

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 519.6, 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-512-522

Динамические эффекты в решетчатых структурах, изготовленных с помощью аддитивных технологий¹

В. А. Левин, К. М. Зингерман, А. В. Вершинин, И. А. Подпрудников

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительная механика механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Зингерман Константин Моисеевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и вычислительной математики Тверского государственного университета (г. Тверь).

e-mail: zingerman@rambler.ru

Вершинин Анатолий Викторович — доктор физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной механики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: versh1984@mail.ru

Подпрудников Иван Андреевич — студент механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: ivanpodpr08@yandex.ru

Аннотация

В статье исследовано влияние структуры решетчатых конструкций на распространение упругих волн в них. Постановка задачи сформулирована в рамках линейной теории упругости при малых деформациях. Для решения задачи использован метод конечных элементов, реализованный в пакете прочностного анализа Fidesys. Смоделированы различные варианты плоских решетчатых структур: классическая решетка с прямолинейными прутьями и решетки с равномерно изогнутыми прутьями: лифтовая и звёздчато-круговая решетки. Исследована зависимость между структурой решетчатых конструкций и распространением возмущений в них. Выполнен анализ зависимости скорости распространения волн в изогнутых решетчатых конструкциях от частоты. Предложена прикладная концептуальная модель прибора, измеряющего частоты волн.

Ключевые слова: решетчатая конструкция, CAE Fidesys, частотная фильтрация волн.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:

В. А. Левин, К. М. Зингерман, А. В. Вершинин, И. А. Подпрудников. Динамические эффекты в решетчатых структурах, изготовленных с помощью аддитивных технологий // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 512–522.

¹Исследования для данной работы были проведены в рамках Федеральной программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в ООО "Фидесис" – соисполнителе работ в рамках Соглашения о предоставлении субсидии № 14.577.21.0271 (идентификатор проекта RFMEFI57717X0271).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 519.6, 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-512-522

Dynamic effects in lattice structures produced by additive technologies²

V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. V. Vershinin, I. A. Podpruzhnikov

Levin Vladimir Anatolyevich — Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Professor of the department of computational mechanics of the faculty of mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Zingerman Konstantin Moiseevich — Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of chair of mathematical modeling and computational mathematics, Tver State University (Tver).

e-mail: zingerman@rambler.ru

Vershinin Anatolij Victorovich — Doctor of physical and mathematical sciences, associate Professor of the department of computational mechanics of the faculty of mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: versh1984@mail.ru

Podpruzhnikov Ivan Andreevich — student of the faculty of mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: ivanpodpr08@yandex.ru

Abstract

The influence of lattice structures on the propagation of elastic waves in these structures is analyzed. The statement of problem is formulated within the framework of linear elasticity under small strains. To solve this problem, the finite element method and the Fidesys CAE-system were used. Different variants of plane lattice structures are modeled: the classical lattice and the lattice with uniformly curved strips across the plane: elevator and star-shaped lattices. The relation between the structure of lattice structures and the propagation of perturbations in these structures is analyzed. The dependence of wave velocity in curved lattice structures on the frequency of the emitted waves is analyzed. The applied conceptual model of the device for measuring the frequency of waves is developed.

Keywords: lattice structure, CAE Fidesys, frequency filtering of waves.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. V. Vershinin, I. A. Podpruzhnikov, 2019, "Dynamic effects in lattice structures produced by additive technologies", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 512–522.

²Research for this work was carried out within the framework of the Federal program "Research and development in priority areas of development of the scientific and technological complex of Russia for 2014-2020" with the financial support of the Ministry of education and science of the Russian Federation in LLC "Fidesis" - co-executor of the works under the agreement on the grant number 14.577.21.0271 (project ID RFMEFI57717X0271).

