

2017年11月13日

課程による博士学位請求論文の審査報告書

早稲田大学大学院
経済学研究科長 船木由喜彦 殿

主査 船木由喜彦（早稲田大学政治経済学術院教授）
副査 須賀晃一（早稲田大学政治経済学術院教授）
副査 Rene van den Brink（Vrije Universiteit Amsterdam 准教授）

学位請求者 横手康二（早稲田大学助手）

学位請求論文 Essays on variants of the Shapley value: Axiomatization and relationship to the core

審査委員は上記の学位申請論文について、申請者に対する口頭試問（2017年10月24日）を英語で実施した。出席者は、主査、副査、玉置教務主任、大学院生5名であった。口頭試問への回答、中間報告等における修正要求への対応を含めて申請論文を慎重に審査した結果、下記の評価に基づき同論文が博士学位にふさわしい論文と全員一致で判定し、ここに報告を行う。

記

1. 本論文の概要と構成

本論文は、協力ゲーム理論におけるシャープレイ値の特徴付けを行い、さらに協力ゲームにおける著名な解であるコアとの関係を明らかにした論文である。協力ゲームは人々がグループを形成し、メンバーの間で協力することにより獲得可能な利益が確認された際に、全メンバーの間で社会全体の獲得利益をどのように分配すべきかを議論する理論であり、その中でも最も知られている分配案（協力ゲームの解）の一つがこのシャープレイ値である。本論文では、このシャープレイ値とその修正概念の特徴付けを行い、さらに、分配案に対する提携の観点からの安定性の概念であるコアとの関係を調べたものである。

第1章は協力ゲーム理論を概観した導入部である。第2章では譲渡可能効用を前提としたゲーム（TUゲーム）におけるゲーム全体の線形空間における新たな基底の導入とそれを用いた分析手法を説明している。第3章は第2章の分析手法に基づいた単調性公理によるシャープレイ値とそれを修正した解の特徴付けを行っている。第4章は譲渡可能効用を仮定しないゲーム（NTUゲーム）において、コアとの関係を分析している。第5章は結論と今後の研究方針を述べている。続いて各章の内容を以下に報告する。

第2章では、TUゲーム全体から成る線形空間の新たな基底を導入している。TUゲームにおけるシャープレイ値は線形写像として記述することが可能であり、その定義域の基底が分析上重要な役割を果たす。Shapley (1953)以降、unanimity game による基底を用いることが支配的であった。本章の研究では、commander game と呼ばれる新たなゲームからなる基底を導入し、その性質を調べている。Commander game から成る基底は、シャープレイ値と深い関係を持つことが示された。まず、ゲームを定義する中心となる提携のサイズが2以上の commander game によって張られる空間はシャープレイ値のナル空間を成す。即ち、シャープレイ値が0ベクトルであるゲーム全体を特徴づける。さらに、任意のTUゲームを線形結合で表現したとき、その係数が、そのゲームのシャープレイ値と一致することが示されている。

第3章では、単調性を用いたシャープレイ値およびその修正解の公理化を行っている。単調性は、公平な分配方法を探る様々な文脈で考察されてきた。協力ゲーム理論における単調性は、ゲームにおけるプレイヤーらのあるパワーを示す要素の値が増加した時、プレイヤーの獲得する利得が増えることを要請する公理である。先行研究では、Young (1985) や van den Brink et al. (2013) によって単調性による公理化が行われているが、そこでは特定な解のクラスが公理化できることを示すに留まっている。一方、それ以外の線形性を満たす解も協力ゲームには多数登場している。本章では、これらの多数の解を単調性によって統一的に特徴づけることが行われている。まず、単調性を「どのようなプレイヤーらのパワーを示す要素の値が増えることを要請するか」という観点から整理している。先行研究では、「貢献度」と「全体提携値」をパワーの要素として考察しているが、この章の研究では、それ以外の重要な要素として「一人提携値」や「協力の余剰」等にも着目している。単調性の公理は、これら4つの要素の内の一つあるいは複数が増加したとき、プレイヤーの獲得利得が増えるという形で記述されている。合計で7つの公理が導入され、それらが効率性・対称性と組み合わさった際に、シャープレイ値を含む既存の解の凸結合で与えられる解の特徴付けが示されている。特に、CIS value (Driessen and Funaki 1991) や consensus value (Ju et al 2007) はよく知られている解であるが、それらも単調性によって特徴づけられることが示されている。上記の結果の鍵となるのは、「単調性」が解の「線形性」を導くという点である。この背後にある数学的構造については、第2章で提示した基底に基づいて分析が行われている。

