ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 1.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-131-147

Весовые неравенства для потенциала Данкля–Рисса[1]

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, г. Тула.
e-mail: dvgmail@mail.ru

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, г. Тула.
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

Для классического потенциала Рисса или дробного интеграла I_α хорошо известны условия Харди–Литлвуда–Соболева–Стейна–Вейса (L^p, L^q)-ограниченности со степенными весами. С помощью преобразования Фурье $\mathcal{F}$ потенциал Рисса определяется равенством $\mathcal{F}(I_\alpha f)(y) = |y|^{-\alpha}\mathcal{F}(f)(y)$. Важным обобщением преобразования Фурье стало преобразование Данкля $\mathcal{F}_k$, действующее в лебеговых пространствах с весом Данкля, определяемым с помощью системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$, ее группы отражений G и неотрицательной функции кратности k на R, инвариантной относительно G. С. Тангавелу и Ю. Шу с помощью равенства $\mathcal{F}_k(I_\alpha f)(y) = |y|^{-\alpha}\mathcal{F}_k(f)(y)$ определили D-потенциал Рисса. Для D-потенциала Рисса также были доказаны условия ограниченности в лебеговых пространствах с весом Данкля и степенными весами, аналогичные условиям для потенциала Рисса. На конференции "Follow-up Approximation Theory and Function Spaces" в Centre de Recerca Matemàtica (CRM, Barcelona, 2017) М. Л. Гольдман поставил вопрос об условиях (L_p, L_q)-ограниченности D-потенциала Рисса с кусочно-степенными весами. Рассмотрение кусочно-степенных весов позволяет выявить влияние на ограниченность D-потенциала Рисса поведения весов в нуле и бесконечности. В настоящей работе на этот вопрос дается полный ответ. В частности, в случае потенциала Рисса получены необходимые и достаточные условия. В качестве вспомогательных результатов доказаны необходимые и достаточные условия ограниченности операторов Харди и Беллмана в лебеговых пространствах с весом Данкля и кусочно-степенными весами.

Ключевые слова: Преобразование Фурье, потенциал Рисса, преобразование Данкля, потенциал Данкля–Рисса.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:

Д. В. Горбачев, ВИ. Иванов. Весовые неравенства для потенциала Данкля–Рисса // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 131–147.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 1.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-131-147

Weighted inequalities for Dunkl–Riesz potential[2]

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov

Gorbachev Dmitry Viktorovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University, Tula.
e-mail: dvgmail@mail.ru
Ivanov Valerii Ivanovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University, Tula.
e-mail: dvgmail@mail.ru

Abstract

For the classical Riesz potential or the fractional integral I_α, the Hardy–Littlewood–Sobolev–Stein–Weiss (L^p, L^q)-boundedness conditions with power weights are well known. Using the Fourier transform $\mathcal{F}$, the Riesz potential is determined by the equality $\mathcal{F}(I_\alpha f)(y) = |y|^{-\alpha}\mathcal{F}(f)(y)$. An important generalization of the Fourier transform became the Dunkl transform $\mathcal{F}_k(f)$, acting in Lebesgue spaces with Dunkl's weight, defined by the root system $R \subset \mathbb{R}^d$, its reflection group G and a non-negative multiplicity function k on R, invariant with respect to G. S. Thangavelu and Yu. Xu using the equality $\mathcal{F}_k(I_\alpha^k f)(y) = |y|^{-\alpha}\mathcal{F}_k(f)(y)$ determined the D-Riesz potential I_α^k. For the D-Riesz potential, the boundedness conditions in Lebesgue spaces with Dunkl weight and power weights, similar to the conditions for the Riesz potential, were also proved. At the conference "Follow-up Approximation Theory and Function Spaces" in the Centre de Recerca Matemàtica (CRM, Barcelona, 2017) M. L. Goldman raised the question about (L_p, L_q)-boundedness conditions of the D-Riesz potential with piecewise-power weights. Consideration of piecewise-power weights makes it possible to reveal the influence of the behavior of weights at zero and infinity on the boundedness of the D-Riesz potential. This paper provides a complete answer to this question. In particular, in the case of the Riesz potential, necessary and sufficient conditions are obtained. As auxiliary results, necessary and sufficient conditions for the boundedness of the Hardy and Bellman operators are proved in Lebesgue spaces with Dunkl weight and piecewise-power weights.

Keywords: Fourier transform, Riesz potential, Dunkl transform, D-Riesz potential.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, 2019, "Weighted inequalities for Dunkl–Riesz potential" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 131–147.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^d$ — действительное d-мерное евклидово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $|x| = \sqrt{(x,x)}$, $d\mu(x) = (2\pi)^{-d/2}\,dx$ — нормированная мера Лебега на $\mathbb{R}^d$, $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$, — пространства Лебега с нормой $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} < \infty$, $C_b(\mathbb{R}^d)$ — пространство непрерывных ограниченных функций, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца,

$$\mathcal{F}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i(x,y)}\,d\mu(x)$$

[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

— преобразование Фурье и Δ — оператор Лапласа.

Мы будем писать $A \lesssim B$, если $A \le CB$ с константой $C > 0$, зависящей только от несущественных параметров, и $A \asymp B$, если $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$. Как обычно, для $p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный гельдеров показатель, $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}^d$.

Потенциал Рисса или дробный интеграл I_α определяется как интегральный оператор

$$I_\alpha f(x) = (\gamma_\alpha)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)|x-y|^{\alpha-d}\,d\mu(y) = (\gamma_\alpha)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \tau^{-y} f(x)|y|^{\alpha-d}\,d\mu(y),$$

где $0 < \alpha < d$, $\gamma_\alpha = 2^{\alpha-d/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma((d-\alpha)/2)$, и $\tau^y f(x) = f(x+y)$ — оператор сдвига.

Этот оператор впервые исследовал О. Фростман [1]. Многие важные его свойства были доказаны М. Риссом [2]. Формулы для преобразований Фурье

$$\mathcal{F}(I_\alpha f) = |\cdot|^{-\alpha}\mathcal{F}(f), \quad \mathcal{F}((-\Delta)^{\alpha/2} f) = |\cdot|^{\alpha}\mathcal{F}(f),$$

указывают, что потенциал Рисса является обратным оператором для дробной степени оператора Лапласа.

Весовая (L^p, L^q)-ограниченность потенциала Рисса записывается в виде неравенства Стейна–Вейса

$$\big\||x|^{-\gamma} I_\alpha f(x)\big\|_q \le \mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)\big\||x|^{\beta} f(x)\big\|_p \tag{1}$$

с константой $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ и $1 < p \leqslant q < \infty$.

Условия конечности константы $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ хорошо известны.

Теорема 1. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, $1 < p \leqslant q < \infty$, $\gamma < \frac{d}{q}$, $\beta < \frac{d}{p'}$, $0 < \alpha < d$, *и* $\alpha - \gamma - \beta = d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$. *Константа* $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ *в неравенстве* (1) *конечна, если* $p = q$ *или* $p < q$ *и* $\alpha \geqslant d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$.

Теорема 1 была доказана Г.Х. Харди и Дж.И. Литлвудом [3] для $d = 1$, С. Соболевым [4] для $d > 1$ и $\gamma = \beta = 0$, Е.М. Стейном и Г. Вейсом [5] в общем случае.

