ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 2.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-221-233

Факторно делимые группы и группы без кручения, соответствующие конечным абелевым группам

Е. И. Компанцева, А. А. Фомин

Компанцева Екатерина Игоревна — доктор технических наук, доцент, профессор кафедры алгебры, Московский педагогический государственный университет; профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики, Финансовый университет при Правительстве РФ (г. Москва).
e-mail: kompantseva@yandex.ru
Фомин Александр Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: alexander.fomin@mail.ru

Аннотация

Категория последовательностей $\mathcal{S}$ была введена в [1, 2, 3]. Объектами категории $\mathcal{S}$ являются конечные последовательности вида $a_1, \ldots, a_n$, где элементы $a_1, \ldots, a_n$ принадлежат конечно представимому модулю над кольцом полиадических чисел $\widehat{Z}$. Кольцо полиадических чисел $\widehat{Z} = \prod\limits_p \widehat{Z}_p$ – это произведение колец целых p-адических чисел по всем простым числам p. Морфизмами категории $\mathcal{S}$ из объекта $a_1, \ldots, a_n$ в объект $b_1, \ldots, b_k$ являются все возможные пары (φ, T), где $\varphi : \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\widehat{Z}} \to \langle b_1, \ldots, b_k \rangle_{\widehat{Z}}$ – гомоморфизм $\widehat{Z}$-модулей, порожденных данными элементами, и T - целочисленная матрица размера $k \times n$, которые удовлетворяют следующему матричному равенству

$$(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n) = (b_1, \ldots, b_k)T.$$

В [2] доказано, что категория $\mathcal{S}$ эквивалентна категории $\mathcal{D}$ смешанных факторно делимых абелевых групп с отмеченными базисами. В [3] доказано, что категория $\mathcal{S}$ двойственна категории $\mathcal{F}$ абелевых групп без кручения конечного ранга с отмеченными базисами, под базисом мы понимаем здесь любую максимальную линейно независимую систему элементов. Композиция этой эквивалентности и двойственности является двойственностью, введенной в [1] и в [4], которую можно также рассматривать как версию двойственности, введенной в [5].

Если объект категории $\mathcal{S}$ состоит из одного элемента, то ему соответствуют группы ранга 1 в категориях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{F}$. Этот случай разобран в [6]. При этом двойственность $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{F}$ дает нам классическое описание Р. Бэра [7] групп без кручения ранга 1. Эквивалентность $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{D}$ согласуется с описанием О. И. Давыдовой [8] факторно делимых групп ранга 1.

В настоящей статье мы рассматриваем другой вырожденный случай. Любая периодическая абелева группа может рассматриваться как модуль над кольцом полиадических чисел. При этом периодическая группа является конечно представимым $\widehat{Z}$-модулем тогда и только тогда, когда она конечна. Следовательно, для любой системы образующих $g_1, \ldots, g_n$ любой конечной абелевой группы G последовательность $g_1, \ldots, g_n$ является объектом категории $\mathcal{S}$. Более того, такие объекты определяют полную подкатегорию категории $\mathcal{S}$.

В данной статье показано, что объекту $g_1, \ldots, g_n$ категории $\mathcal{S}$ соответствует в категории $\mathcal{D}$ факторно делимая группа вида $G \oplus Q^n$ с отмеченным базисом $g_1 + e_1, \ldots, g_n + e_n$, где $e_1, \ldots, e_n$ – стандартный базис векторного пространства Q^n над полем рациональных чисел Q. В категории $\mathcal{F}$ данному объекту соответствует свободная группа A, удовлетворяющая условиям $Z^n \subset A \subset Q^n$ и $A/Z^n \cong G^*$, где $G^* = Hom(G, Q/Z)$ – дуальная группа. Мы также рассматриваем гомоморфизмы групп, соответствующие морфизмам категории $\mathcal{S}$.

Ключевые слова: абелевы группы, модули, двойственные категории.

Библиография: 36 названий.

Для цитирования:
Е. И. Компанцева, А. А. Фомин. Факторно делимые группы и группы без кручения, соответствующие конечным абелевым группам // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 221–233.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 2.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-221-233

Quotient divisible groups and torsion-free groups corresponding to finite Abelian groups

E. I. Kompantseva, A. A. Fomin

Kompantseva Ekaterina Igorevna — doctor of engineering, professor, Professor, Department of algebra, Moscow state pedagogical University; Professor of the Department of probability theory and mathematical statistics, Financial University under the Government of the Russian Federation (Moscow).
e-mail: kompantseva@yandex.ru
Fomin Alexander Alexandrovich — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: alexander.fomin@mail.ru

Abstract

The category of sequences $\mathcal{S}$ has been introduced in [1, 2, 3]. Objects of the category $\mathcal{S}$ are finite sequences of the form $a_1, \ldots, a_n$, where the elements $a_1, \ldots, a_n$ belong to a finitely presented module over the ring of polyadic numbers $\widehat{Z}$. The ring of polyadic numbers $\widehat{Z} = \prod\limits_p \widehat{Z}_p$ is the product of the rings of p-adic integers over all prime numbers p. Morphisms of the category $\mathcal{S}$ from the object $a_1, \ldots, a_n$ to an object $b_1, \ldots, b_k$ are all possible pairs (φ, T), where $\varphi : \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\widehat{Z}} \to \langle b_1, \ldots, b_k \rangle_{\widehat{Z}}$ is a homomorphism of $\widehat{Z}$-modules, generated by given elements, and T is a matrix of dimension $k \times n$ with integer entries such that the following matrix equality takes place

$$(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n) = (b_1, \ldots, b_k)T.$$

It is proved in [2] that the category $\mathcal{S}$ is equivalent to the category $\mathcal{D}$ of mixed quotient divisible abelian groups with marked bases. It is proved in [3] that the category $\mathcal{S}$ is dual to the category $\mathcal{F}$ of torsion-free finite-rank abelian groups with marked bases, a basis means here a maximal linearly independent set of elements. The composition of these equivalence and duality is the duality introduced in [1] and in [4], which can be considered as a version of the duality introduced in [5].

