenemos que

$$\frac{\mathfrak{h}_2}{\ker f} \cong imf.$$

Para nuestro caso como $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ son ideales distintos tenemos que $\ker f = \{0\} = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$, y la $imf = \mathfrak{h}_2$ por lo tanto:

$$\frac{\mathfrak{h}_2}{\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} \cong \mathfrak{h}_2.$$

Tenemos por homomorfismo canónico que

$$\mathfrak{h}_2 \cong \frac{\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2}{\mathfrak{h}_1}.$$

Aplicando la transitividad entre isomorfismo concluimos que

$$\frac{\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2}{\mathfrak{h}_1} \cong \frac{\mathfrak{h}_2}{\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2}.$$

Teorema 3.3.3 (Tercer teorema de isomorfismos) *Si I,J son ideales de $\mathfrak{g}$, tales que $I \subseteq J$, entonces $\frac{J}{I}$ es un ideal de $\frac{\mathfrak{g}}{I}$, y por lo tanto tenemos el isomorfismo natural (canónico):*

$$\frac{\mathfrak{g}/I}{J/I} \cong \frac{\mathfrak{g}}{J}$$

Demostración: Veamos que $\dfrac{J}{I}$ es un ideal de $\dfrac{\mathfrak{g}}{I}$, entonces $[\mathfrak{g}_1 + I, J + I] = [\mathfrak{g}_1, J] + I$, como J es un ideal entonces $[\mathfrak{g}_1, J] \in J$, por lo tanto $\dfrac{J}{I}$ es un ideal de $\dfrac{\mathfrak{g}}{I}$. Aplicando el primer teorema de isomorfismo a $\frac{\mathfrak{g}}{I}$ tenemos que

$$\frac{\frac{\mathfrak{g}}{I}}{\ker f} \cong imf,$$

donde $f : \dfrac{\mathfrak{g}}{I} \to \dfrac{\mathfrak{g}}{J}$, tal que $f(X_1 + I) = X_1 + J$, es fácil verificar que $\ker f = J/I$ y que $imf = \frac{\mathfrak{g}}{J}$ por lo tanto: $\dfrac{\mathfrak{g}/I}{J/I} \cong \dfrac{\mathfrak{g}}{J}$

Definición 3.3.2 El normalizador de una subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ es

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} | [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}.$$

Y es la mayor subálgebra de $\mathfrak{g}$ que contiene a $\mathfrak{h}$ como un ideal.

3.4. Representaciones.

En esta sección presentaremos una herramienta muy importante para el estudio de las álgebras de Lie, como lo es la representación adjunta, para ello es necesario presentar algunas nociones básicas sobre la representaciones.

Definición 3.4.1 Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie, V un espacio vectorial y $\mathfrak{gl}(V)$ el álgebra de Lie de las transformaciones lineales de V. Una representación de $\mathfrak{g}$ en V es un homomorfismo

$$\rho : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(V).$$

V se denomina espacio de representación y su dimensión se denomina dimensión de representación. Una representación ρ es fiel si $Ker(\rho) = \{0\}$.

Dada una representación ρ de $\mathfrak{g}$ en V, se puede tomar la representación ρ^* de $\mathfrak{g}$ en el dual V^* de V dada por la fórmula

$$\rho^*(X)(\lambda) = -\lambda \circ \rho(X) \quad \lambda \in V^*.$$

La verificación de que ρ^* es una representación es inmediata. El signo negativo que aparece es necesario para que los corchetes aparezcan en el orden correcto.

Definición 3.4.2 (Subespacio Invariante) Si ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V y $W \subset \mathfrak{g}$, decimos que W es un espacio invariante, si para todo $X \in \mathfrak{g}$

$$\rho(X)W \subset W.$$

Definición 3.4.3 (Restricción de Representaciones) Sean ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V y W un espacio invariante, la aplicación

$$\rho|_W : X \in \mathfrak{g} \mapsto \rho(X)|_W \in \mathfrak{gl}(W).$$

define una representación de $\mathfrak{g}$ en W.

Definición 3.4.4 Sea ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V, decimos que ρ es irreducible si sus únicos subespacios invariantes son los triviales, es decir, 0 y V.

Definición 3.4.5 Sea ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V, decimos que ρ es un representación completamente reducible si V se puede descomponer como

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$$

con cada V_i invariante tal que $\rho|_{V_i}$ es irreducible, esta representación se conoce como representación semisimple.