Неравенство Стейна–Вейса (1) в эквивалентной форме может быть записано в виде неравенства Харди–Реллиха–Соболева

$$\big\||x|^{-\gamma} f(x)\big\|_q \leqslant \mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)\big\||x|^{\beta}(-\Delta)^{\alpha/2} f(x)\big\|_p.$$

Одним из важных обобщений преобразования Фурье $\mathcal{F}$ является преобразование Данкля $\mathcal{F}_k$ (см. [6, 7]). Аналог потенциала Рисса для преобразования Данкля, исследуемый в статье, и называемый нами D-потенциалом Рисса, определили С. Тангавелу и Ю. Шу [8].

Пусть $R \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ — система корней, R_+ — положительная подсистема R, $G(R) \subset O(d)$ — группа отражений, образованная отражениями $\{\sigma_a \colon a \in R\}$, где σ_a — отражение относительно гиперплоскости $(a,x) = 0$, $k\colon R \to \mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно группы G. Напомним, что конечное множество $R \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ называется системой корней, если

$$R \cap \mathbb{R}a = \{a, -a\} \quad \text{и} \quad \sigma_a R = R \text{ для всех } a \in R.$$

Пусть

$$v_k(x) = \prod_{a \in R_+} |(a,x)|^{2k(a)}, \quad d\mu_k(x) = c_k v_k(x)dx$$

— вес и мера Данкля, где $c_k^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x)\,dx$ — интеграл Макдональда–Мета–Сельберга, $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$, $1 \le p < \infty$, — пространства Лебега с нормой $\|f\|_{p,d\mu_k} = \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p\,d\mu_k\Big)^{1/p} < \infty$,

$$T_j f(x) = D_j f(x) + \sum_{a \in R_+} k(a)(a,e_j)\,\frac{f(x) - f(\sigma_a x)}{(a,x)}, \quad j = 1, \dots, d,$$

—дифференциально-разностные операторы Данкля и $\Delta_k = \sum_{j=1}^d T_j^2$ — лапласиан Данкля.

Ядро Данкля $E_k(x,y)$ является единственным решением системы

$$T_j f(x) = y_j f(x), \quad j = 1, \dots, d, \qquad f(0) = 1.$$

Функция $e_k(x,y) = E_k(x,iy)$ играет роль обобщенной экспоненты. Ее свойства подобны свойствам классической экспоненты $e^{i(x,y)}$. Многие из них вытекают из интегрального представления Реслер [9]

$$e_k(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi,y)}\, d\mu_x^k(\xi), \tag{2}$$

где μ_x^k — вероятностная мера Бореля с носителем в выпуклой оболочке G-орбиты x в $\mathbb{R}^d$. В частности, $|e_k(x,y)| \le 1$ и $\operatorname{supp}\mu_x^k \subset B_{|x|}$, где B_r — евклидов шар радиуса r с центром в нуле.

Для $f \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ преобразование Данкля определяется равенством

$$\mathcal{F}_k(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{e_k(x,y)}\, d\mu_k(x).$$

Если $k \equiv 0$, то $\mathcal{F}_0$ совпадает с преобразованием Фурье $\mathcal{F}$. Отметим, что

$$\mathcal{F}_k(e^{-|\cdot|^2/2})(y) = e^{-|x|^2/2}, \quad \mathcal{F}_k^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}_k(f)(-x).$$

Преобразование Данкля является изометрией в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$. Равенство Планшереля имеет вид

$$\|f\|_{2,d\mu_k} = \|\mathcal{F}_k(f)\|_{2,d\mu_k}.$$

М. Реслер [10] определила оператор обобщенного сдвига τ^y, $y \in \mathbb{R}^d$, на пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ равенством

$$\mathcal{F}_k(\tau^y f)(z) = e_k(y,z)\mathcal{F}_k(f)(z)$$

или

$$\tau^y f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e_k(y,z)e_k(x,z)\mathcal{F}_k(f)(z)\, d\mu_k(z).$$

Он действует из $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ и $\|\tau^y\|_{2\to 2} = 1$.

Если $k \equiv 0$, то $\tau^y f(x) = f(x+y)$. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, то $\tau^y f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и равенство (3) справедливо поточечно. К. Тримеш распространил τ^y на $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ [11]. Например, $\tau^y 1 = 1$. В общем случае, τ^y не является положительным оператором и вопрос о его L_p-ограниченности остается открытым.

Пусть

$$d_k = 2\lambda_k + 2, \quad \lambda_k = \frac{d}{2} - 1 + \sum_{a\in R_+} k(a). \tag{3}$$

С. Тангавелу и Ю. Шу [8] определили D-потенциал Рисса на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ как интегральный оператор

$$I_\alpha^k f(x) = (\gamma_\alpha^k)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \tau^{-y} f(x)|y|^{\alpha-d_k}\, d\mu_k(y), \tag{4}$$

где $0 < \alpha < d_k$ и $\gamma_\alpha^k = 2^{\alpha-d_k/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma((d_k-\alpha)/2)$. Как и для потенциала Рисса для него справедливо равенство $\mathcal{F}_k(I_\alpha^k f) = |\cdot|^{-\alpha}\mathcal{F}_k(f)$.

Потенциал Рисса — положительный оператор. Из определения (4) положительность D-потенциала Рисса не вытекает. Нам удалось показать, что D-потенциал Рисса также является положительным оператором, записав его с помощью положительного оператора обобщенного сдвига.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x| = 1\}$ — евклидова сфера, $x = rx'$, $r = |x| \in \mathbb{R}_+$, $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\lambda \geq -1/2$, $b_\lambda^{-1} = 2^\lambda \Gamma(\lambda+1)$, $d\nu_\lambda(r) = b_\lambda r^{2\lambda+1}\,dr$ — мера на $\mathbb{R}_+$, $d\sigma_k(x') = a_k v_k(x')\,dx'$ — вероятностная мера на $\mathbb{S}^{d-1}$. Отметим, что $d\mu_k(x) = d\nu_{\lambda_k}(r)\,d\sigma_k(x')$.

В [12] на пространстве Шварца нами определен положительный оператор обобщенного сдвига равенством

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \tau^{ty'} f(x)\,d\sigma_k(y') = \int_{\mathbb{R}^d} j_{\lambda_k}(t|z|) e_k(x,z) \mathcal{F}_k(f)(z)\,d\mu_k(z).$$

Его положительность вытекает из представления Реслер [13]

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\,d\sigma_{x,t}^k(z),$$

где $\sigma_{x,t}^k$ — вероятностная мера Бореля с носителем

$$\operatorname{supp} \sigma_{x,t}^k \subset \bigcup_{g \in G} \{z \in \mathbb{R}^d \colon |z - gx| \leq t\}.$$

В частности, $T^t 1 = 1$. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, то $\|T^t f\|_{p,d\mu_k} \leq \|f\|_{p,d\mu_k}$ и оператор T^t может быть продолжен на пространства $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ при $1 \leqslant p < \infty$ и пространство $C_b(\mathbb{R}^d)$ при $p = \infty$ с сохранением нормы.