If an object of the category $\mathcal{S}$ consists of one element, then it corresponds to rank-1 groups of the categories $\mathcal{D}$ and $\mathcal{F}$. This case is considered in [6] and we obtain the following. The duality $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{F}$ gives us the classical description by R. Baer [7] of rank-1 torsion-free groups. The equivalence $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{D}$ coincides with the description by O.I. Davydova [8] of rank-1 quotient divisible groups.

We consider another marginal case in the present paper. Every torsion abelian group can be considered as a module over the ring of polyadic numbers. Moreover, a torsion group is a finitely presented $\widehat{Z}$-module if and only if it is finite. Thus, for every set of generators $g_1, \ldots, g_n$ of every finite abelian group G the sequence $g_1, \ldots, g_n$ is an object of the category $\mathcal{S}$. Such objects determine a complete subcategory of the category $\mathcal{S}$.

We show in the present paper that the object $g_1, \ldots, g_n$ of the category $\mathcal{S}$ corresponds to an object of the category $\mathcal{D}$, which is of the form $G \oplus Q^n$ with the marked basis $g_1 + e_1, \ldots, g_n + e_n$, where $e_1, \ldots, e_n$ is the standard basis of the vector space Q^n over the field of rational numbers Q. The same object $g_1, \ldots, g_n$ corresponds to an object of the category $\mathcal{F}$, which is a free group A, satisfying the conditions $Z^n \subset A \subset Q^n$ and $A/Z^n \cong G^*$, where $G^* = Hom(G, Q/Z)$ is the dual finite group.

We consider also the group homomorphisms corresponding to morphisms of the category $\mathcal{S}$.

Keywords: abelian groups, modules, dual categories.

Bibliography: 36 titles.

For citation:

E. I. Kompantseva, A. A. Fomin, 2019, "Quotient divisible groups and torsion-free groups corresponding to finite Abelian groups" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 221–233.

1. Введение

Все рассматриваемые группы являются абелевыми. $Z, Q, \widehat{Z}_p, Z_n$ обозначают соответственно кольца целых, рациональных, целых p-адических чисел и кольцо классов вычетов по модулю n. Так же обозначаются их аддитивные группы. Кольцо полиадических чисел $\widehat{Z} = \prod\limits_p \widehat{Z}_p$ – это произведение колец целых p-адических чисел по всем простым числам p.

Под характеристикой $\chi = (m_p)$ понимается любая последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞, занумерованная всеми простыми числами. Для каждой характеристики $\chi = (m_p)$ определяется кольцо $Z_\chi = \prod\limits_p K_p$ как произведение по всем простым числам p колец K_p, где $K_p = Z_{p^{m_p}}$ при $m_p < \infty$ или $K_p = \widehat{Z}_p$ при $m_p = \infty$.

Если $a_1, \ldots, a_n$ – элементы модуля M над коммутативным кольцом R, то $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_R$ обозначает подмодуль, порожденный данными элементами, $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ – подгруппа, порожденная этими элементами, $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_*$ – сервантная оболочка этих элементов, которая состоит из таких элементов $a \in M$, для которых существует целое число $m \neq 0$, при котором $ma \in \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. Модуль M называется конечно представимым, если для некоторых целых положительных чисел m и n существует точная последовательнось R-модулей

$$R^m \to R^n \to M \to 0.$$

Любой конечно представимый модуль M над кольцом полиадических чисел $\widehat{Z}$ имеет вид $M = Z_{\chi_1} \oplus \ldots \oplus Z_{\chi_n}$. При дополнительном условии $\chi_1 \leq \ldots \leq \chi_n$ последовательность характеристик определена однозначно. Для любого конечно порожденного подмодуля N конечно представимого $\widehat{Z}$-модуля M оба модуля N и M/N являются конечно представимыми.

Абелева группа A называется факторно делимой, если она содержит свободную подгруппу F конечного ранга такую, что факторгруппа A/F является периодической делимой группой. При этом сама группа A не содержит ненулевых делимых периодических подгрупп. Свободный базис группы F называется базисом факторно делимой группы A. Ранг группы F называется рангом факторно делимой группы A.

Факторно делимые группы в настоящее время активно исследуются разными авторами (см. [9–23]). Мы рассматриваем категорию $\mathcal{D}$ факторно делимых групп с отмеченными базисами.

Объектами категории $\mathcal{D}$ являются пары $A; a_1, \ldots, a_n$, состоящие из факторно делимой группы A и какого-либо базиса $a_1, \ldots, a_n$ этой группы. Морфизмами из объекта $A; a_1, \ldots, a_n$ в объект $B; b_1, \ldots, b_k$ являются любые гомоморфизмы групп $f : A \to B$, для которых матрица T размера $k \times n$, определяемая равенством

$$(fa_1, \ldots, fa_n) = (b_1, \ldots, b_k)T,$$

состоит из целых чисел. В [2] были построены два ковариантных функтора $\Phi : \mathcal{D} \to \mathcal{S}$ и $\Psi : \mathcal{S} \to \mathcal{D}$, композиция которых в любом порядке изоморфна тождественному функтору, то есть $\Psi\Phi \cong id_{\mathcal{D}}$ и $\Phi\Psi \cong id_{\mathcal{S}}$. Таким образом, категории $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ эквивалентны.

Аналогичным образом определяется категория $\mathcal{F}$ абелевых групп без кручения конечного ранга с отмеченными базисами. Под базисом группы без кручения здесь понимается любая максимальная линейно независимая система элементов этой группы.

Объектами категории $\mathcal{F}$ являются пары $A; a_1, \ldots, a_n$, состоящие из группы без кручения конечного ранга A и какого-либо базиса $a_1, \ldots, a_n$ этой группы. Морфизмами из объекта $A; a_1, \ldots, a_n$ в объект $B; b_1, \ldots, b_k$ являются любые гомоморфизмы групп $f : A \to B$, для которых матрица T размера $k \times n$, определяемая равенством

$$(fa_1, \ldots, fa_n) = (b_1, \ldots, b_k)T,$$

состоит из целых чисел. В [3] (см. также [1]) были построены два контравариантных функтора $\Delta : \mathcal{F} \to \mathcal{S}$ и $\Theta : \mathcal{S} \to \mathcal{F}$, композиция которых в любом порядке изоморфна тождественному функтору, то есть $\Theta\Delta \cong id_{\mathcal{F}}$ и $\Delta\Theta \cong id_{\mathcal{S}}$. Таким образом, категории $\mathcal{F}$ и $\mathcal{S}$ являются двойственными.

