

**DINÁMICA ORBITAL EN UN SISTEMA AXIALSIMÉTRICO GENERALIZADO DE
HÉNON-HEILES**

ANGÉLICA MARCELA RIAÑO DONCEL

**UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE PEDAGOGÍA Y BELLAS ARTES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
VILLAVICENCIO**

2018

**DINÁMICA ORBITAL EN UN SISTEMA AXIALSIMÉTRICO GENERALIZADO DE
HÉNON-HEILES**

ANGÉLICA MARCELA RIAÑO DONCEL

Código: 141003011

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Licenciada en
Matemáticas y Física

Dirigido por:

PhD. FREDY LEONARDO DUBEIBE MARIN

**UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE PEDAGOGÍA Y BELLAS ARTES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
VILLAVICENCIO**

2018

AUTORIDADES ACADÉMICAS

PABLO EMILIO CRUZ CASALLAS

Rector (E)

DORIS CONSUELO PULIDO

Vicerrectora Académica

GIOVANNY QUINTERO REYES

Secretario General

MANUEL EDUARDO HOZMAN MORA

Decano de la Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación

SAID ABAD JIMÉNEZ MAYORGA

Director de la Escuela de Pedagogía y Bellas Artes

FREDY LEONARDO DUBEIBE

Director del Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física

Notas de aceptación

FERNANDO CAMPOS POLO

Director Centro de Investigaciones FCHyE

FREDY LEONARDO DUBEIBE

Director del Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física

MSc. NASLY YANIRA MARTÍNEZ

Evaluador

MSc. ALEXANDER SANTOS NIÑO

Evaluador

PhD. FREDY LEONARDO DUBEIBE

Director

Villavicencio, 23 de abril de 2018

AGRADECIMIENTOS

Tras la culminación de este trabajo y una etapa de mi vida, quiero dar gracias en primera instancia a Dios como gestor de amor y bendiciones; seguidamente, agradecer a mi bella abuela por su amor incondicional, a mi padre por ser mi alarma en las madrugadas, a mi madre y a mi familia en general por el apoyo y ánimo recibido.

Agradezco a Laura Buitrago, Alejandro Calderón entre otros amigos y compañeros, con quienes compartí gratos momentos y trabajé en equipo para alcanzar pequeños logros. Agradezco a los maestros que forjaron mi proceso de formación profesional, en particular, a aquellas maestras que me enseñaron con su ejemplo.

De forma especial, quiero expresar mis sentimientos de respeto y admiración al Dr. Fredy Dubeibe, a quien agradezco por la invitación al desarrollo de este proyecto y la oportunidad de trabajar con un profesional de alta calidad humana e intelectual, que enmarcó el inicio de un proceso significativo de gran aprendizaje y me ha permitido ampliar horizontes en el campo profesional.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	9
1. MARCO TEÓRICO	12
1.1. SISTEMA DE HÉNON-HEILES	12
1.2. SECCIONES DE POINCARÉ	15
1.3. SALI	17
1.4. MÁXIMO EXPONENTE DE LYAPUNOV	18
1.5. ENTROPÍA DE LAS CUENCAS	19
2. MATERIALES Y MÉTODOS	22
3. RESULTADOS	24
3.1. GENERALIZACIÓN DEL POTENCIAL Y ECUACIONES DE MOVIMIENTO	24
3.2. MOVIMIENTO ACOTADO	27
3.3. MOVIMIENTO NO ACOTADO	32
3.4. PUNTOS FIJOS	35
4. CONCLUSIONES	43
5. RECOMENDACIONES	45
BIBLIOGRAFÍA	46

LISTA DE FIGURAS

1.1. Sección de Poincaré.	16
1.2. Tipos de cuencas de atracción.	20
3.1. Secciones de Poincaré para diferentes valores de δ y E	29
3.2. Estructura orbital del plano (y, \dot{y}) para diferentes valores de δ y E	30
3.3. Dependencia de λ_{max} con la energía para diferentes valores de δ y E	31
3.4. Cuencas de salida en el espacio de configuración (x, y) para diferentes valores de δ y E	34
3.5. Entropía de las cuencas S_b en función del número de submatrices N	35
3.6. Posición y numeración de los puntos de equilibrio.	37
3.7. Evolución paramétrica de las posiciones de los puntos de equilibrio.	38
3.8. Cuencas de atracción de Newton-Raphson en el plano de configuración (x, y)	40
3.9. Distribución del número correspondiente N de iteraciones requeridas.	41
3.10. Evolución de la entropía de las cuencas S_b en función del parámetro de perturbación δ	42

INTRODUCCIÓN

El hamiltoniano de Hénon-Heiles¹ es considerado un sistema representativo de los sistemas conservativos con dos grados de libertad, y es básicamente un tópico esencial en muchos libros de texto sobre dinámica no lineal, (ver por ejemplo los textos de Gutzwiller², Hilborn³, y Tabor⁴). Las principales razones para esto son su forma analítica simple y, al mismo tiempo su dinámica compleja. Dicho sistema fue originalmente formulado para resolver la pregunta: ¿Un potencial axialsimétrico admite una tercera integral de movimiento? Hoy en día se puede considerar el trabajo de Hénon y Heiles como una de las obras más citadas en el campo de los sistemas complejos (ca. 2200 citas), el cual ha desencadenado una gran cantidad de investigaciones orientadas a discriminar entre el movimiento regular y caótico y a estudiar la dinámica de escape de las órbitas⁵. Originalmente el potencial fue propuesto como una versión simplificada del potencial gravitacional experimentado por una estrella que orbita alrededor de una galaxia axialsimétrica, sin embargo, sus aplicaciones actuales incluyen la mecánica semiclásica y la mecánica cuántica⁶.

Algunas modificaciones al sistema original de Hénon-Heiles han sido propuestas por diferentes autores, por ejemplo, agregando términos de disipación⁷, introduciendo rui-

¹HÉNON, M., HEILES, C. The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments. En: The Astronomical Journal, 1964, vol. 69, p. 73.

²GUTZWILLER, M. Chaos in classical and quantum mechanics. Springer Science & Business Media, 2013.

³HILBORN, C. Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers. Oxford University Press on Demand, 2000.

⁴TABOR, M. Chaos and integrability in nonlinear dynamics: an introduction. Wiley, 1989.

⁵AGUIRRE, J.; VIANA, R.; SANJUÁN, M. Fractal structures in nonlinear dynamics. Reviews of Modern Physics, 2009, vol. 81, no 1, p. 333.; ZOTOS, E. An overview of the escape dynamics in the Hénon-Heiles Hamiltonian system. Meccanica, 2017, vol. 52, no 11-12, p. 2615-2630.

⁶JAFFE, C.; REINHARDT, W. Uniform semiclassical quantization of regular and chaotic classical dynamics on the Hénon-Heiles surface. The Journal of Chemical Physics, 1982, vol. 77, no 10, p. 5191-5203.; HAMILTON, I.; LIGHT, J. On distributed Gaussian bases for simple model multidimensional vibrational problems. The Journal of chemical physics, 1986, vol. 84, no 1, p. 306-317.

⁷SEOANE, M.; SANJUÁN, M.; LAI, Y. Fractal dimension in dissipative chaotic scattering. Physical Re-

do blanco⁸, o incluyendo términos de forzamiento⁹, sólo por nombrar unos pocos. Por otro lado, la única derivación formal conocida de un potencial generalizado de Hénon-Heiles ha sido llevada a cabo por Verhulst¹⁰, quien realizó una expansión en series de Taylor hasta el cuarto orden del potencial genérico con simetría axial y de reflexión, encontrando que su potencial difiere del de Hénon-Heiles por la presencia del polinomio cuártico $a_1x^4 + a_2x^2y^2 + a_2y^4$. Además, se encontró que a medida que el área encerrada por la curva de velocidad cero se reduce, una integral de movimiento aislada adicional puede derivarse. El potencial de Verhulst se ha utilizado, por ejemplo, para estudiar el movimiento orbital cerca del núcleo de una galaxia triaxial¹¹, la correlación entre los exponentes de Lyapunov y el tamaño de las regiones caóticas en las secciones de Poincaré¹², y las regiones de escape en un potencial cuártico¹³.

Por otra parte, es importante señalar que en todo sistema hamiltoniano bi-dimensional es necesario determinar los puntos fijos para diagnosticar el comportamiento dinámico global del sistema. En la mayoría de los casos, este proceso se realiza numéricamente usando algoritmos para encontrar raíces, los cuales usan iteraciones y requieren una o más condiciones iniciales de prueba para determinar la raíz. Durante este proceso es importante considerar la posible aparición de dos problemas: la no convergencia de

view E, 2007, vol. 76, no 1, p. 016208.

⁸SEOANE, J.; SANJUÁN, M. Exponential decay and scaling laws in noisy chaotic scattering. *Physics Letters A*, 2008, vol. 372, no 2, p. 110-116.; SEOANE, J.; SANJUÁN, M. Escaping dynamics in the presence of dissipation and noise in scattering systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2010, vol. 20, no 09, p. 2783-2793.

⁹BLESA, F. To escape or not to escape, that is the question - perturbing the Hénon-Heiles Hamiltonian. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012, vol. 22, no 06, p. 1230010; COCCOLO, M.; SEOANE, J.; SANJUÁN, M. Controlling unpredictability in the randomly driven Hénon-Heiles system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, vol. 18, no 12, p. 3449-3457.

¹⁰VERHULST, F. Verhulst F. Discrete symmetric dynamical systems at the main resonances with application to axi-symmetric galaxies. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 1979, vol. 290, no 1375, p. 435-465.

¹¹DE ZEEUW, T. Motion in the core of a triaxial potential. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1985, vol. 215, no 4, p. 731-760.

¹²CLEARY, P. Lyapunov exponents as a measure of the size of chaotic regions. *Journal of mathematical physics*, 1989, vol. 30, no 3, p. 689-695.

¹³BARBANIS, B. Escape regions of a quartic potential. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1990, vol. 48, no 1, p. 57-77.

una condición inicial dada y el número de iteraciones necesarias para alcanzar un cierto punto fijo. Estos dos problemas pueden tratarse a través de las conocidas cuencas de convergencia, las cuales brindan información sobre el número total de puntos fijos, la no convergencia de condiciones iniciales y el número de iteraciones necesarias.

Teniendo en cuenta lo anterior, en el presente trabajo se generalizan los potenciales de Hénon-Heiles y Verhulst, realizando una expansión de un potencial genérico hasta el quinto orden. El nuevo sistema se analiza cualitativamente y cuantitativamente en los regímenes del movimiento acotado y no acotado. Adicionalmente, y teniendo en cuenta que el nuevo sistema es altamente no lineal, las propiedades de convergencia de las funciones de iteración se analizan usando un algoritmo de Newton-Raphson para hallar raíces de ecuaciones de varias variables. Se espera que este trabajo constituya un pilar fundamental para futuros estudios en el contexto de la dinámica de sistemas hamiltonianos bi-dimensionales a nivel nacional e internacional.

1. MARCO TEÓRICO

1.1. SISTEMA DE HÉNON-HEILES

Es un hecho conocido que, usando estimados sobre la dimensión promedio de estrellas y galaxias, el intervalo de tiempo esperado para tener colisiones entre estrellas es cerca de 10^8 veces más grande que la edad típica de muchas galaxias¹⁴. Esto implica que el movimiento de las estrellas puede ser determinado únicamente por la atracción gravitacional ejercida por la galaxia y que las colisiones entre estrellas son tan raras que pueden considerarse irrelevantes¹⁵. Por lo tanto, como una primera aproximación, la dinámica orbital de una estrella puede estudiarse siguiendo los formalismos usuales de la mecánica analítica para el movimiento de una partícula de prueba en presencia de un potencial gravitacional estimado $V(x,y)$.