Definición 3.4.6 Para un elemento X de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, sea la transformación lineal

$$ad(X) : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$$

definida por $ad(X)(Y) = [X,Y]$. La aplicación

$$ad : X \in \mathfrak{g} \mapsto ad(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

define una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$, denominada representación adjunta.

Ejemplo 3.4.1 *[Representación adjunta de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$]* Veamos la representación adjunta de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$, las matrices de esta subálgebra son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Una base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ es el conjunto $\{X,Y,H\}$. Donde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al calcular la adjunta con respecto a X obtenemos que:

$$ad(X)(Y) = [X,Y] = H, \quad ad(X)(X) = [X,X] = 0, \quad ad(X)(H) = [X,H] = -2X.$$

Comprobemos que $ad(X)(Y) = [X,Y] = H$

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= XY - YX \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = H.
\end{aligned}$$

Podemos escribir que:

$$ad(X) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la misma forma se pueden calcular $ad(H)$ y $ad(Y)$ y obtener que:

$$ad(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad ad(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\{X,Y,H\}$ es una base para $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ podemos escribir

$$ad\,A = a\,ad\,H + b\,ad\,X + c\,ad\,Y$$

por lo tanto se puede definir de forma general la aplicación $ad : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K}) \to \mathfrak{sl}(3,\mathbb{K})$, es decir, dado $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ obtenemos que $ad(A) = \begin{pmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(3,\mathbb{K})$.

Definición 3.4.7 (Derivaciones) Una derivación de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una aplicación lineal $D : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ tal que para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ satisface la siguiente igualdad

$$D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY].$$

De una forma mas general, una derivación de una álgebra es una transformación lineal que satisface la regla de Leibnitz para la derivada de un producto $D(XY) = D(X)Y + XD(Y)$.

Proposición 3.4.1 La representación adjunta es una derivación.

Demostración: Por definición de representación adjunta tenemos que $ad(X)[Y,Z] = [X,[Y,Z]]$, además obtenemos que $ad(X)[Y,Z] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] = [ad(X)Y,Z] + [Y,ad(X)Z]$ por lo tanto $ad(X)$ es una derivación.

Las derivaciones que tienen como imagen un subconjunto de $\mathfrak{g}$, como la adjunta son consideradas derivaciones internas.

Antes de definir las álgebras de Lie nilpotentes y las álgebras de Lie solubles debemos abordar primero las siguientes dos series de composición ya que estas serán la base de sus definiciones:

Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie, para dos subconjuntos no vacíos A y B de $\mathfrak{g}$ definimos

$$[A,B] = \{[X,Y] | X \in A, Y \in B\}.$$

Definimos por inducción los siguientes subespacios de $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}' &= [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)},\mathfrak{g}^{(k-1)}]. \end{aligned}$$

La serie $\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}', ..., \mathfrak{g}^{(k)}$ se les conoce como **serie derivada** de $\mathfrak{g}$.

La **serie central descendente** de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ está definida por inducción de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{1} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{2} &= [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}' \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{k} &= [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{k-1}]. \end{aligned}$$

Proposición 3.4.2 *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y I un ideal. Sea también $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ el* *homomorfismo canónico. Entonces*

$$\pi(\mathfrak{g}^k) = (\mathfrak{g}/I)^k.$$

Demostración: Por inducción sobre k. Es claro que $\pi(\mathfrak{g}^0) = (\mathfrak{g}/I)^0$. Asumiendo que la igualdad es valida para $k-1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\pi(\mathfrak{g}^k) &= \pi[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}] = [\pi(\mathfrak{g}), \pi(\mathfrak{g}^{k-1})] \\
&= [(\mathfrak{g}/I), (\mathfrak{g}/I)^{k-1}] \\
&= (\mathfrak{g}/I)^k.
\end{aligned}$$

Es fácil demostrar que la serie derivada decrece mas rápido que la serie central descendente, es decir, que

$$\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}.$$

Conociendo las series de composición pasemos a definir las álgebras nilpotentes, y algunas propiedades sobre ellas, posteriormente estudiaremos las álgebras solubles.

3.5. Álgebras de Lie nilpotentes

Definición 3.5.1 Se dice que $\mathfrak{g}$ es una álgebra nilpotente, si su serie central descendente se anula para algún $k_0 \geq 1$, es decir,

$$\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}.$$

y para todo $k \geq k_0, \mathfrak{g}^k = \{0\}$.