第4章では、シャープレイ値とコアの関係が明らかにされている。Monderer et al. (1992)は、任意のTUゲームにおいて重み付きシャープレイ値の全体がコアを含むことを示した。ただし、この結果はTUという制限的な仮定に依存している。本章は、この結果をNTUゲームのクラスに拡張するものである。コアは自然な形でNTUゲームに拡張することができるが、重み付きシャープレイ値の拡張方法は複数考えられる。先行研究で提示された様々な拡張概念について、それらとコアとの関係を明らかにしている。まず、Kalai and Samet (1985) によって導入された weighted egalitarian solution に着目をした。この解は、TUゲームにおけるシャープレイ値の基礎となる「dividend」の考えをNTUゲームに拡張することで定式化されている。この章の主要な結果として、任意のNTUゲームにおいて、weighted egalitarian solution の全体がコアを含むことが証明されている。さらに、weighted egalitarian solution 以外の拡張概念についても言及され、Shapley (1969)による Shapley NTU value や、貢献度に基づく拡張解を考えた場合、コ

アとの包含関係が一般には成り立たないことも併せて示されている。最後に、シャープレイ値の拡張概念の望ましさを「コアとの関係」という観点から論じている。

なお、第5章ではこれらの成果をまとめ、さらに今後の研究課題について述べている。

2. 本論文の学術的貢献

本文の各章の成果の協力ゲーム理論における学術的貢献を述べる。

第2章は、TU ゲーム全体から成る線形空間の新たな基底を導入した。Shapley (1953) 以降、unanimity game による基底を用いることが一般的であった。しかしながら、unanimity game による基底はシャープレイ値の公理化研究には大変便利な基底であったが、シャープレイ値の数学的構造を深く分析することを意図して構成されたものではない。そのため、シャープレイ値の分析に重要であり、線形写像の分析に不可欠な「ナル空間」については、その構造が不明であった。第2章では、commander game と呼ばれるゲームから成る基底によってシャープレイ値のナル空間を特徴づけることに成功した。特に、0 と 1 だけからなるゲームによってシャープレイ値のナル空間を張ることができることを証明したのは世界初の研究であり、unanimity game に代わる新たな分析手法を導入した点が評価できる。これにより、同じシャープレイ値を持つゲームのクラスの特徴付けを分析することがより容易になった。また、commander game による基底は、ナル空間を特徴づけるのみならず、シャープレイ値の決定についても興味深い性質があることが示されている。それは、Commander game による基底を用いてゲームを一次結合した際、その係数にシャープレイ値が現れるという結果であり、シャープレイ値と他の協力ゲームの解の一致条件を分析するためにも大変有用であり、重要な貢献といえる。

第3章は、単調性を用いた解の公理化を行っている。単調性は、公平な分配方法の特徴づける手法として文献の中で確立しており、協力ゲーム理論の中でも多くの分析が行われてきた。Young (1985) による強単調性、van den Brink et al. (2013) による弱単調性はそれぞれ、シャープレイ値及び egalitarian シャープレイ値を特徴づけることが知られている。既存の結果の中で、不十分な点が二つあった。その一つは、上記以外のシャープレイ値の修正概念について単調性で特徴づけられるのではないかという予想が未解決であるという点、もう一つは、単調性が線形性を導くという背後にある理論構造が不明であるという点である。本章の結果は、これら二つの欠落を埋めることに成功した、大変意義深いものである。具体的には、第一の点については、強単調性と弱単調性以外の公理を導入し、合計七種の修正概念の特徴づけに成功した。特に、単調性による特徴づけが発見されていなかった CIS value (Driessen and Funaki (1991)), CIS value の凸結合拡張解 (van den Brink and Funaki 2009)、consensus value (Ju et al. 2007) といった解について、シャープレイ値と並行的に特徴づけが得られたのは大きな貢献である。また、第二の点については、単調性が「解の不変性」を導く点に着目し、解の不変性を記述するナル空間と単調性を結びつけるというアイデアを下に第2章で導入された基底を利用して、構成的で可視的な証明が与えられ、単調性と線形性のつながりが明確化された。これは、新しい分析および証明の手法を開拓したという点で評価できる。

第4章は、シャープレイ値とコアの関係を示している。Monderer et al. (1992) によるコアの重み付きシャープレイ値を用いた包含定理は、TU ゲームのクラスで発見された。しかし、コアは交換経済やマッチング等の NTU ゲームでより多く考察され

てきたため、シャープレイ値との関係についても NTU ゲームで考察する事が要請されてきた。本章の結果はこの要請に応えるものである。協力ゲーム理論は TU の仮定に依存した研究が多いため、経済学への応用が難しいという批判がなされることもあるが、本章では、その仮定を外した場合においても、どのような点まで同様な定理が成り立つかを分析した研究の一つと位置づけることができ、今後の協力ゲーム理論の発展にも寄与するものとして大きく評価できる。本章では、任意の NTU ゲームにおいて、シャープレイ値の拡張概念である **weighted egalitarian solution** (Kalai and Samet 1985) の全体がコアを含むことが世界で初めて示された。本結果の貢献として、コアに属するいずれの配分も公理的アプローチによってサポートされる **weighted egalitarian solution** の一つと一致し、それを通してコアの要素に新たな解釈を与えたことが挙げられる。さらに、**weighted egalitarian solution** 以外の拡張概念を考えた際、コアとの関係が一般には成り立たないことも併せて示された。これは、シャープレイ値の拡張概念を比較・検討する際の新たな視点を与える重要な貢献である。