D-потенциал Рисса может быть записан следующим образом

$$I_\alpha^k f(x) = (\gamma_\alpha^k)^{-1} \int_0^\infty T^t f(x) t^{\alpha - d_k}\,d\nu_{\lambda_k}(t). \tag{5}$$

Из представления (5) и L_p-ограниченности оператора T^t вытекает его положительность на всех функциях из L_p, на которых он определен. Поэтому при исследовании весовой (L_p, L_q)-ограниченности D-потенциала Рисса можно ограничиться неотрицательными функциями.

Неравенство Стейна–Вейса для D-потенциала Рисса примет вид

$$\big\||x|^{-\gamma} I_\alpha^k f(x)\big\|_{q,d\mu_k} \leq \mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d) \big\||x|^\beta f(x)\big\|_{p,d\mu_k}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{6}$$

с константой $\mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ и $1 < p \leqslant q < \infty$. Неравенство (6) эквивалентно неравенству Харди–Реллиха–Соболева

$$\big\||x|^{-\gamma} f(x)\big\|_{q,d\mu_k} \leqslant \mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d) \big\||x|^\beta (-\Delta_k)^{\alpha/2} f(x)\big\|_{p,d\mu_k}.$$

В [14] нами доказан полный аналог теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, k *— произвольная функция кратности,* $1 < p \leqslant q < \infty$, $\gamma < \frac{d_k}{q}$, $\beta < \frac{d_k}{p'}$, $0 < \alpha < d_k$, *и* $\alpha - \gamma - \beta = d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$. *Константа* $\mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ *в неравенстве* (6) *конечна, если* $p = q$ *или* $p < q$ *и* $\alpha \geqslant d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$.

Мы видим, что везде размерность d в теореме 1 заменяется на число d_k, которое можно считать обобщенной размерностью евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ с весом Данкля.

Если $k \equiv 0$, то $d_k = d$ и теорема 2 сводится к теореме 1. Для группы отражений $\mathbb{Z}_2^d$ и $\gamma = \beta = 0$, теорема 2 была доказана в [8]. Для произвольной группы отражений и $\gamma = \beta = 0$ она была доказана С. Хассани, С. Мустафа и М. Сифи [15]. Мы предложили для этого случая и другое доказательство [12], основанное на идеях работы [8] и использующее представление (5). При $p = q$ теорема 2 была доказана в [16] при более сильных ограничениях $1 < p < \infty$, $0 < \gamma < \frac{d_k}{p}$, $0 < \beta < \frac{d_k}{p'}$.

На конференции "Follow-up Approximation Theory and Function Spaces" в Centre de Recerca Matemàtica (CRM, Barcelona, 2017) М.Л. Гольдман поставил вопрос об условиях (L_p, L_q)-ограниченности D-потенциала Рисса с кусочно-степенными весами. Настоящая работа посвящена ответу на этот вопрос.

Пусть $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |x| \leqslant 1\}$, $B_1^c = \mathbb{R}^d \setminus B_1$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$,

$$u_{-\gamma}(x) = |x|^{-\gamma_1}\chi_{B_1}(x) + |x|^{-\gamma_2}\chi_{B_1^c}(x), \quad u_\beta(x) = |x|^{\beta_1}\chi_{B_1}(x) + |x|^{\beta_2}\chi_{B_1^c}(x)$$

— кусочно-степенные весовые функции. Рассмотрим неравенство

$$\big\|u_{-\gamma}(x) I_\alpha^k f(x)\big\|_{q,d\mu_k} \le \mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)\big\|u_\beta(x) f(x)\big\|_{p,d\mu_k} \tag{7}$$

с константой $\mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ и $1 < p \le q < \infty$.

Неравенство Харди–Реллиха–Соболева в этом случае будет иметь вид

$$\big\|u_{-\gamma}(x) f(x)\big\|_{q,d\mu_k} \le \mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)\big\|u_\beta(x)(-\Delta_k)^{\alpha/2} f(x)\big\|_{p,d\mu_k}.$$

Мы доказываем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, k *— произвольная функция кратности,* $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 < \alpha < d_k$. *Константа* $\mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ *в неравенстве* (7) *конечна при* $p = q$ *или при* $p < q$ *и* $\alpha \geqslant d_k\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered}\gamma_1 < \frac{d_k}{q}, \quad \beta_1 < \frac{d_k}{p'}, \quad \alpha - \gamma_2 < \frac{d_k}{q'}, \quad \alpha - \beta_2 < \frac{d_k}{p},\\ \gamma_1 + \beta_1 \leqslant \alpha - d_k\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big) \leqslant \gamma_2 + \beta_2.\end{gathered} \tag{8}$$

При доказательстве теоремы 3 используются неравенства типа Харди для операторов Харди и Беллмана в лебеговых пространствах с весом Данкля и кусочно-степенными весами. Они имеют самостоятельный интерес и устанавливаются в секции 2.

Если в теореме 3 положим $\gamma_1 = \gamma_2$, $\beta_1 = \beta_2$, то получим условия (L_p, L_q)-ограниченности в теореме 2.

В общем случае в теореме 3 при $p < q$ нам не известна необходимость условия $\alpha \geqslant d_k\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$. Необходимость этого условия нам удалось доказать только при $k \equiv 0$.

Теорема 4. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, $k \equiv 0$, $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 < \alpha < d$. *Константа* $\mathbf{c}_0(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ *конечна в неравенстве* (7) *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (8)*, в которых* $d_k = d$, и $\alpha \geqslant d\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$.

Таким образом, теорема 4 обобщает теорему 1 и показывает, что все условия на параметры в ней являются необходимыми.

Для радиальных функций условие $\alpha \geqslant d_k\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$ при $p < q$ можно ослабить.

Теорема 5. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, k *— произвольная функция кратности,* $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < d_k$. *Константа* $\mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ *в неравенстве* (7) *конечна на подпространстве радиальных функций тогда и только тогда, когда выполнены условия* (8) и

$$\alpha \geqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{q}. \tag{9}$$

Теорема 5 при $\gamma_1 = \gamma_2$, $\beta_1 = \beta_2$ была доказана в [17, 18, 19] (достаточность см. также в [20]).

2. Неравенства типа Харди в пространствах с весом Данкля

Неравенства Харди на полупрямой, простое доказательство и их история изложены, например, в [21], [22, Section 1], [23, Introduction]. Функции в них предполагаются неотрицательными.

Предложение 1. *Пусть $1 < p \le q < \infty$, $u(r)$, $v(r)$ — измеримые, почти всюду положительные на $\mathbb{R}_+$ весовые функции.*

(i) *Неравенство*

$$\Big(\int_0^\infty \Big(u(r)\int_0^r f(t)\,dt\Big)^q dr\Big)^{1/q} \lesssim \Big(\int_0^\infty (v(r)f(r))^p\,dr\Big)^{1/p}$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\sup_{0<r<\infty}\Big(\int_r^\infty u^q(r)\,dr\Big)^{1/q}\Big(\int_0^r v^{-p'}(r)\,dr\Big)^{1/p'} < \infty. \tag{10}$$

(ii) *Неравенство*

$$\Big(\int_0^\infty \Big(u(r)\int_r^\infty f(t)\,dt\Big)^q dr\Big)^{1/q} \lesssim \Big(\int_0^\infty (v(r)f(r))^p\,dr\Big)^{1/p}$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\sup_{0<r<\infty}\Big(\int_0^r u^q(r)\,dr\Big)^{1/q}\Big(\int_r^\infty v^{-p'}(r)\,dr\Big)^{1/p'} < \infty.$$

Определим операторы Харди

$$Hf(x) = \int_{|y|\leqslant|x|} f(y)\,d\mu_k(y)$$

и Беллмана

$$Bf(x) = \int_{|y|\geqslant|x|} f(y)\,d\mu_k(y).$$

Для них справедливы следующие неравенства типа Харди в пространствах с весом Данкля. Функции в них также предполагаются неотрицательными.

