ISSN 1816-0301 (Print)
ISSN 2617-6963 (Online)
УДК 519.17

Поступила в редакцию 27.06.2018
Received 27.06.2018

Т. В. Лубашева

Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ И РАСПОЗНАВАНИЕ ГРАФОВ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ РЕБЕР ТРИХРОМАТИЧЕСКИХ ГИПЕРГРАФОВ ОГРАНИЧЕННОЙ КРАТНОСТИ В КЛАССЕ РАСЩЕПЛЯЕМЫХ ГРАФОВ

Аннотация. Гиперграф, множество вершин которого можно разбить не более чем на k попарно непересекающихся подмножеств, каждое из которых имеет не более одной общей вершины с любым ребром гиперграфа, называется k-хроматическим. Кратность пары вершин гиперграфа – это число его ребер, содержащих обе вершины пары, тогда кратность гиперграфа – это максимальная кратность пар его вершин. Пусть $L^m(k)$ обозначает класс графов пересечений ребер k-хроматических гиперграфов кратности не выше m. Задача распознавания графов из $L^1(k)$ полиномиально разрешима при $k = 2$ и является NP-полной при $k = 3$. Вопрос о сложности распознавания графов из $L^m(k)$ при фиксированных $k \geq 2$ и $m \geq 2$ в настоящее время остается открытым.

Граф называется расщепляемым, если множество его вершин можно разбить на два непересекающихся подмножества, одно из которых является кликой, а другое – независимым множеством вершин. Для любого $k \geq 2$ графы из $L^1(k)$ характеризуются конечным списком запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов.

Ранее было доказано [1], что для графов из $L^2(3)$ существует конечная характеризация в терминах запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов. В настоящей работе этот результат обобщен на класс $L^m(3)$, где фиксированное $m \geq 2$. Важным следствием основного результата работы является полиномиальная разрешимость задачи распознавания $G \in L^m(3)$ в классе расщепляемых графов.

Ключевые слова: граф пересечений ребер гиперграфа, запрещенный порожденный подграф, характеризация, расщепляемый граф, k-хроматический гиперграф, раскраска

Для цитирования. Лубашева, Т. В. Характеризация и распознавание графов пересечений ребер трихроматических гиперграфов ограниченной кратности в классе расщепляемых графов / Т. В. Лубашева // Информатика. – 2018. – Т. 15, № 4. – С. 102–108.

T. V. Lubasheva

Belarus State Economic University, Minsk, Belarus

CHARACTERIZATION AND RECOGNITION OF EDGE INTERSECTION GRAPHS OF TRICHROMATIC HYPERGRAPHS WITH FINITE MULTIPLICITY IN THE CLASS OF SPLIT GRAPHS

Abstract. A hypergraph is called k-chromatic if its vertex set can be partitioned into at most k pairwise disjoint subsets when each subset has no more than two common vertices with every edge of the hypergraph. The multiplicity of a pair of vertices in a hypergraph is the number of hypergraph edges containing the pair of vertices. The multiplicity of a hypergraph is the maximum multiplicity of the pairs of vertices. Let $L^m(k)$ denote the class of edge intersection graphs of k-chromatic hypergraphs with multiplicity at most m. It is known that the problem of recognizing graphs from $L^1(k)$ is polynomially solvable if $k = 2$ and is NP-complete if $k = 3$. The complexity of the recognition of graphs from $L^m(k)$ for fixed $k \geq 2$ and $m \geq 2$ is currently unknown.

A split graph is a graph whose vertices can be partitioned into a clique and an independent set. It is known that for any $k \geq 2$ the graphs from $L^1(k)$ can be characterized by a finite list of forbidden induced subgraphs in the class of split graphs. It was earlier proved that there exists a finite characterization in terms of forbidden induced subgraphs for the graphs from $L^2(3)$ in the class of split graphs.

