

7. Panovko Ya. G. *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara* [Fundamentals of the applied theory of oscillations and shock]. Leningrad, Mashinostroyeniye Publ., 1976. 320 p.
8. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Elementarnye funktsii* [Integrals and series. Elementary functions]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 800 p.
9. Abramovits A., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami)* [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.
10. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov)* [Handbook of Mathematics (for scientific workers and engineers)]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 832 p.
11. Yanke E., Emde F., Lyosh F. *Spetsial'nye funktsii* [Special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.
12. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. Funktsiya Lamberta v zadache kolebaniy matematicheskogo mayatnika [The Lambert function in the problem of oscillations of a mathematical pendulum]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2014, no. 18 (1061), pp. 116 – 119.
13. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. *Funktsiya Lamberta v zadachakh ballistiki material'noy tochki* [The Lambert function in ballistic problems of a material point]. Kharkiv, Savchuk V.O. Publ., 2013. 204 p.
14. Bogolyubov N. N., Mitropol'skiy Yu. A. *Asimtoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 504 p.

Надійшло (received) 11.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasily Pavlovich)** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

**Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich)** – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

UDC 519.6

**I. I. PERSHYNA, I. A. TOKMAKOVA****OPTIMAL CHOICE OF PLANES FOR PLACING TOMOGRAMS IN COMPUTED TOMOGRAPHY**

The solution of the problem of reconstructing the internal structure of a three-dimensional body by the known tomograms produced by a computer tomograph using interflatation of functions and blending approximation is proposed. The known methods of approximating functions of one and two variables by interpolation type piecewise constant splines using means and medians are also considered. The paper presents an algorithm for optimizing the choice of the planes in which the tomograms produced by a computer tomograph are placed. The case is considered when all the tomograms are parallel to each other. The algorithm developed uses approximations of objects by classical piecewise constant splines. The internal structure of a three-dimensional body (density or absorption coefficient) is assumed to be given by a function of three variables of the form  $h(x, y, z) = f(x)g(y, z)$ , where  $g$  is an arbitrary function, provided that  $f$  is a monotone function on a closed segment. The method of optimal choice of the planes for placing the tomograms is implemented using MathCad computer software.

**Key words:** tomograms, piecewise constant splines, interflatation, blending approximation.

**Ю. І. ПЕРШИНА, І. А. ТОКМАКОВА****ОПТИМАЛЬНИЙ ВИБІР ПЛОЩИН, НА ЯКИХ РОЗМІЩЕНІ ТОМОГРАМИ, В КОМП'ЮТЕРНІЙ ТОМОГРАФІЇ**

Представлено розв'язок задачі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що поступають з комп'ютерного томографа, за допомогою інтерфлетатції функцій та мішаної апроксимації. Розглянуто також відомі методи наближення функцій однієї та двох змінних кусково-сталими сплайнами інтерполяційного типу, з використанням середніх та медіан. В статті пропонується алгоритм оптимізації вибору площин, на яких розміщені томограми, що поступають з комп'ютерного томографа. Розглядається випадок, коли всі томограми паралельні одна одній. Запропонований алгоритм використовує наближення об'єктів класичними кусково-сталими сплайнами. При побудові алгоритму істотно використовується припущення про те, що внутрішня структура тривимірного тіла (щільність або коефіцієнт поглинання) є функцією від трьох змінних вигляду  $h(x, y, z) = f(x)g(y, z)$ , де  $g$  – довільна функція, при умові, що  $f$  – монотонна функція на замкненому відрізку. Представлена чисельна реалізація методу оптимального вибору площин, на яких лежать томограми, в системі комп'ютерної математики MathCad.