Заметим, что в категориях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{F}$ матрицы морфизмов однозначно определены соответствующими гомоморфизмами групп. Это, вообще говоря, не так в категории $\mathcal{S}$. Например, для объекта категории $\mathcal{S}$, состоящего из n нулей, морфизмы из этого объекта в себя представляют собой пары (φ, T), где φ – один и тот же нулевой гомоморфизм модулей, а в качестве T можно взять любую целочисленную матрицу размера $n \times n$.

Мы понимаем Z-адическое пополнение $\widehat{A}$ группы A как обратный предел следующего обратного спектра гомоморфизмов

$$\pi_n^m : A/mA \to A/nA$$

для всех пар (m, n) натуральных чисел таких, что число n является делителем числа m. Здесь $\pi_n^m(a + mA) = a + nA$. Элемент $a = (a_1, a_2, \ldots)$ группы $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A/nA$ называется сетью, если $\pi_n^m(a_m) = a_n$ для любой пары (m, n) натуральных чисел такой, что n делит m. Легко видеть, что все сети составляют подгруппу группы $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A/nA$. Эта подгруппа $\widehat{A}$ является обратным пределом данного спектра, то есть Z-адическим пополнением группы A. Для любого элемента $a \in A$, последовательность $\mu(a) = (a + A, a + 2A, a + 3A, \ldots)$ является сетью. Таким образом мы получаем естественный гомоморфизм $\mu : A \to \widehat{A}$, который мы также называем Z-адическим пополнением группы A. Заметим, что кольцо полиадических чисел $\widehat{Z}$ является Z-адическим пополнением кольца целых чисел Z, а пополнение $\widehat{A}$ любой группы A является также модулем над кольцом $\widehat{Z}$.

Все остальные определения и обозначения стандартны и соответствуют книге [24].

2. Факторно делимые группы

Теорема 1. *Пусть U – делимая группа без кручения ранга n и $u_1, \ldots, u_n \in U$ – максимальная линейно независимая система элементов, G – произвольная конечная группа, по-*

рожденная элементами $g_1, \ldots, g_n$. Тогда группа $G \oplus U$ является факторно делимой группой с базисом $g_1 + u_1, \ldots, g_n + u_n$.

Доказательство. Ясно, что система элементов $g_1 + u_1, \ldots, g_n + u_n$ является максимальной линейно независимой в группе $G \oplus U$. Подгруппа $F = \langle g_1 + u_1, \ldots, g_n + u_n \rangle$ является свободной группой со свободным базисом $g_1 + u_1, \ldots, g_n + u_n$ и факторгруппа $(G \oplus U)/F$ является периодической группой. Рассмотрим произвольный элемент $g + u \in G \oplus U, g \in G, u \in U$, и произвольное целое положительное число m. Так как элементы $g_1, \ldots, g_n$ порождают группу G, то для подходящих целых коэффициентов имеет место равенство $g = k_1 g_1 + \ldots + k_n g_n$. Тогда элемент $(g + u) - (k_1(g_1 + u_1) + \ldots + k_n(g_n + u_n))$ принадлежит группе U и поэтому делится в группе $G \oplus U$ на m. Следовательно, любой элемент группы $G \oplus U$ по модулю подгруппы F делится на любое целое положительное число. Это означает, что факторгруппа $(G \oplus U)/F$ является делимой группой, то есть группа $G \oplus U$ является факторно делимой с базисом $g_1 + u_1, \ldots, g_n + u_n$. $\square$

Как известно, любая конечная группа полна в своей Z-адической топологии, т. е. $\widehat{G} = G$. Обозначим через $A = G \oplus U$ факторно делимую группу из Теоремы 1. Гомоморфизм Z-адического пополнения $\mu : A \to \widehat{A}$ совпадает с проекцией $G \oplus U \to G$. Таким образом, гомоморфизм $\mu : A \to \widehat{A}$ переводит элементы $g_1 + u_1, \ldots, g_n + u_n$ соответственно в элементы $g_1, \ldots, g_n$. Так как элементы $g_1, \ldots, g_n$ порождают группу $G = \widehat{A}$, то группа A является факторно делимой еще и по теореме о вложении 3.3 [2].

Согласно определению функтора $\Phi : \mathcal{D} \to \mathcal{S}$ (Теорема 6.3 [2]), Φ переводит факторно делимую группу A с отмеченным базисом $g_1 + u_1, \ldots, g_n + u_n$ в объект $\mu(g_1 + u_1), \ldots, \mu(g_n + u_n)$ категории $\mathcal{S}$, т.е. в объект $g_1, \ldots, g_n$. С другой стороны, согласно определению функтора $\Psi : \mathcal{S} \to D$ (Теоремы 6.3 и 3.5 [2]), $\Psi(g_1, \ldots, g_n)$ совпадает с сервантной оболочкой элементов $g_1 + u_1, \ldots, g_n + u_n$ в группе $A = G \oplus U$, т.е. с самой группой A.

Заметим, что $U \cong Q^n$ и в качестве максимальной линейно независимой системы можно взять стандартный базис $u_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, u_n = (0, \ldots, 0, 1)$ векторного пространства $U = Q^n$ над полем рациональных чисел Q. Подведем итог всему вышесказанному в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть G – конечная группа, порожденная элементами $g_1, \ldots, g_n$. Тогда эквивалентность $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{D}$ ставит в соответствие объекту $g_1, \ldots, g_n$ категории $\mathcal{S}$ факторно делимую группу $G \oplus Q^n$ с базисом $g_1 + u_1, \ldots, g_n + u_n$, где $u_1, \ldots, u_n$ – стандартный базис векторного пространства Q^n над полем рациональных чисел Q.*

Следствие 1. *Последовательности из n нулей $0, \ldots, 0$ в категории $\mathcal{S}$ соответствует группа Q^n со стандартным базисом в категории $\mathcal{D}$.*

