ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-22-38

О методике оценки критических определителей в рамках вопроса оценки константы совместных диофантовых приближений [1]

Ю. А. Басалов

Басалов Юрий Александрович — аспирант кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена вопросам оценки константы совместных диофантовых приближений для n действительных чисел. В работе развивается подход, заложенный Г. Дэвенпортом и Дж. В. С. Касселсом. Г. Дэвенпорт обнаружил связь между значением критического определителя звездного тела и оценкой некоторых форм. В частном случае это позволяет, вычислив критический определитель $(n+1)$-мерного звездного тела Дэвенпорта

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1\le i\le n} |x_i|^n < 1,$$

получить значение константы совместных диофантовых приближений. Однако, вычисление критических определителей для тел такого вида является сложной задачей. Поэтому Дж. В. С. Касселс перешел от непосредственного вычисления критического определителя, к оценке его значения. Для этого он использовал оценку наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат, находящегося внутри $(n+1)$-мерного звездного тела

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} = \frac{1}{2^s}\prod_{i=1}^{s}|x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^{n}|x_i| < 1.$$

Эти результаты сводят задачу оценки константы совместных диофантовых приближений к оценке объема наибольшего параллелепипеда $V_{n,s}$. Ранее оценки для $V_{n,s}$ были получены в работах Дж. В. С. Касселса, Т. Кьюзика, С. Красса. Данная работа посвящена методике формирования гипотез о значениях $V_{n,s}$ на основе результатов численных экспериментов. В статье изложен подход к получению параллелепипедов, содержащихся внутри звездного тела и обладающих наибольшим объемом. Этот подход сочетает в себе использование как численных, так и аналитических методов.

Ключевые слова: наилучшие совместные диофантовы приближения, геометрия чисел, звездные тела, критические определители.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:
Ю. А. Басалов. О методике оценки критических определителей в рамках вопроса оценки константы совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 22–38.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант 19-41-710004_р_а).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-22-38

About the method of estimating critical determinants within the question of the estimation of the constant of simultaneous diophantine approximations [2]

Yu. A. Basalov

Basalov Yurij Aleksandrovich — Postgraduate Student, Department of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Pedagogical University of Leo Tolstoy (Tula).
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Abstract

This paper is devoted to the estimation of the constant of sumultaneous Diophantine approximations for n real numbers. The approach developed by H. Davenport and J. W. S. Cassels. H. Davenport discovered the connection between the value of the critical determinant of a star body and the estimation of some forms. In the particular case, this allows calculating the critical determinant of the $(n+1)$-dimensional star body of Davenport

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \le i \le n} |x_i|^n < 1,$$

get the value of the constant of joint Diophantine approximations. However, the calculation of critical determinants for bodies of this type is a difficult task. Therefore, J. W. S. Cassels moved from directly calculating the critical determinant, to estimating its value. For this, he used the estimate of the largest value of $V_{n,s}$ – the volume of a parallelepiped centered at the origin of coordinates located inside the $(n+1)$-dimensional star body

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^{s} |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^{n} |x_i| < 1.$$

These results reduce the problem of estimating the constant of joint Diophantine approximations to an estimate of the volume of the largest parallelepiped $V_{n,s}$. Earlier, estimates for $V_{n,s}$ were obtained in the works of J. W. S. Cassels, T. Cusick, S. Krass. This paper is devoted to methods of forming hypotheses about the values of $V_{n,s}$ based on the results of numerical experiments. The article outlines the approach to obtaining parallelepipeds contained within a star body and possessing the largest volume. This approach combines the use of both numerical and analytical methods.

Keywords: best joint Diophantine approximations, geometry of numbers, star bodies, critical determinants.

Bibliography: 21 titles.

For citation:
Yu. A. Basalov, 2019, "About the method of estimating critical determinants within the question of the estimation of the constant of simultaneous Diophantine approximations" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 22–38.

[2]The study was supported by RFBR (grant 19-41-710004_p_a).

1. Введение

Данная работа посвящена вопросам оценки константы совместных диофантовых приближений для n действительных чисел.

Мы будем следовать подходу Г. Дэвенпорта, Дж. В. С. Касселса. Г. Дэвенпорт [4] обнаружил связь между значением критического определителя (определение см. 5) звездного тела и оценкой некоторых форм. В частном случае это позволяет, вычислив критический определитель $(n+1)$-мерного звездного тела Дэвенпорта

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1\le i\le n} |x_i|^n < 1,$$

получить значение константы совместных диофантовых приближений. Однако, вычисление критических определителей для тел такого вида является сложной задачей. Поэтому Дж. В. С. Касселс [2] перешел от непосредственного вычисления критического определителя, к оценке его значения. Для этого он использовал оценку наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат, находящегося внутри $(n+1)$-мерного звездного тела

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} = \frac{1}{2^s}\prod_{i=1}^{s}|x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^{n} |x_i| < 1.$$

Параллелепипеды, имеющие объем $V_{n,s}$, в дальнейшем мы будем называть *наибольшими.*

Таким образом задача оценки константы совместных диофантовых приближений сводится к оценке *объема наибольшего параллелепипеда*. Оценки для $V_{n,s}$ были получены в работах Дж. В.С. Касселса [2], Т. Кьюзика [3], С. Красса [9, 10]. В работе [17] представлены оценки для $V_{5,2}$ и $V_{6,3}$. В данной работе мы сосредоточимся на методике формирования гипотез о значениях $V_{n,s}$ на основе результатов численных экспериментов. Будет изложен подход к получению параллелепипедов, содержащихся внутри звездного тела и обладающих наибольшим объемом.