It is proved in the article that a finite characterization in terms of forbidden induced subgraphs for the graphs from $L^m(3)$ (for fixed $m \geq 2$) exists in the class of split graphs. In particular, it follows that the problem of recognizing graphs from $L^m(3)$, $m \geq 2$ is polynomially solvable in the class of split graphs.

Keywords: edge intersection graph of hypergraph, forbidden induced subgraph, characterization, split graph, k-chromatic hypergraph, coloring

For citation. Lubasheva T. V. Characterization and recognition of edge intersection graphs of trichromatic hypergraphs with finite multiplicity in the class of split graphs. *Informatics*, 2018, vol. 15, no. 4, pp. 102–108 (in Russian).

Введение. В работе рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Множество вершин и множество (семейство) ребер графа (гиперграфа) G обозначаются через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Если $N(v) = N_G(v)$ – окружение вершины v в графе G, то $\deg(v) = \deg_G(v) = |N(v)|$ – степень вершины v; $E_G(v)$ – множество ребер графа G, инцидентных v. Если $X \subseteq V(G)$, то $G(X)$ – подграф, порожденный множеством X, $\deg_X(v) = |N(v) \cap X|$ – степень вершины v относительно X.

Пусть t – натуральное число. Тогда произвольные функции $\varphi : V(G) \to \{1, 2, \ldots, t\}$ и $\psi : E(G) \to \{1, 2, \ldots, t\}$ называются соответственно вершинной и реберной t-раскрасками графа G. Если любые две смежные вершины графа имеют в вершинной t-раскраске различные образы, то такая раскраска называется правильной. Далее $\chi(G)$ обозначает хроматическое число графа G, т. е. минимальное t, при котором существует правильная вершинная t-раскраска этого графа.

Граф $\Omega(F)$ пересечений семейства $F = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ непустых множеств определяется следующими условиями:

1) $V(\Omega(F)) = F$;
2) вершины S_i и S_j, $i \neq j$, смежны в $\Omega(F)$, если и только если $S_i \cap S_j \neq \varnothing$.

Граф $L(H)$ пересечений ребер гиперграфа H определяется как граф пересечений $\Omega(E(H))$. Другими словами, вершины графа $L(H)$ биективно соответствуют ребрам гиперграфа H и две вершины в графе $L(H)$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие ребра гиперграфа H пересекаются. Известно, что каждый граф является графом пересечений ребер некоторого гиперграфа [2].

Гиперграф H называется *k-хроматическим*, если существует такое разбиение $V(H) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_l$ множества его вершин на $l \leq k$ цветных классов V_i, что каждое ребро гиперграфа содержит не более одной вершины из каждого цветного класса. Класс графов пересечений ребер k-хроматических гиперграфов обозначается $L(k)$. В работе [3] доказано, что если рассмотреть на графе систему независимости, состоящую из всех независимых множеств графа и пустого множества, то минимальное k, при котором граф лежит в классе $L(k)$, – это минимальное число матроидов, в виде пересечения которых представима такая система независимости. Данный факт позволяет применять к оптимизационным задачам на системе независимости графа технику матроидов.

В работе [4] класс $L(2)$ графов пересечений ребер дихроматических гиперграфов охарактеризован посредством бесконечного списка запрещенных порожденных подграфов. Существование полиномиального алгоритма распознавания графов из этого класса доказано в [5]. Там же доказано, что задача распознавания графов пересечений ребер трихроматических гиперграфов является NP-полной.

Кратность пары вершин гиперграфа определяется как число его ребер, содержащих обе вершины пары. *Кратность гиперграфа* – это максимальная кратность пар его вершин. Класс графов пересечений ребер k-хроматических гиперграфов кратности не выше m обозначим через $L^m(k)$. В работе [6] класс $L^1(2)$ охарактеризован посредством бесконечного списка запрещенных порожденных подграфов. Известно, что задача распознавания графов из $L^1(k)$ полиномиально разрешима при $k = 2$ и является NP-полной при $k = 3$ [5]. Вопрос о сложности распознавания графов из класса $L^m(k)$ при фиксированных $k \geq 2$ и $m \geq 2$ в настоящее время остается открытым.