Теперь мы рассмотрим произвольный морфизм

$$(\varphi, T) : g_1, \ldots, g_n \to h_1, \ldots, h_k \tag{1}$$

категории $\mathcal{S}$. Здесь элементы $h_1, \ldots, h_k$ также порождают конечную группу $H = \langle h_1, \ldots, h_k \rangle$. Групповой гомоморфизм $\varphi : G \to H$ связан с целочисленной матрицей T матричным равенством $(\varphi g_1, \ldots, \varphi g_n) = (h_1, \ldots, h_k)T$. Согласно Теореме 2, объекту $h_1, \ldots, h_k$ категории $\mathcal{S}$ соответствует в категории $\mathcal{D}$ факторно делимая группа $H \oplus Q^k$ с базисом $h_1 + v_1, \ldots, h_k + v_k$, где $v_1, \ldots, v_k$ – стандартный базис векторного пространства Q^k. Целочисленная матрица T размера $k \times n$ определяет гомоморфизм $f_T : Q^n \to Q^k$ при помощи следующего матричного равенства $(f_T(u_1), \ldots, f_T(u_n)) = (v_1, \ldots, v_k)T$. Наконец мы определяем гомоморфизм факторно делимых групп $f = \Psi(\varphi, T) : G \oplus Q^n \to H \oplus Q^k$ следующим образом: $f(g + u) = \varphi(g) + f_T(u), g \in G, u \in Q^n$.

Теорема 3. *Гомоморфизм факторно делимых групп $f : G \oplus Q^n \to H \oplus Q^k$, соответствующий морфизму (1) является морфизмом категории $\mathcal{D}$ с матрицей T.*

Доказательство. Нужно показать, что этому гомоморфизму соответствует целочисленная матрица T относительно выделенных базисов. Действительно,

$$(f(g_1 + u_1), \ldots, f(g_n + u_n)) = (\varphi(g_1) + f_T(u_1), \ldots, \varphi(g_n) + f_T(u_n)) =$$
$$= (\varphi(g_1), \ldots, \varphi(g_n)) + (f_T(u_1), \ldots, f_T(u_n)) =$$
$$= (h_1, \ldots, h_k)T + (v_1, \ldots, v_k)T = (h_1 + v_1, \ldots, h_k + v_k)T.$$

□

Пример 1. Предположим, что все элементы $g_1, \ldots, g_n$ имеют одинаковый порядок m и группа G раскладывается в прямую сумму $G = \langle g_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle g_n \rangle$. Тогда соответствующая факторно делимая группа $G \oplus Q^n$ также раскладывается в прямую сумму факторно делимых групп ранга 1, $G \oplus Q^n \cong Z_m^n \oplus Q^n = (Z_m \oplus Q)^n$, т. е. такая группа является однородной вполне разложимой факторно делимой группой. В общем случае под однородной вполне разложимой факторно делимой группой мы понимаем группу вида R^n, где R – произвольная факторно делимая группа ранга 1. Таким группам посвящена статья [9]. В ней, в частности, доказывается следующая теорема. Если в короткой точной последовательности факторно делимых групп $0 \to B \to A \to C \to 0$ группа A является однородной вполне разложимой, то группы B и C также являются однородными вполне разложимыми и последовательность расщепляется. Эта теорема является дуализацией классической теоремы Р. Бэра [7] о том, что сервантные подгруппы однородной вполне разложимой группы без кручения выделяются в качестве прямых слагаемых.

3. Группы без кручения

Объектами категории $\mathcal{F}$ являются группы без кручения конечного ранга с отмеченными базисами (максимальными линейно независимыми системами элементов). Наличие выделенного базиса $a_1, \ldots, a_n$ в группе A определяет вложение этой группы в векторное пространство Q^n над полем рациональных чисел Q. Всякий элемент $a \in A$ однозначно представляется в виде $a = r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n$, где $r_1, \ldots, r_n \in Q$. Тогда вложение определяется правилом

$$a \mapsto (r_1, \ldots, r_n) \in Q^n.$$

При этом элементы базиса переходят в элементы стандартного базиса

$$a_1 \mapsto (1, 0, \ldots, 0), \ldots, a_n \mapsto (0, \ldots, 0, 1).$$

Мы можем отождествить объект категории $\mathcal{F}$ с подгруппой аддитивной группы векторного пространства Q^n, то есть считать, что $Z^n \subset A \subset Q^n$. При этом роль отмеченного базиса всегда будет играть стандартный базис этого векторного пространства.

Отметим, что, согласно [24], любая кольцевая структура на группе без кручения G ранга n вкладывается в однозначно определенное кольцо на делимой оболочке группы G, которую можно отождествить с Q^n. Сам термин факторно делимая группа был введён в [25] для описания групп без кручения конечного ранга, допускающих кольцевую структуру, которая индуцирует на делимой оболочке группы полупростую алгебру. Возможность вложения кольца без кручения конечного ранга в конечномерную сепарабельную алгебру, строение которой описывается основной теоремой Веддерберна, позволяет изучать как сами группы, так и кольца на них (см., например, [26–30]).

Рассмотрим короткую точную последовательность $0 \to Z^n \overset{id}{\to} Q^n \overset{q}{\to} (Q/Z)^n \to 0$, где первый гомоморфизм $id : Z^n \to Q^n$ является тождественным вложением, второй гомоморфизм $q : Q^n \to Q^n/Z^n$ является каноническим. Заметим, что группы A со свойством $Z^n \subset A \subset Q^n$ находятся во взаимно однозначном соответствии с подгруппами группы $(Q/Z)^n$. Таким образом, чтобы задать объект категории $\mathcal{F}$ достаточно указать какую-либо подгруппу G группы $(Q/Z)^n$. Тогда полный прообраз этой подгруппы $Z^n \subset A = q^{-1}(G) \subset Q^n$ является группой без кручения ранга n с отмеченным базисом $u_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, u_n = (0, \dots, 0, 1)$, то есть объектом категории $\mathcal{F}$.