Теорема 6. *Пусть $d \in \mathbb{N}$, k — произвольная функция кратности, d_k и λ_k определены в (3), $1 < p \le q < \infty$, $u(r)$, $v(r)$ — весовые функции на $\mathbb{R}_+$.*

(i) *Неравенство*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d} (u(|x|)Hf(x))^q\,d\mu_k(x)\Big)^{1/q} \lesssim \Big(\int_{\mathbb{R}^d} (v(|x|)f(x))^p\,d\mu_k(x)\Big)^{1/p} \tag{11}$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\sup_{0<r<\infty}\Big(\int_r^\infty u^q(t)t^{2\lambda_k+1}\,dt\Big)^{1/q}\Big(\int_0^r v^{-p'}(t)t^{2\lambda_k+1}\,dt\Big)^{1/p'} < \infty. \tag{12}$$

(ii) *Неравенство*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d} (u(|x|)Bf(x))^q\,d\mu_k(x)\Big)^{1/q} \lesssim \Big(\int_{\mathbb{R}^d} (v(|x|)f(x))^p\,d\mu_k(x)\Big)^{1/p}$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\sup_{0<r<\infty}\Big(\int_0^r u^q(t)t^{2\lambda_k+1}\,dt\Big)^{1/q}\Big(\int_r^\infty v^{-p'}(t)t^{2\lambda_k+1}\,dt\Big)^{1/p'}<\infty. \tag{13}$$

Доказательство. Оба утверждения в теореме 6 доказываются с помощью предложение 1. Докажем только часть (i). Доказательство части (ii) будет проходить аналогично.

Пусть вначале функция $f(x)=f_0(|x|)$ — радиальная, $x=rx'$, $y=ty'$, $r=|x|$, $t=|y|$. Переходя к полярным координатам, получим

$$\begin{aligned}Hf(x)&=\int_{|y|\leqslant|x|}f(y)\,d\mu_k(y)=\int_0^r\int_{\mathbb{S}^{d-1}}f(ty')\,d\sigma_k(y')d\nu_{\lambda_k}(t)\\&=\int_0^r f_0(t)\,d\nu_{\lambda_k}(t)=b_{\lambda_k}\int_0^r f_0(t)t^{2\lambda_k+1}\,dt,\end{aligned}$$

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d}(u(|x|)Hf(x))^q\,d\mu_k(x)\Big)^{1/q}=b_{\lambda_k}^{1+1/q}\Big(\int_0^\infty\Big(u(r)r^{\frac{2\lambda_k+1}{q}}\int_0^r f_0(t)t^{2\lambda_k+1}\,dt\Big)^q dr\Big)^{1/q},$$

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d}(v(|x|)f(x))^p\,d\mu_k(x)\Big)^{1/p}=b_{\lambda_k}^{1/p}\Big(\int_0^\infty(v(r)r^{\frac{2\lambda_k+1}{p}}f_0(r))^p\,dr\Big)^{1/p}.$$

После замены $g(t)=f_0(t)t^{2\lambda_k+1}$ неравенство (9) будет эквивалентно неравенству

$$\Big(\int_0^\infty\Big(u(r)r^{\frac{2\lambda_k+1}{q}}\int_0^r g(t)\,dt\Big)^q dr\Big)^{1/q}\lesssim\Big(\int_0^\infty(v(r)r^{-\frac{2\lambda_k+1}{p'}}f(r))^p\,dr\Big)^{1/p}.$$

Применяя (10), придем к условию (12).

Так как $Hf(x)$ всегда радиальная функция, то общий случай может быть сведен к радиальному. Пусть $f(x)$ — произвольная, $f_0(r)=\int_{\mathbb{S}^{d-1}}f(rx')\,d\sigma_k(x')$ и выполнено (12). Применяя неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned}\Big(\int_0^\infty(v(r)f_0(r))^p\,d\nu_{\lambda_k}(r)\Big)^{1/p}&=\Big(\int_0^\infty\Big(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}f(rx')\,d\sigma_k(x')\Big)^p v^p(r)\,d\nu_{\lambda_k}(r)\Big)^{1/p}\\&\leqslant\Big(\int_{\mathbb{R}^d}(v(|x|)f(x))^p\,d\mu_k(x)\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

По уже доказанному,

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}(u(|x|)Hf(x))^q\,d\mu_k(x)\Big)^{1/q}&=\Big(\int_0^\infty\Big(u(r)r^{\frac{2\lambda_k+1}{q}}\int_0^r f_0(t)t^{2\lambda_k+1}\,dt\Big)^q dr\Big)^{1/q}\\&\lesssim\Big(\int_0^\infty(v(r)r^{\frac{2\lambda_k+1}{p}}f_0(r))^p\,dr\Big)^{1/p}\\&\lesssim\Big(\int_0^\infty(v(r)f_0(r))^p\,d\nu_{\lambda_k}(r)\Big)^{1/p}\\&\leqslant\Big(\int_{\mathbb{R}^d}(v(|x|)f(x))^p\,d\mu_k(x)\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Итак, неравенство (11) доказано. $\square$

Напомним, что для $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$ кусочно-степенной вес имеет вид

$$u_\gamma(x)=|x|^{\gamma_1}\chi_{B_1}(x)+|x|^{\gamma_2}\chi_{B_1^c}(x).$$

Теорема 7. *Пусть $d\in\mathbb{N}$, k — произвольная функция кратности, $1<p\le q<\infty$, $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2)$. Неравенство*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d}(u_{-\gamma}(|x|)Hf(x))^q\,d\mu_k(x)\Big)^{1/q}\lesssim\Big(\int_{\mathbb{R}^d}(u_\beta(|x|)f(x))^p\,d\mu_k(x)\Big)^{1/p} \tag{14}$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\beta_1 < \frac{d_k}{p'}, \quad \gamma_2 > \frac{d_k}{q}, \quad \gamma_1 + \beta_1 \leqslant d_k\Big(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q}\Big) \leqslant \gamma_2 + \beta_2.$$

Доказательство. В силу теоремы 6 необходимо проверить выполнение условия (12)

$$\sup_{0<r<\infty} A(r) = \sup_{0<r<\infty} \Big(\int_r^\infty u_{-\gamma}^q(t) t^{2\lambda_k+1}\,dt\Big)^{1/q} \Big(\int_0^r u_\beta^{-p'}(t) t^{2\lambda_k+1}\,dt\Big)^{1/p'} < \infty.$$