**Ключові слова:** томограма, кусково-сталі сплайни, інтерфлетатція, мішана апроксимація.

**Ю. И. ПЕРШИНА, И. А. ТОКМАКОВА****ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР ПЛОСКОСТЕЙ, НА КОТОРЫХ РАЗМЕЩЕНЫ ТОМОГРАММЫ, В КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ**

Представлено решение задачи восстановления внутренней структуры трехмерного тела по известным томограммам, поступающим от компьютерного томографа, с помощью интерфлетации функций и смешанной аппроксимации. Рассмотрены также известные методы приближения функций одной и двух переменных кусочно-постоянными сплайнами интерполяционного типа, с использованием средних и медиан.

© I. I. Pershyrna, I. A. Tokmakova, 2019

В статье предлагается алгоритм оптимизации выбора плоскостей, на которых размещены томограммы, поступающие от компьютерного томографа. Рассматривается случай, когда все томограммы параллельны друг другу. Предложенный алгоритм использует приближения объектов классическими кусочно-постоянными сплайнами. При его разработке существенно используется предположение о том, что внутренняя структура трехмерного тела (плотность или коэффициент поглощения) является функцией от трех переменных вида  $h(x, y, z) = f(x)g(y, z)$ , где  $g$  – произвольная функция, при условии, что  $f$  – монотонная функция на замкнутом отрезке. Представлена численная реализация метода оптимального выбора плоскостей, на которых лежат томограммы, в системе компьютерной математики MathCad.

**Ключевые слова:** томограмма, кусочно-постоянные сплайны, интерфлетация, мешаная аппроксимация.

**Introduction and analysis of previous results.** In recent years a new scientific direction, known as *computer aided tomography*, has been developing rapidly infiltrating into various branches of human knowledge. A lot of scientists in their innovative works link computer aided tomography to a new computational diagnostics methods, namely *the method of computed tomography (CT)*, which consists in computational reconstruction of functions of two and more variables by their known line integrals (over a sequence of straight lines) or their plane integrals (over a sequence of planes). The method of computed tomography allows studying the internal structure, physical properties or chemical composition of an object by the characteristics of the radiation passing through the object (*transmission tomography*) or emitted by the object itself (*emission tomography*).

A dramatic increase in the popularity of CT is due to the invention and improvement of medical tomographs (in particular the X-ray tomographs) and also to the fact that in most cases the results can't be obtained by any methods other than CT. In about 20 recent years five generations of X-ray computer tomographs have been created. Mathematical modeling of computer tomographs plays a crucial role in their constructing, wherein mathematical models of tomographs' various nodes are developed and studied using various optimization methods.

Nowadays tomographic methods are used in medicine, astronomy, astrophysics and physics of the atmosphere of the Earth, for plasma diagnostics, radiolocation, optics, geology, when analyzing the heat exchange in the ocean top layer, in geology, geophysics, physiology, object quality non-destructive testing (flaw detection), microscopy and in many other branches of modern science and technology.

In [1] the problem of reconstructing the internal structure of a 3D body by the known tomograms in a system of section planes is solved using interflation functions. In [2] blending approximation is used for solving the problem of 3D computer tomography. These are high accuracy methods. In [1] and [2] the tomograms produced by a computer tomograph are assumed to be situated in equidistant parallel planes.

In the present paper the method for optimal choosing the planes in which the tomograms are placed is proposed. The method allows to choose optimally the planes, which are, for example, perpendicular to the  $Ox$  coordinate axis, for any 3D body described by the formula  $h(x, y, z) = f(x)g(y, z)$ , where  $g$  is an arbitrary function and  $f$  is a monotone function of one variable.