Множество попарно смежных вершин графа называется кликой, максимальная клика максимальна относительно включения. Граф G называется расщепляемым [7–9], если существует разбиение множества его вершин $V(G) = C \cup S$ на клику C и независимое множество S (полярное разбиение (C, S)). Расщепляемый граф G с фиксированным полярным разбиением (C, S) назовем расщепленным графом и обозначим $G(C, S)$. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что в полярном разбиении (C, S) расщепляемого графа клика C является максимальной. Удалив из расщепленного графа $G(C, S)$ все ребра, содержащиеся в клике C, получим двудольный граф H с разбиением на доли (C, S), который назовем графом, ассоциированным с $G(C, S)$, и обозначим $H(C, S)$.

Известно, что для любого k класс $L^1(k)$ может быть охарактеризован посредством конечного списка запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов [10]. Также известен ряд результатов [11–13], касающихся характеризации и распознавания класса $L^1(k)$ в некоторых расширениях расщепляемых графов, в том числе в подклассах полярных графов, введенных в [14]. В работе [1] доказано, что для графов из $L^2(3)$ также существует конечная характеризация в терминах запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов.

В настоящей работе результат из [1] обобщен на класс $L^m(3)$, где $m \geq 2$. Отсюда, в частности, вытекает полиномиальная разрешимость задачи распознавания графов из $L^m(3)$ в классе расщепляемых графов.

Характеризация класса L^m(3) в терминах степеней вершин в специальных классах расщепляемых графов. Конечное семейство $Q = (C_i\colon\ i \in I)$ клик графа G называется покрытием этого графа, если каждая вершина и каждое ребро (как пара вершин) графа G содержатся в некоторой клике C_i – кластере покрытия Q. Покрытие Q графа G называется k-хроматическим, если $\chi(\Omega(Q)) \leq k$, и m-ограниченным, если никакие два его кластера не имеют более чем m общих вершин. В дальнейшем k-хроматическое m-ограниченное покрытие будет называться (k, m)-покрытием.

Положим, не ограничивая общности, что в (k, m)-покрытии Q никакой кластер не является подмножеством другого. В частности, одновершинный кластер в Q можно образовать лишь изолированной вершиной графа.

Лемма 1 [1]. *Граф G принадлежит классу $L^m(k)$ тогда и только тогда, когда существует (k, m)-покрытие этого графа.*

Клику K графа назовем (k, m)-*большой*, если $|K| \geq m(k-1)^2 + 1$.

Лемма 2 [14] (*о большой клике*). *Любая максимальная* (k, m)-*большая клика графа G является кластером каждого его (k, m)-покрытия.*

Зафиксируем произвольное $m \geq 2$ и далее будем рассматривать класс $L^m(3)$. Из определения (k, m)-большой клики при $k = 3$ вытекает, что всякая $(3, m)$-большая клика имеет порядок не меньше чем $m(3-1)^2 + 1 = 4m + 1$.

Теорема 1. *Пусть G – расщепляемый граф с полярным разбиением* (C, S), $|C| \geq 4m + 1$. *Тогда* $G \in L^m(3)$, *если и только если выполнены условия:*

1) $\deg_S(v) \leq 2$ *для любой вершины* $v \in C$;

2) $\deg(v) \leq 2m$ *для любой вершины* $v \in S$.

Доказательство. Пусть G – расщепляемый граф с полярным разбиением (C, S), $|C| \geq 4m + 1$. Не ограничивая общности, можно считать граф G связным.