1. Введение

Аддитивные технологии позволяют создавать решетчатые структуры произвольной формы, варьируя геометрические параметры структуры. Такие конструкции широко используются для создания метаматериалов. Свойства метаматериала обусловлены не столько свойствами составляющих его элементов, сколько искусственно созданной периодической структурой из макроскопических элементов, обладающих произвольными размерами и формой [1]. С учетом развития технологии 3D печати, позволяющей создавать новые структуры буквально на глазах, становится очевидно, что новый виток технологического развития неразрывно связан с отраслью метаматериалов. Поэтому имеют смысл численные эксперименты, направленные на создание решетчатых структур со специальными свойствами, например, для фильтрации определенного частотного спектра.

Аналізу физико-механических свойств решетчатых структур посвящено большое количество публикаций. Например, в [2] предложен способ оценки остаточных напряжений при производстве имплантатов с использованием решетчатых структур. В [1] рассматривается распространение электромагнитных волн в метаматериалах. Динамические свойства решетчатых структур при распространении акустических волн исследованы в [3,4].

Целью данной работы является изучение влияния решетчатых структур на распространение акустических волн в решетчатых конструкциях разной конфигурации.

1.1. Постановка задачи

Постановка механической задачи:

Под решеткой понимается структура, состоящая из множества узлов равномерной квадратной сетки на плоскости и криволинейных упругих стержней постоянного сечения, соединяющих соседние узлы.

Предполагается, что оси всех стержней расположены в плоскости сетки и представляют собой дуги окружностей.

В одном из узлов на границе решетки задается точечная сила (рис. 1), величина которой меняется со временем по закону

$$U(t) = (\pi\alpha t e^{1-\pi\alpha t})^2 \sin(2\pi ft),$$

где f – частота, α – параметр, характеризующий амплитуду колебаний, t – время.

Сила – импульс Берлаге – действует в плоскости решетки и направлена по внутренней нормали $\vec{n} = (0, 1, 0)$ к границе решетки.

На рисунке выделена точка приложения силы и показано направление ее действия.

При расчетах система координат выбрана таким образом, что начало координат совпадает с одним из угловых узлов решетки до начала приложения силы, оси x и y параллельны линиям, соединяющим соседние узлы, а ось z перпендикулярна плоскости решетки.

Предполагается, что все стержни имеют одинаковую форму и постоянное круговое сечение толщины h .

Также предполагается, что решетка не закреплена, а также имеет одинаковые размеры по осям x и y .