En 1963 Michael Hénon y Carl Heiles¹⁶ proponen un modelo para estudiar el movimiento de una estrella alrededor de un centro galáctico, asumiendo que el movimiento está restringido al plano xy . La motivación del modelo era demostrar, a través de experimentos numéricos, la existencia de una tercera integral no aislada en el movimiento galáctico.

¹⁴BINNEY, J., TREMAINE, S.: Galactic dynamics. Princeton university press (2011)

¹⁵MAOZ, D.: Astrophysics in a Nutshell: Second Edition. Princeton university press (2016)

¹⁶HÉNON, M., HEILES, C. The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments. En: The Astronomical Journal, 1964, vol. 69, p. 73.

Deducción del Hamiltoniano de Hénon-Heiles

El Hamiltoniano más general para una partícula de prueba en presencia de un potencial axialsimétrico en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , puede escribirse como

$$H = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + V(r, z) + \frac{l_z^2}{2r^2}, \quad (1.1)$$

donde $l_z = r^2\dot{\theta}$, denota la componente del momento angular en el eje z .

Se define el potencial efectivo como $V_{\text{eff}}(r, z) = V(r, z) + l_z^2/2r^2$, el cual tiene un mínimo en $(r_0, 0)$, donde

$$\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{l_z^2}{r^3} = 0. \quad (1.2)$$

Dada la simetría de reflexión en z , el potencial $V(r, z)$ debe ser una función par en z , de modo que todas sus derivadas impares son funciones impares, y nulas sus contribuciones en $z = 0$. Expandiendo el potencial efectivo en series de Taylor alrededor de $(r_0, 0)$ hasta el tercer orden, se obtiene

$$V_{\text{eff}}(r, z) \approx \frac{1}{2}(\omega_1^2 \xi^2 + \omega_2^2) - \eta \xi z^2 - \frac{\epsilon}{3} \xi^3, \quad (1.3)$$

donde $\xi = (r - r_0)$, se ha usado la propiedad de que una función impar es cero en el origen, se han omitido los términos constantes y los términos restantes se denotan como¹⁷

$$\omega_1^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \Big|_{(r_0, 0)} + \frac{3l_0^2}{r_0^4}, \quad \omega_2^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \Big|_{(r_0, 0)}, \quad (1.4)$$

$$\eta = -\frac{\partial^3 V}{\partial r \partial z^2} \Big|_{(r_0, 0)}, \quad \epsilon = \frac{\partial^3 V}{\partial r^3} \Big|_{(r_0, 0)} - \frac{12l_0^2}{r_0^5}. \quad (1.5)$$

¹⁷CONTOPOULOS, G. Order and chaos in dynamical astronomy. Springer Science & Business Media, 2013. p. 434 -435

Remplazando $z \rightarrow x$ y $\xi \rightarrow y$, y denotando $\omega_1 = \omega_2 = \varepsilon = -\eta = 1$, se obtiene el hamiltoniano de Hénon-Heiles

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{y^3}{3}. \quad (1.6)$$

De igual manera, el Lagrangiano L del sistema está dado por la expresión

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - x^2y + \frac{y^3}{3}, \quad (1.7)$$

y el hamiltoniano del sistema en términos de los momentos puede calcularse como

$$H = \sum_{i=1}^2 p_i \dot{q}_i - L, \quad (1.8)$$

donde $p_1 = \partial L / \partial \dot{x}$ y $p_2 = \partial L / \partial \dot{y}$ representan los momentos asociados a las coordenadas $q_1 = x$ y $q_2 = y$, respectivamente. Reemplazando las velocidades en términos de los momentos en la ecuación (1.8) se obtiene

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{y^3}{3}. \quad (1.9)$$

Calculando la derivada total de (1.9) respecto al tiempo, resulta

$$\frac{dH}{dt} = \dot{p}_x \dot{x} + \dot{p}_x \ddot{x} + \dot{p}_y \dot{y} + \dot{p}_y \ddot{y} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{y} - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \ddot{y}, \quad (1.10)$$

y reemplazando las expresiones

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{p}_x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_x, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{p}_y, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = p_y, \quad (1.12)$$

en (1.10), se obtiene

$$\frac{dH}{dt} = 0. \quad (1.13)$$

Luego, el Hamiltoniano es una constante de movimiento y representa la energía del sistema.

El sistema de ecuaciones derivado de las ecuaciones de Hamilton, puede escribirse como

$$\dot{x} = p_x, \quad \dot{y} = p_y, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad (1.14)$$

y dado que la energía total del sistema se conserva $H = E = \text{const.}$, el movimiento orbital está restringido a la región

$$E \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{y^3}{3}. \quad (1.15)$$

De lo anterior, se deduce que el espacio de fase efectivo del sistema se reduce a tres dimensiones, por lo que el conjunto de herramientas adecuadas para el estudio de órbitas acotadas y no acotadas son las secciones de Poincaré, SALI, exponentes de Lyapunov, Cuencas de salida y la entropía de las cuencas.

1.2. SECCIONES DE POINCARÉ

Para finales del siglo XIX, tras los desarrollos teóricos llevados a cabo por Henri Poincaré para resolver el problema de los tres cuerpos propuesto por Weierstraß en el concurso del Rey Óscar II, se obtuvo como resultado una nueva herramienta matemática, llamada en honor a su descubridor Secciones de Poincaré¹⁸.

¹⁸VALDÉS, A. Poincaré, creador de los métodos todavía modernos en las ecuaciones diferenciales y en la mecánica celeste. Arbor, 2004, vol. 178, no 704, p. 669-689.

Una aplicación de Poincaré o aplicación de primer retorno es una aplicación definida no en el espacio de estados del sistema, sino en un sub-espacio de dimensión inferior S llamado sección de Poincaré. Se exige que la sección de Poincaré sea transversal al flujo del sistema y puede interpretarse como un sistema dinámico discreto con un espacio de estados con menor dimensión que el sistema continuo original (ver figura 1.1). Como preserva algunas características esenciales del sistema original suele emplearse como un medio alternativo para realizar el análisis de la dinámica del sistema.

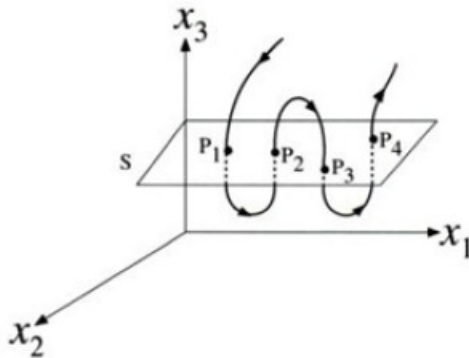


Figura 1.1: Sección de Poincaré.

Son propiedades de las secciones de Poincaré:

- Una órbita periódica simple del sistema dinámico original se convierte en un único punto fijo en la sección de Poincaré.
- Una trayectoria cuasiperiódica se convierte en la imagen de una curva cerrada.
- Un movimiento caótico se observa como una zona con puntos distribuidos de modo errático dentro de la sección del toroide.

1.3. SALI

Una herramienta moderna para el estudio de la dinámica de sistemas conservativos fue propuesta recientemente por Skokos¹⁹, esta herramienta se denomina SALI por sus siglas en inglés *Smaller Alignment Index* (o Índice de alineación más pequeño), y es útil y eficiente para distinguir entre órbitas regulares y caóticas en sistemas dinámicos acotados. Las propiedades de la evolución temporal de SALI para flujos hamiltonianos determinan un indicador que puede converger exponencialmente a cero en caso de movimientos caóticos o fluctuar alrededor de valores diferentes de cero para movimientos regulares.

Para definir el índice de alineación más pequeño en un espacio de fase n -dimensional, es necesario realizar el seguimiento temporal de una de las órbitas del flujo hamiltoniano con una condición inicial $p(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ y dos vectores de desviación $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$, con direcciones iniciales diferentes. La evolución de los vectores de desviación está determinada por las ecuaciones variacionales, mientras que la evolución de la condición inicial se determina a través de las ecuaciones de movimiento del sistema. En cada paso del tiempo los vectores de desviación se normalizan y se observa la tendencia para tiempos de evolución suficientemente largos, para luego calcular el valor mínimo del índice SALI

$$\text{SALI} = \min \left\{ \left\| \frac{\xi_1(t)}{\|\xi_1(t)\|} + \frac{\xi_2(t)}{\|\xi_2(t)\|} \right\|, \left\| \frac{\xi_1(t)}{\|\xi_1(t)\|} - \frac{\xi_2(t)}{\|\xi_2(t)\|} \right\| \right\}. \quad (1.16)$$

En sistemas hamiltonianos bidimensionales el movimiento regular se produce en la superficie de un toroide, para el cual cualquier vector de desviación inicial se convierte en tangente después de un corto período de tiempo, por ende los dos vectores de desvia-

¹⁹SKOKOS, C. Alignment indices: a new, simple method for determining the ordered or chaotic nature of orbits. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2001, vol. 34, no 47, p. 10029.

ción con direcciones iniciales diferentes se vuelven tangentes a diferentes direcciones en el toro, de modo que el indicador SALI oscila en torno a valores positivos. Por otra parte, para las órbitas con comportamiento caótico el indicador SALI tiende exponencialmente a cero, debido a que la dirección de los vectores de desviación que inicialmente tienen direcciones diferentes, tienden a coincidir o alinearse en direcciones opuestas.

1.4. MÁXIMO EXPONENTE DE LYAPUNOV

Durante el estudio de la estabilidad de soluciones no estacionarias en ecuaciones diferenciales no ordinarias, Aleksandr Lyapunov²⁰ introdujo lo que hoy en día se conoce como exponentes de Lyapunov. El máximo exponente de Lyapunov da una medida de la tasa media de divergencia o convergencia exponencial de órbitas cercanas en el espacio de fase. La existencia de un exponente de Lyapunov positivo indica que el sistema es caótico, mientras que un exponente de Lyapunov nulo indica que el sistema es regular.

Para el cálculo del máximo exponente de Lyapunov se considera el sistema dinámico

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x}), \quad (1.17)$$

siendo $\dot{\vec{x}}$ la derivada temporal de \vec{x} , y cuya solución esta dada como $f^t(x)$. Un par de condiciones iniciales cercanas en el espacio de fase se denotarán como x_0 y $x_0 + \delta x_0$, donde δx_0 es la pequeña variación del punto x_0 . Después de un tiempo t , las respectivas soluciones para esas dos condiciones iniciales estarán dadas por $f^t(x_0)$ y $f^t(x_0 + \delta x_0)$. Usando como referencia la órbita descrita por la condición inicial x_0 , la separación entre

²⁰LYAPUNOV, A. The general problem of the stability of motion. International journal of control, 1992, vol. 55, no 3, p. 531-534.

el par de trayectorias será

$$\Delta f^t = f^t(x_0 + \delta x_0) - f^t(x_0). \quad (1.18)$$

Dado que la función Δf^t varía fuertemente con el tiempo, se hace necesario introducir la tasa promedio de divergencia exponencial de las órbitas como

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\Delta f^t}{\delta x_0} \right|, \quad (1.19)$$

siendo λ el exponente de Lyapunov y teniendo en cuenta que $\delta x_0 \rightarrow 0$. Al linealizar f^t , se satisface que

$$\Delta f^t = f^t(x_0 + \delta x_0) - f^t(x_0) = D_{x_0} f^t(x_0) \delta x_0, \quad (1.20)$$

por lo tanto, λ se puede reescribir como²¹

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|D_{x_0} f^t(x_0) \cdot \delta x_0|}{|\delta x_0|}. \quad (1.21)$$

1.5. ENTROPÍA DE LAS CUENCAS

En los sistemas dinámicos, las cuencas vinculan el conjunto de condiciones iniciales con sus estados finales correspondientes, es decir, una cuenca está conformada por el conjunto de estados iniciales que evolucionan hacia estados finales específicos del sistema. Las cuencas pueden ser de atracción, de salida o de convergencia (ver figura 1.2). Las cuencas de atracción aparecen únicamente en sistemas no conservativos y están conformadas por las regiones del espacio de fase que son atraídas a un cierto atractor,

²¹DUBEIBE, F., BERMÚDEZ, L. Optimal conditions for the numerical calculation of the largest Lyapunov exponent for systems of ordinary differential equations. International Journal of Modern Physics C, 2014, vol. 25, no 07, p. 1450024.

el cual puede ser un punto, un ciclo límite o un atractor extraño. Las cuencas de salida tienen lugar en sistemas dinámicos que presenten dos o más regiones de escape y están formadas por el conjunto de condiciones iniciales que hacen que el sistema (o la partícula de prueba) salga de la región de confinamiento a través de un canal específico. Finalmente, las cuencas de convergencia pueden entenderse como el conjunto de condiciones iniciales que después de un proceso iterativo, por medio de un algoritmo de búsqueda de raíces, tienden a un punto fijo.