2. Необходимые обозначения

Сформулируем задачу наилучших совместных диофантовых приближений n действительных чисел. Пусть

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$$

— произвольный вектор действительных чисел. Нас будут интересовать приближения $\vec{\alpha}$ рациональными дробями

$$\frac{\vec{p}}{q} = \left(\frac{p_1}{q},\ \frac{p_2}{q},\ \ldots,\ \frac{p_n}{q}\right).$$

Определение 1. *Мерой качества совместных приближений первого рода вектора $\vec{\alpha}$ рациональным вектором $\vec{p}/q$ называется величина*

$$D(\vec{\alpha}, \vec{p}/q) = \max_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n.$$

Определение 2. *Константой наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x})$ для вектора $\vec{x}$ называется точная нижняя грань величины C, для которой существует бесконечное число рациональных векторов $\vec{p}/q$, удовлетворяющих неравенству*

$$D(\vec{x}, \vec{p}/q) < C.$$

Определение 3. *Константой наилучших диофантовых приближений C_n называется точная верхняя грань числа $C(\vec{x})$ по всем векторам $\vec{x}$ размерности n:*

$$C_n = \sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^s} C(\vec{x}).$$

Напомним некоторые понятия из геометрии чисел.

Определение 4. *Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – линейно независимые точки вещественного евклидова пространства. Множество всех точек*

$$x = u_1 a_1 + \ldots + u_n a_n$$

с целыми коэффициентами $u_1, \ldots, u_n$ называется решеткой Λ. Величина

$$d(\Lambda) = |\det(a_1, \ldots, a_n)|$$

называется определителем решетки Λ.

Определение 5. *Пусть $\mathbb{F}$ – точечное тело. Если решетка Λ не имеет в $\mathbb{F}$ отличных от $\mathbb{O}$ точек ($\mathbb{O} \in \mathbb{F}$), то Λ допустима для $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$-допустима. Точную нижнюю грань*

$$\Delta(\mathbb{F}) = \inf d(\Lambda)$$

определителей $d(\Lambda)$ всех $\mathbb{F}$-допустимых решеток Λ называют критическим определителем множества $\mathbb{F}$. Если $\mathbb{F}$-допустимых решеток нет, то $\mathbb{F}$ является множеством бесконечного типа и $\Delta(\mathbb{F}) = \infty$.

Определение 6. *Под звездным телом понимают множество, обладающее следующими свойствами*

- *существует точка, называемая "началом", которая является внутренней точкой множества;*
- *любой луч, выходящий из "начала", либо не пересекается с границей множества, либо имеет с ней только одну общую точку.*

Г. Дэвенпортом[4] был получен следующий фундаментальный результат.
Пусть $\mathbb{F}_n$ – это $(n+1)$-мерное звездное тело

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1\le i\le n} |x_i|^n < 1,$$

а $\Delta\mathbb{F}$ – его критический определитель. Тогда

Теорема 1.

$$C_n = \frac{1}{\Delta\mathbb{F}_n}. \tag{1}$$

Доказательство. См. [18]. □
Дж. В.С. Касселс [2, 3] получил следующую оценку для $\Delta\mathbb{F}_n$.

Теорема 2. *Пусть*

$$f_{n,s} = \frac{1}{2^s}\prod_{i=1}^{s}|x_i^2 + x_{s+i}^2|\prod_{i=2s+1}^{n}|x_i|. \tag{2}$$

и $2^n V_{n,s}$ *объем наибольшего пареллелипипеда с центром в начале координат, содержащегося внутри фигуры*

$$f_{n,s} \leq 1. \tag{3}$$

Пусть $\Delta_{n,s}$ *наименьшее абсолютное значение дискриминанта действительного поля степени* $n+1$, *которое имеет* s *пар комплексно-сопряженных алгебраических чисел (то есть* $2s \leq n+1$*). Тогда*

$$\Delta\mathbb{F}_n \leq \sqrt{\Delta_{n,s}}/V_{n,s}, \tag{4}$$

или же

$$C_n \geq V_{n,s}/\sqrt{\Delta_{n,s}}. \tag{5}$$

Доказательство. См. [3]. $\square$

Значения $\Delta_{n,s}$ известны для обширного количества n (см. [21]). Тем самым, как уже отмечалось выше, теорема 2 сводит задачу оценки снизу константы совместных диофантовых приближений к оценке снизу $V_{n,s}$. Ранее были получены следующие оценки

$$\begin{array}{cc} V_{2,0} = 2, V_{2,1} = 1 & \text{(Дж. В.С. Касселс) [2]} \\ V_{3,1} = 2,\ V_{3,0} = \frac{3^{3/2}}{2} & \text{(Т. Кьюзик) [3]} \\ V_{4,2} \geq \frac{16}{9},\ V_{4,1} \geq 2,\ V_{4,0} \geq 4 & \text{(С. Красс) [9, 10]} \\ V_{5,2} \geq 2.3932\ldots & \text{(С. Красс) [10]} \end{array} \tag{6}$$