Пусть $G \in L^m(3)$. Тогда в силу леммы 1 существует $(3, m)$-покрытие Q графа G. Поскольку C является $(3, m)$-большой кликой, то согласно лемме 2 $C \in Q$. Из определения $(3, m)$-покрытия вытекает, что кластерами покрытия Q, отличными от C, являются клики порядка не выше $m + 1$, в которых одна вершина принадлежит S, а остальные – C. Кроме того, каждая вершина графа G входит не более чем в два кластера из Q, отличных от C. Действительно, если некоторая вершина $v \in S$ принадлежит трем кластерам C_1, C_2 и C_3 из Q, то они не являются одновершинными и, следовательно, пересекаются с C. Таким образом, кластеры C, C_1, C_2 и C_3 попарно пересекаются, что невозможно по определению $(3, m)$-покрытия. Отсюда вытекает выполнение условий 1) и 2) теоремы 1.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть граф G удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 1. Согласно лемме 1 достаточно доказать, что существует $(3, m)$-покрытие этого графа.

По графу G построим граф G': для каждой вершины v графа G, принадлежащей S и удовлетворяющей неравенству $\deg(v) < 2m$, добавим в клику C ровно $2m - \deg(v)$ новых вершин и соединим их ребрами с v. Полученный в результате расщепляемый граф G' с полярным разбиением (C', S) удовлетворяет следующим условиям:

1′) $\deg_S(v) \leq 2$ для любой вершины $v \in C'$;

2′) $\deg(v) = 2m$ для любой вершины $v \in S$.

Легко показать, что графы G и G' одновременно либо принадлежат, либо не принадлежат классу $L^m(3)$. Поэтому далее, не ограничивая общности, считаем, что граф G удовлетворяет условиям 1′) и 2′).

Очевидно, что для расщепленного графа $G(C, S)$, $|C| \geq 4m + 1$, удовлетворяющего условиям 1′) и 2′), существует $(3, m)$-покрытие, если и только если для этого графа существует $(3, m)$-покрытие, в котором любые два кластера, содержащие вершину из S, больше не имеют общих вершин. Отсюда вытекает

Утверждение 1. *Для расщепленного графа* $G(C, S)$, $|C| \geq 4m + 1$, *удовлетворяющего условиям* 1′) *и* 2′), *существует* $(3, m)$-*покрытие, если и только если для ассоциированного с ним двудольного графа* $H(C, S)$ *существует реберная* 2-*раскраска, удовлетворяющая следующим условиям*:

а) каждая вершина из S *инцидентна* m *ребрам одного цвета и* m *ребрам другого цвета*;

б) каждая вершина степени 2 *из* C *инцидентна ребрам разного цвета*.

Реберную 2-раскраску двудольного графа H с фиксированным разбиением на доли (C, S) назовем сбалансированной, если она удовлетворяет условиям утверждения 1. Осталось доказать

Утверждение 2. *Если двудольный граф* H *с разбиением на доли* (C, S) *удовлетворяет условиям*:

1) $\deg(v) \leq 2$ *для любой вершины* $v \in C$;

2) $\deg(v) = 2m$ *для любой вершины* $v \in S$,

то для него существует сбалансированная реберная 2-*раскраска*.

Доказательство проведем методом математической индукции относительно числа вершин в доле S. Существование сбалансированной реберной 2-раскраски для графа H очевидно, если $|S| = 1$. Далее считаем, что $|S| \geq 2$. Зафиксируем произвольную вершину $v \in S$ и возьмем некоторую сбалансированную реберную 2-раскраску $\varphi : E(H - v) \to \{1, 2\}$ графа $H - v$. Заметим, что если среди ребер графа $H - v$, смежных с ребрами из $E_H(v)$, есть не более m ребер каждого цвета относительно φ, то раскраска φ может быть распространена на ребра из $E_H(v)$ до сбалансированной реберной 2-раскраски графа H.