### The known methods for approximating functions of one variable by piecewise constant splines.

#### Interpolation type piecewise constant splines of one variable.

There are three types of operators approximating continuous functions of one variable by piecewise constant functions (*splines of order 0*) [3 – 6]. The simplest one is approximating by interpolation type operators, which replace the approximated function  $g(t)$ ,  $t \in E$ , by its value  $g\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right)$  on each interval of partition  $(t_{k-1}, t_k)$ , i.e.

$$Sg(t) = g\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right), \quad t_{k-1} < t < t_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

The approximation error for these splines is estimated as follows:

$$e_{n,0,\infty}(g) \leq M \left(\frac{\Delta}{2}\right)^\alpha, \quad \forall g \in Lip_M \alpha; \quad \Delta = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}),$$

$$e_{n,0,\infty}(g) = \inf_{g_{n,0} \in S_{n,0}} \|g - g_{n,0}\|_{L_p[0,1]}.$$

The function  $g$  is Lipschitz of order  $\alpha: 0 < \alpha \leq 1$ :  $g \in Lip_M \alpha$ , on a segment  $I = [a, b]$ , where the class of Lipschitz functions is defined as follows:

$$Lip_M \alpha := \left\{ g \in C[a, b] : |g(t) - g(t')| \leq M |t - t'|^\alpha, \quad t, t' \in I \right\}, \quad Lip \alpha := \bigcup_{M > 0} Lip_M \alpha.$$

Note that  $Lip_M \alpha$  is a space of linear functions with the half-norm given by the formula:

$$|g|_{Lip \alpha} := \inf_M \{M | g \in Lip_M \alpha\} \quad \text{or} \quad |g|_{Lip \alpha[a,b]} = \inf_{x, y \in [a,b]} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

**Piecewise constant splines of one variable using means.**

In this case the approximation operator replaces the approximated function  $g(t)$  by its mean value over the parti-

tion interval  $(t_{k-1}, t_k)$ :  $\frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(t) dt$ , i.e.

$$Sg(t) = \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(t) dt, \quad t_{k-1} < t < t_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

The approximation error here is given by:

$$\|g - Sg\|_{L_\infty E} \leq \omega(g, \Delta)_{C(E)}, \quad \forall g \in C(E), \quad \omega(g, \Delta)_{C(E)} = \max_{\substack{t', t'' \in E \\ |t' - t''| \leq \Delta}} |g(t') - g(t'')|.$$

For a continuous Lipschitz function the above error estimates are reduced to the following simple formula:

$$\omega(g, \Delta)_C = M \Delta^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

**Piecewise constant splines of one variable using medians.**

For this approach the non-linear approximation operator  $Sg(t)$  replaces the approximated function  $g(t)$  by its median on each partition interval  $(t_{k-1}, t_k)$ , i.e.

$$Sg(t) = \frac{\left[ \max_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) + \min_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) \right]}{2}, \quad t_{k-1} < t < t_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

For the error of approximation of a function  $g(t) \in C(E)$  by the median the following inequality holds:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq 1} |g(t) - Sg(t)| &\leq \max_{1 \leq k \leq n} \max_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} \left| g(t) - \frac{\max_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) + \min_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t)}{2} \right|, \\ \max_{0 \leq t \leq 1} |g(t) - Sg(t)| &\leq \max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{\max_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) - \min_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t)}{2} \right| = \frac{B}{2n}, \end{aligned}$$

where  $B = \text{Var}_{[0,1]} g = \max_{0 \leq t \leq 1} g(t) - \min_{0 \leq t \leq 1} g(t)$  is the variation of  $g$  on  $[0, 1]$ .

**The best approximation by piecewise constant splines of one variable using medians.**

These are the non-linear operators  $Sg(t)$  replacing the approximated function  $g(t)$  by its median

$$\frac{\left[ \max_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) + \min_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) \right]}{2},$$

on each partition interval  $(t_{k-1}, t_k)$ , when the nodes  $t_k$  are chosen such that

$$\frac{\left[ \max_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) + \min_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) \right]}{2} = M = \text{const}, \quad \forall k.$$

The best approximation by piecewise constant splines using medians admits the following error estimate in the  $L_\infty$  norm:

$$\|g - Sg\|_{L_\infty E} \leq \frac{M}{2n}, \quad \forall g \in C(E).$$

**Approximation of  $g(x, y) \in C[E^2]$  by piecewise constant splines.****Interpolation type piecewise constant splines of two variables.**