Из этих значений можно получить следующие оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений

$$C_2 \geq \frac{2}{7}, \qquad C_3 \geq \frac{2}{\sqrt{275}}, \qquad C_4 \geq \frac{16}{9\sqrt{1609}}. \tag{7}$$

Более подробно с историей оценок константы совместных диофантовых приближений можно ознакомиться в работе [16].

Заметим, что две последние оценки (7) получаются из (5) при подстановке $s = [n/2]$. Поэтому в дальнейшем мы сосредоточимся на оценке $V_{n,[n/2]}$.

3. Предварительные рассуждения

Рассмотрим матрицу n-ого порядка

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

и

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbb{E}$ – это n-мерный единичный куб, состоящий из точек

$$\vec{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n), \qquad 0 \le e_i \le 1, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Матрица A преобразует его в n-мерный параллелепипед

$$\mathbb{A} : \vec{a} = A \cdot \vec{e} \tag{9}$$

Заметим, что описанным выше образом каждому n-мерному параллелепипеду соответствует матрица A. Объем этого параллелепипеда равен $2^n \det A$.

Пусть $\mathbb{F}_{n,s}$ – это n-мерное звездное тело

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} \le 1,$$

где $f_{n,s}$ это (2).

В рамках оценки $V_{n,s}$ нас будут интересовать параллелепипеды $\mathbb{A}$, находящиеся внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$. Можно предложить следующий метод проверки того, находится ли $\mathbb{A}$ внутри $\mathbb{F}_{n,s}$ или нет. Составим оптимизационную задачу

$$\begin{array}{c} f_{n,s} \to \max, \\ |b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n| \le 1, \\ |b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n| \le 1, \\ \cdots \\ |b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n| \le 1. \end{array} \tag{10}$$

Если решение задачи ≤ 1, то параллелепипед $\mathbb{A}$ полностью лежит внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, в противном случае, часть его находится вне звездного тела. Таким образом, задача определения, лежит ли параллелепипед $\mathbb{A}$ внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, сводится к задаче многомерной оптимизации. Очевидно, что если параллелепипед $\mathbb{A}$ лежит внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, имеет место оценка

$$V_{n,s} \ge \det A. \tag{11}$$

Нашей целью является построение матрицы A такого вида, чтобы задача (10) имела решение $\max f_{n,s} \le 1$. Параллелепипеды $\mathbb{A}$ для которых $\det A$ "велико" будем называть *наибольшими*. Соответствующую наибольшему параллелепипеду матрицу мы также будем называть *наибольшей*. Таким образом, задача нахождения наибольшего параллелепипеда также является оптимизационной задачей.

4. Численные эксперименты

В рамках исследования были проведены вычислительные эксперименты по численному нахождению наибольших значений $V_{n,s}$. Это стало возможным, потому что исходная задача свелась к композиции оптимизационных задач. В качестве инструмента численных исследований был выбран математический пакет `Wolfram Mathematica`.

Идея эксперимента состоит в следующем. Будем производить направленный перебор матриц A (см. (8)) с целью найти матрицу, обладающую наибольшим $\det A$ и удовлетворяющую условию (10). Процесс перебора следующий: построим "сетку" из коэффициентов матрицы и будем постепенно сужать ее в сторону, соответсвующую большим значениям $\det A$.

Такой подход имеет право на существование по следующим причинам:

- Во-первых, небольшое изменение параметров параллелепипеда $\mathbb{A}$ приводит к небольшому изменению значения $\max f_{n,s}$ на нем. Это позволяет применить к задачи итерационные методы поиска экстремума. Например, деление попалам. Применение градиентных методов в данном случае невозможно, так как нам ничего неизвестно об аналитическом представлении оптимизируемой функции

$$F^*(A) = |\det A|, \quad \text{при условии } \max_A f_{n,s} \leq 1.$$

Для сужения интревала поиска мы будем использовать следующую эвристику – делим текущий интервал на три части (пусть длина части равна h_i) по каждому измерению, находим среди полученных точек точку, где значение $F^*(A)$ максимально, строим вокруг этой точки параллелепипед со сторонами $2h_i$ и продолжаем поиск в нем.

Отметим, что в первой итерации целесообразно делить текущий интервал не на три, а на большее число частей.