Пусть среди ребер графа $H - v$, смежных с ребрами из $E_H(v)$, есть $m + l$ ребер одного цвета (считаем для определенности, что это цвет 2) и не более чем $m - l$ ребер другого (цвета 1), где $1 \leq l \leq m$. Распространим раскраску φ на ребра из $E_H(v)$ так, чтобы каждая висячая вершина графа H из $N_H(v)$ была инцидентна ребрам разного цвета. Тогда из $2m$ ребер множества $E_H(v)$ в точности $m + l$ ребер получат цвет 1 и $m - l$ ребер – цвет 2 (ребрам множества $E_H(v)$, инцидентным концевым вершинам графа H из $N_H(v)$, присвоим цвет 2).

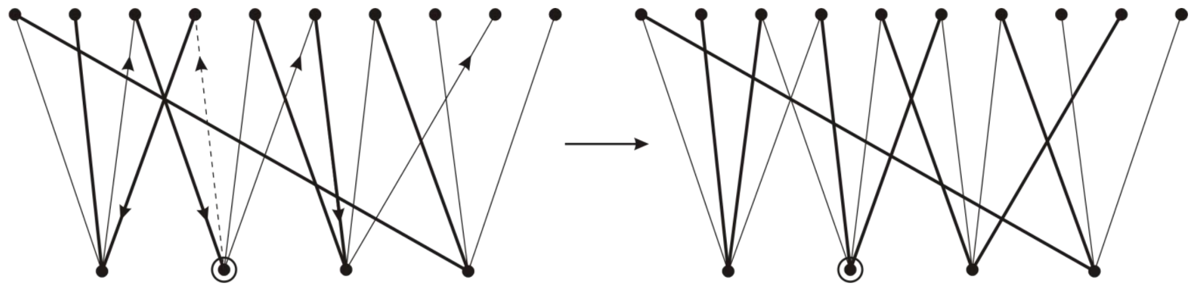
Построим в графе H цепь P, начинающуюся в вершине v, руководствуясь следующими правилами: в качестве первого ребра цепи выберем ребро цвета 1; каждое последующее ребро цепи будем выбирать цвета, отличного от цвета предыдущего ребра; процесс построения цепи продолжается, пока можно выбрать следующее ребро.

Процесс построения цепи P обязательно закончится, поскольку на каждом его шаге к текущей цепи добавляется новое ребро, а число ребер графа H конечно. Занумеруем ребра цепи в порядке их добавления. Тогда каждое ребро цепи с нечетным номером имеет цвет 1, а с четным – цвет 2. Поэтому цепь P не может завершиться в вершине из $S \setminus \{v\}$, поскольку каждая такая вершина имеет степень $2m$ и ей инцидентны m ребер каждого цвета. Эта цепь не может завершиться и в вершине v, поскольку в множестве $E_H(v)$ имеется $m - l$ ребер цвета 2 и, следовательно, в случае возврата в вершину v (а таких возвратов может быть не более $m - l$) остается возможность продолжить цепь за счет какого-либо из оставшихся ребер цвета 1 из $E_H(v)$.

Итак, построенная цепь P имеет нечетную длину, так как закончится в вершине из C. При этом последняя вершина цепи является висячей в графе H. (Висячая вершина в графе H обязательно существует, поскольку ребер, имеющих цвет 1, в этом графе больше, чем ребер, имеющих цвет 2.)

На ребрах построенной цепи P поменяем цвета 1 и 2 местами. Цвета остальных ребер оставим без изменения. Обозначим полученную реберную 2-раскраску графа H через ψ. Ясно, что сужение раскраски ψ на ребра графа $H - v$ остается сбалансированной реберной 2-раскраской этого графа, при этом первое ребро цепи P, принадлежащее $E_H(v)$, уже получит цвет 2 относительно ψ. Следовательно, среди ребер графа $H - v$, смежных с ребрами из $E_H(v)$, относительно раскраски ψ имеется в точности $m + (l - 1)$ ребер цвета 2 и не более чем $m - (l - 1)$ ребер цвета 1.

На рисунке изображен процесс построения описанной цепи и изменения раскраски вдоль нее. Снизу располагаются вершины из S, сверху – из C. Выделена вершина v. Ребра цвета 1 изображены обычными линиями, цвета 2 – жирными. Последовательность построения ребер цепи показана с помощью ориентированных ребер, пунктиром обозначено первое ребро цепи.