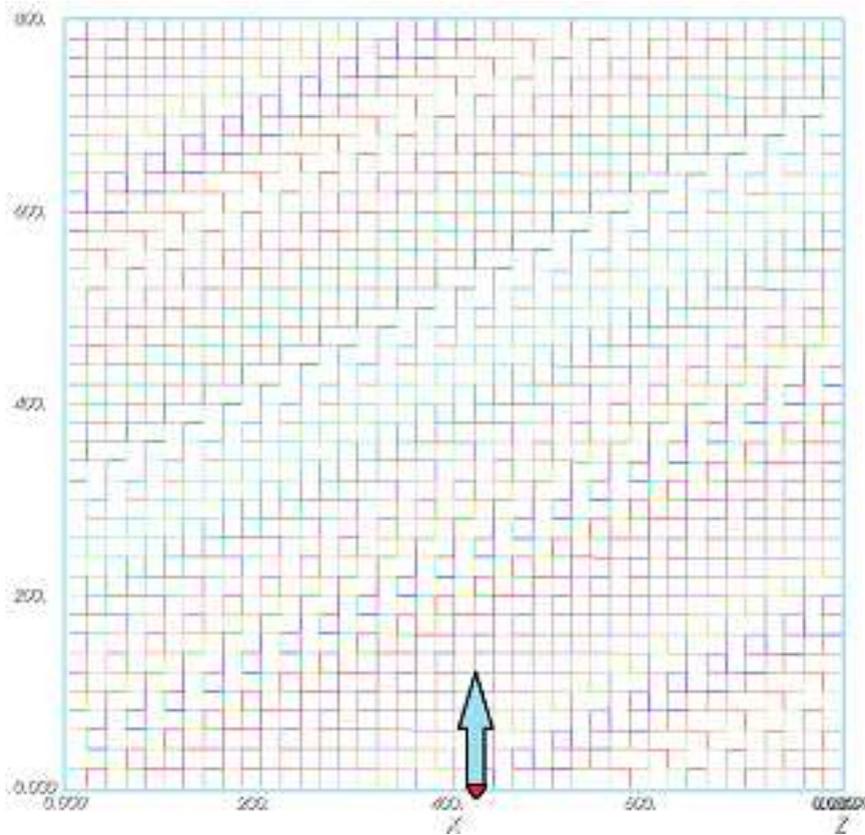


Рис. 1. Условия нагружения решетчатой структуры (стрелкой показано направление импульса и точка его приложения, отдельные стержни показаны различными оттенками).

Математическая постановка задачи осуществляется в рамках линейной теории упругости при малых деформациях [5-7] и включает следующие уравнения:

- Уравнения движения сплошной среды при отсутствии массовых сил:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

где $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$ – перемещения, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ – компоненты тензора напряжений, ρ – плотность.

- Закон Гука для изотропного линейно-упругого материала:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

где ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, δ_{ij} – символ Кронекера, λ и μ – постоянные Ламе, связанные с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν соотношениями

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

- Соотношения Коши (геометрические соотношения):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right)$$

Граничные условия соответствуют случаю отсутствия нормальных напряжений на поверхности стержней, за исключением точки приложения силы. Начальные условия соответствуют равенству нулю начальных перемещений и скоростей.

2. Описание решетчатых структур.

Расчеты были выполнены для решетчатых структур размерности 40x40. На рис. 2 показана форма кривой, соединяющей два соседних узла решетчатой структуры (это дуга OAB). Волнистость структуры характеризуется расстоянием c между серединой каждой дуги (точкой A на рис. 2) и серединой хорды, соединяющей концы этой дуги (точкой C на этом рисунке).

Как видно из рисунка, справедлива формула

$$c = R - \sqrt{R^2 - (a/2)^2}.$$

Здесь R – радиус дуги, a – расстояние между соседними узлами решетки.

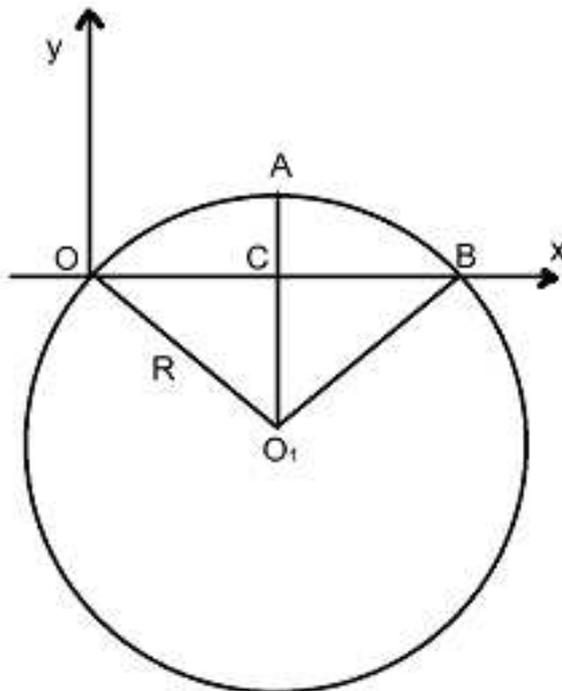


Рис. 2. Форма кривой, соединяющей соседние узлы решетчатой структуры.

Решение было получено для решеток двух типов – лифтовой и звездчато-круговой. Фрагменты этих решеток приведены на рис. 3.