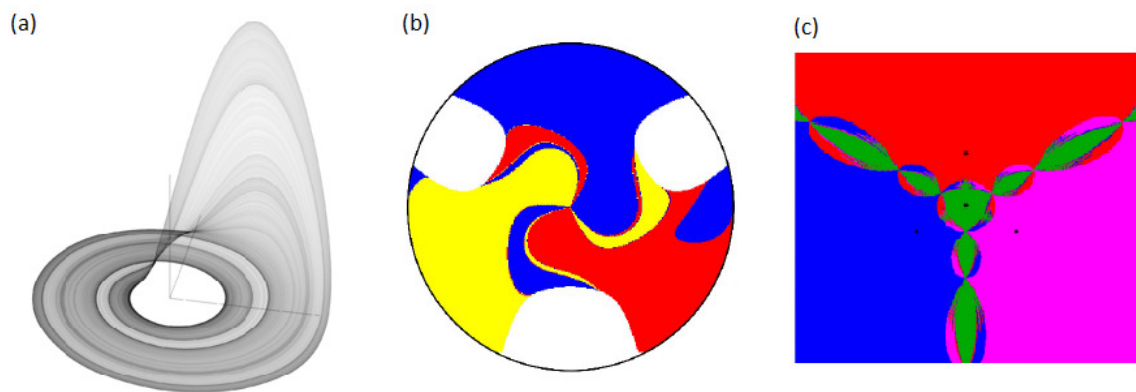


Figura 1.2: Tipos de cuencas de atracción (a), de salida (b) y de convergencia (c).

Dependiendo de la naturaleza de las cuencas la predicción de los estados finales a partir de las figuras generadas por estas puede ser una tarea difícil, incluso en sistemas simples que evolucionan con reglas deterministas. En este sentido, se hace necesario contar con una herramienta que permita cuantificar la incertidumbre de las cuencas²². La entropía de las cuencas se introdujo recientemente por Daza *et al.*²³, como un método eficiente para investigar el comportamiento de un sistema cuando se varían los diferentes parámetros. El concepto parte de la idea de entropía de Gibbs y proporciona una condición suficiente para determinar si una cuenca es o no fractal.

²²En este contexto, el término incertidumbre se entiende como la dificultad para determinar el estado final al cual tenderá una determinada condición inicial.

²³DAZA, A., et al. Basin entropy: a new tool to analyze uncertainty in dynamical systems. Scientific reports, 2016, vol. 6, p. 31416.

El método para calcular la entropía de las cuencas se describe a continuación. Primero, se asume que el sistema dinámico tiene N_A estados finales en cierta región Ω del espacio de fase, donde Ω se puede subdividir en una cuadrícula compuesta por n cajas cuadradas que contienen ε^2 trayectorias. Cada una de estas cajas contiene entre 1 y N_A estados finales, de modo que podemos denotar como $P_{i,j}$ la probabilidad de que dentro de cada caja i , el estado final resultante sea j . Debido a que las trayectorias dentro de cada caja son independientes unas de las otras, la entropía de Gibbs de cada caja se puede escribir como

$$S_i = \sum_{j=1}^{m_i} P_{i,j} \log \left(\frac{1}{P_{i,j}} \right), \quad (1.22)$$

con $m_i \in [1, N_A]$ el número de estados finales dentro de la casilla i -ésima.

La entropía de toda la región Ω se puede calcular como la suma de todas las entropías de las n cajas resultantes de la cuadrícula, $S = \sum_{i=1}^n S_i$. Por lo tanto, la entropía relativa al total de número de casillas n , o entropía de la cuenca S_b , viene dada explícitamente por la expresión

$$S_b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} P_{i,j} \log \left(\frac{1}{P_{i,j}} \right). \quad (1.23)$$

2. MATERIALES Y MÉTODOS

Este informe es resultado del proyecto de investigación institucional **Dinámica de partículas alrededor de objetos compactos tipo Chazy-Curzon**, presentado por el grupo de Investigación Cavendish del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos y se enmarca dentro de la línea de investigación de física teórica declarada por el grupo de investigación. Esta línea hace parte del saber específico y el área de formación básica del programa de Licenciatura en matemáticas y física de la Universidad de los Llanos. La investigación desarrollada es del tipo básico con una metodología teórica. Los cálculos fueron realizados usando una estación de trabajo HP Z440 Workstation de 64 Bits, con procesador Intel Xeon a 3.0 GHz y memoria DDR3 RDIMM de 8 GB.

El proyecto se ejecutó teniendo en cuenta las siguientes fases:

- **Recolección de información:** En esta fase se realizó una revisión bibliográfica concerniente al estudio de la dinámica del sistema de Hénon-Heiles y de las generalizaciones de este potencial existentes en la literatura.
- **Desarrollos analíticos:** En esta fase se realizó la derivación de un potencial generalizado de Hénon-Heiles incluyendo contribuciones hasta el quinto orden de la expansión en series de Taylor de un potencial efectivo $V(r, z)$. Seguidamente, se calculó el lagrangiano, el hamiltoniano y las ecuaciones de movimiento para una partícula de prueba en presencia del nuevo potencial. Estos cálculos permitieron deducir las constantes de movimiento y la energía crítica necesaria para determinar los intervalos correspondientes a órbitas acotadas y no acotadas.
- **Análisis de resultados:** En esta fase se solucionó el sistema de ecuaciones dife-

renciales ordinarias usando un método de integración simpléctico de Runge-Kutta, lo que permitió realizar un análisis de la dinámica de las órbitas acotadas usando los métodos de secciones de Poincaré, SALI y exponentes de Lyapunov. De igual manera, se llevó a cabo el análisis de la dinámica de las órbitas no acotadas usando los métodos de cuencas de salida y entropía de las cuencas. Adicionalmente, se realizó un estudio de los puntos fijos del sistema usando el método multivariado de Newton-Raphson para determinar las cuencas de convergencia y la fractalidad de las mismas.

- **Presentación del informe final:** Fase actual del proceso que comprende la presentación del informe de los resultados de la investigación.

3. RESULTADOS

3.1. GENERALIZACIÓN DEL POTENCIAL Y ECUACIONES DE MOVIMIENTO

En esta sección, siguiendo la metodología propuesta por Contopoulos²⁴ se derivan el potencial efectivo y las ecuaciones de movimiento para una partícula de prueba en presencia de un potencial axialsimétrico generalizado con simetría de reflexión. Para esto, se parte del hamiltoniano general dado por la ecuación

$$H = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + V(r, z) + \frac{l_z^2}{2r^2}, \quad (3.1)$$

con $l_z = r^2\dot{\theta}$ la componente del momento angular sobre el eje z . Denotando el potencial efectivo como

$$V_{\text{eff}}(r, z) = V(r, z) + l_z^2/2r^2, \quad (3.2)$$

y teniendo en cuenta la condición que $V_{\text{eff}}(r, z)$ debe ser una función par en z debido a la simetría de reflexión e independiente de la coordenada azimutal debido a la simetría axial, se expande el potencial efectivo en series de Taylor hasta el quinto orden alrededor del punto $(r_0, 0)$. Aplicando nuevamente las propiedad de las funciones pares y de sus derivadas, omitiendo términos constantes y denotando

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial r^2} \Big|_{(r_0, 0)}, & \omega_2^2 &= \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial z^2} \Big|_{(r_0, 0)}, & a_1 &= \frac{1}{24} \frac{\partial^4 V_{\text{eff}}}{\partial z^4} \Big|_{(r_0, 0)}, \\ a_2 &= \frac{1}{4} \frac{\partial^4 V_{\text{eff}}}{\partial r^2 \partial z^2} \Big|_{(r_0, 0)}, & a_3 &= \frac{1}{24} \frac{\partial^4 V_{\text{eff}}}{\partial r^4} \Big|_{(r_0, 0)}, & b_1 &= \frac{1}{120} \frac{\partial^5 V_{\text{eff}}}{\partial r^5} \Big|_{(r_0, 0)}, \\ b_2 &= \frac{1}{24} \frac{\partial^5 V_{\text{eff}}}{\partial r \partial z^4} \Big|_{(r_0, 0)}, & b_3 &= \frac{1}{12} \frac{\partial^5 V_{\text{eff}}}{\partial r^3 \partial z^2} \Big|_{(r_0, 0)}, & \varepsilon &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 V_{\text{eff}}}{\partial r \partial z^2} \Big|_{(r_0, 0)}, \\ \beta &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 V_{\text{eff}}}{\partial r^3} \Big|_{(r_0, 0)}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

²⁴CONTOPOULOS, G. Order and chaos in dynamical astronomy. Springer Science & Business Media, 2013. p. 434 -435

se obtiene

$$V_{\text{eff}}(r, z) \approx z^4 (a_1 + b_2 \xi) + z^2 \left(a_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 + \frac{\omega_2^2}{2} - \xi \varepsilon \right) + a_3 \xi^4 - \frac{\beta \xi^3}{3} + b_1 \xi^5 + \frac{\xi^2 \omega_1^2}{2}. \quad (3.4)$$

Ahora, con fin de comparar el potencial de Hénon-Heiles con el potencial generalizado con términos hasta el quinto orden, se reemplaza $z \rightarrow x$ y $\xi \rightarrow y$, se asignan valores a los términos (3.3), tal que $a_1 = a_3 = b_1 = -b_2 = -b_3 = -\delta$, $a_2 = -2\delta$ y $\omega_1 = \omega_2 = \beta = -\varepsilon = 1$. De esta manera, el hamiltoniano toma la forma

$$H = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{y^3}{3} + \delta [x^4 y + x^2 + x^2 y^3 - y^5 - (x^2 + y^2)^2]. \quad (3.5)$$

Las ecuaciones de movimiento derivadas de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi se leen como

$$\dot{x} = p_x, \quad (3.6)$$

$$\dot{y} = p_y, \quad (3.7)$$

$$\dot{p}_x = x (4\delta y^2 - 4\delta x^2 (y - 1) - 2\delta y^3 - 2y - 1), \quad (3.8)$$

$$\dot{p}_y = x^2 (4\delta y - 3\delta y^2 - 1) + y (5\delta y^3 + 4\delta y^2 + y - 1) - \delta x^4. \quad (3.9)$$

Donde (3.8) y (3.9) son los momentos canónicos conjugados a las coordenadas x e y respectivamente. Dado que en este caso la energía total también se conserva $H = E = \text{const.}$, el movimiento orbital se restringe a la región

$$E \geq \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{y^3}{3} + \delta [x^4 y + x^2 + x^2 y^3 - y^5 - (x^2 + y^2)^2]. \quad (3.10)$$

Dependiendo del valor del parámetro δ , el sistema dinámico (3.6-3.9) tiene un cierto número de puntos fijos, los cuales se determinan de la solución al sistema de ecuaciones

algebraico

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = 0, \quad (3.11)$$

con

$$U(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{y^3}{3} + \delta \left[x^4y + x^2 + x^2y^3 - y^5 - (x^2 + y^2)^2 \right]. \quad (3.12)$$

La introducción del parámetro δ en (3.5) es una valiosa herramienta para el estudio de la transición del sistema de Hénon-Heiles al nuevo sistema generalizado. En lo que respecta al estudio del movimiento de la partícula de prueba, se consideran valores para el parámetro δ en el intervalo $[0, 1]$, tal que $\delta = 0$ denota el sistema de Hénon-Heiles y $\delta = 1$ denota el sistema generalizado.