3. 修正要求に対する対応

中間報告で指摘された下記の2点(1)(2)についての対応を記載する。なお、中間報告会に参加していなかったもう一人の副査 Rene van den Brink 准教授には校正前の学位請求予定論文を送り、必要な修正点とコメントを要請した。いくつかの誤植が指摘され、それらの指摘に基づいた修正も加えた上で学位請求論文を提出する事を要請した。

(1) 学位請求予定論文中には「公平(fair)」あるいは「望ましい(desirable)」といった言葉が頻繁に登場する。こうした言葉がどのような文脈や根拠に基づいて使用されているのかについて、自分で整理して考察を加えて頂きたい。

この回答として、新たに Section 1.2 (p.7) が書き加えられた。

協力ゲーム理論は、達成可能な効用のベクトルによってゲームを記述する。そして、「公平性」や「望ましさ」の議論も、効用のレベルで論じられることになる。対象とする社会・経済現象に目を移せば、個人の身体的特徴(障がいの有無)や所得(貧富の格差)等、分配の公平性に関わる要素は数多く存在する。こうした要素は、効用関数に反映されていない限り、協力ゲーム理論の枠組みで論じることができない。

上述の点を具体例で明らかにするため、Sen (1997)の中で論じられていた分配問題、「労働環境の異なる個人の間所得分配問題」を引用している。

さらに、中間報告でのコメントを踏まえ、「weight」という概念の紹介の仕方を変更している。協力ゲーム理論は、対象とする社会・経済現象を大幅に単純化した上で分析を展開する。この単純化は、分配の公平性に関わる要素を捉え損なう危険性を孕んでいる。対象とする現象の要素を一つでも多く捉えようとする試みとして、各人に非対称な「重み」を与える **weight** の概念がある。以上の点を 1.2 節の最後に記述した。

(2) 市場経済におけるコアと競争均衡の関係は重要である。また、大人数市場ゲームにおける競争均衡とコアの一致定理、並びに、シャープレイ値の一致定理も知られている。本研究の内容と関連させて、市場ゲームにおける競争均衡と重み付きシャープレイ値の関係について、考察を加えていただきたい。

5章の Future works の中で、まず、シャープレイ値のアイデアを交換経済に応用した論文として、Perez-Castrillo and Wettstein (2006) を引用した。しかしながら、この論文では、シャープレイ値と競争均衡の関係については future work として述べるに留まり、具体的な結果は述べられていない。また、それを綿密に分析するためには新たな論文に対応するような大きな課題となる。そこで、学位請求論文中では、具体的な交換経済の一つである「手袋ゲーム」に言及し、両者の関係について探る指針を論じた(p.58 最後の段落~p.59)。手袋ゲームでは、右手・左手それぞれ片方の手袋を持つ個人の集団が、ペアを作ること意図して交換を行う。これは非分割財の売り手と買い手に対応する。競争均衡では、市場でより希少な(=数が少ない)手袋を持つ個人が利益を独占することが知られている。これは、「希少財を持つ個人の方が市場における交渉力が強い」という直感を反映する形で重みを設定することに対応すると考えられる。3人ゲームの例を用いて、前述の重みの下で重み付きシャープレイ値が競争均衡に収束することを紹介し、それに説明を加えた。

4. 口頭試問における質問とそれに対する対応

口頭試問時には主査、副査から多くの質問が成されたが、特に、副査の van den Brink 准教授は、総評として非常に良く書かれた博士論文であると評価した上で、最も多くの質疑を行ったので、その概略を記す。

まず、多くの国際学術誌に受理された論文の中から特にこの3本を博士論文の構成論文として選んだ理由を質問され、シャープレイ値の重要性と自分の興味から選択した旨の回答があった。

次に、3章で議論された弱 Covariance 公理は、協力ゲームの解として望ましい公理と考えられるかどうかという質問に関して、必ずしも、利得が期待効用で表されていないケースでは意義がある公理であることを回答した。

さらに、博士論文の中では加法性公理は数学的な性質と述べられているが、Roth によるゲームとプレイヤーの役割に関する期待利得におけるリスク態度と関連して説明する方法がある事が van den Brink 准教授から紹介され、それによって加法性は意味のある重要な公理的としてとらえることができるのではないかと質問があった。これに対して、確かにそのモデルや説明が重要であることを認め、加法性の解釈の見直しとともに、今後の研究に取り入れていくことを回答した。

最後に、4章の重み付きシャープレイ値の結果を Harsanyi-Dividend の概念を用いて言い換えることができるかと言う問いに対しては、その可能性は十分あるが、現時点では正確な回答を与えることができない旨の返答があった。

5. 結論

以上、横手康二氏は、修正要求に丁寧に対応し、また、口頭試問の質疑に対する対応も真摯で適切であった。口頭試問の場では直ちに完全な回答を与えることができない質問もあったが、それらを今後の研究課題として、さらなる研究を進めることで、主査と副査はその回答を了承した。以上の点を含めて、本論文は総体として博士の学位にふさわしい完成した論文であると、審査委員全員一致で認めた。なお、以上の内容を van den Brink 准教授には口頭で丁寧に説明し、その内容について了解を頂いている。

以上