- Самой сложной подзадачей которую необходимо решить в рамках работы алгоритма является нахождение $\max\limits_A f_{n,s}$ – это задача оптимизации нелинейной функции при линейных ограничениях. Как показывает практика, она может быть достаточно успешна решена с помощью системы компьютерной алгебры `Wolfram Mathematica`. Подробнее этот вопрос рассматривается в разделе 4.1.

Заметим также, что в общем случае описанный выше подход не гарантирует сходимости к локальному экстремуму и соотвественно не позволяет найти абсолютное наибольшее значение $V_{n,s}$ для какой-то конкретной размерности. С другой стороны, этот подход позволяет получить предварительные результаты и выдвинуть гипотезы о структуре наибольшего параллелепипеда $\mathbb{A}$.

4.1. Методика оценки $\max f_{n,s}$

Отдельный вопрос встает о проверке допустимости конкретного параллелепипеда $\mathbb{A}$ (находится ли $\mathbb{A}$ внутри звездчатого тела $\mathbb{F}_{n,s}$.). Как уже отмечалось выше, для этого достатчно решить задачу (10). На практике выяснилось, что математический пакет `Wolfram Mathematica`, не всегда корректно может решить данную оптимизационую задачу. Далее мы опишем технические проблемы возникшие в процессе численного решения задачи (10).

Так как нам необходимо найти максимум значения функции, мы использовали метод `NMaximize` $f_{n,s}$. Помимо оптимизируемой функции и ограничений он имеет следующие параметры

- `AccuracyGoal` и `PrecisionGoal` – точность полученного результата;
- `WorkingPrecision` – точность вычислений;
- `Method` – метод, возможные варианты `DifferentialEvolution`, `NelderMead`, `SimulatedAnnealing`, `RandomSearch`.

Потенциальными способами повысить точность полученного результата являестя изменение этих параметров. Повышение `AccuracyGoal, PrecisionGoal, WorkingPrecision` на практике не имеет особого смысла так как, во-первых, значительно увеличивает время выполнения `NMaximize`, а во-вторых, чаще всего не решает проблемы сходимости к "неправильному" локальному минимуму. Этот эффект достатночно наглядно иллюстрируется на задаче

$$g(x, y) = -x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \to \min, \qquad x^2 + y^2 \leq 4$$

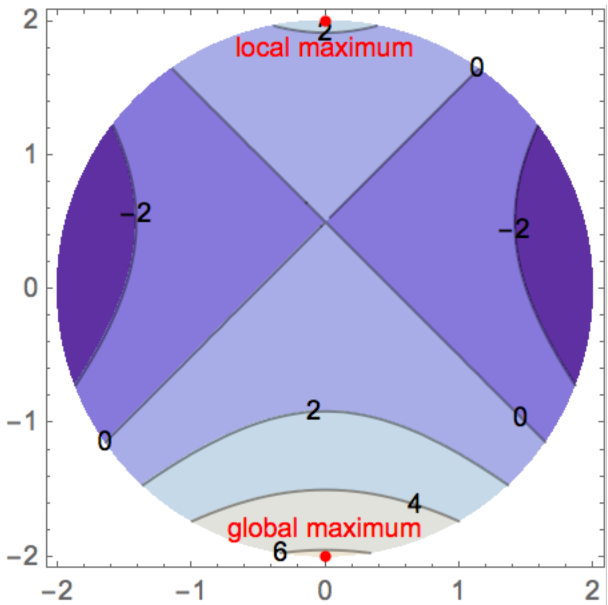

Рис. 1: Пример нескольких локальных минимумов

График значений функции $g(x, y)$ изображен на рисунке 1. На нем видно, что в данной области существует два локальных минимума, и оптимизационные алгоритмы теоретически могут сходиться к любому из них.

Теперь остановимся на зависимости результата оптимизации от параметра `Method`. Выяснилось, что в случае задач типа (10) результаты могут значительно различаться. Например, для задачи

$$f = -\frac{1}{4}c\left(-y_4 + y_5\right)\left(a^2y_1^2 + b^2\left(-y_2 + y_3\right)^2\right)\left(b^2\left(y_2 + y_3\right)^2 + c^2\left(y_4 + y_5\right)^2\right),$$

$$\text{где } a = 0.657,\ b = 1.138,\ c = 0.893,$$

$$-1 \leq y1 \leq 1,\ -1 \leq y2 \leq 1,\ -1 \leq y3 \leq 1,\ -1 \leq y4 \leq 1,\ -1 \leq y5 \leq 1$$

результаты имеют следующий вид

Метод	Значение	Точка
`DifferentialEvolution`	1.18409	(-1, -1, -1, 0.3333, 1)
`NelderMead`	1.04968	(1, -0.2113, -1, -1, 1)
`SimulatedAnnealing`	1.18409	(1, 1, -1, -1, -0.3333)
`RandomSearch`	1	(-1, -1, -1, -1, 1)

Поэтому было решено: во-первых отказаться от использования методов `NelderMead` и `RandomSearch`, а во-вторых – производить предварительную проверку значений $f_{n,s}$ в вершинах, на ребрах и диагоналях паралеллипипеда. Это позволяет, во-первых отсечь значительную часть некорректных значений, даже не решая оптимизационную задачу (на решение этой задачи требуется значительное количество ресурсов, поэтому такой подход также является и оптимизацией скорости), а во-вторых это может нивелировать ошибки возможные при работе функции `NMaximize`.