Por otra parte, para clasificar el movimiento orbital como acotado o no acotado, se definen valores críticos de energía E_{min} y E_{max} de modo que los valores de energía por debajo de la energía mínima E_{min} forman una superficie cerrada de velocidad cero, mientras que para valores superiores a la energía máxima E_{max} , el sistema presenta tres zonas de escape. Es importante aclarar que para el intervalo de valores de energía entre E_{min} y E_{max} , el sistema presenta una o dos zonas de escape, sin embargo estos casos no serán considerados debido a que no pueden compararse con el sistema de Henon-Heiles.

δ	E_{min}	E_{max}
0	0.16666666666666667	0.16666666666666667
0.1	0.0905432951155776544	0.101272469408731802
0.5	0.0415033469448885181	0.047501597103515189
1	0.0267918006221522439	0.034408354292176817

3.2. MOVIMIENTO ACOTADO

El movimiento acotado que exhibe una partícula de prueba se encuentra directamente relacionado con el valor de energía E total del sistema y el valor de δ , donde este último parámetro regula las contribuciones de los nuevos términos del potencial generalizado. En lo que sigue, el estudio del comportamiento dinámico de las órbitas acotadas se realizará para cuatro casos diferentes, en los que el parámetro δ toma valores $\delta = 1$, 0.5 , 0.1 y $\delta = 0$ (correspondiente al sistema original de Hénon-Heiles).

El comportamiento dinámico de una partícula de prueba será analizado a partir de la solución al sistema de ecuaciones de movimiento (3.6 - 3.9). Dicho sistema se resuelve utilizando un método de integración numérico de Runge-Kutta-Fehlberg RKF8(9) con un paso de tiempo adaptativo. Este método permite resolver numéricamente el sistema de ecuaciones una vez que se conocen el valor de las constantes E y δ , junto con las condiciones iniciales x_0, y_0, p_{x_0} y p_{y_0} . Las posiciones iniciales se eligen de manera que satisfagan la condición $U(x, y) = E$, por lo que, en todos los casos, se escogió $x_0 = 0.1$ y $y_0 = 0$. Con fin de cubrir todo el espacio de fase permitido, se seleccionan condiciones iniciales diferentes para p_y en un intervalo $[0, p_{y_{max}}]$, donde $p_{y_{max}}$ corresponde al mayor valor de p_y que permite obtener un valor numérico real de p_x . En cada caso, p_x se determina por la integral de movimiento $H = E$. La existencia de la constante de movimiento indica que el movimiento tiene lugar en el espacio de fase tridimensional efectivo, en el cual el método de secciones de Poincaré es una herramienta adecuada para clasificar el movimiento entre regular o caótico.

En la figura 3.1, se muestran las secciones de Poincaré para el sistema generalizado de Hénon-Heiles en los cuatro casos de δ , variando gradualmente el valor de E por medio de la relación $E = E_{min}(1 - n/100)$, siendo n el porcentaje de E disminuido.

En los paneles (a), (d), (g), (j) de la figura 3.1, se observa que para un valor de $n = 1$ el sistema registra un gran número de trayectorias caóticas. Por otro lado, los paneles (b), (e), (h), (k), con valores intermedios de n , muestran que el sistema experimenta una transición del caos a regularidad. Este fenómeno se intensifica en los paneles (c), (f), (i), (l) donde las trayectorias tienen un comportamiento altamente regular. Esto permite inferir que a medida que la energía del sistema se aleja del valor crítico E_{min} , el sistema se hace cada vez menos caótico.

Como se dijo anteriormente, las secciones de Poincaré clásicas son gráficos que permiten obtener una visión general y rápida de la estructura orbital del sistema. Sin embargo, para hacer un análisis más completo del espacio de fase disponible, se deben clasificar grandes conjuntos de condiciones iniciales. Para este fin, en la figura 3.2 se presentan diagramas codificados por colores que revelan la estructura orbital del espacio (y, \dot{y}) . En particular, se definen redes uniformes densas de 300×300 condiciones iniciales, distribuidas uniformemente dentro de la zona de velocidad cero, y son integradas numéricamente para 10000 unidades de tiempo. Para determinar el carácter (caótico o regular) de las órbitas, se usó el índice de alineación más pequeño SALI, caracterizando así una condición inicial de acuerdo con el valor final de SALI al terminar la integración numérica. Más específicamente, si $SALI > 10^{-4}$ se tiene el caso de una órbita regular (identificadas con el color verde), mientras que para $SALI < 10^{-8}$ la órbita se clasifica como caótica (color rojo). Para valores de SALI en el intervalo $[10^{-8}, 10^{-4}]$, las órbitas se clasifican como órbitas pegajosas (color azul), *i.e.*, órbitas que requieren un mayor tiempo de integración para develar su carácter caótico o regular. En la figura 3.2 se hace evidente que estos diagramas codificados por colores permiten identificar claramente pequeñas islas de estabilidad local, así como regiones caóticas débiles, que son difíciles de percibir en las superficies clásicas de las secciones de Poincaré.

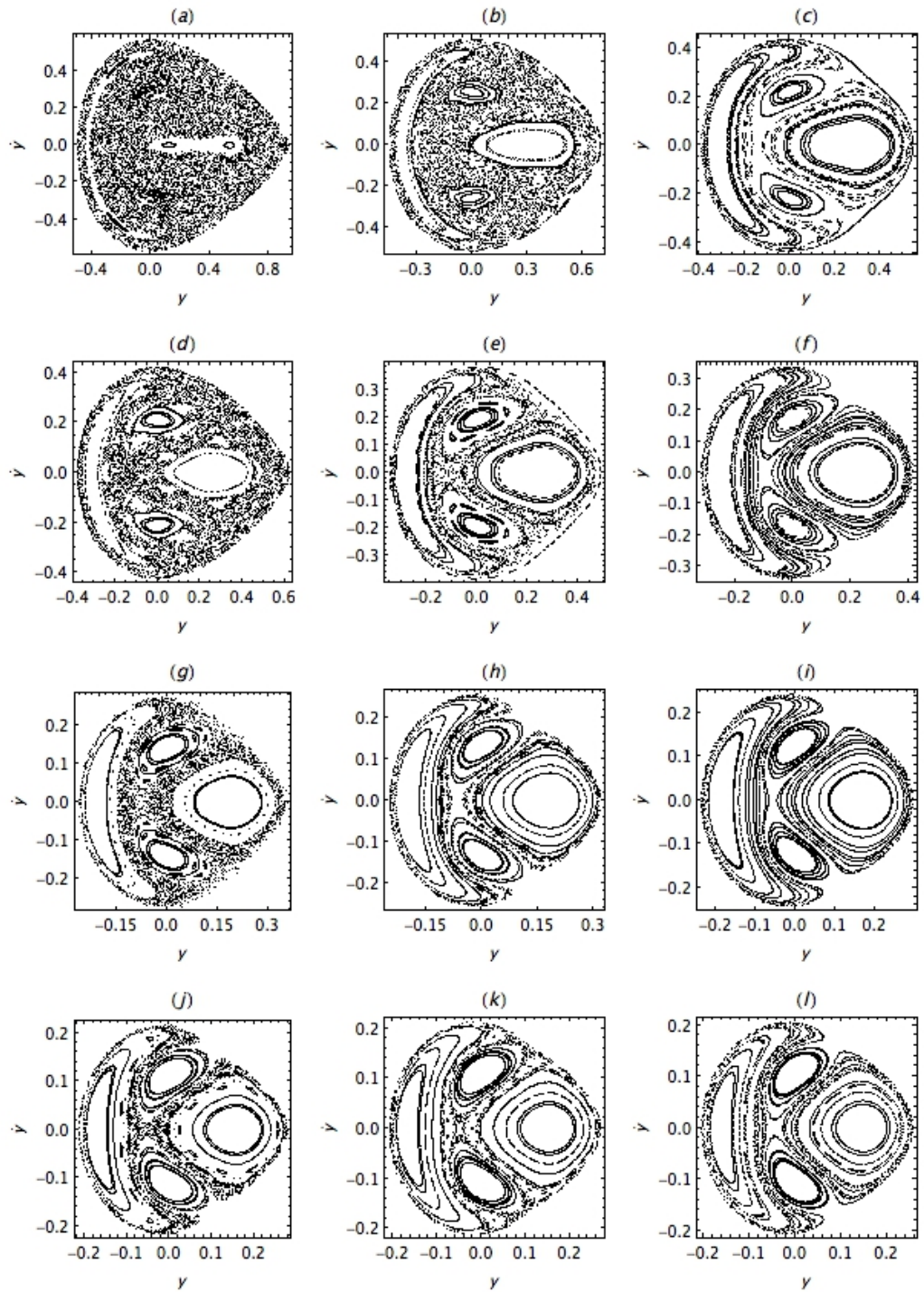


Figura 3.1: Secciones de Poincaré para (a) $\delta = 0$ y $n = 1$, (b) $\delta = 0$ y $n = 21$, (c) $\delta = 0$ y $n = 41$, (d) $\delta = 0,1$ y $n = 1$, (e) $\delta = 0,1$ y $n = 21$, (f) $\delta = 0,1$ y $n = 16$, (g) $\delta = 0,1$ y $n = 31$, (h) $\delta = 0,5$ y $n = 1$, (i) $\delta = 0,5$ y $n = 11$, (j) $\delta = 0,5$ y $n = 21$, (k) $\delta = 1$ y $n = 1$, (l) $\delta = 1$ y $n = 6$, (m) $\delta = 1$ y $n = 11$. La energía del sistema varía según la relación $E = E_{min}(1 - n/100)$.