Пусть $Z^k \subset B \subset Q^k$ - другой объект категории $\mathcal{F}$ и $v_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, v_k = (0, \dots, 0, 1)$ – его отмеченный базис. Пусть $f : B \to A$ – произвольный гомоморфизм групп. Он продолжается до линейного отображения $f : Q^k \to Q^n$ и определяет матрицу T размера $n \times k$ с рациональными элементами, для которой выполнено равенство $(fv_1, \dots, fv_k) = (u_1, \dots, u_n)T$. Легко видеть, что если $(r_1, \dots, r_k) \in B, r_1, \dots, r_k \in Q$, то $f(r_1, \dots, r_k) = (r_1, \dots, r_k)T^t$, где T^t - транспонированная матрица. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Z^k & \to & Q^k & \to & (Q/Z)^k & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow & & \\ 0 & \to & Z^n & \to & Q^n & \to & (Q/Z)^n & \to & 0. \end{array}$$

Линейное отображение $f : Q^k \to Q^n$ индуцирует два других вертикальных гомоморфизма коммутативной диаграммы тогда и только тогда, когда матрица T состоит из целых чисел, то есть гомоморфизм $f : B \to A$ является морфизмом категории $\mathcal{F}$. В этом случае все вертикальные гомоморфизмы представляют собой домножение строки справа на матрицу T^t.

Рассмотрим действие контравариантного функтора $\Theta : \mathcal{S} \to \mathcal{F}$ на объекте $g_1, \dots, g_n$ категории $\mathcal{S}$, где группа $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ является конечной. Обозначим через $G^* = Hom(G, Q/Z)$ дуальную конечную группу. Согласно [3] определим гомоморфизм $\omega_G : G^* \to (Q/Z)^n$ следующим образом: $\omega_G(\gamma) = (\gamma(g_1), \dots, \gamma(g_n)) \in (Q/Z)^n, \gamma \in G^*$. Так как элементы $g_1, \dots, g_n$ порождают группу G, то $\omega_G(\gamma) = 0$ тогда и только тогда, когда $\gamma = 0$. Следовательно, гомоморфизм $\omega_G : G^* \to (Q/Z)^n$ является вложением. Согласно выше сказанному подгруппа $Im(\omega_G) \subset (Q/Z)^n$ определяет объект категории $\mathcal{F}$, то есть группу $Z^n \subset A \subset Q^n$ с отмеченным стандартным базисом такую, что $A/Z^n \cong G^*$. Так как группа G^* является конечной, то группа A является свободной группой ранга n. Мы получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть G – конечная группа, порожденная элементами $g_1, \dots, g_n$. Тогда двойственность $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{F}$ ставит в соответствие объекту $g_1, \dots, g_n$ категории $\mathcal{S}$ свободную группу A ранга n такую, что $Z^n \subset A \subset Q^n$ и факторгруппа A/Z^n изоморфна дуальной группе G^*. Отмеченным базисом в группе A является стандартный базис векторного пространства Q^n.*

Следствие 2. *Последовательности из n нулей $0, \dots, 0$ в категории $\mathcal{S}$ соответствует в категории $\mathcal{F}$ свободная группа ранга n со свободным базисом.*

Теорема 5. *Пусть $(\varphi, T) : g_1, \dots, g_n \to h_1, \dots, h_k$ – морфизм (1) категории $\mathcal{S}$, где $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ и $H = \langle h_1, \dots, h_k \rangle$ – конечные группы. Пусть при этом объектам $g_1, \dots, g_n$ и $h_1, \dots, h_k$ соответствуют в категории $\mathcal{F}$ свободные группы A и B такие, что $Z^n \subset A \subset Q^n, Z^k \subset B \subset Q^k, A/Z^n \cong G^*, B/Z^k \cong H^*$.*

Тогда морфизму (1) категории $\mathcal{S}$ в категории $\mathcal{F}$ соответствует гомоморфизм $g : B \to A$, который определяется домножением строки $(r_1, \dots, r_k) \in B$ справа на матрицу T, то есть $g(r_1, \dots, r_k) = (r_1, \dots, r_k)T \in A$. При этом гомоморфизм $g : B \to A$ индуцирует гомоморфизм конечных групп $\overline{g} : B/Z^k \to A/Z^n$, где $\overline{g}(b + Z^k) = g(b) + Z^n$, который совпадает с дуальным гомоморфизмом $\varphi^* : H^* \to G^*$. Матрицей гомоморфизма $g : B \to A$ относительно отмеченных базисов является транспонированная матрица T^t.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^* & \xrightarrow{\varphi^*} & G^* \\ \omega_H \downarrow & & \downarrow \omega_G \\ (Q/Z)^k & \to & (Q/Z)^n \end{array} \tag{2}$$

в которой гомоморфизм $\varphi^* : H^* \to G^*$ является дуальным гомоморфизму $\varphi : G \to H$ и определяется равенством $(\varphi^*(\gamma))(x) = \gamma(\varphi(x)), x \in G, \gamma \in H^*$. Вложения ω_H и ω_G определяют соответственно группы $Z^k \subset B \subset Q^k$ и $Z^n \subset A \subset Q^n$. Нижний гомоморфизм диаграммы (2) является домножением справа на матрицу T, т. е.

$$(r_1 + Z, \ldots, r_k + Z) \mapsto (r_1 + Z, \ldots, r_k + Z)T \in (Q/Z)^n.$$

По определению морфизма $(\varphi, T) : g_1, \ldots, g_n \to h_1, \ldots, h_k$ категории $\mathcal{S}$ имеет место матричное равенство $(\varphi g_1, \ldots, \varphi g_n) = (h_1, \ldots, h_k)T$. Это равенство влечет следующую цепочку равенств для любого $\gamma \in H^*$:

$$(\gamma\varphi g_1, \ldots, \gamma\varphi g_n) = (\gamma h_1, \ldots, \gamma h_k)T$$

$$((\varphi^*(\gamma))(g_1), \ldots, (\varphi^*(\gamma))(g_n)) = \omega_H(\gamma)T$$

$$\omega_G(\varphi^*(\gamma)) = \omega_H(\gamma)T.$$

Последнее равенство означает, что диаграмма (2) коммутативна.