Полную программную реализацию экспериментов можно найти в работе [16].

4.2. Результаты численных экспериментов

В результате экспериментов, проводимых для размерностей 3 и 4, выяснилось, что существует множество наибольших матриц (а соотвественного и параллелепипедов) с одинаковыми $\det A$. Поэтому было произведенно исследование с целью получить наибольшую матрицу A с наиболее простой структурой. Оказалось, что можно найти наибольшую матрицу A следующего вида (примеры таких матриц см. в пункте 5)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k & a_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_k & a_k \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Стоит отметить следующие моменты [17].

Во-первых, исходя из вида матрицы A, можно описать структуру параллелепипеда $V_{n,s}$ – все его грани прямоугольники (причем часть из них – квадраты), ребра либо параллельны осям координат, либо образуют с ними угол $45°$.

Во-вторых, уже для $n = 7$ наибольшая матрица A_7^* может быть получена как комбинация наибольших матриц A_3^* и A_4^* (точные их значения см. в разделе 5)

$$A_3^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ 0 & -\alpha_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

$$A_4^* = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_2 & \sqrt{2}\alpha_2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_2 & \sqrt{2}\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

$$A_7^* = \left(\begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 & \alpha_3 \end{matrix} \\ \underbrace{\qquad}_{A_3^*}\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{A_4^*}\underbrace{\qquad\quad}_{A_3^*} \end{array} \right).$$

Вообще, для $n > 6$, скорее всего, матрицу A_n^* можно получить из A_{n-4}^* и A_4^*. Этот факт схож с результатом, полученным С. Крассом [9]

$$V_{n,s}V_{n',s'} \le V_{n+n',s+s'}, \qquad (13)$$

только вместо знака неравенства здесь стоит равенство. Поэтому, нас в дальнейшем будут интересовать только оценки для $n \le 6$, а именно $V_{3,1}$, $V_{4,2}$, $V_{5,2}$ и $V_{6,3}$.

5. Вывод значений A_n

Основной интерес для нас представляют не численные значения матриц A_n, а их аналитические представления. Для их нахождения поступим следующим образом. Можно постараться определить точки, в которых наибольший параллелепипед $\mathbb{A}_n$ “касается” звездного тела $\mathbb{F}_{n,[n/2]}$, выписать в этих точках граничные условия и на основании этих условий получить параметры параллелепипеда $\mathbb{A}_n$.

Начнем с рассмотрения случая $n = 3$. В этом случае в результате численных экспериментов была найдена матрица

$$A_3^N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу вида (12)

$$A_3^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

Посторим задачу обратную (10). Выберем набор точек в которых $f_{3,1}$ должна быть ≤ 1 (Если выбрать в качестве него все точки $\mathbb{A}_3^*$ (набор δ_{max}), то матрица гарантировано будет удовлетворять задаче (10)). При фиксированном наборе δ_0 точек будет максимизировать значение $\det A_3^*$. Если $\det A_3^*$ совпадет с $\det A_3$ наибольшей матрицы для $n = 3$, это будет означать, что можно перейти при проверке задачи (10) от набора δ_{max} к набору δ_0. Сужая набор δ_0 до минимума, мы получим граничные точки в которых $f_{3,1} = 1$.

Было решено начать с набора точек δ_1 со значениями координат $-1, 0, 1$ (на единичном кубе, единичный куб с помощью преобразования (9) приводится к $\mathbb{A}_3^*$). Программа, проверяющая этот набор точек, на языке `Wolfram Mathematica` имеет вид

```
transform = {{a, 0, 0}, {0, b, b}, {0, -b, b}};
f31 = Function[{x1, x2, x3}, (x1^2 + x2^2)*x3/2];
m = {Det[transform]};
Do[AppendTo[m, Abs[Apply[f31, transform. point]] <= 1],
    {point, Tuples[{-1, 0, 1}, 3]}];
NMaximize[m, {a, b}]
```

ее результат

```
{2., {a -> 0.999978, b -> 1.00001}}
```

Опытным путем было выявлено, что в если в качестве граничных точек взять набор только из одной точки $\delta_2 = (1, 1, 0)$, результат оптимизации не изменится. Это иллюстрирует следующая программа

```
transform = {{a, 0, 0}, {0, b, b}, {0, -b, b}};
f31 = Function[{x1, x2, x3}, (x1^2 + x2^2)*x3/2];
m = {Det[transform], Abs[Apply[f31, transform.{1, 1, 0}]] <= 1};
NMaximize[m, {a, b}]
```

Точка $(1, 1, 0)$ с помощью преобразования (9) превращается в точку (a, b, b), что приводит нас к задаче

$$2ab^2 \to \max,$$
$$\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right) b = 1.$$