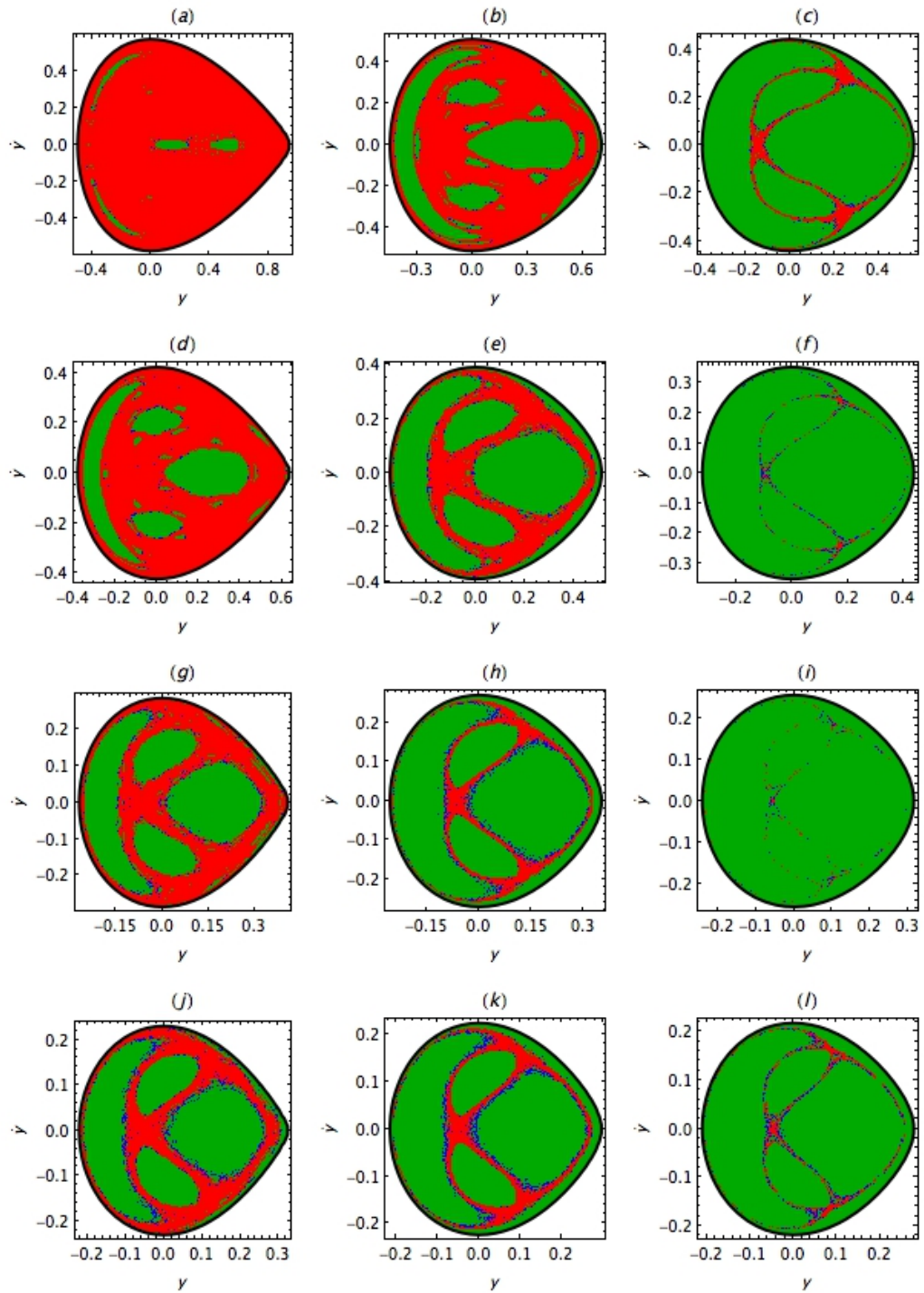


Figura 3.2: Estructura orbital del plano (y, \dot{y}) para (a) $\delta = 0$ y $n = 1$, (b) $\delta = 0$ y $n = 21$, (c) $\delta = 0$ y $n = 41$, (d) $\delta = 0,1$ y $n = 1$, (e) $\delta = 0,1$ y $n = 16$, (f) $\delta = 0,1$ y $n = 31$, (g) $\delta = 0,5$ y $n = 1$, (h) $\delta = 0,5$ y $n = 11$, (i) $\delta = 0,5$ y $n = 21$, (j) $\delta = 1$ y $n = 1$, (k) $\delta = 1$ y $n = 6$, (l) $\delta = 1$ y $n = 11$. En cada caso la energía del sistema varía según la relación $E = E_{min}(1 - n/100)$.

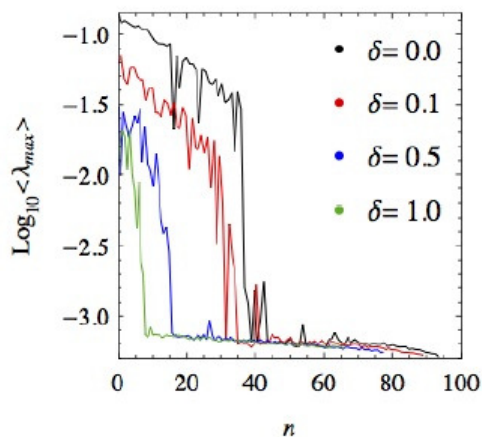


Figura 3.3: Dependencia energética de λ_{max} en cuatro casos $\delta = 0, 0,1, 0,5, 1$. En cada caso la energía del sistema varía en el intervalo $[0, E_{min}]$ por medio de la relación $E = E_{min}(1 - n/100)$.

Un algoritmo común para cuantificar la caoticidad de un sistema dinámico es el máximo exponente de Lyapunov λ_{max} , este puede calcularse a través del método de dos partículas o utilizando el método variacional. Dado que existe suficiente evidencia numérica que indica que el método variacional es mucho más fiable²⁵, en este trabajo se utiliza únicamente el método variacional para la determinación de λ_{max} . En la figura 3.3 se validan los resultados obtenidos con las secciones de Poincaré, determinando el promedio de λ_{max} para un ensamble de 1×10^5 trayectorias y variando la energía para los cuatro casos de δ . Dada la naturaleza numérica de λ_{max} , valores mayores a 10^{-3} se consideran caóticos, mientras que los que están por debajo de este valor se consideran regulares.

La figura 3.3 presenta el valor de λ_{max} en términos de n , donde n indica el porcentaje de energía disminuido a E_{min} dado por la relación $E = E_{min}(1 - n/100)$. Los resultados de la figura 3.3 confirman lo encontrado en las figuras 3.1 y 3.2, es decir, para valores

²⁵DUBEIBE, F. L. (2013). Cálculo del máximo exponente de Lyapunov con Mathematica. Revista Colombiana de Física, 45(1).

grandes de n , correspondientes a valores pequeños E_{min} , el espacio de fase tiende a poblarse con órbitas periódicas. Adicionalmente, al hacer un barrido de la evolución del sistema en términos de δ , se observa que a medida que δ se incrementa los valores de λ_{max} tienden a ser menores. En otras palabras, a medida que la energía del sistema disminuye y la contribución de los nuevos términos se intensifica, el sistema se hace cada vez más regular.

3.3. MOVIMIENTO NO ACOTADO

Para el estudio del comportamiento dinámico del sistema generalizado se consideran valores de energía crítica E_{max} , para los cuales las superficies de velocidad cero registran tres canales de escape. La solución numérica del sistema se realiza usando el método de Runge-Kutta-Fehlberg RKF8(9) con 90000 condiciones iniciales (x_0, y_0) distribuidas uniformemente. A diferencia del caso de movimiento acotado y manteniendo el criterio usado en trabajos anteriores²⁶, las condiciones iniciales para (p_{x_0}, p_{y_0}) se determinan a partir de las condiciones $r \cdot p = 0$ y $r \times p > 0$, con $r = x\hat{i} + y\hat{j}$. Las trayectorias se clasifican en órbitas que escapan y órbitas que se mantienen confinadas, adicionalmente, las órbitas que escapan se subdividen según el canal de salida. Los canales de salida se caracterizan de acuerdo con la siguiente convención: salida 1 ($y \rightarrow \infty$), salida 2 ($x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty$) y salida 3 ($x \rightarrow \infty, y \rightarrow -\infty$). En la figura 3.4 se presentan las cuencas de salida para los cuatro casos de δ usados en el análisis de órbitas acotadas. En este gráfico cada condición inicial toma un color de acuerdo con la cuenca por la cual escapa, es decir, órbitas que escapan por la salida 1 se grafican en color azul, órbitas que escapan por la salida 2 se identifican con color amarillo y órbitas que escapan por la salida 3 con color rojo. Por otro lado, las condiciones iniciales que al alcanzar las 10000 uni-

²⁶AGUIRRE, J; VALLEJO, J. C.; SANJUÁN, M. A. Wada basins and chaotic invariant sets in the Hénon-Heiles system. Physical Review E, 2001, vol. 64, no 6, p. 066208.

dades de tiempo no escapan por ninguna de las cuencas de salida (órbitas confinadas), fueron identificadas con el color verde. Como era de esperarse, el mayor porcentaje de condiciones iniciales que no escapan tiene lugar para valores de energía muy cercanos a E_{max} .

Siguiendo los mismos criterios usados en el estudio de las órbitas acotadas para rastrear la evolución del sistema, en la figura 3.4 se grafican las cuencas de salida para el nuevo sistema generalizado de Hénon-Heiles en los cuatro casos de δ , aumentando gradualmente el valor de energía E respecto a E_{max} . En la primera fila se presentan los paneles (a), (b) y (c), correspondientes a $\delta = 0$, sistema original de Hénon-Heiles. En este caso, los resultados obtenidos muestran que las cuencas se vuelven más suaves y mejor definidas a medida que aumenta el valor de energía²⁷. El mismo comportamiento se observa en los casos de $\delta = 0.1$ registrado en los paneles (d), (e), (f), $\delta = 0.5$ registrado en los paneles (g), (h), (i) y $\delta = 1$ presentado en (j), (k), (l). De manera general, también se observa que las curvas son más suaves para valores mayores de δ .

Con el fin de obtener resultados más concluyentes, seguidamente se calcula la entropía de las cuencas para determinar la fractalidad de las mismas. En la figura 3.5, se registra la entropía de las cuencas en los casos $\delta = 0, 0.1, 0.5$ y 1 . En los paneles (a), (b), (c) y (d) se presenta la entropía para diferentes valores de energía, aumentando el valor de E en función de n por medio de la relación $E = E_{max}(1 + n/100)$. De lo anterior, se observa que a medida que el valor de energía del sistema se acerca al valor de energía crítica E_{max} , la entropía de la cuenca se incrementa, mientras que para valores grandes de δ el valor de la entropía se reduce significativamente. Estos resultados nos permiten concluir que la incertidumbre de las cuencas, y por tanto su fractalidad, es mayor para el sistema original de Hénon-Heiles que para el nuevo sistema generalizado.

²⁷ZOTOS, E. Classifying orbits in the classical Hénon-Heiles Hamiltonian system. *Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 79, no 3, p. 1665 - 1677