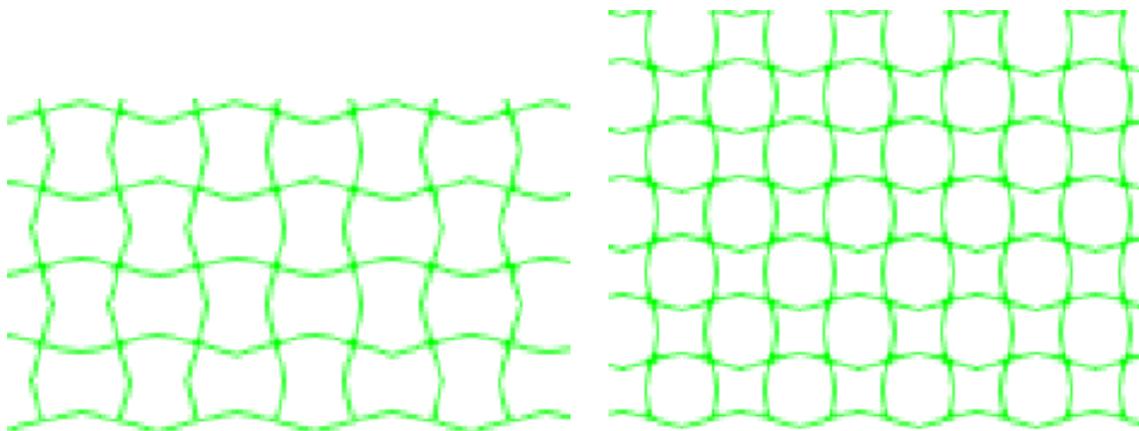


Рис. 3. Фрагменты лифтовой (слева) и звездчато-круговой (справа) решеток.

3. Результаты численных расчетов

Расчеты выполнены методом конечных элементов [6] с использованием системы инженерного анализа Fidesys. Использовались линейные балочные конечные элементы.

При задании исходных данных для решения задачи целесообразно использовать безразмерные величины: параметр волнистости $\zeta = c/a$, безразмерную толщину стержней $\gamma = h/a$, безразмерное время $\tau = tc_L/a$, нормализованную частоту $\Omega = fa/c_L$, где $c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость продольных волн в сплошной среде. Расчеты выполнялись при следующих значениях параметров: $\gamma = 0.0005$, $\zeta = 0.135$. В качестве материала был выбран алюминий: $E = 73$ ГПа, $\nu = 0.33$, $\rho = 2700$ кг/м³.

Расчеты проводились для трех типов решеток: решетки с прямолинейными стержнями, лифтовой и звездчато-круговой решеток. На рис. 4 показано распределение деформаций в один и тот же момент времени для этих трех решеток при $\Omega = 0.038$.

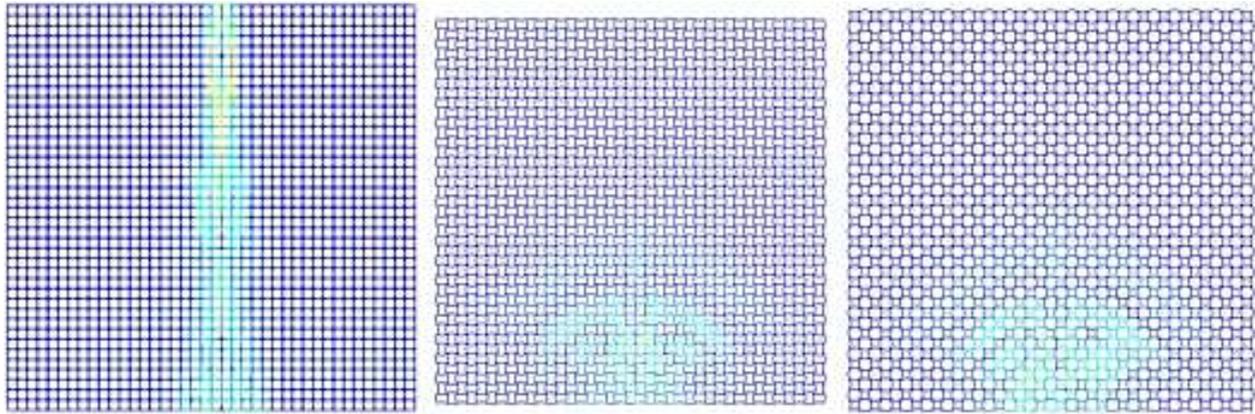


Рис. 4. Распределение деформаций в решетке с прямолинейными стержнями (слева), лифтовой решетке (в центре) и звездчато-круговой решетке (справа).