Un ejemplo clásico sobre las álgebras de Lie nilpotentes es el siguiente.

Ejemplo 3.5.1 Las álgebras de Lie abelianas son nilpotentes ya que $\mathfrak{g}^2 = \{0\}$.

Ejemplo 3.5.2 El subespacio $\mathfrak{g}$ generado por las matrices triangulares superiores de tamaño 3×3 es un álgebra de Lie nilpotente, debido a que:

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & a & * \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^2] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{g}^4 = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^3] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

A continuación presentaremos algunas propiedades que se preservan en las álgebras de Lie nilpotentes.

Proposición 3.5.1 *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie nilpotente entonces tenemos que:*

1. *Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie, entonces $\mathfrak{h}$ es nilpotente.*

2. *El centro de $\mathfrak{g}$ no es el trivial.*

Demostración:

1. Como $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ entonces $\mathfrak{h}^k \subset \mathfrak{g}^k$ y como $\mathfrak{g}$ es nilpotente entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^k = 0$ entonces $\mathfrak{h}^k = 0$ por lo tanto $\mathfrak{h}$ es nilpotente.

2. Sea k un entero positivo tal que $\mathfrak{g}^k \neq \{0\}$ y $\mathfrak{g}^{k+1} = \{0\}$ entonces por definición de serie central descendente $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] = \{0\}$ entonces $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ por lo tanto el centro no es el trivial.

Definición 3.5.2 (Representación Nilpotente) *Sea ρ una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en el espacio vectorial V. Decimos que ρ es una representación nilpotente si existe un entero positivo k tal que $\rho(X)^k = 0$.*

Un resultado interesante e importante sobre las álgebras de Lie nilpotentes es el teorema de Engel, para demostrarlo necesitamos primero demostrar las siguientes proposiciones.

Proposición 3.5.2 *Si $X \in \mathfrak{gl}(V)$ es nilpotente entonces $ad(X)$ es nilpotente.*

Demostración: Sea $X \in \mathfrak{gl}(V)$ un elemento nilpotente y asociemos a X dos automorfismos de $End(V)$[5], $\lambda_X(Y) = XY$ y $\rho_X(Y) = YX$ las traslaciones a izquierda y derecha respectivamente, claramente son estas traslaciones automorfismos nilpotentes, ya que X es nilpotente. Además para cualquier anillo en especial $End(End(V))$, la suma o diferencia de dos automorfismos nilpotentes es nilpotente entonces $ad(X) = \lambda_X(Y) - \rho_X(Y)$ es nilpotente.

Proposición 3.5.3 *Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ con V un espacio de dimensión finita. Si $\mathfrak{g}$ consiste de endomorfismos nilpotentes y $V \neq 0$ entonces existe $v \in V, v \neq 0$ tal que $\mathfrak{g}.v = 0$.*

[5]Es el conjunto de todos los automorfismos definido es V.

Demostración: La siguiente demostración la haremos por inducción sobre la dimensión de $\mathfrak{g}$. Si la dimensión de $\mathfrak{g}$ es igual a 1, sea $X \in \mathfrak{g}$, como X es nilpotente existe un $k \geq 1$ tal que $X^k = 0$ y $X^{k-1} \neq 0$, sea $W \in V$ tal que $v = X^{k-1}.W \neq 0$ y $Xv = X.X^{k-1}.W = 0$. Supongamos que $K \neq \mathfrak{g}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$. De acuerdo con la Proposición 3.5.2, K actúa como una álgebra de Lie de automorfismo nilpotente sobre el espacio vectorial $\mathfrak{g}$, y también sobre el espacio vectorial $\mathfrak{g}/K$. Como $dim K < dim\,\mathfrak{g}$, la hipótesis de inducción nos proporciona un vector $X + K \neq K$ en $\mathfrak{g}/K$ anulado por una imagen de K en $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/K)$, es decir, $[Y,X] \in K$ para todo $Y \in K$, con $X \notin K$. En otras palabras K esta propiamente contenido en $\mathfrak{N}(K)$.