There exist five types of operators approximating continuous functions of two variables by piecewise constant functions (splines of order 0). The simplest method of approximation is by interpolation type operators replacing the approximated function  $g(x, y)$  by its values  $g\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \frac{y_{l-1} + y_l}{2}\right)$  computed at the center of each partition rectangle

$(x_{k-1}, x_k) \times (y_{l-1}, y_l)$ , i.e.

$$Sg(x, y) = g\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \frac{y_{l-1} + y_l}{2}\right), \quad (x, y) \in (x_{k-1}, x_k) \times (y_{l-1}, y_l).$$

The error of approximation by these operators is:

$$\|g - Sg\|_{C(E^2)} = O\left(M\left(\frac{\Delta}{2}\right)^\alpha\right), \quad \Delta = \max_{1 \leq k \leq n} \{x_k - x_{k-1}, y_l - y_{l-1}\}, \quad \Delta \rightarrow 0.$$

**Piecewise constant splines of two variables using means.**

When approximating by piecewise constant splines of two variables using means, the approximation operator replaces the given function  $g(x, y)$  by its mean over respective partition rectangle  $(x_{k-1}, x_k) \times (y_{l-1}, y_l)$ :

$$m_{k,l}(g) = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \frac{1}{y_l - y_{l-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{y_{l-1}}^{y_l} g(x, y) dx dy. \quad (1)$$

Thus the approximation operator is given by the formula:

$$Sg(x, y) = m_{k,l}(g), \quad (x_{k-1}, x_k) \times (y_{l-1}, y_l).$$

The approximation error in this case is determined by the inequality:

$$\|g - Sg\|_{L_\infty[E^2]} \leq \omega(g, \Delta)_C = O(M\Delta^\alpha), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \forall g(x, y) \in C(E^2).$$

**Piecewise constant splines of two variables using medians.**

For this type of approximation a non-linear approximation operator  $Sg(x, y)$  replaces the approximated function  $g(x, y)$  by its median on a partition rectangle  $(x_{k-1}, x_k) \times (y_{l-1}, y_l)$ :

$$med_{k,l}(g) = \frac{1}{2} \left[ \max_{\substack{x_{k-1} \leq x \leq x_k \\ y_{l-1} \leq y \leq y_l}} g(x, y) + \min_{\substack{x_{k-1} \leq x \leq x_k \\ y_{l-1} \leq y \leq y_l}} g(x, y) \right].$$

Thus

$$Sg(x, y) = med_{k,l}(g), \quad (x_{k-1}, x_k) \times (y_{l-1}, y_l).$$

The approximation error in this case is:

$$\|g - Sg\|_{C(E^2)} = O\left(\frac{M}{2n}\right).$$

When constructing such non-linear approximation operators the best approximation can be determined. To this end the partition (i.e. the partition nodes  $(x_k, y_l)$ ) are to be found for which the approximation is the best possible.

**Blending approximation by interpolation type piecewise constant splines of two variables.**

This type of operators for approximating a function of two variables  $g(x, y)$  are given by the formulae:

$$OIg(x, y) = (OI_1 + OI_2 - OI_1OI_2)g(x, y);$$

$$OI_1g(x, y) = g\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, y\right), \quad x_{k-1} < x < x_k; \quad OI_2g(x, y) = g\left(x, \frac{y_{l-1} + y_l}{2}\right), \quad y_{l-1} < y < y_l;$$

$$OI_1OI_2g(x, y) = g\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \frac{y_{l-1} + y_l}{2}\right), \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad y_{l-1} < y < y_l.$$

Application of such approximation operators produces the error:

$$\|g - OIg\|_{C(E^2)} = O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

in case  $\|g - OI_1g\|_{C(E^2)} = O(\varepsilon)$ ,  $\|g - OI_2g\|_{C(E^2)} = O(\varepsilon)$ .