Из рисунка видно, что наиболее медленно волна распространяется в звездчато-круговой решетке. Для решетки этого типа были построены зависимости расстояния, на которое распространяется волна за заданное время $\tau = 340$, от нормализованной частоты. Эти зависимости приведены на рис. 5 для двух значений параметра волнистости: $\zeta = 0.135$ и $\zeta = 0.206$ (второе значение соответствует максимальной волнистости). Прямые на рисунке соответствуют линейной аппроксимации. Расстояние отнесено к параметру решетки a .

Как видно из графика, при увеличении нормализованной частоты волны в диапазоне от 0.0018 до 0.0061 расстояние увеличивается по закону, близкому к линейному. Также из рисунка видно, что большей волнистости соответствует меньшее расстояние, на которое распространяется волна за заданное время. Расчеты, выполненные при $\Omega = 0.004$ (при этой частоте деформация решетки максимальна), показали, что зависимость этого расстояния от параметра волнистости ζ также близка к линейной.

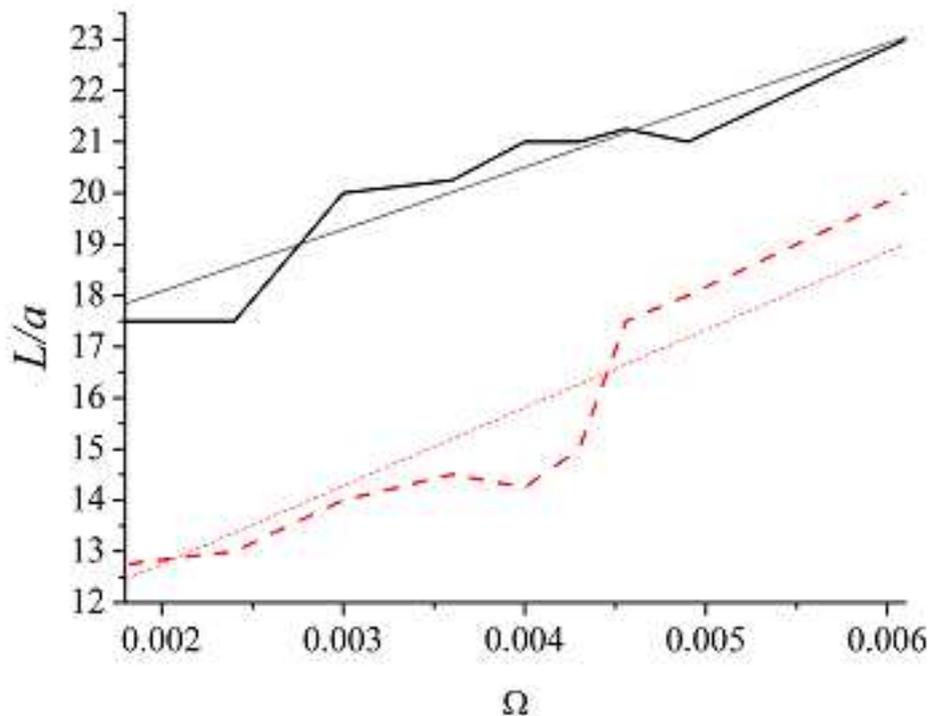


Рис. 5. Зависимости расстояния, на которое распространится волна, от нормализованной частоты. Сплошная линия – $\zeta = 0.135$, пунктирная – $\zeta = 0.206$. Прямые соответствуют линейной аппроксимации.