Построение сбалансированной раскраски графа H для $m = 2$ и $l = 1$

Повторим описанную выше процедуру построения начинающейся в вершине v цепи с чередующимися цветами ребер еще $l - 1$ раз для трансформации реберной 2-раскраски графа H. После этого в точности m ребер из $E_H(v)$ получат цвет 2 и будет построена сбалансированная реберная 2-раскраска графа H.

Утверждение 2 и, следовательно, теорема 1 доказаны.

Характеризация и распознавание класса $L^m(3)$ в классе расщепляемых графов.

Теорема 2. *В классе расщепляемых графов существует конечная характеризация графов из* $L^m(3)$ *в терминах запрещенных порожденных подграфов.*

Доказательство. Обозначим через F_i, $i = 1, 2, \ldots, 2m$, граф, состоящий из полного графа K_{4m+1} и вершины, смежной с $i + 2m$ вершинами из K_{4m+1}. Используя леммы 1 и 2, легко убедиться в том, что расщепляемые графы $K_{1,4}$, F_1, F_2, …, F_{2m} не принадлежат классу $L^m(3)$, а значит, являются запрещенными порожденными подграфами для графов из этого класса.

Пусть $G(C, S)$ – связный расщепленный граф, принадлежащий классу $L^m(3)$. Звезда $K_{1,4}$ является запрещенным порожденным подграфом для графов из $L^m(3)$, поэтому для любой вершины $w \in C$ имеем $\deg_S(w) < 4$. Пусть $N_S(w) = \{v_1, v_2, v_3\}$ для некоторой вершины $w \in C$. Поскольку графы F_1, F_2, …, F_{2m} являются запрещенными порожденными подграфами для графов из $L^m(3)$, то $\left|\bigcup_i N(v_i)\right| \le 1 + 3(2m-1) = 6m-2$ (здесь верхняя граница достигается в случае, когда множества $N(v_i) \setminus \{w\}$, $i = 1, 2, 3$, попарно не пересекаются). Если бы выполнялось условие $|C| > 6m - 2$, то G содержал бы запрещенную звезду $K_{1,4}$, что невозможно. Поэтому $|C| \le 6m - 2$. Поскольку для любой вершины $v \in C$ выполняется неравенство $\deg_S(v) < 4$, то $|S| \le 3|C|$ и, следовательно, $|G| = |C| + |S| \le |C| + 3|C| = 4|C| \le 24m - 8$. Обозначим через Γ множество связных расщепляемых графов порядка не выше $24m - 8$, не принадлежащих классу $L^m(3)$.

Для связного расщепленного графа $G(C, S)$, такого, что $|C| \ge 6m - 1$, запрещение порожденных подграфов $K_{1,4}$, F_1, F_2, …, F_{2m} обеспечивает выполнение условий теоремы 1. Таким образом, список запрещенных порожденных подграфов, определяющих принадлежность расщепляемого графа G классу $L^m(3)$, полностью исчерпывается графами из множества $\Gamma \cup \{K_{1,4}, F_1, F_2, \ldots, F_{2m}\}$ и, следовательно, является конечным, что и требовалось доказать.

Следствие. *Задача распознавания графов из класса* $L^m(3)$ *полиномиально разрешима в классе расщепляемых графов.*

Заключение. Доказана конечная характеризуемость класса графов пересечения ребер трихроматических гиперграфов ограниченной кратности в классе расщепляемых графов. Этот результат получен в терминах степеней вершин расщепляемых графов достаточно большой плотности. Приведена индукционная схема построения трихроматического m-ограниченного покрытия расщепляемого графа, если таковое существует. Существование конечного списка запрещенных порожденных подграфов обеспечивает полиномиальное распознавание класса $L^m(3)$ в классе расщепляемых графов.