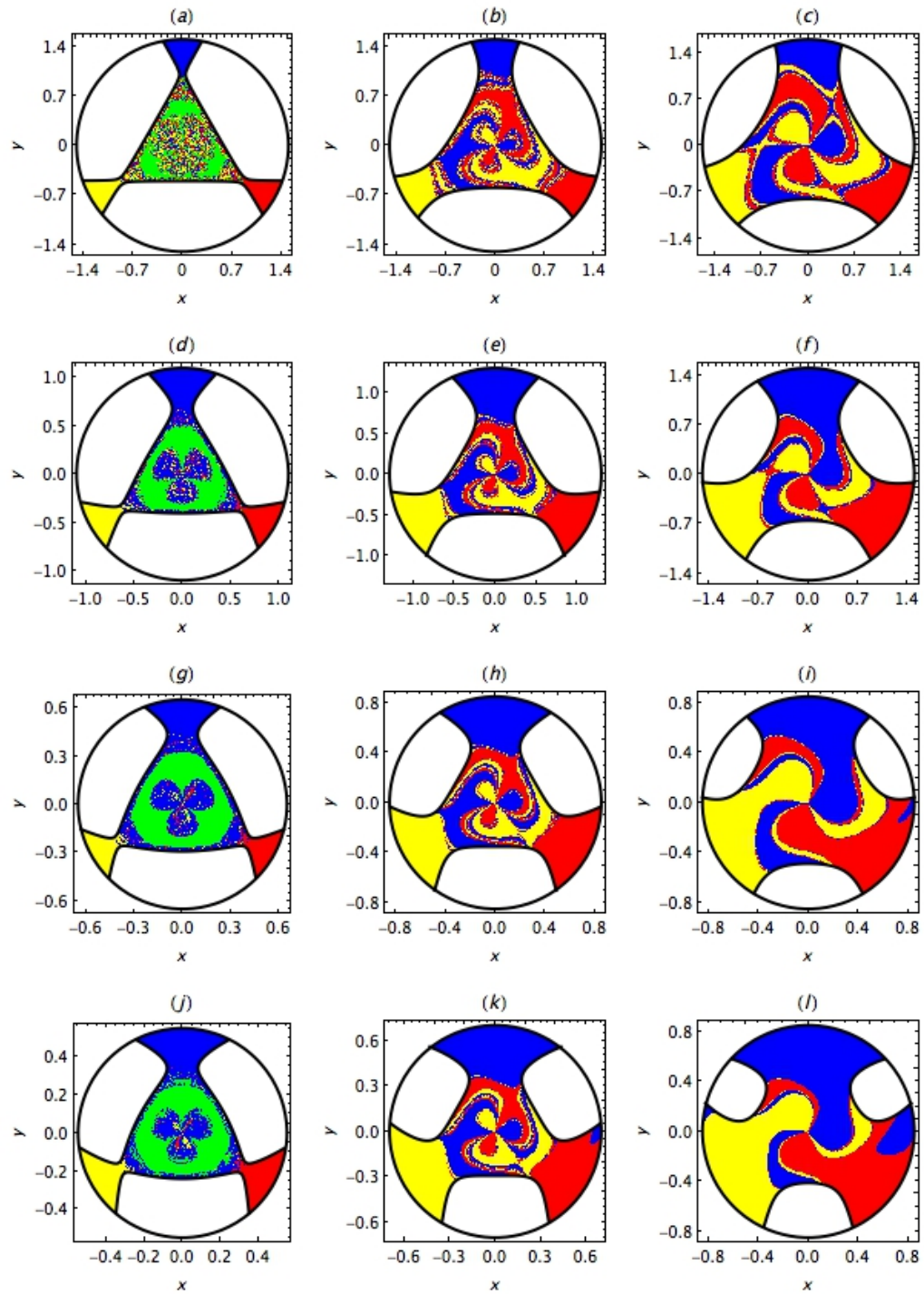


Figura 3.4: Cuencas de salida del Hamiltoniano generalizado de Hénon-Heiles en el espacio de configuración (x,y) para (a) $\delta = 0$ y $n = 2$, (b) $\delta = 0$ y $n = 50$, (c) $\delta = 0$ y $n = 200$, (d) $\delta = 0,1$ y $n = 2$, (e) $\delta = 0,1$ y $n = 50$, (f) $\delta = 0,1$ y $n = 200$, (g) $\delta = 0,5$ y $n = 2$, (h) $\delta = 0,5$ y $n = 50$, (i) $\delta = 0,5$ y $n = 200$, (j) $\delta = 1$ y $n = 2$, (k) $\delta = 1$ y $n = 50$, (l) $\delta = 1$ y $n = 200$. En cada caso la energía del sistema varía según la relación $E = E_{max}(1 + n/100)$.

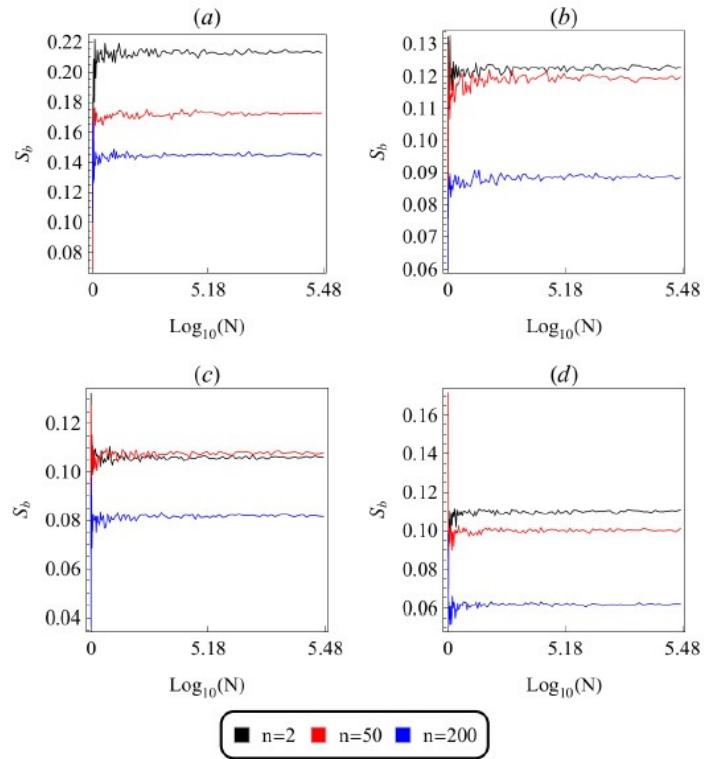


Figura 3.5: Entropía de las cuencas S_b en función del número de submatrices N en cuatro casos diferentes: (a) $\delta = 0$, (b) $\delta = 0,1$, (c) $\delta = 0,5$ y $\delta = 1$. En cada panel la energía del sistema varía según la relación $E = E_{max}(1 + n/100)$.

3.4. PUNTOS FIJOS

El estudio de la evolución paramétrica de la posición y estabilidad de los puntos fijos del sistema generalizado de Hénon-Heiles contribuyen de manera significativa al análisis global de la dinámica del sistema. Dado que en principio los puntos de equilibrio se pueden interpretar como atractores, las cuencas de convergencia de Newton-Raphson brindan información de la geometría del sistema y a su vez del número de iteraciones necesarias para alcanzar un atractor. En lo que sigue, la evolución de la posición y la estabilidad de los puntos de equilibrio se estudia en función del parámetro δ en el intervalo $[0, 10]$.

Las coordenadas (x^*, y^*) correspondientes a los puntos de libración, pueden determinarse resolviendo numéricamente el sistema algebraico descrito por las derivadas de primer orden

$$U_x = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = 0 \quad \wedge \quad U_y = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = 0. \quad (3.13)$$

Dicho de otra manera, los puntos de equilibrio se definen a través de las intersecciones de las ecuaciones (3.13), por lo que el número total de puntos de libración depende del parámetro δ . En particular, se encuentra que:

- Con $\delta \in [0, 0.76831375]$ existen cuatro puntos de equilibrio, como se observa en el panel (a) de la figura 3.6.
- Con $\delta \in [0.76831376, 4)$ existen ocho puntos de equilibrio, como se observa en el panel (b) de la figura 3.6.
- Con $\delta = 4$ existen nueve puntos de equilibrio, como se observa en el panel (c) de la figura 3.6.
- Con $\delta > 4$ existen diez puntos de equilibrio, como se observa en el panel (d) de la figura 3.6.

En la figura 3.7 se presenta la evolución paramétrica de las posiciones de los puntos de equilibrio en el plano de configuraciones (x, y) , cuando δ toma diferentes valores en el intervalo $[0, 10]$. De lo anterior, se concluye que la posición del punto de libración L_1 permanece invariante en el origen $(0, 0)$, a diferencia de los nueve puntos de equilibrio que cambian linealmente con δ . Por otra parte, de la misma figura se observa que tan pronto como $\delta \geq 0.76831376$, aparecen dos pares de puntos de equilibrio adicionales y cuando $\delta \geq 4$ se adicionan otros dos puntos de equilibrio. El análisis de la evolución de los puntos fijos indica que a medida que $\delta \rightarrow \infty$, los puntos L_2, L_3, L_4, L_7, L_8 y L_9 tienden a

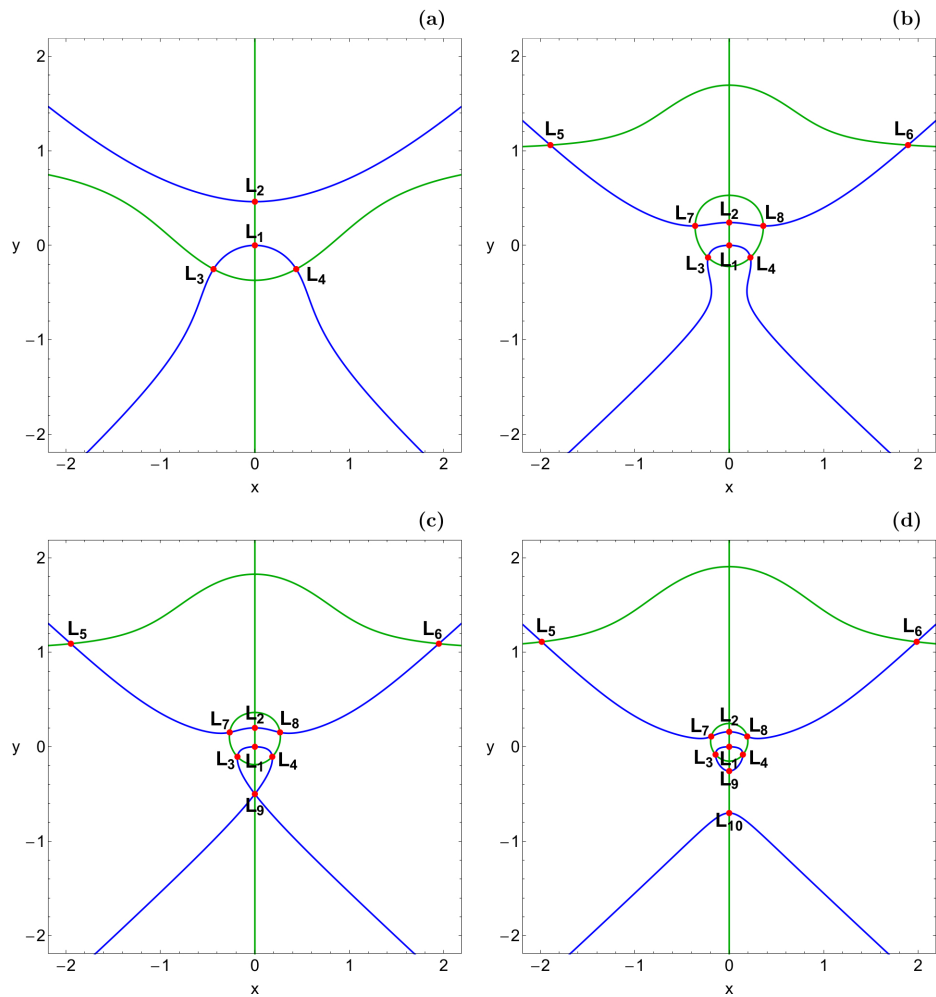


Figura 3.6: Posiciones (puntos rojos) y numeración de los puntos de equilibrio ($L_i; i = 1, \dots, 10$) a través de las intersecciones de $U_x = 0$ (verde) y $U_y = 0$ (azul), para (a) $\delta = 0,4$, (b) $\delta = 2,5$, (c) $\delta = 4$ y (d) $\delta = 7$.

unirse con L_1 , mientras que los puntos L_5, L_6 y L_{10} , se mueven en direcciones contrarias al centro.