4. Подход к измерению частоты акустических колебаний

Из проведенных вычислительных экспериментов можно видеть, что зависимость расстояния, которое проходит волна в направлении действия точечной силы, от частоты колебаний является монотонной для криволинейных решеток, и это расстояние достаточно существенно зависит от частоты. Поэтому становится возможным приближенное определение частоты колебаний по времени, за которое волна проходит определенное расстояние. Например, можно воспользоваться устройством из двух решеток и двух датчиков на них, которое изображено на рис. 6. Решетки расположены параллельно друг другу. Силы, приложенные к каждой из решеток, должны быть одинаковыми. Видимо, примерное равенство этих сил можно обеспечить, если расстояние между решетками является малым. Решетки имеют различную волнистость или изготавливаются из разных материалов. В таком случае, если в фиксированный момент времени в датчике (красная точка) одной решетки есть возмущения, а в датчике другой решетки их нет, это означает, что частота находится в некотором диапазоне возможных значений, границы которого могут быть определены по данным вычислительных экспериментов. Чем ближе параметры решеток, тем меньше диапазон возможных значений частоты, а значит, тем выше точность измерения. Высокую точность изготовления решеток нужной кривизны можно обеспечить, используя аддитивные технологии.

В качестве датчика наличия возмущений можно использовать маленькую и легкую пластинку, которая является выключателем некоторой электрической цепи. Когда волна доходит до пластинки, последняя отклоняется, замыкая электрическую цепь. В эту цепь можно, например, включить лампу, которая будет загораться при наличии возмущений в узле, или

таймер.

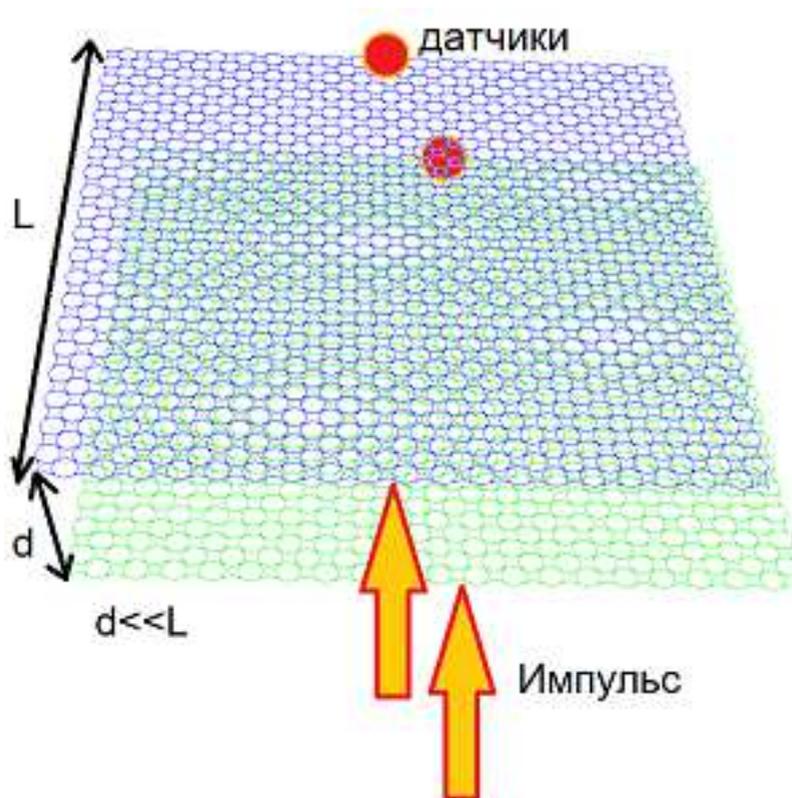


Рис. 6. Схема устройства измерительного прибора малых частот.

5. Заключение

В работе проведено моделирование динамических процессов в решетчатых структурах различных типов: в классической решетке с прямыми прутьями, лифтовой и звёздчато-круговой решетках с изогнутыми прутьями. Исследовано влияние структуры решетки на механизм распространения волны. Результаты вычислительных экспериментов показали, что наиболее существенное торможение волны обеспечивает звёздчато-круговая решетка. Передающиеся как по цепочке от одного узла решетки к другому колебания благодаря волнистости отклоняются от направления возмущающего воздействия.