Список использованных источников

1. Лубашева, Т. В. Характеризация и распознавание графов пересечений ребер 3-хроматических гиперграфов кратности не выше 2 в классе расщепляемых графов / Т. В. Лубашева, Ю. М. Метельский // Журнал Бел. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 94–99.

2. Berge, C. Hypergraphs. Combinatorics of Finite Sets / C. Berge. – Amsterdam, New-York, Oxford, Tokyo : North-Holland, 1989. – 528 p.

3. Tyshkevich, R. I. Matroidal decomposition of graph / R. I. Tyshkevich, O. P. Urbanovich, I. E. Zverovich // Combinatorics and Graph Theory. – 1989. – Vol. 25. – P. 195–205.

4. Тышкевич, Р. И. Графы с матроидным числом 2 / Р. И. Тышкевич, О. П. Урбанович // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1989. – № 3. – С. 13–17.

5. Метельский, Ю. М. Пересечения матроидов и реберные гиперграфы / Ю. М. Метельский, Р. И. Тышкевич // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2005. – Т. 13, № 2. – С. 44–54.

6. Harary, F. Line graphs of bipartite graphs / F. Harary, C. Holzmann // Rev. Soc. Mat. Chile. – 1974. – Vol. 1. – P. 19–22.

7. Тышкевич, Р. И. Каноническое разложение графа, определяемого степенями его вершин / Р. И. Тышкевич, А. А. Черняк // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1979. – Т. 5. – С. 14–26.

8. Földes, S. Congressus numerantium / S. Földes, P. L. Hammer // Winnipeg: Utilitas Math. – 1977. – Vol. XIX. – P. 311–315.

9. Földes, S. Split graphs having Dilworth number two / S. Földes, P. L. Hammer // Canadian Journal of Mathematics. – 1977. – Vol. 29, iss. 3. – P. 666–672.

10. Бабайцев, А. Ю. Линейная размерность расщепляемых графов / А. Ю. Бабайцев, Р. И. Тышкевич // Вес. Нац. акад. навук Беларусi. Сер. фiз.-тэхн. навук. – 1999. – № 1. – С. 112–115.

11. Еськов, В. В. К характеризации реберных графов линейных гиперграфов при дополнительных ограничениях / В. В. Еськов, Р. И. Тышкевич // Вес. Нац. акад. навук Беларусi. Сер. фiз.-тэхн. навук. – 2001. – № 2. – С. 122–126.

12. Лубашева, Т. В. О конечной характеризуемости графов с ограниченным числом эквивалентного разбиения в классах полярных графов / Т. В. Лубашева, Ю. М. Метельский // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2011. – Т. 19, № 1. – С. 85–91.

13. Лубашева, Т. В. Характеризация графов с ограниченным сверху числом эквивалентного разбиения в классе U-расщепляемых графов / Т. В. Лубашева, Ю. М. Метельский // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2007. – Т. 15, № 1. – С. 91–97.

14. Тышкевич, Р. И. Декомпозиция графов / Р. И. Тышкевич, А. А. Черняк // Кибернетика. – 1985. – № 2. – С. 67–74.

References

1. Lubasheva T. V., Metelsky Yu. M. Kharakterizatsiya i raspoznavanie grafov peresecheniy ryober 3-khromaticheskikh gipergrafov kratnosti ne vyshe 2 v klasse rasscheplyaemykh grafov [Characterization and recognition of edge intersection graphs of 3-chromatic hypergraphs with multiplicity at most then 2 in the class of split graphs]. Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika [*Journal of the Belarussian State University. Mathematics and Informatics*], 2017, no. 3, pp. 94–99 (in Russian).

2. Berge C. *Hypergraphs. Combinatorics of Finite Sets*. Amsterdam, New-York, Oxford, Tokyo, North-Holland, 1989, 528 p.

3. Tyshkevich R. I., Urbanovich O. P., Zverovich I. E. Matroidal decomposition of graph. *Combinatorics and Graph Theory*, 1989, vol. 25, pp. 195–205.