Если $0 < r \leqslant 1$, то

$$A(r) \asymp \Big(\int_r^1 t^{-\gamma_1 q + 2\lambda_k+1}\,dt + \int_1^\infty t^{-\gamma_2 q+2\lambda_k+1}\,dt\Big)^{1/q} \Big(\int_0^r t^{-\beta_1 p'+2\lambda_k+1}\,dt\Big)^{1/p'}.$$

Необходимо потребовать

$$\int_1^\infty t^{-\gamma_2 q+2\lambda_k+1}\,dt < \infty, \quad \int_0^1 t^{-\beta_1 p'+2\lambda_k+1}\,dt < \infty,$$

или $\gamma_2 > \frac{d_k}{q}$, $\beta_1 < \frac{d_k}{p'}$. При выполнении этих условий

$$A(r) \asymp r^{-\beta_1 + d_k/p'}\Big(1 + r^{-\gamma_1 + d_k/q}\Big) = r^{-\beta_1+d_k/p'} + r^{-\gamma_1-\beta_1+d_k(1/p'+1/q)},$$

поэтому из конечности $\sup_{0<r\leqslant 1} A(r)$ вытекает условие $\gamma_1 + \beta_1 \leqslant d_k\Big(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q}\Big)$.

Если $r \geqslant 1$, то

$$\begin{aligned} A(r) &\asymp \Big(\int_r^\infty t^{-\gamma_2 q+2\lambda_k+1}\,dt\Big)^{1/q} \Big(\int_0^1 t^{-\beta_1 p'+2\lambda_k+1}\,dt + \int_1^r t^{-\beta_2 p'+2\lambda_k+1}\,dt\Big)^{1/p'} \\ &\asymp r^{-\gamma_2+d_k/q}\Big(1 + r^{-\beta_2+d_k/p'}\Big) = r^{-\gamma_2+d_k/q} + r^{-\gamma_2-\beta_2+d_k(1/p'+1/q)}. \end{aligned}$$

Из конечности $\sup_{r\geqslant 1} A(r)$ вытекает условие $\gamma_2 + \beta_2 \geqslant d_k\Big(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q}\Big)$. $\square$

Теорема 8. *Пусть $d \in \mathbb{N}$, k — произвольная функция кратности, $1 < p \le q < \infty$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$. Неравенство*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d} (u_{-\gamma}(|x|) Bf(x))^q\,d\mu_k(x)\Big)^{1/q} \lesssim \Big(\int_{\mathbb{R}^d} (u_\beta(|x|) f(x))^p\,d\mu_k(x)\Big)^{1/p} \tag{15}$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\beta_2 > \frac{d_k}{p'}, \quad \gamma_1 < \frac{d_k}{q}, \quad \gamma_1 + \beta_1 \leqslant d_k\Big(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q}\Big) \leqslant \gamma_2 + \beta_2.$$

Доказательство. В силу теоремы 6 необходимо проверить выполнение условия (13)

$$\sup_{0<r<\infty} A(r) = \sup_{0<r<\infty} \Big(\int_0^r u_{-\gamma}^q(t) t^{2\lambda_k+1}\,dt\Big)^{1/q} \Big(\int_r^\infty u_\beta^{-p'}(t) t^{2\lambda_k+1}\,dt\Big)^{1/p'} < \infty.$$

Если $0 < r \leqslant 1$, то

$$A(r) \asymp \Big(\int_0^r t^{-\gamma_1 q+2\lambda_k+1}\,dt\Big)^{1/q} \Big(\int_r^1 t^{-\beta_1 p'+2\lambda_k+1}\,dt + \int_1^\infty t^{-\beta_2 p'+2\lambda_k+1}\,dt\Big)^{1/p'}.$$

Необходимо потребовать

$$\int_1^\infty t^{-\beta_2 p'+2\lambda_k+1}\,dt<\infty,\quad \int_0^1 t^{-\gamma_1 q+2\lambda_k+1}\,dt<\infty,$$

или $\gamma_1<\frac{d_k}{q}$, $\beta_2>\frac{d_k}{p'}$. При выполнении этих условий

$$A(r)\asymp r^{-\gamma_1+d_k/q}\Big(1+r^{-\beta_1+d_k/p'}\Big)=r^{-\gamma_1+d_k/p'}+r^{-\gamma_1-\beta_1+d_k(1/p'+1/q)},$$

поэтому из конечности $\sup_{0<r\leqslant 1}A(r)$ вытекает условие $\gamma_1+\beta_1\leqslant d_k\Big(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\Big)$.

Если $r\geqslant 1$, то

$$\begin{aligned}A(r)&\asymp\Big(\int_0^1 t^{-\gamma_1 q+2\lambda_k+1}\,dt+\int_1^r t^{-\gamma_1 q+2\lambda_k+1}\,dt\Big)^{1/q}\Big(\int_r^\infty t^{-\beta_2 p'+2\lambda_k+1}\,dt\Big)^{1/p'}\\&\asymp r^{-\beta_2+d_k/p'}\Big(1+r^{-\gamma_2+d_k/q}\Big)=r^{-\beta_2+d_k/q}+r^{-\gamma_2-\beta_2+d_k(1/p'+1/q)}.\end{aligned}$$

Из конечности $\sup_{r\geqslant 1}A(r)$ вытекает условие $\gamma_2+\beta_2\geqslant d_k\Big(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\Big)$. $\square$

3. Доказательство основных теорем

Доказательство теоремы 3. Можно считать, что $f(x)\geqslant 0$ и $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. В [14] для D-потенциала Рисса получено интегральное представление

$$I_\alpha^k f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\Phi_\alpha(x,y)\,d\mu_k(y)\tag{16}$$

с ядром $\Phi_\alpha(x,y)$, для которого выполнены свойства:

1. $\Phi_\alpha(x,y)=\Phi_\alpha(y,x)$;

2. $\Phi_\alpha(rx',ty')=r^{\alpha-d_k}\Phi_\alpha(x',(t/r)y')$;

3. $\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Phi_\alpha(rx',ty')\,d\sigma_k(x')=\Phi_{\alpha,0}(r,t)$, где $c_{\lambda_k}^{-1}=\int_0^\pi\sin^{d_k-2}\varphi\,d\varphi$,

$$\Phi_{\alpha,0}(r,t):=(\gamma_\alpha^k)^{-1}c_{\lambda_k}\int_0^\pi\big(r^2+t^2-2rt\cos\varphi\big)^{(\alpha-d_k)/2}\sin^{d_k-2}\varphi\,d\varphi;$$

4. $\Phi_\alpha(x,y)=(\gamma_\alpha^k)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}(|x|^2+|y|^2-2(y,\eta))^{(\alpha-d_k)/2}\,d\mu_x^k(\eta)$,
где μ_x^k — вероятностная мера из (2) и $\operatorname{supp}\mu_x^k\subset B_{|x|}=\{\eta\colon\ |\eta|\leqslant|x|\}$.