Исследовано влияние частоты колебаний и параметра волнистости на скорость распространения волны в направлении действия возмущающей силы. Вычислительные эксперименты показали, что в тех диапазонах значений параметров, для которых проводились расчеты, зависимость этой скорости от частоты колебаний и параметра волнистости близка к линейной. На основании результатов исследований предложена концептуальная схема прибора для измерения частоты акустических колебаний, который может быть изготовлен с использованием аддитивных технологий.

Разработанный подход к численному моделированию можно использовать и для решения других задач. Например, можно определить геометрию наиболее прочной структуры (наиболее высокий предел текучести) всей решетки как единого целого при воздействии точечной силы. Представляет интерес расчет эффективных механических характеристик решетчатых структур с изогнутыми прутьями, в том числе при конечных деформациях, например, с использованием подходов, предложенных в [11-14]. Также существенным при исследовании волновых процессов в решетчатых структурах может быть учет остаточных напряжений, возникающих при их изготовлении с помощью аддитивных технологий [15-17]. Для этого могут

быть использованы математические модели, построенные на основе теории наложения конечных деформаций [18-21].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вендик И.Б., Вендик О.Г. Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот // Журнал технической физики. 2013. Т. 83, вып. 1. С. 3-28.
2. Ashby M.F., Gibson L.J. Cellular Solids: Structure and Properties. 2nd ed. Cambridge University Press. Cambridge, New York, 1997.
3. Phani A.S., Woodhouse J., Fleck N. Wave propagation in two-dimensional periodic lattices. J. Acoust. Soc. Am. 2006. V. 119 (4). P. 1995-2005.
4. Cheng L., Liang X., Bai J., Chen Q., Lemon J., To A. On utilizing topology optimization to design support structure to prevent residual stress induced build failure in laser powder bed metal additive manufacturing // Additive Manufacturing. 2019. V. 27. P. 290-304.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
6. Победря Б. Е., Георгиевский Д. В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 272 с.
7. Эглит М.Э. Лекции по механике сплошных сред. - М.: Издательство Московского университета, 2008. - 318 с.
8. Андреев В. Б. Лекции по методу конечных элементов (учебное пособие). – М.: МАКС Пресс, 2010. - 262 с.
9. Морозов Е.М., Левин В.А., Вершинин А.В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. М.: URSS, 2015. — 408 с.
10. Левин В. А., Вершинин А. В. Промышленный пакет для прочностного инженерного анализа // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань 20-24 августа 2015 г. Сборник докладов. – С. 2281–2283.
11. Бровка Г.Л., Ильюшин А.А. Об одной плоской модели перфорированных плит // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика. 1993. № 2. С. 83-91.
12. Levin V.A., Zingermann K.M. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains // Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME. 2003. V. 70, No. 6. P. 809-816.
13. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Composite Structures. 2015. V. 131. P. 25-36.
14. Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman, K.M., Sboychakov A.M., Yakovlev M.Y. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // Advances in Engineering Software. 2015. V.86. P. 80-84.
15. Roehling J.D., Smith W.L., Roehling T.T., Vrancken B., Guss G.M., McKeown J.T., Hill M.R., Matthews M.J. Reducing residual stress by selective large-area diode surface heating during laser powder bed fusion additive manufacturing // Additive Manufacturing. 2019. V. 28. P. 228–235.

16. Protasov C.E., Safronov V.A., Kotoban D.V., Gusarov A.V. Experimental study of residual stresses in metal parts obtained by selective laser melting // *Physics Procedia*. 2016. V. 83. P. 825-832.
17. Robinson J., Ashton I., Fox P., Jones E., Sutcliffe C. Determination of the effect of scan strategy on residual stress in laser powder bed fusion additive manufacturing // *Additive Manufacturing*. 2018. V. 23. P. 13-24.
18. Levin V.A. Theory of repeated superposition of large deformations: Elastic and viscoelastic bodies // *International Journal of Solids and Structures*, 1998. V. 35(20). P. 2585-2600.
19. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. The torsion of a composite, nonlinear-elastic cylinder with an inclusion having initial large strains // *International Journal of Solids and Structures*. 2014. V. 51. No. 6. P. 1403-1409.
20. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains // *International Journal of Solids and Structures*. 2015. V. 67-68. P. 244-249.
21. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. Multiple joined prestressed orthotropic layers under large strains // *International Journal of Engineering Science*. 2018. V. 133. P. 47-59.