Таким образом, если определить гомоморфизм $g : B \to A$ как домножение справа на матрицу T, то, во-первых, он будет правильно определен. Действительно, если $(r_1, \ldots, r_k) \in B$, то $(r_1 + Z, \ldots, r_k + Z)T \in Im(\omega_G)$ и поэтому $(r_1, \ldots, r_k)T \in A$. А во-вторых, нижний гомоморфизм в диаграмме (2) совпадет с индуцированным гомоморфизмом $\overline{g} : B/Z^k \to A/Z^n$, где $\overline{g}(b + Z^k) = g(b) + Z^n$. Этот же гомоморфизм совпадает с дуальным гомоморфизмом $\varphi^* : H^* \to G^*$, если произвести отождествление по вложениям ω_H и ω_G. $\square$

Композиция эквивалетности $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{D}$ и двойственности $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{F}$ является двойственностью. В [5] была построена аналогичная двойственность для категорий, в которых объектами являлись группы (без выделенных базисов), а морфизмами – квазигомоморфизмы.

Следующая теорема вытекает из предыдущих теорем и показывает как наша двойственность $\mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{F}$ действует на морфизмах свободных групп в категории $\mathcal{F}$.

Теорема 6. *Пусть A и B — свободные группы, с отмеченными максимальными линейно независимыми системами элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$ и $b_1, \ldots, b_k \in B$ и $f : A \to B$ гомоморфизм групп, для которого матрица размера $k \times n$, определенная равенством $(fa_1, \ldots, fa_n) = (b_1, \ldots, b_k)T$ состоит из целых чисел, то есть $f : A \to B$ является морфизмом категории $\mathcal{F}$.*

Обозначим $G = A/\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ и $H = B/\langle b_1, \ldots, b_k\rangle$. Так как матрица T состоит из целых чисел, то гомоморфизм $f : A \to B$ индуцирует гомоморфизм конечных групп $\overline{f} : G \to H$, при котором $\overline{f}(a + \langle a_1, \ldots, a_n\rangle) = f(a) + \langle b_1, \ldots, b_k\rangle$.

Тогда двойственность $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{D}$ ставит в соответствие группам A и B с отмеченными базисами факторно делимые группы $A^\circ = G^* \oplus Q^n$ и $B^\circ = H^* \oplus Q^k$ также с некоторыми отмеченными базисами. Двойственность $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{D}$ ставит в соответствие гомоморфизму $f : A \to B$ гомоморфизм факторно делимых групп $f^\circ : B^\circ \to A^\circ$. Матрица этого гомоморфизма относительно отмеченных базисов является транспонированной матрицей T^t. При этом ограничение гомоморфизма $f^\circ : B^\circ \to A^\circ$ на периодическую часть H^* группы $B^\circ = H^* \oplus Q^k$ совпадает с гомоморфизмом $\overline{f}^* : H^* \to G^*$, который является дуальным гомоморфизму $\overline{f} : G \to H$ в смысле двойственности конечных групп.

Пример 2. Предположим, что все элементы $g_1, \ldots, g_n$ имеют одинаковый порядок m и группа G раскладывается в прямую сумму $G = \langle g_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle g_n \rangle$ (см. Пример 1). Тогда объекту $g_1, \ldots, g_n$ категории $\mathcal{S}$ соответствует в категории $\mathcal{F}$ свободная группа A с отмеченным базисом $a_1, \ldots, a_n \in A$ такая, что имеет место равенство подгрупп $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = mA$. При этом ясно, что $A/\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \cong G$. По Теореме 4 должно было бы быть G^*, но мы напомним, что в двойственности конечных групп имеет место изоморфизм $G^* \cong G$ для любой конечной группы G.

Пример 3. Предположим, что объект категории $\mathcal{S}$ имеет вид $g, \ldots, g$, где элемент g порядка m повторяется n раз, $G = \langle g \rangle$ – циклическая группа порядка m. Этому объекту в категории $\mathcal{F}$ соответствует подгруппа A группы Q^n, порожденная $n+1$ элементом: стандартным базисом $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ и элементом $(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m})$. Стандартный базис является отмеченным. Ясно, что $A/\langle e_1, \ldots, e_n \rangle \cong G$. В категории $\mathcal{D}$ нашему объекту соответствует факторно делимая группа $G \oplus Q^n$ с отмеченным базисом $g + e_1, \ldots, g + e_n$.

4. Заключение

Считается общепризнанным тот факт, что класс абелевых групп без кручения конечного ранга является чрезвычайно сложным. Сначала А. В. Яковлев [31] показал, что этот класс является "диким"с точки зрения теории представлений, потом С. Томас [32] показал, что сложность возрастает с увеличением ранга. В силу двойственности $\mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{F}$ можно сказать, что класс смешанных факторно делимых групп является не менее сложным. Кроме того, он еще является мало изученным, так как был введен относительно недавно [5].

Тем больший интерес представляет подход, при котором оба класса групп изучаются одновременно в терминах категории $\mathcal{S}$. На этом пути пока проделано следующее:

1. Случай, когда объект категории $\mathcal{S}$ представляет собой последовательность из одного элемента, разобран О. И. Давыдовой [8].

2. Случай, когда объект категории $\mathcal{S}$ представляет собой последовательность элементов свободного базиса свободного Z_χ-модуля, разобран в [9]. При этом мы получили новый результат для факторно делимых групп, который является дуализацией классической теоремы Р. Бэра.

3. Случай, когда объект категории $\mathcal{S}$ представляет собой последовательность периодических элементов разобран в настоящей статье.

Интересно отметить, что на любой факторно делимой группе ранга 1 может быть определено хотя бы одно кольцо с ненулевым умножением. В то время как для групп без кручения ранга 1 это верно только в том случае, когда они являются факторно делимыми, об этом смотри, например, в [2]. В связи с этим интересно исследовать кольца на факторно делимых группах в стиле работ [26–30].

В заключение мы сформулируем некоторые задачи, которые, на наш взгляд, представляют большой интерес:

Задача 1. Исследовать кольца на факторно делимых группах.

Задача 2. Рассмотреть в категории $\mathcal{S}$ последовательности из двух элементов. То есть соотнести классическое описание групп без кручения ранга 2 Бьюмонта и Пирса [33] с нашим подходом и получить описание факторно делимых групп ранга 2. Смотри в этой связи также статью [22].