Разобъем (16) на сумму трех линейных операторов

$$I_\alpha^k f(x)=J_1f(x)+J_2f(x)+J_3f(x),\tag{17}$$

где

$$J_1f(x)=\int_{|y|\leqslant|x|/2}f(y)\Phi_\alpha(x,y)\,d\mu_k(y),\quad J_2f(x)=\int_{|y|\geqslant 2|x|}f(y)\Phi_\alpha(x,y)\,d\mu_k(y),$$

$$J_3f(x)=\int_{|x|/2\leqslant|y|\leqslant 2|x|}f(y)\Phi_\alpha(x,y)\,d\mu_k(y).$$

Оценка J_1f. Так как

$$(|x|-|y|)^2 \leqslant |x|^2+|y|^2-2(y,\eta) \leqslant (|x|+|y|)^2,$$

то при $|y| \leqslant |x|/2$ из свойства 4 $\Phi_\alpha(x,y) \asymp |x|^{\alpha-d_k}$. Следовательно,

$$J_1f(x) \asymp |x|^{\alpha-d_k} \int_{|y|\leqslant|x|/2} f(y)\,d\mu_k(y) = |x|^{\alpha-d_k} Hf(x/2).$$

Кусочно-степенной вес обладает слабой однородностью

$$c_1(\lambda)u_{-\gamma}(x) \leqslant u_{-\gamma}(\lambda x) \leqslant c_2(\lambda)u_{-\gamma}(x), \quad \lambda>0,$$

поэтому по теореме 7

$$\begin{aligned}\big\|u_{-\gamma}(x)J_1f(x)\big\|_{q,d\mu_k} &\asymp \big\|u_{-\gamma}(x)|x|^{\alpha-d_k}Hf(x/2)\big\|_{q,d\mu_k}\\ &\asymp \big\|u_{-\gamma}(x)|x|^{\alpha-d_k}Hf(x)\big\|_{q,d\mu_k} \lesssim \big\|u_\beta(x)f(x)\big\|_{p,d\mu_k}\end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда

$$\beta_1 < \frac{d_k}{p'}, \quad \alpha-\gamma_2 < \frac{d_k}{q'}, \quad \gamma_1+\beta_1 \leqslant \alpha - d_k\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big) \leqslant \gamma_2+\beta_2.$$

Оценка J_2f. При $|y| \geqslant 2|x|$, $\Phi_\alpha(x,y) \asymp |y|^{\alpha-d_k}$. Следовательно,

$$J_2f(x) \asymp \int_{|y|\geqslant 2|x|} f(y)|y|^{\alpha-d_k}\,d\mu_k(y) = \int_{|y|\geqslant 2|x|} g(y)\,d\mu_k(y) = Bg(2x),$$

где $g(y) = f(y)|y|^{\alpha-d_k}$. Необходимо найти условия на параметры, при которых имеет место неравенство

$$\big\|u_{-\gamma}(x)Bg(2x)\big\|_{q,d\mu_k} \lesssim \big\|u_\beta(x)|x|^{d_k-\alpha}g(x)\big\|_{p,d\mu_k}.$$

По теореме 8

$$\begin{aligned}\big\|u_{-\gamma}(x)Bg(2x)\big\|_{q,d\mu_k} &\asymp \big\|u_{-\gamma}(x)Bg(x)\big\|_{q,d\mu_k}\\ &\lesssim \big\|u_\beta(x)|x|^{d_k-\alpha}g(x)\big\|_{p,d\mu_k}\end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда

$$\alpha-\beta_2 < \frac{d_k}{p}, \quad \gamma_1 < \frac{d_k}{q}, \quad \gamma_1+\beta_1 \leqslant \alpha - d_k\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big) \leqslant \gamma_2+\beta_2.$$

Оценка J_3f. Остается показать, что при выполнении условий (8) и при $p<q$ условия $\alpha \geqslant d_k\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)$ справедливо неравенство

$$\big\|u_{-\gamma}(x)J_3f(x)\big\|_{q,d\mu_k} \lesssim \big\|u_\beta(x)f(x)\big\|_{p,d\mu_k}. \tag{18}$$

Вначале докажем неравенство

$$\big\|\chi_{B_1}(x)u_{-\gamma}(x)J_3f(x)\big\|_{q,d\mu_k} \lesssim \big\|u_\beta(x)f(x)\big\|_{p,d\mu_k}. \tag{19}$$

Неравенство (19) эквивалентно неравенству

$$\big\|\chi_{B_1}(x)u_{-\gamma}(x)J_3(u_{-\beta}f)(x)\big\|_{q,d\mu_k} \lesssim \big\|f(x)\big\|_{p,d\mu_k}.$$

Учитывая, что при $|x|\leqslant 1$, $u_{-\gamma}(x)\asymp |x|^{-\gamma_1}$, $u_{-\beta}(x)\asymp |x|^{-\beta_1}$, запишем последнее неравенство в виде

$$A:=\big\|\chi_{B_1}(x)|x|^{-\gamma_1-\beta_1}J_3f(x)\big\|_{q,d\mu_k}\lesssim \big\|f(x)\big\|_{p,d\mu_k}.$$

Так как

$$\frac{d_k}{q}+\frac{d_k}{p'}>\alpha-d_k\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)\ \text{ или }\ d_k>\alpha,$$

то существует пара (γ_0,β_0) такая, что

$$\gamma_0<\frac{d_k}{q},\quad \beta_0<\frac{d_k}{p'},\quad \gamma_0+\beta_0=\alpha-d_k\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)\geqslant \gamma_1+\beta_1.$$

Поэтому, применяя теорему 2 для пары (γ_0,β_0), получим

$$\begin{aligned}A&\leqslant\Big(\int_{|x|\leqslant 1}\Big(|x|^{-\gamma_0-\beta_0}\int_{|x|/2\leqslant|y|\leqslant 2|x|}f(y)\Phi_\alpha(x,y)\,d\mu_k(y)\Big)^q\,d\mu_k(x)\Big)^{1/q}\\&\lesssim\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\Big(|x|^{-\gamma_0}\int_{\mathbb{R}^d}f(y)|y|^{-\beta_0}\Phi_\alpha(x,y)\,d\mu_k(y)\Big)^q\,d\mu_k(x)\Big)^{1/q}\\&\lesssim\big\|f(x)\big\|_{p,d\mu_k}.\end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что неравенство (6) может быть записано в эквивалентной форме

$$\big\||x|^{-\gamma}I_\alpha^k(|\cdot|^{-\beta}f)(x)\big\|_{q,d\mu_k}\leq \mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)\big\|f(x)\big\|_{p,d\mu_k}.$$

Неравенство (19) доказано.