REFERENCES

1. Vendik I. B., Vendik O. G. Metamaterials and their application in ultrahigh-frequency engineering // *Journal of technical physics*. V. 83, No. 1. P. 3-28.
2. Cheng L., Liang X., Bai J., Chen Q., Lemon J., To A. On utilizing topology optimization to design support structure to prevent residual stress induced build failure in laser powder bed metal additive manufacturing // *Additive Manufacturing*. 2019. V. 27. P. 290-304.
3. Phani A.S., Woodhouse J., Fleck N. Wave propagation in two-dimensional periodic lattices. *J. Acoust. Soc. Am.* 2006. V. 119 (4). P. 1995-2005.
4. Cheng L., Liang X., Bai J., Chen Q., Lemon J., To A. On utilizing topology optimization to design support structure to prevent residual stress induced build failure in laser powder bed metal additive manufacturing // *Additive Manufacturing*. 2019. V. 27. P. 290-304.
5. Sedov L.I. *Continuum Mechanics*. V. 2. Moscow: Nauka, 1970. 568 p.
6. Pobedrya B. E., Georgievskii D. V. *Fundamentals of continuum mechanics. Course of lectures*. - Moscow: FIZMATLIT, 2006. 272 p.
7. Eglit M. E. *Lectures on continuum mechanics*. - Moscow: Publishing House of Moscow University, 2008. - 318 p.
8. Andreev V. B. *Lectures on the finite element method (textbook)*. Moscow: MAX Press, 2010. - 262 p.
9. Morozov E. M., Levin V. A., Vershinin A.V. *Strength analysis. Fidesys in the hands of an engineer*. - Moscow: URSS, 2015. - 408 p.
10. Levin V. A., Vershinin A. V. Industrial package for engineering strength analysis // *Proceedings of XI all-Russian Congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics*. Kazan, August 20-24, 2015. P. 2281-2283.

11. Brovko G.L., Ilyushin A.A. On a plane model of perforated plates. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 1993. No. 2. P. 83-91.
12. Levin V.A., Zingermann K.M. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains // *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. 2003. V. 70, No. 6. P. 809-816.
13. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // *Composite Structures*. 2015. V. 131. P. 25-36.
14. Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman, K.M., Sboychakov A.M., Yakovlev M.Y. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // *Advances in Engineering Software*. 2015. V.86. P. 80-84.
15. Roehling J.D., Smith W.L., Roehling T.T., Vrancken B., Guss G.M., McKeown J.T., Hill M.R., Matthews M.J. Reducing residual stress by selective large-area diode surface heating during laser powder bed fusion additive manufacturing // *Additive Manufacturing*. 2019. V. 28. P. 228–235.
16. Protasov C.E., Safronov V.A., Kotoban D.V., Gusarov A.V. Experimental study of residual stresses in metal parts obtained by selective laser melting // *Physics Procedia*. 2016. V. 83. P. 825-832.
17. Robinson J., Ashton I., Fox P., Jones E., Sutcliffe C. Determination of the effect of scan strategy on residual stress in laser powder bed fusion additive manufacturing // *Additive Manufacturing*. 2018. V. 23. P. 13-24.
18. Levin V.A. Theory of repeated superposition of large deformations: Elastic and viscoelastic bodies // *International Journal of Solids and Structures*, 1998. V. 35(20) P. 2585-2600.
19. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. The torsion of a composite, nonlinear-elastic cylinder with an inclusion having initial large strains // *International Journal of Solids and Structures*. 2014. V. 51. No. 6. P. 1403-1409.
20. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains // *International Journal of Solids and Structures*. 2015. V. 67-68. P. 244-249.
21. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. Multiple joined prestressed orthotropic layers under large strains// *International Journal of Engineering Science*. 2018. V. 133. P. 47-59.

Получено 18.03.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.