**Blending approximation [7] by piecewise constant splines of two variables using means.**

This type of approximation operator is given by the formulae:

$$Sg(x, y) = (S1 + S2 - S1S2)g(x, y),$$

where

$$S1g(y) = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(\xi, y) d\xi, \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad k = \overline{1, n};$$

$$S2g(x) = \frac{1}{y_l - y_{l-1}} \int_{y_{l-1}}^{y_l} g(x, \eta) d\eta, \quad y_{l-1} < y < y_l, \quad l = \overline{1, n}.$$

The operators  $S1S2g$  are determine as in (1).

$$z(x) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \left| \begin{array}{l} c_i \leftarrow f(x_{i+1}) - f(x_i) \\ c \end{array} \right. \end{cases}$$

a

$$z(x) = \begin{array}{|c|c|} \hline & 0 \\ \hline 0 & 0.01 \\ \hline 1 & 0.03 \\ \hline 2 & 0.05 \\ \hline 3 & 0.07 \\ \hline 4 & 0.09 \\ \hline 5 & 0.11 \\ \hline 6 & 0.13 \\ \hline 7 & 0.15 \\ \hline 8 & 0.17 \\ \hline 9 & 0.19 \\ \hline \end{array}$$

b

Fig. 1 –MathCad screen: a – function  $z(x)$ ; b – values of  $z(x)$  at nodes  $x_i$ .

**MathCad program for optimal choosing the planes for placing the tomograms.** Let a given 3D body is described by the formula  $h(x, y, z) = f(x)g(y, z)$ , where  $g$  is an arbitrary function and  $f$  is a monotone function of one variable.

Consider the method for optimal choosing the planes on the example of a monotone function of one variable  $f(x)$ . The algorithm is implemented using the MathCad computer software.

$$\begin{aligned} b &:= z(x) \\ J(x) &:= \max(b) \\ \text{Given} \\ x_0 &= 0 \\ x_n &= 1 \\ z(x)_0 &= z(x)_1 \\ z(x)_1 &= z(x)_2 \\ z(x)_2 &= z(x)_3 \\ z(x)_3 &= z(x)_4 \\ z(x)_4 &= z(x)_5 \\ z(x)_5 &= z(x)_6 \\ z(x)_6 &= z(x)_7 \\ z(x)_7 &= z(x)_8 \\ z(x)_8 &= z(x)_9 \end{aligned}$$

a

$$W := \text{Minerr}(x)$$

$$W = \begin{array}{|c|c|} \hline & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 0.316 \\ \hline 2 & 0.447 \\ \hline 3 & 0.548 \\ \hline 4 & 0.632 \\ \hline 5 & 0.707 \\ \hline 6 & 0.775 \\ \hline 7 & 0.837 \\ \hline 8 & 0.894 \\ \hline 9 & 0.949 \\ \hline 10 & 1 \\ \hline \end{array}$$

b

Fig. 2 –MathCad screen: a – function  $J(x)$ ; b – optimal nodes  $W$ .

Let, for example,  $f(x) = x^2, x \in [0, 1]$ . We choose 10 nodes on the interval  $[0, 1]$ :

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad n = 10, \quad i = \overline{1, n}.$$

The nodes represent the planes in which the tomograms produced by a computer tomograph are placed. These planes are assumed to be perpendicular to the  $Ox$  coordinate axis.

We introduce the function  $z(x)$  describing the difference of the values of the function  $f(x)$  at two successive nodes (fig. 1).

Next we solve the system of equations (fig. 2, a) and determine the optimal distribution of nodes  $W$  (fig. 2, b).

In fig. 2  $J(x)$  describes the maximal deviation between the mentioned values of the function  $z(x)$ . We construct a piecewise constant spline with the optimal nodes  $W$ . The results are shown in fig. 3.