Ahora, si K es una subálgebra propia maximal de $\mathfrak{g}$, el argumento precedente implica que $\mathfrak{N}(K) = \mathfrak{g}$, o sea, que K es un ideal de $\mathfrak{g}$. Si la dimensión de $\mathfrak{g}/K < 1$, entonces la imagen inversa en $\mathfrak{g}$ de una subálgebra unidimensional de $\mathfrak{g}/K$ será una subálgebra propia contenida en K propiamente, lo que contradice la hipótesis de maximalidad de K; por lo tanto K tiene codimensión 1. Esto nos permite escribir $\mathfrak{g} = K + Z$ para cualquier $Z \in \mathfrak{g} - K$.

Por inducción, $W = \{v \in V : K.v = 0\}$ es no nulo. Como K es un ideal, W es invariante bajo $\mathfrak{g}$. En efecto, sean $X \in \mathfrak{g}, Y \in K,$ y $v \in W$ implica que $[X,Y].v = XY.v - YX.v = 0$. Escojamos $Z \in \mathfrak{g} - K$, como arriba, de modo que el automorfismo Z (ahora actuando sobre el subespacio W) tenemos un autovector, es decir, que existe un vector no nulo $v \in W$ para el cual $Z.v = 0$. Finalmente, tenemos que $\mathfrak{g}.v = 0$, es decir, $X.v = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Teorema 3.5.1 (Teorema de Engel.) *Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie constituida por elementos ad-nilpotentes, entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente.*

Demostración: Los elementos $\mathfrak{g}$ so ad-nilpotentes, luego el álgebra $ad(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ satisface la hipótesis de la Proposición 3.5.3. Asumiendo $\mathfrak{g} \neq 0$, tenemos un vector $X \neq 0$

en $\mathfrak{g}$ para el cual $[\mathfrak{g}, X] = 0$, en consecuencia, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

Pero a su vez, $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ también es ad-nilpotente y tiene dimensión menor $\mathfrak{g}$. Nuevamente por la hipótesis de inducción aplicada a la dimensión de $\mathfrak{g}$ garantizamos que $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es nilpotente, y en consecuencia $\mathfrak{g}$ es nilpotente.

3.6. Álgebras de Lie solubles

Definición 3.6.1 Se dice que $\mathfrak{g}$ es una álgebra soluble, si alguna de sus álgebras derivadas se anula para algún $k_0 \geq 1$, es decir,

$$\mathfrak{g}^{(k_0)} = 0.$$

y para todo $k \geq k_0, \mathfrak{g}^{(k)} = 0$.

Un ideal soluble es un ideal que cumple la definición anterior.

Ejemplo 3.6.1 *Las álgebras de Lie abelianas son solubles ya que* $\mathfrak{g}' = 0$.

Ejemplo 3.6.2 *El subespacio* $\mathfrak{g}$ *generado por las matrices triangulares superiores de tamaño* 3×3 *es un álgebra de Lie soluble, debido a que:*

$$\mathfrak{g}^{(}0) = \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & a & * \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}^{(2)}, \mathfrak{g}^{(2)}] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Proposición 3.6.1 *Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie soluble, tenemos que*

1. *$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es una subálgebra entonces $\mathfrak{h}$ es soluble.*
2. *$I \subset \mathfrak{g}$ es un ideal, entonces $\mathfrak{g}/I$ es soluble.*

Demostración:

1. Las álgebras derivadas sucesivas de $\mathfrak{h}$ están contenidas en las correspondientes álgebras derivadas de $\mathfrak{g}$, es decir, $\mathfrak{h}^{(k+1)} \subset \mathfrak{g}^{(k+1)}$ por lo tanto $\mathfrak{h}$ es una subálgebra soluble.
2. Como $\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = (\mathfrak{g}/I)^{(k)}$ y como sabemos que si alguna álgebra derivada de $\mathfrak{g}$ se anula lo mismo sucede con el álgebra derivada correspondiente de $\mathfrak{g}/I$ por lo tanto $\mathfrak{g}/I$ es soluble.

Proposición 3.6.2 *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y $I \subset \mathfrak{g}$ un ideal. Supongamos que tanto I como $\mathfrak{g}/I$ son solubles, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble.*

Demostración: Sea k_1 tal que $(\mathfrak{g}/I)^{(k_1)} = \{0\}$. Dado que $\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = (\mathfrak{g}/I)^{(k)}$ tenemos que $\pi(\mathfrak{g}^{(k_1)}) = 0$. Esto significa que $\mathfrak{g}^{(k_1)} \subset I$. Como I es soluble existe k_2 tal que $I^{(k_2)} = \{0\}$, obtenemos así que $\mathfrak{g}^{(k_1+k_2)} = (\mathfrak{g}^{(k_1)})^{(k_2)} \subset I^{(k_2)} = 0$. Por lo tanto $\mathfrak{g}$ es soluble.