Докажем неравенство

$$\big\|\chi_{B_1^c}(x)u_{-\gamma}(x)J_3f(x)\big\|_{q,d\mu_k}\lesssim\big\|u_\beta(x)f(x)\big\|_{p,d\mu_k}. \tag{20}$$

Оно эквивалентно неравенству

$$\big\|\chi_{B_1^c}(x)u_{-\gamma}(x)J_3(u_{-\beta}f)(x)\big\|_{q,d\mu_k}\lesssim\big\|f(x)\big\|_{p,d\mu_k}.$$

Из условия $|x|\geqslant 1$ вытекает $u_{-\gamma}(x)\asymp|x|^{-\gamma_2}$, $u_{-\beta}(x)\asymp|x|^{-\beta_2}$, поэтому последнее неравенство можно записать так

$$A:=\big\|\chi_{B_1^c}(x)|x|^{-\gamma_2-\beta_2}J_3f(x)\big\|_{q,d\mu_k}\lesssim\big\|f(x)\big\|_{p,d\mu_k}.$$

Так как

$$\alpha-\frac{d_k}{q'}+\alpha-\frac{d_k}{p}<\alpha-d_k\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)\ \text{ или }\ \alpha<d_k,$$

то существует пара (γ_0,β_0) такая, что

$$\alpha-\gamma_0<\frac{d_k}{q'},\quad \alpha-\beta_0<\frac{d_k}{p},\quad \gamma_0+\beta_0=\alpha-d_k\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)\leqslant\gamma_2+\beta_2.$$

Для нее также $\gamma_0<\frac{d_k}{q}$, $\beta_0<\frac{d_k}{p'}$ и по теореме 2 для пары (γ_0,β_0)

$$\begin{aligned}A&\leqslant\Big(\int_{|x|\leqslant 1}\Big(|x|^{-\gamma_0-\beta_0}\int_{|x|/2\leqslant|y|\leqslant 2|x|}f(y)\Phi_\alpha(x,y)\,d\mu_k(y)\Big)^q\,d\mu_k(x)\Big)^{1/q}\\&\lesssim\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\Big(|x|^{-\gamma_0}\int_{\mathbb{R}^d}f(y)|y|^{-\beta_0}\Phi_\alpha(x,y)\,d\mu_k(y)\Big)^q\,d\mu_k(x)\Big)^{1/q}\\&\lesssim\big\|f(x)\big\|_{p,d\mu_k}.\end{aligned}$$

Неравенство (20) также доказано. Из (19), (20) вытекает неравенство (18). $\square$

Доказательство теоремы 4. С учетом теоремы 3 остается установить необходимость условия $\alpha \geqslant d\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)$. Пусть $0<\varepsilon<1/3$, $x_0=(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^d$, $B_\varepsilon(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^d\colon\ |x-x_0|\leqslant\varepsilon\}$. Если $x,y\in B_\varepsilon(x_0)$, то

$$\frac{1}{2}|x|\leqslant\frac{1}{2}(1+\varepsilon)|x_0|\leqslant(1-\varepsilon)|x_0|\leqslant|y|\leqslant(1+\varepsilon)|x_0|\leqslant 2(1-\varepsilon)|x_0|\leqslant 2|x|$$

и с постоянными, не зависящими от ε,

$$u_{-\gamma}(x)\asymp 1,\quad u_\beta(x)\asymp 1,$$

поэтому,

$$\big\|\chi_{B_\varepsilon(x_0)}(x)u_{-\gamma}(x)I_\alpha(\chi_{B_\varepsilon(x_0)})(x)\big\|_{q,d\mu_k}\gtrsim\Big(\int_{B_\varepsilon(x_0)}\Big(\int_{B_\varepsilon(x_0)}\frac{dy}{|x-y|^{d-\alpha}}\Big)^q\,dx\Big)^{1/q},$$

$$\big\|u_\beta(x)\chi_{B_\varepsilon(x_0)}(x)\big\|_{p,d\mu_k}\lesssim\Big(\int_{B_\varepsilon(x_0)}dx\Big)^{1/p}.$$

Делая в интегралах замены переменных $x=x_0+\varepsilon z$, $y=x_0+\varepsilon w$, получим

$$\big\|u_{-\gamma}(x)I_\alpha(\chi_{B_\varepsilon(x_0)})(x)\big\|_{q,d\mu_k}\gtrsim\varepsilon^{\alpha+d/q}\Big(\int_{B_1}\Big(\int_{B_1}\frac{dw}{|z-w|^{d-\alpha}}\Big)^q\,dz\Big)^{1/q}\gtrsim\varepsilon^{\alpha+d/q},$$

$$\big\|u_\beta(x)\chi_{B_\varepsilon(x_0)}(x)\big\|_{p,d\mu_k}\lesssim\varepsilon^{d/p}.$$

Следовательно, для справедливости неравенства (7) при $\varepsilon\to 0$ необходимо выполнение условия $\alpha+\frac{d}{q}\geqslant\frac{d}{p}$. $\square$

Рассмотрим сужение D-потенциала Рисса на радиальные функции. Пусть $x=rx'$, $y=ty'$, $r=|x|$, $t=|y|$, $f(x)=f_0(r)$. Применяя полярные координаты, свойства 1, 3 ядра $\Phi_\alpha(x,y)$, получим

$$I_\alpha^k f(x)=\int_0^\infty f_0(r,t)\Phi_{\alpha,0}(r,t)\,d\nu_{\lambda_k}(t)=I_\alpha^{\lambda_k}f_0(r),$$

где

$$\Phi_{\alpha,0}(r,t)=(\gamma_\alpha^k)^{-1}c_{\lambda_k}\int_0^\pi\big(r^2+t^2-2rt\cos\varphi\big)^{(\alpha-d_k)/2}\sin^{d_k-2}\varphi\,d\varphi.$$

Пусть $L^p(\mathbb{R}_+,d\nu_{\lambda_k})$, $1\le p<\infty$, — пространства Лебега с нормой

$$\|f\|_{p,d\nu_{\lambda_k}}=\Big(\int_0^\infty|f|^p\,d\nu_{\lambda_k}\Big)^{1/p}<\infty.$$

Для радиальной функции $\|f(x)\|_{p,d\mu_k}=\|f_0(r)\|_{p,d\nu_{\lambda_k}}$.

Предложение 2 [17-19]. *Пусть* $d\in\mathbb{N}$, k *— произвольная функция кратности,* $1<p<q<\infty$, $0<\alpha<d_k$. *Неравенство*

$$\big\|r^{-\gamma}I_\alpha^{\lambda_k}f_0(r)\big\|_{q,d\nu_{\lambda_k}}\lesssim\big\|r^\beta f_0(r)\big\|_{p,d\nu_{\lambda_k}}$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\gamma<\frac{d_k}{q},\quad\beta<\frac{d_k}{p'},\quad\alpha\geqslant\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\quad\alpha-\gamma-\beta=d_k\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big).$$

Доказательство теоремы 5. Пусть $r = |x|$, $f(x) = f_0(r)$ — неотрицательная радиальная функция. Как и при доказательстве теоремы‘3 будем использовать разложение (17). Так как в неравенствах (14), (15) экстремальным является подпространство радиальных функций, то условия (8) являются необходимыми и достаточными для справедливости неравенств

$$\big\|u_{-\gamma}(x)J_i f(x)\big\|_{q,d\mu_k} \lesssim \big\|u_\beta(x)f(x)\big\|_{p,d\mu_k}, \quad i = 1, 2.$$

Неравенство

$$\big\|u_{-\gamma}(x)J_3 f(x)\big\|_{q,d\mu_k} \lesssim \big\|u_\beta(x)f(x)\big\|_{p,d\mu_k}$$

доказывается также как и в теореме 3, только вместо теоремы 2 следует использовать предложение 2.