Cuencas de convergencia

Las cuencas de convergencia se analizan usando el algoritmo de búsqueda de raíces de Newton-Raphson, siendo este un algoritmo de gran utilidad para determinar raíces en sistemas de ecuaciones no lineales en varias variables. Las raíces se determinan a

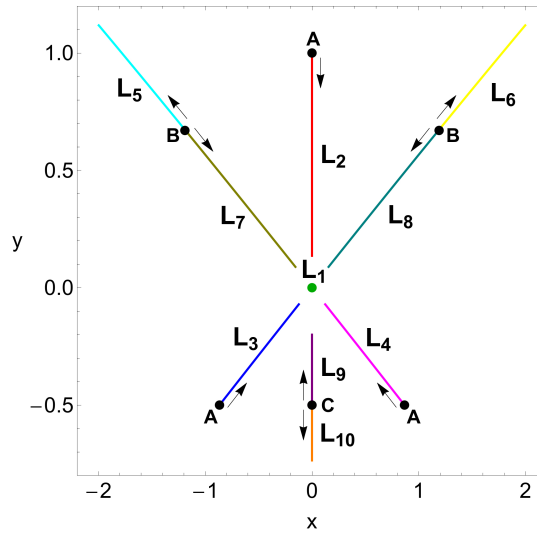


Figura 3.7: Evolución paramétrica de las posiciones de los puntos de equilibrio ($L_i; i = 1, \dots, 10$) para $\delta \in [0, 10]$, las flechas indican la dirección del movimiento de los puntos de equilibrio a razón del incremento del parámetro δ . Los puntos de color negro A, B , y C corresponden a $\delta = 0$, $\delta = 0.76831376$ y $\delta = 4$, respectivamente

través del esquema iterativo

$$x_{n+1} = x_n - J^{-1}f(x_n), \quad (3.14)$$

donde $f(x_n)$ denota el sistema de ecuaciones, y J^{-1} es la matriz Jacobiana inversa. Para el sistema de ecuaciones en consideración, el sistema iterativo para cada coordenada está dado por

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \left(\frac{U_x U_{yy} - U_y U_{xy}}{U_{xx} U_{yy} - U_{xy}^2} \right)_{x_n, y_n}, \\ y_{n+1} &= y_n + \left(\frac{U_x U_{xy} - U_y U_{xx}}{U_{xx} U_{yy} - U_{xy}^2} \right)_{x_n, y_n}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

siendo (x_n, y_n) los valores de las coordenadas x e y en el n -ésimo paso del proceso iterativo. Al establecer una condición inicial (x_0, y_0) en el plano de configuración, el procedimiento iterativo tiene lugar hasta alcanzar un punto de equilibrio con la precisión deseada, esto es $x_{m+1} = x_m$ y $y_{m+1} = y_m$, con una diferencia numérica del orden 10^{-15} . El

conjunto de condiciones iniciales que conducen al mismo atractor conforma lo que se conoce como cuencas de convergencia de Newton-Raphson.

En el presente trabajo, el estudio de las cuencas de convergencia se realiza usando una cuadrícula uniforme de 1024×1024 condiciones iniciales. Paralelo al proceso iterativo de búsqueda de raíces, se registra el número N de iteraciones necesarias para que una condición inicial dada tienda a una de las cuencas de atracción. Las geometrías del espacio de configuraciones definido por las cuencas de Newton-Raphson se presenta en la figura 3.8, allí se consideran los casos particulares: (a) $\delta = 0$, (b) $\delta = 0.4$, (c) $\delta = 0.75$, (d) $\delta = 0.768314$, (e) $\delta = 0.77$, (f) $\delta = 1.5$, (g) $\delta = 3.9999$, (h) $\delta = 4$, e (i) $\delta = 5$. Para el caso $\delta = 0$, la geometría del sistema en el plano configuraciones presenta una simetría $\frac{2\pi}{3}$. Los paneles (b) y (c) permiten observar la evolución del sistema cuando aun se tienen cuatro puntos fijos, registrando la pérdida de la simetría presente en $\delta = 0$, sin embargo, las regiones de atracción siguen siendo simétricas con respecto al eje vertical en $x = 0$. Finalmente, los paneles (d), (e), (f), y (g), representan la evolución de las cuencas en el caso de ocho puntos fijos, mientras que los paneles (h) e (i) muestran el caso de 10 puntos fijos. De esta figura se observa que los cambios con mayor relevancia se presentan para valores de δ próximos a la aparición de nuevos puntos de atracción, donde la geometría del espacio de configuraciones evidencia una alta fractalidad. Por último, en la figura 3.9 se presentan las correspondientes distribuciones del número de iteraciones requeridas para alcanzar los puntos fijos. En acuerdo con estudios previos²⁸, las condiciones iniciales que requieren tiempos más largos para tender a un punto fijo, son aquellos que se encuentran muy cerca de los valores críticos del parámetro de perturbación.

²⁸ZOTOS, E. E. Determining the Newton-Raphson basins of attraction in the electromagnetic Copenhagen problem. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, vol. 90, p. 111-123; ZOTOS, E. E. Fractal basins of attraction in the planar circular restricted three-body problem with oblateness and radiation pressure. *Astrophysics and Space Science*, 2016, vol. 361, no 6, p. 181; ZOTOS, E. E. Revealing the basins of convergence in the planar equilateral restricted four-body problem. *Astrophysics and Space Science*, 2017, vol. 362, no 1, p. 2.

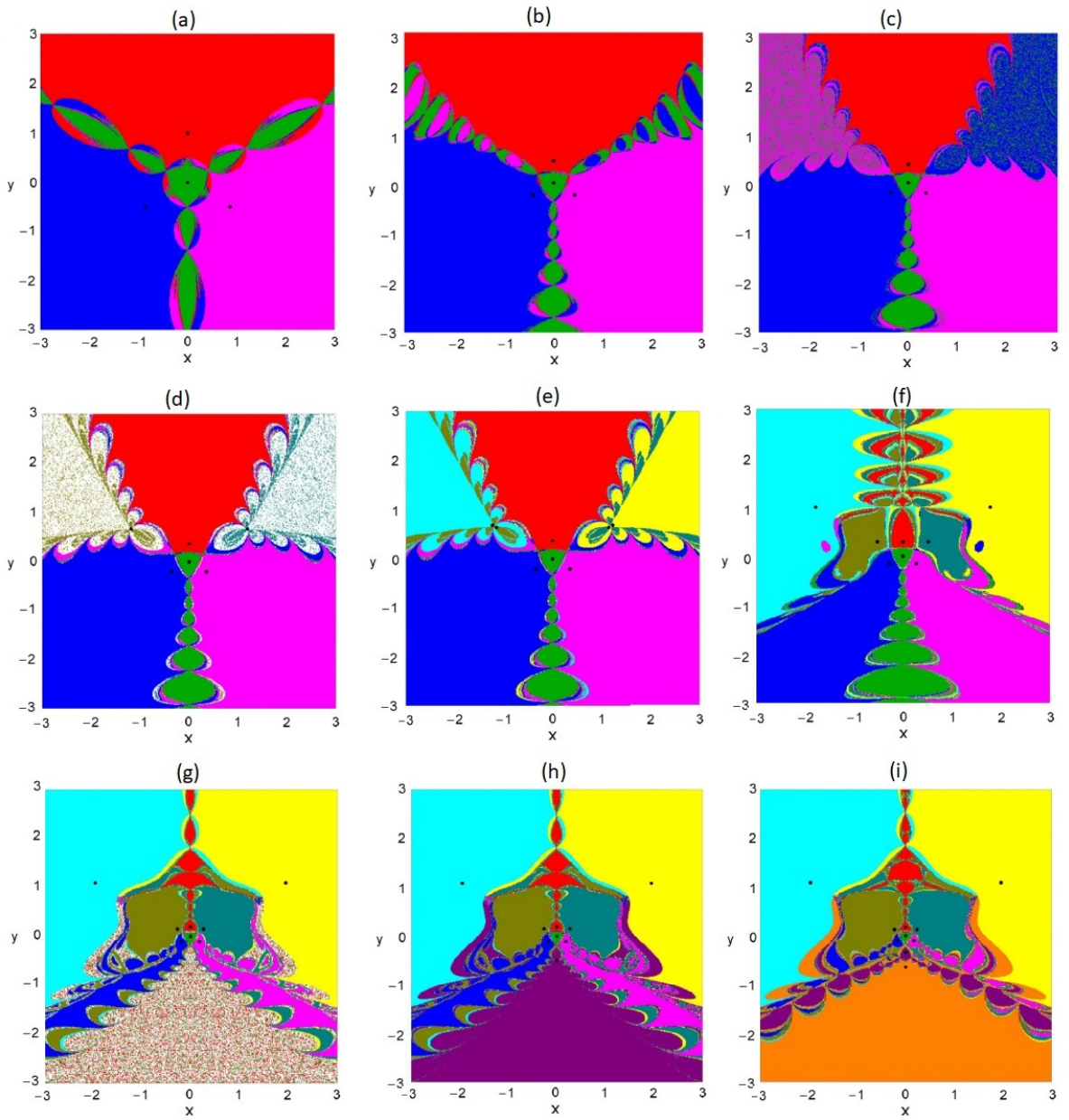


Figura 3.8: Cuencas de convergencia de Newton-Raphson en el plano de configuración (x, y) , con (a) $\delta = 0$, (b) $\delta = 0.4$, (c) $\delta = 0.75$, (d) $\delta = 0.768314$, (e) $\delta = 0.77$, (f) $\delta = 1.5$, (g) $\delta = 3.9999$, (h) $\delta = 4$, y (i) $\delta = 5$.

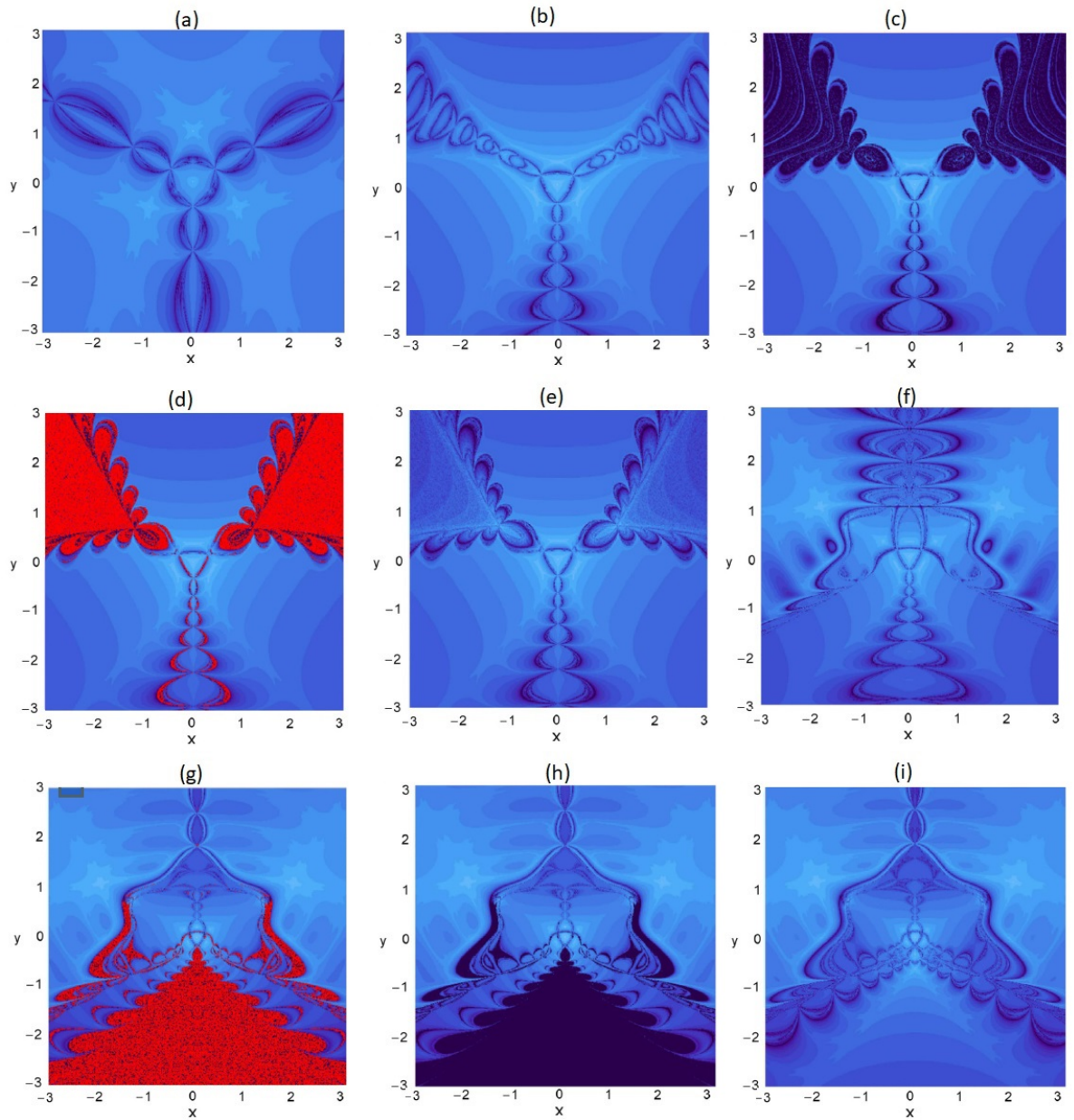


Figura 3.9: Distribución del número correspondiente N de las iteraciones requeridas para definir una cuenca de atracción de Newton-Raphson, para los paneles de la figura 3.8

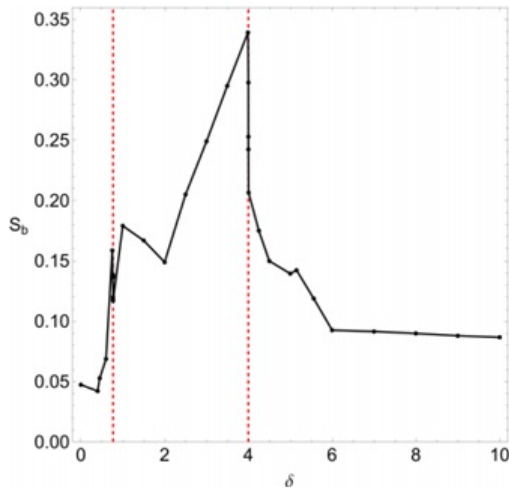


Figura 3.10: Evolución de la entropía de las cuencas S_b en función del parámetro de perturbación δ . Las líneas verticales indican los valores críticos de δ para los cuales el número total de puntos fijos cambia.