Задача 3. Рассмотреть полные подкатегории категории $\mathcal{S}$, объекты которых являются числовыми последовательностями. Например, полиадические числа, или элементы кольца Z_χ для некоторой характеристики χ (см. [34]), в частности, целые p-адические числа (см. [35]), или псевдорациональные числа (см. [36]).

Задача 4. Дуализировать результаты о почти вполне разложимых группах без кручения в категорию $\mathcal{S}$ и в категорию $\mathcal{D}$ в духе статьи [23].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fomin A. A. Invariants for Abelian groups and dual exact sequences // J. Algebra 2009. Vol. 322. № 7. P. 2544–2565.
2. Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. II // Фундамент. и прикл. Матем. 2015. Vol. 20. № 5. P. 157–196.
3. Фомин А. А. Абелевы группы без кручения конечного ранга с отмеченными базисами // Фундамент. и прикл. Матем. (to appear)
4. Яковлев А. В. Двойственность категорий абелевых групп без кручения конечного ранга и факторно делимых групп // Зап. научн. сем. ПОМИ 2010. Vol. 375. № 1. P. 195–202.
5. Fomin A. A., Wickless W. J. Quotient divisible abelian groups // Proc. A.M.S. 1998. Vol. 126. № 1. P. 45–52.
6. Фомин А. А. Двойственные абелевы группы ранга 1 // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, Матер. XV Международной конференции, посвященной столетию профессора Н. М. Коробова, Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2018. P. 62–63.
7. Baer R. Abelian groups without elements of finite order // Duke Math. 1937. Vol. 3. № 1. P. 68–122.
8. Давыдова О. И. Факторно делимые группы ранга 1 // Фундамент. и прикл. Матем. 2007. Vol. 13. № 3. P. 25–33.
9. Гордеева Е. В., Фомин А. А., Вполне разложимые однородные факторно делимые абелевы группы // Чебышевский сборник 2018. Vol. 19. № 2. С. 376–387.
10. Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. I // Фундамент. и прикл. Матем. 2012. Vol. 17. № 8. P. 153–167.
11. Wickless W. J. Direct sums of quotient divisible groups // Communications in Algebra 2003. Vol. 31. № 1. P. 79–96.
12. Albrecht U., Breaz S., Vinsonhaler C., Wickless W. Cancellation properties for quotient divisible groups // Journal of Algebra 2007. Vol. 317. № 1. P. 424–434 .
13. Wickless W. Multi-isomorphism for quotient divisible groups // Houston J. Math. 2006. Vol. 31. № 1. P. 1–19.
14. Albrecht U., Wickless B. Finitely generated and cogenerated QD groups // Rings, modules, algebras, and abelian 2004. Vol. 236. № 1. P. 13–26.
15. Любимцев О. В. Вполне разложимые факторно делимые абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки 2015. Vol. 98. № 1. С. 125–133.
16. Любимцев О. В. Об определяемости вполне разложимых факторно делимых абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов // Изв. вузов. Матем. 2017. Vol. 10. № 1. С. 75–82.

17. Царев А. В. Модули над кольцом псевдорациональных чисел и факторноделимые группы // Алгебра и анализ 2006. Vol. 18. № 4. С. 198–214.

18. Царев А. В. Модуль псевдорациональных отношений факторно делимой группы // Алгебра и анализ 2010. Vol. 22. № 1. С. 223–239.

19. Царев А. В. Псевдорациональный ранг факторно делимой группы // Фундамент. и прикл. матем. 2005. Vol. 11. № 3. С. 201–213.

20. Царев А. В. T-кольца и факторно делимые группы ранга 1 // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2013. Vol. 24. № 4. С. 50–53.

21. Крючков Н. И. Компактные группы, двойственные факторно делимым абелевым группам // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Vol. 20. № 5. С. 113–119.

22. Fomin A. A., Wickless W. Self-small mixed abelian groups G with $G/T(G)$ finite rank divisible // Communications in Algebra. 1998. Vol. 26. № 11. P. 3563–3580.

23. Fomin A. A. Quotient divisible and almost completely decomposable groups // Models, Modules and Abelian Groups in Memory of A. L. S. Corner, de Gruyter, Berlin - New York, 2008. Vol. 1. № 1. P. 147–167.

24. Fuchs L. Abelian groups. Switz.: Springer International Publishing, 2015.

25. Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion-free rings // Illinois J. Math. 1961. Vol. 5. P. 61–98.

26. Kompantseva E. I. Semisimple rings on completely decomposable Abelian groups // J. Math. Sci., 2008. Vol. 154. № 3. P. 324–332.

27. Kompantseva E. I. Rings on almost completely decomposable Abelian groups // J. Math. Sci. 2009. Vol. 163. № 6. P. 688–693.

28. Kompantseva E. I. Torsion-free rings // J. Math. Sci. 2010. Vol. 171. № 2. P. 213–247.

29. Компанцева Е. И. , Фомин А. А. Абсолютные идеалы почти вполне разложимых абелевых групп // Чебышевский сб. 2015. Vol. 16. № 4. P. 200–211.

30. Благовещенская Е. А. Почти вполне разложимые абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2009.

31. Яковлев А. В. К проблеме классификации абелевых групп без кручения конечного ранга // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1976. Vol. 57. P. 171–175.

32. Thomas S. The Classification Problem for Torsion-Free Abelian Groups of Finite Rank // JAMS. 2003. Vol. 16. P. 233–256.

33. Beaumont R., Pierce R. Torsion free groups of rank two // Mem. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 38.

34. Фомин А. А. Абелевы группы с одним τ-адическим соотношением // Алгебра и логика. 1989. Vol. 28. № 1. P. 83–104.

35. Фомин А. А. Абелевы группы со свободными подгруппами бесконечного индекса и их кольца эндоморфизмов // Мат. заметки, 1984. Vol. 36. № 2. P. 179–187.

36. Fomin A. A. Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Trends in Math., Burkhauser verlag, Basel/Switzerland. 1999. P. 87–100.

REFERENCES

1. Fomin, A. A. 2009, “Invariants for Abelian groups and dual exact sequences”, *J. Algebra*, vol. 322, no. 7, pp. 2544–2565.