Необходимость условия $\alpha \geqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ доказана, например, в [19]. $\square$

4. Заключение

Ограниченность D-потенциала Рисса исследована в лебеговых пространствах с весом Данкля для степенных и кусочно-степенных весов. Хотя в теоремах 2, 3 остается невыясненным вопрос о необходимости при $p < q$ условия $\alpha \geqslant d_k\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$. Другой важной задачей становится исследование ограниченности D-потенциала Рисса для пары общих весов $u(x)$, $v(x)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frostman O. Potentiel d'equilibre et capacite des ensembles avec quelques applications a la theorie des fonctions. These. Communic. Semin. Math. de l'Univ. de Lund., 1935. Vol. 3.

2. Riesz M. L'integrale de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy // Acta Math. 1949. Vol. 81, № 1. P. 1–222.

3. Hardy G. H., Littelwood J. E. Some properties of fractional integrals, I // Math. Zeit. 1928. Vol. 27. P. 565–606.

4. Соболев С. Об одной теореме функционального анализа // Матем. сб. 1938. Т. 4(46), № 4. С. 471–497.

5. Stein E. M., Weiss G. Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space // J. Math. Mech. 1958. Vol. 7, № 4. P. 503–514.

6. Dunkl C. F. Hankel transforms associated to finite reflections groups // Contemp. Math. 1992. Vol. 138. P. 123–138.

7. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2003. Vol. 1817. P. 93–135.

8. Thangavelu S., Xu Y. Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform // J. Comput. Appl. Math. 2007. Vol. 199. P. 181–195.

9. Rösler M. Positivity of Dunkl's intertwinning operator // Duke Math. J. 1999. Vol. 98. P. 445–463.

10. Rösler M. Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators // Comm. Math. Phys. 1998. Vol. 192. P. 519–542.

11. Trimèche K. Paley-Wiener Theorems for the Dunkl transform and Dunkl translation operators // Integral Transform. Spec. Funct. 2002. Vol. 13. P. 17–38.

12. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive L_p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2018. P. 1–51.
doi.org/10.1007/s00365-018-9435-5

13. Rösler M. A positive radial product formula for the Dunkl kernel // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 355, № 6. P. 2413–2438.

14. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform. Preprint CRM, Barcelona, 2018. № 1238. P. 1–28.

15. Hassani S., Mustapha S., Sifi M. Riesz potentials and fractional maximal function for the Dunkl transform // J. Lie Theory. 2009. Vol. 19, № 4. P. 725–734.

16. Abdelkefi C., Rachdi M. Some properties of the Riesz potentials in Dunkl analysis // Ricerche Mat. 2015. Vol. 64, № 4. P. 195–215.

17. Nowak A., Stempak K. Potential operators associated with Hankel and Hankel-Dunkl transforms // J. d'Analyse Math. 2017. Vol. 131, № 1. P. 277–321.

18. De Nápoli P. L., Drelichman I., Durán R. G. On weighted inequalities for fractional integrals of radial functions // Illinois J. Math. 2011. Vol. 55. P. 575–587.

19. Duoandikoetxea J. Fractional integrals on radial functions with applications to weighted inequalities // Ann. Mat. Pura Appl. 2013. Vol. 192. P. 553–568.

20. Рубин Б. С. Одномерное представление, обращение и некоторые свойства потенциалов Рисса от радиальных функций // Матем. заметки. 1983. Т. 34, № 4. P. 521–533.

21. Sinnamon G, Stepanov V. D. The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // J. London Math. Soc. 1996. Vol. 54, № 2. P. 89–101.

22. Kufner A., Opic B. Xardy-type inequalities. Pitman Research Notes in Mathematics Series. Harlow: Longman Scientific and Technical, 1990. 333 p.

23. Kufner A., Persson L. E. Weighted inequalities of Xardy type. Singopure-London: World Scientific hrblishing Co. Pte. Ltd., 2003. 358 p.

REFERENCES

1. Frostman O., 1935, “Potentiel d'equilibre et capacite des ensembles avec quelques applications a la theorie des fonctions”, *These, Communic. Semin. Math. de l'Univ. de Lund.*, vol. 3.

2. Riesz M., 1949, “L'integrale de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy”, *Acta Math.*, vol. 81, № 1, pp. 1–222.

3. Hardy G. H., Littelwood J. E., 1928, “Some properties of fractional integrals, I”, *Math. Zeit.*, vol. 27, pp. 565–606.

4. Soboleff S., 1963, “Sur un théoréme d'analyse fonctionnelle”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, № 2(34), pp. 39–68.

5. Stein E. M., Weiss G., 1958, “Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space”, *J. Math. Mech.*, vol. 7, № 4, pp. 503–514.

6. Dunkl C. F., 1992, “Hankel transforms associated to finite reflections groups”, *Contemp. Math.*, vol. 138, pp. 123–138.

7. Rösler M., 2003, “Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions”, *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.

8. Thangavelu S., Xu Y., 2007, “Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform”, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 199, pp. 181–195.

9. Rösler M., 1999, “Positivity of Dunkl's intertwinning operator”, *Duke Math. J.*, vol. 98, pp. 445–463.

10. Rösler M., 1998, “Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators”, *Comm. Math. Phys.*, vol. 192, pp. 519–542.

11. Trimèche K., 2002, “Paley-Wiener Theorems for the Dunkl transform and Dunkl translation operators”, *Integral Transform. Spec. Funct.*, vol. 13, pp. 17–38.

12. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2018, “Positive L_p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications”, *Constr. Approx.*, doi.org/10.1007/s00365-018-9435-5, pp. 1–51.

13. Rösler M., 2003, “A positive radial product formula for the Dunkl kernel”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 355, № 6, pp. 2413–2438.

14. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2018, “Riesz potential and maximal function for Dunkl transform”, *Preprint CRM, Barcelona*, № 1238, pp. 1–28.

15. Hassani S., Mustapha S., Sifi M., 2009, “Riesz potentials and fractional maximal function for the Dunkl transform”, *J. Lie Theory*, vol. 19, № 4, pp. 725–734.

16. Abdelkefi C., Rachdi M., 2015, “Some properties of the Riesz potentials in Dunkl analysis”, *Ricerche Mat.*, vol. 64, № 4, pp. 195–215.

17. Nowak A., Stempak K., 2017, “Potential operators associated with Hankel and Hankel-Dunkl transforms”, *J. d'Analyse Math.*, vol. 131, № 1, pp. 277–321.

18. De Nápoli P. L., Drelichman I., Durán R. G., 2011, “On weighted inequalities for fractional integrals of radial functions”, *Illinois J. Math.*, vol. 55, pp. 575–587.

19. Duoandikoetxea J., 2013, “Fractional integrals on radial functions with applications to weighted inequalities”, *Ann. Mat. Pura Appl.*, vol. 192, pp. 553–568.

20. Rubin B. S., 1983, “One-dimensional representation, inversion and certain properties of Riesz potentials of radial functions”, *Math. Notes*, vol. 34, № 4, pp. 751–757.

21. Sinnamon G, Stepanov V. D., 1996, “The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$”, *J. London Math. Soc.*, vol. 54, № 2, pp. 89–101.

22. Kufner A., Opic B., 1990, “Xardy-type inequalities”, Pitman Research Notes in Mathematics Series, *Harlow: Longman Scientific and Technical*, 333 p.

23. Kufner A., Persson L. E., 2003, “Weighted inequalities of Xardy type”, *Singapore-London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, 358 p.

Получено 13.02.2019
Принято к печати 10.04.2019