Решив эту задачу мы получим точное значение

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V_{3,1} \geq \det A_3^* = 2.$$

5.1. Случай $n = 4$

Стоит отметить, что переход от набора δ_1 к набору δ_2 может быть достаточно трудоемок. Постраемся упростить эту процедуру. Так как у нас уже есть примерные значения искомой матрицы, мы можем вычислить значение $f_{n,s}$ в граничных точках и взять только те, где абсолютное значение $f_{n,s}$ близко к 1. Применим этот подход для $n = 4$. В этом случае, в результате численных экспериментов была найдена матрица

$$A_4^N \approx \begin{pmatrix} 0.81649 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.81649 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.15469 & 1.15469 \\ 0 & 0 & -1.15469 & 1.15469 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу вида (12)

$$A_4^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

Во-первых, убеждаемся, что в качестве ограничений можно взять множество точек с координатами $0, 1$

```
transform = {{a, 0, 0, 0}, {0, a, 0, 0}, {0, 0, b, b}, {0, 0, -b, b}};
f42 = Function[{x1, x2, x3, x4}, (x1^2 + x3^2)*(x2^2 + x4^2)/4];
m = {Det[transform]};
Do[AppendTo[m, Abs[Apply[f42, transform.point]] <= 1],
    {point, Tuples[{0, 1}, 4]}];
NMaximize[m, {a, b}, Method -> "DifferentialEvolution"]
```

Далее, с помощью процедуры

```
transform = {{a, 0, 0, 0}, {0, a, 0, 0}, {0, 0, b, b}, {0, 0, -b, b}};
f42 = Function[{x1, x2, x3, x4}, (x1^2 + x3^2)*(x2^2 + x4^2)/4];
w = {};
Do[AppendTo[w, Simplify[Apply[f42, transform.point]]],
    {point, Tuples[{0, 1}, 4]}];
Do[v = x /. a -> 0.81649 /. b -> 1.15469; If[Abs[v] > 0.999, Print[x]],
    {x, Union[w]}]
```

находим минимальный набор ограничений

$$\frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right)^2, \qquad \frac{a^4}{4} + a^2 b^2.$$

Этим ограничениям соотвествует точки $(1,1,1,0)$ и $(1,1,1,1)$. Получаем задачу

$$\begin{gathered} 2a^2b^2 \to \max, \\ \frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)^2 = 1, \\ \frac{1}{4}a^2\left(a^2+4b^2\right) = 1, \end{gathered}$$

откуда

$$a = \sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad b = \sqrt{\frac{4}{3}},$$

$$V_{4,2} \geq \det A_4^* = \frac{16}{9}.$$

5.2. Случай $n = 5$

Для $n = 5$ численные эксперименты дают следующую матрицу

$$A_5^N \approx \begin{pmatrix} 0.67958 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.13157 & 1.13157 & 0 & 0 \\ 0 & -1.13157 & 1.13157 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.84550 & 0.84550 \\ 0 & 0 & 0 & -0.84550 & 0.84550 \end{pmatrix},$$

$$\det A_5^N \approx 2.48831\ldots$$

Рассмотрим матрицу

$$A_5^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & 0 & 0 \\ 0 & -c & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

В этом случае исходный набор точек не ограничивается простыми значениями $-1, 0, 1$ и угадать его не получится. В самом деле

```
transform = {
  {a, 0, 0, 0, 0},
  {0, b, b, 0, 0},
  {0, -b, b, 0, 0},
  {0, 0, 0, c, c},
  {0, 0, 0, -c, c}
};
f52 = Function[{x1, x2, x3, x4, x5}, (x1^2 + x3^2)*(x2^2 + x4^2)*x5/4];
m = {Det[transform]};
Do[AppendTo[m, Abs[Apply[f52, transform. point]] <= 1],
    {point, Tuples[{-1, 0, 1}, 5]}];
NMaximize[Union[m], {a, b, c}, Method -> "DifferentialEvolution"]
```

дает значительно большее значение 2.71746. Снова воспользуемся тем, что нам известны примерные значения a, b, c. Решим задачу нахождения максимума $f_{n,s}$ отсекая часть граничных точек паралеллипипеда

```
a = 0.67958; b = 1.13157; c = 0.84550;
NMaximize[{(a^2*y1^2 + b^2*(-y2 + y3)^2) *
    (b^2*(y2 + y3)^2 + c^2*(y4 + y5)^2) *c*(-y4 + y5) / 4,
  -1 <= y1 <= 1,
  -1 <= y2 <= 1,
  -0.9 <= y3 <= 0.9,
  -1 <= y4 <= 1,
  -1 <= y5 <= 1
}, {y1, y2, y3, y4, y5}, Method -> {"DifferentialEvolution", RandomSeed -> 10}]
```