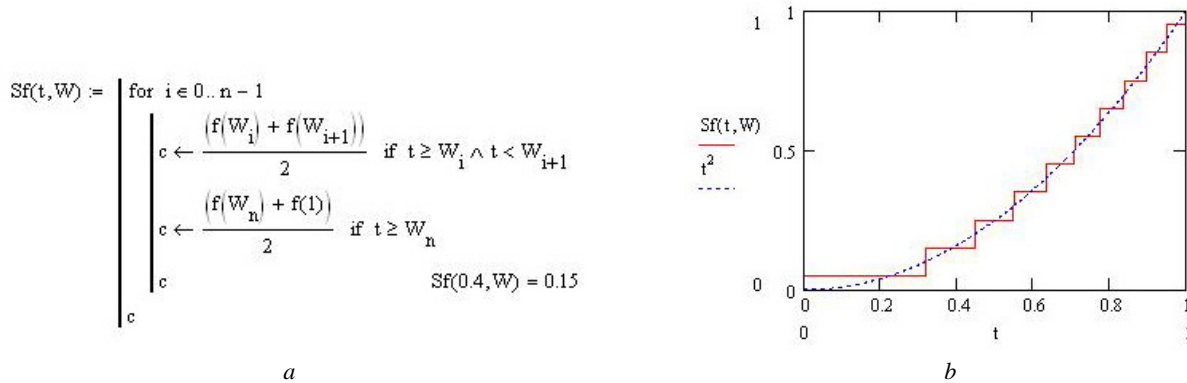


Fig. 3 – MathCad screen of a spline with the optimal nodes  $W$  :  
a – analytical representation; b – graphical representation.

Thus, we get the optimal placement of the tomograms in the planes perpendicular to the  $Ox$  coordinate axis on the interval  $[0, 1]$ . The optimal nodes in this case are given by the column  $W$  (fig. 2).

**Perspectives of further research.** The perspective application of the algorithm presented in the paper, as seen by the authors, is for reconstructing the internal structure of a 3D body by function interflation or blending approximation in the case when the tomograms are in the planes perpendicular to the coordinate axes [1], as well as when arbitrary planes are chosen [10], and also when the internal heterogeneity of the body structure is used essentially [7 – 9].

**Conclusions.** An algorithm for optimal choosing the planes for placing the tomograms in the 3D computed tomography in the case when all the tomograms are parallel to each other is presented. The internal structure of the reconstructed 3D body (density or absorption coefficient) is assumed to be given by a function of three variables of the form  $h(x, y, z) = f(x)g(y, z)$ , where  $g$  is an arbitrary function, provided that  $f$  is a monotone function on a closed segment.

Piecewise constant splines of one variable are used for approximation. The method proposed is implemented using the approach developed in [5].

#### Bibliography

1. Литвин О. М., Першина Ю. І. Математична модель відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізаних площин з використанням інтерфлетатії функції // Доповіді НАНУ. – 2005. – №8. – С. 67 – 71.
2. Литвин О. М., Першина Ю. І. Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайн-інтерліантантами з використанням трапецевидних елементів // Таврічний вісник інформатики та математики. – Симферополь, 2011. – № 2. – С. 59 – 70
3. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 350 с.
4. De Vore R. A. Nonlinear approximation // Acta numerica. – 1998. – Vol. 7. – P. 51 – 150. DOI: 10.1017/S0962492900002816.
5. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Першина Ю. І. Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії: монографія – К.: Наукова думка, 2017. – 314 с.
6. Першина Ю. І., Пасічник В. О. Наближення розривних функцій розривними сплайнами методом мінімакса // Вісник ХНТУ. – Херсон, 2018. – № 3(66). – Т. 2. – С. 82 – 87.
7. Литвин О. М., Першина Ю. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням мішаної апроксимації // Матеріали другої міжнародної конференції «Теорія та методи обробки сигналів». – Київ. – 2008. – С. 85 – 86.
8. Lytvyn O. N., Pershina Y. I., Sergienko I. V. Estimation of Discontinuous Functions of Two Variables with Unknown Discontinuity Lines (Rectangular Elements) // Cybernetics and Systems Analysis. – 2014. – Vol. 50. – Issue 4. – P. 594 – 602. DOI: 10.1007/s10559-014-9647-z.
9. Литвин О. М., Першина Ю. І., Сергієнко І. В. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы) // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 4. – С. 126 – 134.
10. Першина Ю. І., Шилін В. О., Пасічник В. О. Розв'язання 3D задачі комп'ютерної томографії за відомими томограмами на системі довільних площин // Штучний інтелект. – Київ, 2015. – № 3-4(69-70). – С.60 –70.