Proposición 3.6.3 *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie , I_1 y I_2 ideales solubles entonces la suma $I_1 + I_2$ es un ideal soluble.*

Demostración: Se puede demostrar fácilmente que $I_1 + I_2$ es ideal. Luego por el Teorema **??** tenemos que

$$\frac{I_1 + I_2}{I_2} \cong \frac{I_1}{I_1 \cap I_2}.$$

Como I_1 es soluble, $\frac{I_1}{I_1 \cap I_2}$ es soluble luego $\frac{I_1 + I_2}{I_2}$ es soluble. Como I_2 es soluble, entonces $I_1 + I_2$ es soluble por la Proposición 3.6.2.

Proposición 3.6.4 *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie de dimensión finita. Entonces existe un único ideal soluble $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ que contiene a todos los ideales solubles de $\mathfrak{g}$.*

Demostración: Sea n la maxima dimensión de los ideales solubles de $\mathfrak{g}$ y sea $\mathfrak{r}$ un ideal soluble con $dim\,\mathfrak{r} = n$ entonces, todo ideal soluble de $\mathfrak{g}$ está contenido en $\mathfrak{r}$. En efecto, si $\mathfrak{h}$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{r} + \mathfrak{h}$ también es un ideal por la Proposición 3.6.3, por lo tanto $dim\,\mathfrak{r} + \mathfrak{h} = dim\,\mathfrak{r}$ entonces $(\mathfrak{r} + \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{r}$ y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$. Entonces $\mathfrak{r}$ contiene todos los ideales solubles de $\mathfrak{g}$ y evidentemente es único.

Definición 3.6.2 *El ideal $\mathfrak{r}$ de la proposición anterior es llamado radical soluble (o simplemente radical) de $\mathfrak{g}$. Para el radical de $\mathfrak{g}$ será utilizada la notación $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.*

Recordemos que un campo $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado si cada polinomio f de grado mayor o igual que uno, con coeficientes en $\mathbb{F}$, tiene raíces en $\mathbb{F}$. Por ejemplo, el campo $\mathbb{R}$ de los números reales no es algebraicamente cerrado ya que el polinomio $f(X) = X^2 + 1$ no tiene raíces reales.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal. El polinomio característico de A es $P_T(\lambda) = det(\lambda 1 - T)$ donde 1 denota la aplicación identidad. Ese polinomio es de la forma

$$P_T(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0$$

donde n es la dimensión de V. El teorema de Cayley-Hamilton (véase **?**) garantiza que P_T se anula en T, esto es,

$$P_T(T) = a_0 1 + a_1 T + ... + A^T = 0.$$

Sea $P_T = P_1^{m_1}....P_s^{m_s}$ la descomposición primaria de P_T. En esa descomposición, cada p_i es un polinomio irreducible. Sea $A : V \to V$ una transformación lineal. El teorema de descomposición primaria descompone a V en subespacios A-invariantes

$$V = V_1 \oplus ... \oplus V_s$$

que son los autoespacios generalizados $V_i = \{v \in V \mid P_i(A)^k v = 0 \text{ para algún } k \geq 1\}$ donde los polinomios irreducibles P_i, $i = 1, ..., s$, son las componentes primarias del polinomio minimal $P = P_1^{m_1}....P_s^{m_s}$ de A. En el caso en que el campo sea algebraicamente cerrado, $P_i(A) = A - \lambda_i$ con λ_i autovalor de A y los subespacios de la descomposición se escriben como

$$V_i = \{v \in V \mid (A - \lambda_i)^k v = 0 \text{para algún } k \geq 1\}.$$

Para enfatizar la relación de los subespacios con los autovalores de A, serán denotados por V_λ.

Definición 3.6.3 **?** *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y ρ una representación de $\mathfrak{g}$ en V. Un peso* *de ρ es un funcional lineal $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ tal que el subespacio V_λ de V definido por*

$$V_\lambda = \{v \in V : \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(X) - \lambda(X))^n v = 0\},$$

satisface que $V_\lambda \neq 0$. El subespacio V_λ es llamado el subespacio de pesos asociados a λ. La dimensión de V_λ es llamada la multiplicidad de λ.