и получим точку с $f_{n,s} = 1$ – это $\left(1, 1, \sqrt{5}-2, -1, 1\right)$. Аналогично получаем еще одну точку $\left(1, 1, -1, \frac{1}{3}, 1\right)$. Беря еще одну точку $(1, 1, 1, -1, 1)$, получим задачу

$$\begin{gathered}4ab^2c^2 \to \max,\\ 2a^2b^2c = 1,\\ \frac{8}{27}(a^2+4b^2)c^3 = 1,\\ \left(3-\sqrt{5}\right)b^2\left(a^2+\left(3-\sqrt{5}\right)^2b^2\right)c = 1.\end{gathered}$$

с решением

$$a = \sqrt{7-3\sqrt{5}}\cdot\sqrt[10]{\frac{134+30\sqrt{5})}{27}}, \qquad b = a\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{8(4\sqrt{5}-9)}}, \qquad c = \frac{1}{2a^2b^2},$$

$$V_{5,2} \geq \det A_5^* = \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}}.$$

5.3. Случай $n = 6$

Для $n = 6$ в результате численных экмпериментов была выбрана матрица

$$A_6^N \approx \begin{pmatrix} 0.62510 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.62510 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1.04085 & 1.04085 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1.04085 & 1.04085 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.04085 & 1.04085\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.04085 & 1.04085 \end{pmatrix}$$

Заменим ее на

$$A_6^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b & b & 0 & 0\\ 0 & 0 & -b & b & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

В этом случае, поступая аналогично случаю $n = 5$, получаем две граничные точки: $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ и $\left(1, 1, \sqrt{5}-2, 1, 1, 1\right)$. Соответсвующая задача имеет вид

$$\begin{gathered}4a^2b^4 \to \max,\\ \frac{1}{2}a^2b^2\left(a^2+4b^2\right) = 1,\\ \frac{1}{4}\left(3-\sqrt{5}\right)b^2\left(a^2+4b^2\right)\left(a^2+\left(3-\sqrt{5}\right)^2b^2\right) = 1.\end{gathered}$$

Ее решение

$$a = \sqrt[6]{\frac{8\left(30\sqrt{5}-67\right)}{11}}, \qquad b = \sqrt[6]{\frac{56+25\sqrt{5}}{88}},$$

$$V_{6,3} \geq \det A_6 = \frac{9+5\sqrt{5}}{11}.$$

6. Заключение

Изложенное в данной работе сочетание численных и аналитических подходов позволило преобразовать задачу оценки критического определителя звездного тела Дэвенпорта в комбинацию оптимизационных задач и по-новому взглянуть на задачу оценки константы совместных диофантовых приближений.

Полученные результаты для размерности $n = 3$ и $n = 4$ совпадают с результатами Т. Кьюзика [3] и С. Красса [9]. Для $n = 5$ и $n = 6$ полученные результаты позволяют записать (так как $\Delta_{5,2} = 28\,037$, $\Delta_{6,3} = 184\,607$, см. [21]) следующие оценки константы совместных диофантовых приближений

$$C_5 \geq \frac{V_{4,2}}{\Delta_{5,2}} \geq \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88 \cdot 28\,037}} \approx 0.014860... \qquad C_6 \geq \frac{V_{6,3}}{\Delta_{6,3}} \geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11\sqrt{184\,607}} \approx 0.004269...$$

что превосходит известные ранее значения. Например, оценка Ф. Фуртвенлера [6, 7] дает

$$C_5 \geq \frac{1}{\Delta_{5,3}} = \frac{1}{\sqrt{9\,747}} \approx 0.010128... \qquad C_6 \geq \frac{1}{\Delta_{6,3}} = \frac{1}{\sqrt{184\,607}} \approx 0.002327...$$

а оценка С. Красса [10] дает

$$C_5 \geq \frac{V_{4,2}}{\Delta_{5,2}} \geq \frac{16}{9\sqrt{28\,037}} \approx 0.010617... \qquad C_6 \geq \frac{V_{4,2}}{\Delta_{6,3}} \geq \frac{16}{9\sqrt{184\,607}} \approx 0.004137...$$

Для получения более сильных оценок, скорее всего, потребуются принципиально новые подходы. На это указывает полученная нами в разделе 5 информация о том, что A_n^* можно представить в виде композиции A_{n-4}^* и A_4^*.

В качестве возможного подхода по усилению оценок C_n снизу можно предложить непосредственную оценку значения критического определителя звездного тела $\mathbb{F}_n$. Это сложная задача, но в случае оценки сверху были получены достаточно значительные результаты [11, 12, 13, 14, 15, 19].

Стоит также отметить, что предложенный в данной работе подход может быть применен для оценки снизу значений критического определителя ограниченного точечного тела. Эта задача достаточно схожа с задачей оценки $V_{n,s}$. На наш взгляд, применение описанной в работе методики может дать определенные результаты в этой области.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Basalov Yu. A. On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation // arXiv.org. 2019. Дата обновления: 09.04.2019. URL: https://arxiv.org/abs/1804.05385 (дата обращения: 10.04.2019).

2. Cassels J. W. S. Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 119–121.

3. Cusick T. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory. 1980. Vol. 12(4). P. 543–556.

4. Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 186–195.