2. Fomin, A. A. 2018, “On the Quotient Divisible Group Theory. II”, *J. Math. Sci.*, vol. 230, no. 3, pp. 457–483.

3. Fomin, A. A. (to appear), “Torsion free abelian groups of finite rank with marked bases”, *J. Math. Sci.*

4. Yakovlev, A. V. 2010, “Duality of the categories of torsion-free Abelian groups of finite rank and quotient divisible Abelian groups”, *J. Math. Sci.*, vol. 171, no. 3, pp. 416–420.

5. Fomin, A. A.& Wickless, W. J. 1998, “Quotient divisible abelian groups”, *Proc. A.M.S.*, vol. 126, no. 1, pp. 45–52.

6. Fomin, A. A. 2018, “Dual abelian groups of rank 1”, *Proceedings of the XV International conference devoted to the 100-th Birthday of Professor N.M. Korobov, May 28–31, 2018, Tula*, pp. 62–63. (Russian)

7. Baer, R. 1937, “Abelian groups without elements of finite order”, *Duke Math.*, vol. 3, no. 1, pp. 68–122.

8. Davydova, O. I. 2008, “Rank-1 quotient divisible groups”, *J. Math. Sci.*, vol. 154, no. 3, pp. 295–300.

9. Gordeeva, E. V. & Fomin,A. A.“Completely decomposable homogeneous quotient divisible abelian groups”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 376–387. (Russian)

10. Fomin, A. A. 2014, “On the Quotient Divisible Group Theory. I”, *J. Math. Sci.*, vol. 197, no. 5, pp. 688–697.

11. Wickless, W. J. 2003, “Direct sums of quotient divisible groups”, *Communications in Algebra*, vol. 31, no. 1, pp. 79–96.

12. Albrecht, U. & Breaz, S. & Vinsonhaler, C. & Wickless W. 2007, “Cancellation properties for quotient divisible groups”, *Journal of Algebra*, vol. 317, no. 1, pp. 424–434.

13. Wickless, W. 2006, “Multi-isomorphism for quotient divisible groups”, *Houston J. Math.*, vol. 31, no. 1, pp. 1–19.

14. Files, S. & Wickless, W. 1999, “Direct Sums of Self-Small Mixed Groups”, *J. Algebra*, vol. 222, no. 1, pp. 1–16.

15. Lyubimtsev, O. V. 2015, “Completely decomposable quotient divisible abelian groups with UA-rings of endomorphisms”, *Mathematical Notes*, vol. 98, no. 1, pp. 130–137.

16. Lyubimtsev, O. V. 2017, “On determinacy of completely decomposable quotient divisible abelian groups by its endomorphism semigroups”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, vol. 61, no. 10, pp. 65–71.

17. Tsarev, A. V. 2007, “Modules over the ring of pseudorational numbers and quotient divisible groups”, *St. Petersburg Math. J.*, vol. 18, no. 4, pp. 657–669.

18. Tsarev, A. V. 2010, “The module of pseudo-rational relations of a quotient divisible group”, *St. Petersburg Math. J.*, vol. 22, no. 1, pp. 163–174.

19. Tsarev, A. V. 2007, "Pseudorational rank of a quotient divisible group", *J. Math. Sci.*, vol. 144, no. 2, pp. 4013–4022.

20. Tsarev, A. V. 2013, "T-rings and quotient divisible groups of rank 1", *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, vol. 24, no. 4, pp. 50–53.

21. Kryuchkov, N. I. 2018, "Compact Groups That Are Duals of Quotient Divisible Abelian Groups", *J. Math. Sci.*, vol. 230, no. 3, pp. 428–432.

22. Fomin, A. A. & Wickless, W. 1998, "Self-small mixed abelian groups G with $G/T(G)$ finite rank divisible", *Communications in Algebra*, vol. 26, no. 11, pp. 3563–3580.

23. Fomin, A. A. 2008, "Quotient divisible and almost completely decomposable groups", *Models, Modules and Abelian Groups in Memory of A. L. S. Corner, de Gruyter, Berlin – New York*, vol. 1, no. 1, pp. 147–167.

24. Fuchs, L. 2015, "Abelian groups", Switz.: Springer International Publishing.

25. Beaumont, R. A.& Pierce, R. S. 1961, "Torsion free rings", *Ill. J. Math.*, vol. 5, no. 1, pp. 61–98.

26. Kompantseva, E. I. 2008, "Semisimple rings on completely decomposable Abelian groups", *J. Math. Sci.*, vol. 154, no. 3, pp. 324–332.

27. Kompantseva, E. I. 2009, "Rings on almost completely decomposable Abelian groups", *J. Math. Sci.*, vol. 163. no. 6, pp. 688–693.

28. Kompantseva, E. I. 2010, "Torsion-free rings", *J. Math. Sci.*, vol. 171, no. 2, pp. 213–247.

29. Kompantseva, E. I. & Fomin, A. A. 2015 "Absolute ideals of almost completely decomposabe abelian groups", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 16, no. 4, pp. 200–211.

30. Blagoveshchenskaya, E. A. 2009, "Almost completely decomposable abelian groups and their endomorphism rings", SPb: Izdelstvo Politehnicheskogo universiteta (Russian).

31. Yakovlev, A. V. 1979, "On the problem of classification of finite rank groups without torsion", *J. Soviet Math.*, vol. 11, no. 4, pp. 660–663.

32. Thomas, S. 2003, "The Classification Problem for Torsion-Free Abelian Groups of Finite Rank", *JAMS.*, vol. 16, pp. 233–256.

33. Beaumont, R. & Pierce, R. 1961, "Torsion free groups of rank two", *Mem. Amer. Math. Soc.*, vol. 38.

34. Fomin, A. A. 1989. "Abelian groups with one τ-adic relation", *Algebra and Logic*, vol. 28, no. 1, pp. 57–73.

35. Fomin, A. A. 1984, "Abelian groups with free subgroups of infinite index and their endomorphism groups", *Mathematical Notes*, vol. 36, no. 2, pp. 581–585.

36. Fomin, A. A. 1999, "Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers", *Trends in Math.*, Burkhauser verlag, Basel/Switzerland, pp. 87–100.

Получено 13.02.2019 г.
Принято в печать 12.07.2019 г.