Relacionado con las álgebras solubles existe el Teorema de Lie, para demostrarlo necesitamos del siguiente teorema que solo lo enunciaremos ya que su demostración se sale de los propósitos del presente trabajo.

Teorema 3.6.1 ? *Sean $V \neq 0$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado y $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una subálgebra soluble. Entonces, existe $v \in V$, $v \neq 0$ y un funcional lineal $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ tal que $Xv = \lambda(X)v$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, es decir, v es un autovector común para $X \in \mathfrak{g}$ con autovalor $\lambda(X)$.*

Teorema 3.6.2 (Teorema de Lie) *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado y $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ una álgebra soluble. Entonces, existe una base $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_3\}$ de V y funcionales lineales $\lambda_1, ..., \lambda_n : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ tal que, en relación a β cualquier $X \in \mathfrak{g}$ se escribe como*

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1(X) & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(X) \end{pmatrix}.$$

Demostración: Como estamos en las condiciones del Teorema **??** sea v_1 autovector común de los elementos de $\mathfrak{g}$ con autovalor $\lambda_1(X)$. Sabemos que λ_1 es un funcional lineal. Sea V_1 el espacio generado por v_1, entonces $\mathfrak{g}$ deja invariante a V_1, por lo tanto, se representa en V/V_1. Como $\mathfrak{g}$ es soluble, existe $w \in V/V_1$ que es un autovector común para los elementos de la representación de $\mathfrak{g}$ con autovalor dado por el funcional lineal λ_2. Tomando v_2 como representante de w en V, tenemos que $Xv_2 = \lambda_2(X)v_2 + u$ con $u \in V_1$. Como $w \neq 0$ en V/V_1, entonces $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente. Al repetir el anterior procedimiento (tantas veces como la dimensión de V) obtenemos la base de los pesos requeridos.

Definición 3.6.4 (Álgebra semisimple) *Se dice que $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie semisimple si $\mathfrak{g}$ no contiene ideales solubles diferentes de cero, es decir,*

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0.$$

Definición 3.6.5 (Álgebra simple) *Se dice que $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie simple si*

1. *Sus únicos ideales son 0 y $\mathfrak{g}$.*

2. *dim $\mathfrak{g} \neq 1$.*

Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie que no posee ideales no triviales, como $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ es un ideal, debe ser igual a 0 o $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$ entonces $\mathfrak{g}$ es semisimple, si $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ no se cumple cuando la $dim\, \mathfrak{g} \geq 2$. Eso porque si $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ entonces $\mathfrak{g}$ es soluble y por lo tanto, $\mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$, como $\mathfrak{g}'$ es un ideal, entonces $\mathfrak{g}' = 0$, es decir, $\mathfrak{g}$ es abeliana. Mas eso es imposible si $dim\, \mathfrak{g} \geq 2$, pues todo subespacio de una álgebra abeliana es un ideal. En otras palabras, las álgebras de Lie simples son semisimples.

4. CONCLUSIONES

Durante la revisión bibliográfica y aplicación de resultados se encontró que la demostración de los teoremas de isomorfimo en álgebras de Lie no se encuentra en los libros clásicos de teoría de Lie y al ser de especial importancia en temas posteriores y en el entendimiento de los resultados esperados del proyecto, se realizaron sus demostraciones aplicando teoría ya vista durante los cursos de Matemáticas de la Licenciatura en Matemáticas y Física en la Universidad de los Llanos así como de temáticas que no fueron abordados en el transcurso de la carrera.

Aplicando los teoremas de isomorfismo después de demostrarlos y haciendo uso de otras propiedades de las álgebras de Lie, se encontró la caracterización de:

- Las álgebras de Lie nilpotente mediante el teorema de Engel que nos permite establecer cuando un álgebra es nilpotente a través de la representación adjunta de sus elementos.
- Las álgebras de Lie solubles a partir de proposiciones asociadas a los ideales de las álgebras de Lie, además se demostró el teorema de Lie.

Se aclara que si un álgebra cumple las condiciones que la caracterizan como un álgebra nilpotente no necesariamente deja de ser soluble y viceversa, es decir, las caracterizaciones no son excluyentes entre sí.

A partir de la caracterización de las álgebras de Lie solubles se definen las álgebras semisimples y simples.