4. Tyshkevich R. I. , Urbanovich O. P. Graphy s matroidnym chislom 2 [Graphs with matroidal number 2]. Vestsi akademii navuk BSSR. Seryia fizika-matematychnykh navuk [*Proceedings of the Academy of Sciences of BSSR. Physics and Mathematics Series*], 1989, no. 3, pp. 13–17 (in Russian).

5. Metelsky Yu. M., Tyshkevich R. I. Peresecheniya matroidov i ryobernye gipergrafy [Matroid intersections and line hypergraphs]. Trudy Instituta matematiki Natsyonalnoi akademii nauk Belarusi [*Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*], 2005, vol. 13, no. 2, pp. 44–54 (in Russian).

6. Harary F., Holzmann C. Line graphs of bipartite graphs. *Revista de la Sociedad Matematica de Chile*, 1974, vol. 1, pp. 19–22.

7. Tyishkevich R. I., Chernyak A. A. Kanonicheskoe razlozhenie grafa, opredelyaemogo stepenyami ego vershin [The canonical decomposition of a graph defined by the degrees of its vertices]. Vestsi akademii navuk BSSR. Seryia fizika-matematychnykh navuk [*Proceedings of the Academy of Sciences of the BSSR. Physics and Mathematics Series*], 1979, vol. 5, pp. 14–26 (in Russian).

8. Földes S., Hammer P. L. Congressus numerantium. *Winnipeg: Utilitas Math.*, 1977, vol. XIX, pp. 311–315.

9. Földes S., Hammer P. L. Split graphs having Dilworth number two. *Canadian Journal of Mathematics*, 1977, vol. 29, iss. 3, pp. 666–672.

10. Babaitsev A. Yu., Tyshkevich R. I. Lineynaya razmernost rasscheplyaemykh grafov [Linear dimension of split graphs]. Vestsi Natsyyanalnai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-technichnych navuk [*Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*], 1999, no. 1, pp. 112–115 (in Russian).

11. Eskov V. V., Tyishkevich R. I. K kharakterizatsii ryobernykh grafov lineynykh gipergrafov pri dopolnitelnykh ogranicheniyakh [On characterization of edge graphs of linear hypergraphs under additional constraints]. Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-technichnych navuk [*Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*], 2001, no. 2, pp. 122–126 (in Russian).

12. Lubasheva T. V., Metelsky Yu. M. O konechnoy kharakterizuemosti grafov s ogranichennym chislom ekvivalentnogo razbieniya v klassakh polyarnykh grafov [About finite characterizability of graphs with a bounded number of equivalent decomposition in classes of polar graphs]. Trudy Instituta matematiki Natsyonal'noi akademii nauk Belarusi [*Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*], 2011, vol. 19, no. 1, pp. 85–91 (in Russian).

13. Lubasheva T. V., Metelsky Yu. M. Kharakterizatsiya grafov s ogranichennym sverkhu chislom ekvivalentnogo razbieniya v klasse U-rasscheplyaemykh grafov [Characterization of graphs with upper bound on the number of equivalent decomposition in the class of U-split graphs]. Trudy Instituta matematiki Natsyonal'noi akademii nauk Belarusi [*Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*], 2007, vol. 15, no. 1, pp. 91–97 (in Russian).

14. Tyishkevich R. I., Chernyak A. A. Dekompozitsiya grafov [Decomposition of graphs]. Kibernetika [*Cybernetics*], 1985, no. 2, pp. 67–74 (in Russian).

Информация об авторе

Лубашева Татьяна Владимировна – ассистент, Белорусский государственный экономический университет (пр. Партизанский, 26, 220070, Минск, Республика Беларусь). E-mail: lubasheva_t@mail.ru

Information about the author

Tatyana V. Lubasheva – Assistant, Belarus State Economic University (26, Partizanski Ave., 220070, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lubasheva_t@mail.ru