#### References (transliterated)

1. Lytvyn O. M., Pershina I. I. Matematychna model' vidnovlennya tryvymirnykh ob'ektiv za yikh tomogramamy na systemi tryioch grup pererizanykh ploshhyn z vykorystannyam interfletatsiyi funktsiyi [Mathematical model of restoration of three-dimensional objects by their tomograms on a system of three groups of cut planes using an interflation function]. *Dopovidi NANU* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2005, no. 8, pp. 67–71.
2. Lytvyn O. M., Pershina I. I. Nablyzhenia rozryvnykh funktsiy dvokh zminnykh rozryvnymy splayn-interlinantamy z vykorystannyam trapet-

- sevydnykh elementiv [Approximation of discontinuous functions of two variables by discontinuous spline-interlinants using trapezoidal elements]. *Tavrishnyy visnyk informatyky ta matematyky* [Tavrichnyi Bulletin of Informatics and Mathematics]. 2011, no. 2, pp. 59–70.
3. Korneychuk N. P. *Splayny v teorii priblizheniya* [Splines in approximation theory]. M: Nauka, 1984, 350 p.
  4. De Vore R. A. Nonlinear approximation. *Acta numerica*. 1998, vol. 7, pp. 51-150. DOI: 10.1017/S0962492900002816.
  5. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Pershyna I. I. *Teoriia rozryvnykh splainiv ta yii zastosuvannya v kompiuternii tomografii* [The theory of discontinuous splines and its application in computed tomography]. Monohrafiia. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2017. 314 p.
  6. Pershyna I. I., Pasichnyk V. O. Nablyzheniya rozryvnykh funktsiy rozryvnymy splaynamy metodom minimaksa [Approximation of discontinuous functions by discontinuous splines by the minimax method]. *Visnyk KhNTU* [Bulletin of the KhNTU]. Kherson, 2018, no. № 3(66), vol. 2, pp. 82–87.
  7. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Matematychni modeliuvannya v kompiuternii tomografii z vykorystanniam mishanoyi aproksymatsiyi [Mathematical modeling in computed tomography using blending approximation]. *Materialy drugoyi mizhnarodnoyi konferentsiyi "Teoriya ta metody obrobky signaliv"* [Proceedings of the second international conference "Theory and methods of signal processing"]. Kyiv, 2008. pp. 85–86.
  8. Lytvyn O. N., Pershyna Y. I., Sergienko I. V. Estimation of Discontinuous Functions of Two Variables with Unknown Discontinuity Lines (Rectangular Elements). *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014, vol. 50, issue 4, pp. 594–602. DOI: 10.1007/s10559-014-9647-z.
  9. Lytvyn O. M., Pershyna I. I., Sergienko I. V. Vosstanovlenie razryvnykh funktsiy dvukh peremennykh, kogda linii razryva neizvestny (pryamougol'nye elementy) [Recovery of discontinuous functions of two variables when discontinuity lines are unknown (rectangular elements)]. *Kybernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and Systems Analysis]. 2014, no. 4, pp. 126–134.
  10. Pershyna I. I., Shylin V. O., Pasichnyk V. O. Rozv'yazannya 3D zadachi komp'yuternoyi tomografii za vidomymy tomogramamy na systemi dovilynykh ploshchyn [Solution of 3D problem of computed tomography using known tomograms on arbitrary plane system]. *Shtuchnyy intelekt* [Artificial Intelligence] 2015, no. 4, pp. 60–70.