5. Finch S. R. Mathematical Constants. Cambridge University Press, 2003 (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Book 94).

6. Furtwängler H. Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. I // Math. Ann. 1927. Vol. 96. P. 169–175;

7. Furtwängler H. Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. II // Math. Ann. 1928. Vol. 99. P. 71–83.

8. Hurwitz A. Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationaleBriiche // Math. Ann. 1891. Vol. 39. P. 279–284.

9. Krass S. Estimates for n-dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$ // J. Number Theory. 1985. Vol. 20(2). P. 172–176.

10. Krass S. The N-dimensional diophantine approximation constants // Australian Mathematical Society. 1985. Vol 32(2). P. 313–316.

11. Mack J. M. Simultaneous Diophantine approximation // J. Austral. Math. Soc. A. 1977. Vol. 24. P. 266–285.

12. Nowak W. G. A note on simultaneous Diophantine approximation // Manuscr. Math. 1981. Vol. 36. P. 33–46.

13. Nowak W. G. A remark concerning the s-dimensional simultaneous Diophantine approximation constants // Graz. Math. Ber. 1993. Vol. 318. P. 105–110.

14. Nowak W. G. Lower bounds for simultaneous Diophantine approximation constants // Comm. Math. 2014. Vol. 22, Is. 1, P. 71–76.

15. Nowak W. G. Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz's theorem // In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications. Springer/ Switzerland. 2016. P. 181–197.

16. Басалов Ю. А. Об истории оценок константы наилучших совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 388–405. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-394-411.

17. Басалов Ю. А. Оценка константы наилучших диофантовых приближений для $n = 5$ и $n = 6$. // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 0-0. https://doi.org/10.22405/2226-8383-0000000000000000000000000000

18. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. – М.: Мир, 1965.

19. Мощевитин Н. Г. К теореме Блихфельдта-Мюллендера-Спона о совместных приближениях // Тр. МИАН, 2002, том 239, с. 268–274.

20. Шмидт В. М. Диофантовы приближения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.

21. A Database for Number Fields // A Database for Number Fields. URL: http://galoisdb.math.upb.de/ (дата обращения: 05.05.2018).

REFERENCES

1. Basalov Yu. A. 2019, "On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation", Available at: https://arxiv.org/abs/1804.05385.

2. Cassels J. W. S. 1955, "Simultaneous Diophantine approximation", *J. London Math. Soc.*, Vol. 30, pp. 119–121.

3. Cusick T. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory. 1980. Vol. 12(4). P. 543–556.

4. Davenport. H. 1955, "On a theorem of Furtwängler", *J. London Math. Soc.* , Vol. 30, pp. 186–195.

5. Finch S. R. 2003, *Mathematical Constants*, Cambridge University Press (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Book 94).

6. Furtwängler H. 1927, "Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. I", *Math. Ann.*, Vol. 96, pp. 169–175.

7. Furtwängler H. 1928, "Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. II", *Math. Ann.*, Vol. 99, pp. 71–83.

8. Hurwitz A. 1891, "Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Briiche", *Math. Ann.*, Vol. 39, pp. 279–284.

9. Krass S. 1985, "Estimates for n-dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$", *J. Number Theory* , Vol. 20, Is. 2, pp. 172–176.

10. Krass S. 1985, "The N-dimensional diophantine approximation constants", *Australian Mathematical Society* , Vol. 32, Is. 2, pp. 313–316.

11. Mack J. M. 1977, "Simultaneous Diophantine approximation", *J. Austral. Math. Soc. A.*, Vol. 24, pp. 266–285.

12. Nowak W. G. 1981, "A note on simultaneous Diophantine approximation", *Manuscr. Math.*, Vol. 36, pp. 33-46.

13. Nowak W. G. 1993, "A remark concerning the s-dimensional simultaneous Diophantine approximation constants", *Graz. Math. Ber.*, Vol. 318. pp. 105–110.

14. Nowak W. G. 2014, "Lower bounds for simultaneous Diophantine approximation constants", *Comm. Math*, Vol. 22, Is. 1, pp. 71–76.

15. Nowak W. G. 2016, "Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz's theorem", *In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications*, Springer, Switzerland, pp. 181–197.

16. Basalov Yu. A., 2018, "On the history of estimates of the constant of the best joint Diophantine approximations" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 388–405.
https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-394-411

17. Basalov Yu. A., 2019, "Estimation of the constant of the best simultaneous Diophanite approximations for $n = 5$ and $n = 6$" *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 0-0.
https://doi.org/10.22405/2226-8383-0000000000000000000000000

18. Cassels J. W. S. 1965, *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Mir.

19. Moshchevitin N. G. 2002, "To the Blichfeldt-Mullender-Spohn theorem on simultaneous approximations", *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*, Vol. 239, pp. 268–274.

20. Schmidt W. M. 1983, *Diophantine Approximation*, Mir.

21. A Database for Number Fields. Available at: http://galoisdb.math.upb.de/

Получено 23.05.2019 г.
Принято в печать 12.07.2019 г.