A modo de resumen de los resultados encontrados y para cuantificar la fractalidad observada en el sistema, en la figura 3.10, presentamos la evolución de la entropía de las cuencas para diferentes valores del parámetro de perturbación δ , con $\delta \in [0, 10]$. Estos resultados sugieren que la entropía de las cuencas aumenta en el intervalo $\delta \in [0, 4]$, mientras que para valores mayores de δ la entropía de la cuenca disminuye casi monótonamente. Es importante notar que en los valores críticos $\delta \approx 0.7683$ y $\delta = 4$, pequeñas variaciones en el parámetro de perturbación dan lugar a grandes cambios en la entropía de las cuencas. Por otro lado, se observa que los valores extremos de la entropía de las cuencas corresponden a valores de δ de aproximadamente 0 y 4. Esto nos permite concluir que la fractalidad asociada a las cuencas de convergencia de Newton-Raphson del sistema clásico Hénon-Heiles es menor que la del sistema generalizado de Hénon-Heiles.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se propuso un nuevo sistema dinámico que tiene como casos particulares a los sistemas hamiltonianos de Hénon-Heiles y Verhulst. Como característica particular, el nuevo sistema generalizado tiene una energía de escape finita, lo que permite estudiar la dinámica de las órbitas acotadas y no acotadas con tres canales de escape. El análisis dinámico del sistema se realizó mediante la solución del sistema de ecuaciones de Hamilton-Jacobi, para el cual determinados valores de energía clasifican el movimiento como acotado o no acotado.

Por medio del método de secciones de Poincaré, apoyado en el SALI y validado con el máximo exponente de Lyapunov, se demostró que las órbitas acotadas son principalmente regulares en todos los casos, siempre y cuando la energía orbital total del sistema sea mucho menor a la energía crítica para órbitas acotadas E_{min} . En el mismo sentido, el movimiento no acotado del sistema, se analizó a través de la estructura de las cuencas de salida en el espacio de configuraciones y la medición de la entropía de las cuencas, donde se demostró que las cuencas tienden a ser más suaves y definidas presentado un comportamiento menos caótico para todos los casos donde el valor de energía está por encima del valor crítico de energía E_{max} . De forma general para el movimiento acotado y no acotado se registra que las contribuciones de los nuevos términos contribuyen al comportamiento regular de las orbitas.

Finalmente, la dinámica global del sistema se estudió por medio de las cuencas de convergencia de Newton-Raphson. Más precisamente, se demostró como el parámetro de perturbación δ influencia la posición y la estabilidad de los puntos de equilibrio. Los dominios atractores encontrados con la version multivariada del esquema iterativo de Newton-Raphson juegan un rol significativo, pues ellos explican como cada punto del

espacio de configuraciones es atraído por los puntos fijos del sistema, lo cuales actúan en este contexto como atractores numéricos. Otro aspecto importante de este trabajo, fue la determinación de la relación entre las cuencas de convergencia y el correspondiente número de iteraciones requeridas. Se encontró que cerca de los valores críticos del parámetro de perturbación existen condiciones iniciales no convergentes y que para valores por debajo de dichos valores críticos las condiciones convergen a uno de los atractores solo después de un considerable número de iteraciones ($N \gg 500$). Las condiciones iniciales cercanas a los puntos de equilibrio mostraron la tendencia más rápida a converger ($0 < N < 10$).

5. RECOMENDACIONES

Una vez culminado el presente trabajo de grado, se considera interesante y pertinente continuar con estudios relacionados al análisis dinámico del sistema propuesto por Hénon-Heiles, siendo este un sistema representativo de los sistemas axialsimétricos conservativos con dos grados de libertad. En particular, las generalizaciones e inclusiones de nuevos parámetros que permitan obtener nueva información del sistema y la existencia o no de la tercera integral de movimiento, darían paso a nuevos horizontes de investigación en el campo de la dinámica no lineal.

Es de gran importancia y otorgaría un valor agregado a los profesionales en enseñanza de las ciencias, la formación con énfasis en la modelación y análisis de sistemas dinámicos, que en simbiosis con el conocimiento y manejo de las diferentes herramientas matemáticas para el cálculo y análisis de los mismos, ampliarían la visión y rango de acción, abriendo posibilidades reales para desarrollar estudios de posgrado a nivel de maestría y doctorado, para que desde un laboratorio o aula de clase logre contribuir al desarrollo de la ciencia.

BIBLIOGRAFÍA

- AGUIRRE, J.; VALLEJO, J. C.; SANJUÁN, M. A. Wada basins and chaotic invariant sets in the Hénon-Heiles system. *Physical Review E*, 2001, vol. 64, no 6, p. 066208.
- AGUIRRE, J.; VIANA, R.; SANJUÁN, M. Fractal structures in nonlinear dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 2009, vol. 81, no 1, p. 333.
- BARBANIS, B. Escape regions of a quartic potential. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1990, vol. 48, no 1, p. 57-77.
- BINNEY, J.; TREMAINE, S.: *Galactic dynamics*. Princeton university press (2011)
- BLESA, F. To escape or not to escape, that is the question - perturbing the Hénon-Heiles Hamiltonian. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012, vol. 22, no 06, p. 1230010.
- CLEARY, P. Lyapunov exponents as a measure of the size of chaotic regions. *Journal of mathematical physics*, 1989, vol. 30, no 3, p. 689-695.
- COCCOLO, M.; SEOANE, J.; SANJUÁN, M. Controlling unpredictability in the randomly driven Hénon-Heiles system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, vol. 18, no 12, p. 3449-3457.
- CONTOPOULOS G. *Order and chaos in dynamical astronomy*. Springer Science & Business Media; 2013 Mar 14.
- DAZA, A., WAGEMAKERS, A., GEORGEOT, B., GUÉRY-ODELIN, D., & SANJUÁN, M. A.. Basin entropy: a new tool to analyze uncertainty in dynamical systems. *Scientific reports*, 2016, vol. 6, p. 31416.
- DE ZEEUW, T. Motion in the core of a triaxial potential. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1985, vol. 215, no 4, p. 731-760.

- DUBEIBE, F. L. Cálculo del máximo exponente de Lyapunov con Mathematica. Revista Colombiana de Física, 2013, vol. 45, no 1.
- DUBEIBE, F. L.; BERMÚDEZ-ALMANZA, L. D. Optimal conditions for the numerical calculation of the largest Lyapunov exponent for systems of ordinary differential equations. International Journal of Modern Physics C, 2014, vol. 25, no 07, p. 1450024.
- DUBEIBE, F. L.; RIAÑO-DONCEL, A.; ZOTOS, E. E. Dynamical analysis of bounded and unbounded orbits in a generalized Hénon-Heiles system. Physics Letters A. 2018, vol. 382 no 13, p. 904-910; arXiv preprint arXiv:1712.01873, 2017.
- GUTZWILLER, M. Chaos in classical and quantum mechanics. Springer Science & Business Media, 2013.
- HAMILTON, I.; LIGHT, J. On distributed Gaussian bases for simple model multidimensional vibrational problems. The Journal of chemical physics, 1986, vol. 84, no 1, p. 306-317.
- HÉNON, M., HEILES, C. The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments. En: The Astronomical Journal, 1964, vol. 69, p. 73.
- HILBORN, C. Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers. Oxford University Press on Demand, 2000.
- JAFFE, C.; REINHARDT, W. Uniform semiclassical quantization of regular and chaotic classical dynamics on the Hénon-Heiles surface. The Journal of Chemical Physics, 1982, vol. 77, no 10, p. 5191-5203.
- LASKAR J.; ROBUTEL P.; JOUTEL F.; GASTINEAU M.; CORREIA A.; LEVRARD B. A long-term numerical solution for the insolation quantities of the Earth. Astronomy & Astrophysics. 2004 Dec 1;428(1):261-85.

- LYAPUNOV, A. The general problem of the stability of motion. *International journal of control*, 1992, vol. 55, no 3, p. 531-534.
- MAOZ, D.: *Astrophysics in a Nutshell: Second Edition*. Princeton university press (2016)
- SEOANE, M.; SANJUÁN, M.; LAI, Y. Fractal dimension in dissipative chaotic scattering. *Physical Review E*, 2007, vol. 76, no 1, p. 016208.
- SEOANE, J.; SANJUÁN, M. Exponential decay and scaling laws in noisy chaotic scattering. *Physics Letters A*, 2008, vol. 372, no 2, p. 110-116.
- SEOANE, J.; SANJUÁN, M. Escaping dynamics in the presence of dissipation and noise in scattering systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2010, vol. 20, no 09, p. 2783-2793.
- SKOKOS, C. Alignment indices: a new, simple method for determining the ordered or chaotic nature of orbits. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2001, vol. 34, no 47, p. 10029.
- TABOR, M. *Chaos and integrability in nonlinear dynamics: an introduction*. Wiley, 1989.
- VALDÉS, A. Poincaré, creador de los métodos todavía modernos en las ecuaciones diferenciales y en la mecánica celeste. *Arbor*, 2004, vol. 178, no 704, p. 669-689.
- VERHULST, F. Discrete symmetric dynamical systems at the main resonances with application to axi-symmetric galaxies. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* , 1979, vol. 290, no 1375, p. 435-465.
- ZOTOS, E. E. Fractal basins of attraction in the planar circular restricted three-body problem with oblateness and radiation pressure. *Astrophysics and Space Science*, 2016, vol. 361, no 6, p. 181.

- ZOTOS, E. E. Revealing the basins of convergence in the planar equilateral restricted four-body problem. *Astrophysics and Space Science*, 2017, vol. 362, no 1, p. 2.
- ZOTOS, E. An overview of the escape dynamics in the Hénon-Heiles Hamiltonian system. *Meccanica*, 2017, vol. 52, no 11-12, p. 2615-2630.
- ZOTOS, E. E. Determining the Newton-Raphson basins of attraction in the electromagnetic Copenhagen problem. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, vol. 90, p. 111-123.
- ZOTOS, E. E.; RIAÑO-DONCEL, A.; DUBEIBE, F. L. Basins of convergence of equilibrium points in the generalized Hénon-Heiles system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, vol. 99, p. 218-228.