Received (надійшла) 06.05.2019

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Першина Юлія Ігорівна (Першина Юлия Игоревна, Pershyna Iuliia Igorivna)** – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

**Токмакова Ірина Анатоліївна (Токмакова Ирина Анатольевна, Tokmakova Iryna Anatoliyivna)** – старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (099) 630-07-43; e-mail: irina777111@ukr.net.

УДК 629.7.05:531.38

**Ю. А. ПЛАКСИЙ, І. О. ГОМОЗКОВА****АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ АЛГОРИТМА ОРІЄНТАЦІЇ Р. МІЛЛЕРА НА ЧОТИРЬОХЧАСТОТНІЙ ЕТАЛОННІЙ МОДЕЛІ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА**

Запропоновано нове аналітичне представлення компонент кватерніона орієнтації твердого тіла у вигляді алгебраїчної суми добутків тригонометричних функцій кутів, що одночасно змінюються у часі. З оберненого кватерніонного кінематичного рівняння отримані аналітичні вирази для компонент вектора кутової швидкості, що відповідають такому обертальному руху. Для задачі оцінювання точності алгоритмів безплатформеної орієнтації сформовано еталонну модель обертання, яка включає аналітичні вирази для ідеальних сигналів датчиків кутової швидкості у вигляді квазікоординат. Для декількох наборів частот отримано чисельні реалізації еталонної моделі, побудовані траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації. Проведено чисельний аналіз похибки дрейфу для алгоритму орієнтації четвертого порядку з використанням у якості проміжних параметрів компонент вектора орієнтації, приріст якого на такті обчислюється алгоритмом Р. Міллера при різних значеннях коефіцієнтів. Показано, що алгоритм Р. Міллера з новим набором коефіцієнтів забезпечує меншу накопичену похибку дрейфу у порівнянні з традиційним алгоритмом і оптимізованим під кінцевий рух.

**Ключові слова:** кватерніон, еталонна модель, тестовий рух, квазікоординати, траєкторії в конфігураційному просторі, алгоритм орієнтації, похибка дрейфу.

**Ю. А. ПЛАКСИЙ, И. А. ГОМОЗКОВА****АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ АЛГОРИТМА ОРИЕНТАЦИИ Р. МИЛЛЕРА НА ЧЕТЫРЕХЧАСТОТНОЙ ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛИ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Предложено новое аналитическое представление компонент кватерниона ориентации твердого тела в виде алгебраической суммы произведений тригонометрических функций углов, одновременно изменяющихся во времени. Из обращенного кватернионного кинематического уравнения получены аналитические выражения для компонент вектора угловой скорости, которые отвечают такому вращательному движению. Для задачи оценивания точности алгоритмов бесплатформенной ориентации сформирована эталонная модель, которая включает аналитические выражения для идеальных сигналов датчиков угловой скорости в виде квазикоординат. Для нескольких наборов частот получены численные реализации эталонной модели, построены траектории в конфигурационном пространстве параметров ориентации. Проведен численный анализ погрешности дрейфа для алгоритма ориентации четвертого порядка с использованием в качестве промежуточных параметров компонент вектора ориентации, приращение которого на такте вычисляется алгоритмом Р. Миллера при разных значениях коэффициентов. Показано, что алгоритм Р. Миллера с новым набором коэффициентов обеспечивает меньшую накопленную погрешность дрейфа по сравнению с традиционным алгоритмом и оптимизированным под конечное движение.

**Ключевые слова:** кватернион, эталонная модель, тестовое движение, квазикоординаты, траектории в конфигурационном пространстве, алгоритм ориентации, погрешность дрейфа.

© Ю. А. Плаксій, І. О. Гомозкова, 2019