5. RECOMENDACIONES

Es recomendable que en la formación de los futuros profesores de matemáticas y física se fomentará e incluyeran espacios académicos (cursos, seminarios, conferencias) relacionados con la teoría de Lie vista desde la topología y el álgebra, temas básicos en la realización de maestrías en el área específica de la Matemática.

Es importante señalar que con la realización de este trabajo de grado se avistan nuevas investigaciones en las áreas de la geometría diferencial, la topología y el álgebra. En particular se sugieren los siguientes estudios:

- Realizar el mismo estudio desde los grupos topológicos, para la caracterización de los grupos de Lie nilpotentes y solubles.
- Analizar la relación que existe entre las álgebras de Lie semi-simples, especialmente A_l, y los digrafos localmente transitivos.
- Establecer los criterios para la existencia de las subálgebras de Cartan en álgebras de Lie.

BIBLIOGRAFÍA

BOURBAKI, Nicolas. Elements of mathematics, Lie Groups and Lie Algebras. Chapters 4-6. Editorial Springer, 2002.

CASTRO, Arturo. *Clasificación de las álgebras de Lie semisimples de dimensión finita y los diagramas de Dynkin*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Colombia, 2005.

CASTRO, Arturo. *Ideales abelianos y estructuras casi complejas*. Tesis de Maestría en Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Colombia, 2013.

DIVULGAMAT, Centro de divulgación en Matemáticas. *Biografías de matemáticos ilustres. RSME, CSIC*. España. [En línea]. Disponible en $http$: $\backslash\backslash vps280516.ovh.net\backslash divulgamat15\backslash index.php?option = com_alphacontent\&section = 6\&category = 37\&ordering = 2\&limitstar = 20\&limit = 10\&ltemid = 400001$

FUENTES, Luis. *López Victor. Introducción a las álgebras de Lie*. Trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Matemática. Universidad de el Salvador, 2013.

GANTMACHER, Feliks. *The theory if matrices*. Vol. 1. Chelsea publishing Company. New York, 1959.

GARTH, Warner. *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I*. Springer-Verlag. New Cork, 1972.

GARZA MERCADO, Ario. *Manual de tÃ©cnicas de investigación para estudiantes de ciencias sociales y humanidades*. 7ma ed. México D.F.: El colegio de México, Biblioteca Daniel Cosío Villegas, 2007. ISBN 986-12-1298. PÃ¡g. 15.

GILMORE, Robert. *Lie Groups, Lie Algebras, and some of Their Applications*. JhonWiley&Sons. New York, 1974.

JARAMILLO, Manuela. *Álgebras de Lie solubles de baja dimensión*. Seminario presentado para optar al título de Matemático. Universidad Javeriana. Colombia, 2015.

LIMA, Elong. *Algebra linear*. Tercera Edição. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, CNPQ. Río de Janeiro, 1998.

NÚÑEZ VALDÉS, Juan. TENORIO VILLALŃ, Ángel. *Biografías de matemáticos ilustres*. DIVULGAMAT. RSME. [En línea]. Disponible en http://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/SophusLief1.asp.htm

SALMENSON, Hans. *Notes on Lie Algebras*. Springer-Verlag. New York, 1990.

SAN MARTÍN, Luis. *Álgebras de Lie*. Editorial Unicamp, 1999.

SORIA, Laura. *Álgebras de Lie. Estructura y construcción. Trabajo de grado para optar por el título de Matemático*. Universidad de la Rioja, 2015.

RESUMEN ANALÍTICO ESPECIALIZADO (RAE)

TIPO DE DOCUMENTO/ OPCIÓN DE GRADO	Proyecto de estudiante como opción de grado para obtener el título de Licenciada en Matemáticas y Física.
ACCESO AL DOCUMENTO	Universidad de los Llanos.
1. TÍTULO DEL DOCUMENTO	Caracterización de las álgebras de Lie nilpotentes y solubles.
2. NOMBRE Y APELLIDO DE AUTOR(ES)	Angie Paola Olaya González.
3. AÑO DE PUBLICACIÓN	2018.
4. UNIDAD PATROCINANTE	Universidad de los Llanos, Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación, Escuela de Pedagogía, Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física.
5. PALABRAS CLAVES	Álgebras, matrices, Lie, Engel, nilpotentes, solubles, isomorfismos.
6. DESCRIPCIÓN	En el presente trabajo se realiza un análisis al álgebra lineal llevándolo hasta su aplicación y homologación en las álgebras de lie, en este se hacen las demostraciones de los teoremas de isomorfismos que la mayoría de autores dan por supuestas. Finalmente se caracterizan las álgebras de lie nilpotentes y solubles de acuerdo con los teoremas de Lie y Engel, obteniendo una clasificación en simples y semisimples.

7. CONTENIDOS	Álgebra lineal, álgebras de lie, homomorfismos, teoremas de isomorfismos, álgebras de lie nilpotentes y solubles.
8. METODOLOGÍA	El presente trabajo se deriva del proyecto de trabajo de grado con el mismo nombre. La investigación desarrollada es de tipo básico con una metodología teórica. Se desarrolla en primera instancia por medio de la recolección de información, seguida de los desarrollos analíticos, donde se demuestran los teoremas de isomorfismo y caracterización de las álgebras de lie nilpotentes y soluble. Se finaliza con la redacción del informe final.
9. FUENTES	BOURBAKI, Nicolas. Elements of mathematics, Lie Groups and Lie Algebras. Chapters 4-6. Editorial Springer, 2002. CASTRO, Arturo. Clasificación de las álgebras de Lie semi-simples de dimensión finita y los diagramas de Dynkin. Tesis de Licenciatura en Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Colombia, 2005. CASTRO, Arturo. Ideales abelianos y estructuras casi complejas}. Tesis de Maestría en Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Colombia, 2013. DIVULGAMAT, Centro de divulgación en Matemáticas. Biografías de matemáticos ilustres. RSME, CSIC. España. [En línea]. Disponible en http:\\vps280516.ovh.net\backslash divulgamat15\backslash index.php?option=com_alphacontent&section=6&category=37&ordering=2&limitstar=20&limit=10&Itemid=400001$ FUENTES, Luis. López Víctor. Introducción a las álgebras de Lie. Trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Matemática. Universidad de el Salvador, 2013.

	GANTMACHER, Feliks. The theory if matrices. Vol. 1. Chelsea publishing Company. New York, 1959. GARTH, Warner. Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I. Springer-Verlag. New Cork, 1972. GILMORE, Robert. Lie Groups, Lie Algebras, and some of Their Applications. JhonWiley&Sons. New York, 1974. JARAMILLO, Manuela. Álgebras de Lie solubles de baja dimensión. Seminario presentado para optar al título de Matemático. Universidad Javeriana. Colombia, 2015. LIMA, Elong. Algebra linear. Tercera Edição. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, CNPQ. Río de Janeiro, 1998. SALMENSON, Hans. Notes on Lie Algebras. Springer-Verlag. New York, 1990. SAN MARTÍN, Luis. Álgebras de Lie. Editorial Unicamp, 1999. SORIA, Laura. Álgebras de Lie. Estructura y construcción. Trabajo de grado para optar por el título de Matemático. Universidad de la Rioja, 2015.
10. CONCLUSIONES	Durante la revisión bibliográfica y aplicación de resultados se encontró que la demostración de los teoremas de isomorfimo en álgebras de Lie no se encuentra en los libros clásicos de teoría de Lie y al ser de especial importancia en temas posteriores y en el entendimiento de los resultados esperados del proyecto, se realizaron sus demostraciones aplicando teoría ya vista durante los cursos de Matemáticas de la Licenciatura en Matemáticas y Física en la Universidad de los Llanos así como de temáticas que no fueron abordados en el transcurso de la carrera.

	Aplicando los teoremas de isomorfismo después de demostrarlos y haciendo uso de otras propiedades de las \'algebras de Lie, se encontró la caracterización de: - Las álgebras de Lie nilpotente mediante el teorema de Engel que nos permite establecer cuando un álgebra es nilpotente a través de la representación adjunta de sus elementos. - Las álgebras de Lie solubles a partir de proposiciones asociadas a los ideales de las álgebras de Lie, además se demostró el teorema de Lie. Se aclara que si un álgebra cumple las condiciones que la caracterizan como un álgebra nilpotente no necesariamente deja de ser soluble y viceversa, es decir, las caracterizaciones no son excluyentes entre sí. A partir de la caracterización de las álgebras de Lie solubles se definen las álgebras semi-simples y simples.
11. FECHA DE ELABORACIÓN	2018