早稲田大学大学院理工学研究科

博士論文審査報告書

論　文　題　目

Numerical approach to the Three Body Problem
－From the Free-Fall Problem to the Shape Space－

三体問題の為の数値的手法　－自由落下問題から形状空間へ－

申　請　者

氏　名		
	桑原	健二
	Kenji	Kuwabara

専攻・研究指導(課程内のみ)	物理学及応用物理学専攻・宇宙物理学研究

２００７年　１０月

非線形現象は，現在，物理学のあらゆる分野において重要になってきている．特にカオスは、自然界の多様性や複雑性を理解するための物理学の重要な基礎概念の一つとなっている。カオス研究の歴史は古く、19世紀末にポアンカレが(制限)三体問題において過去および未来に周期解に漸近する「二重漸近解」を発見したことが始まりである。その後、数十年、ポアンカレの発見したものが現実に結びつくとは思われていなかった。1960年代以降、気象学、電気回路、生態学などの分野でフラクタル構造を伴うカオス現象が発見され、1980代には多くの分野でカオスの発見が行なわれた。コンピュータの発達に伴い研究は一段と進み、カオスが非線形性に伴う普遍的な現象であること、ポアンカレの発見した解がカオスに本質的に関わっていることがわかってきた。

このカオス研究の発端になった三体問題は、天文学、物理学、数学における基本的かつ重要な課題である。この問題はポアンカレによってその非可積分性が指摘されてから長期間かつ広範囲にわたって定性的な研究が行われてきた。二体重力系は可積分で、その時間発展は厳密に予測できるが、三体以上の自己重力系は積分の数が足りず、一般には解析的に表すことができない。しかし非常に多くの粒子系とは異なり、三体問題は、二体系の性質を内在しつつ多体系の予測不可能性を持つので、カオスの研究の題材として格好の存在である。近年の力学系研究の発展に伴い、三体問題もいろいろな性質が新しい手法を用いて明らかにされてきた。その結果はとても美しい構造を伴っている。そのような単純にして複雑、かつ美しい構造の探求が本研究の大きな目的の一つである。

本論文は9章から構成されている。以下に各章ごとにその概要と評価を述べる。第1章で本研究の成果を短くまとめた後、第2章では本研究の動機について述べている。第3章はこれまでの三体問題研究を系統的に整理することに当てられている。第4章からが申請者の研究をまとめたものである。

まず第4章では、初期値空間の構築法について詳細に検討している。カオス現象を含むような非線形系の数値計算による解析において、系全体の性質を完全に把握するためには、初期値変数の取り方が重要な要素となる。それは、現実の数値計算では有限回の初期値設定しか可能でないため、初期値鋭敏性を持つカオス力学系の振る舞いをグローバルに知るためには、より少ない初期値ですべての可能性を尽くすことが要求されるからである。三体問題は、二体問題に比べ、解くべき方程式の相空間の次元がはるかに大きくなり、系統的研究をするには大きな困難が伴う。そのため、これまでは考える系に対して単純化が行われ、初期値空間に大きな制限が課している。例えば、代表的なものとして自由落下三体問題、二等辺問題、直線問題などがある。これらの問題を踏まえ、三体問題の全相空間を解析できる研究が望まれていた。そこで、申請者は初期値空間の構成を以下の３つの方針に基づき行っている。

１）グローバルな性質を十分理解するための積分する軌道の数を減らす。

２）相空間全体を余すことなく俯瞰できるように、変数の定義域を有限な領域に納める。しかも、これらの変数が直観的に理解し易いものにする。

１に関して、本研究において申請者が工夫したのは、軌道の同値性である。特に、本研究では軌道の最終状態の情報を調べることで三体系のグローバルな様子を解析しており、相空間内ですべての軌道が通過する大域的横断面を見つけることができれば、調べるべき初期値相空間の次元が一つ下がり、解析が少し簡単になる。２は少し直観的な表現ではあるが、全体を解析するには無限空間より有限空間の方が適切と考えられるし、また変数に物理的意味を課すことができれば、得られた結果が適切なものかどうかを判断するのにも役立つと考えて問題解決の方針に入れている。

このような方針の下、申請者は、一般三体問題に対する初期値空間構築のための新しい変数を見つけている。申請者はこれを形状空間とよんでいるが、来るべき大規模数値シミュレーション時代にふさわしい発見として非常に評価できる。初期値空間として、具体的には、二次元三体問題に対して座標(λ, θ, k, L, $\dot{I}$, ω)を、三次元三体問題に対して座標(λ, θ, k, L, $\dot{I}$, ω, ϕ, ψ)を採用している。ここで、(λ, θ)は配位空間における位置座標、k はビリアル比、L は全角運動量、$\dot{I}$ は慣性モーメントの時間微分、(ω, ϕ, ψ)は運動量空間におけるオイラー角で三体のつくる運動量三角形を特定の方向へ回転させる為の変数である。これらの座標は、これまで詳しく研究されている簡単化された問題を含んでおり、三体問題の系統的な研究に特に便利である。例えば、自由落下問題は(λ, θ, k=0, L=0, $\dot{I}$ =0, ω)で与えられる部分空間に対応する。そのような座標を用い申請者は、$\dot{I}$ =0で与えられる部分相空間が、測度ゼロとなる特別な軌道を除いて、大域的横断面になっていることを示している。また、これら変数の優れた点は、k, L 以外はその定義域が有限になっている点である。しかも、束縛系（k ＜１）のみを考える場合は、L の定義域も自ずと有限な領域を持つ。つまり、上記変数の横断面 $\dot{I}$ = 0 では、興味ある束縛系に対しては全ての変数の定義域が有限領域になる。これは、コンピュータを用いた解析によって三体問題の全相空間に対する描像を解明するのに適しており、重要な成果と評価できる。

第５章では、この変数を用いた具体的応用として、これまであまり研究されてこなかった角運動量の効果を解析している。質量はすべて等しいとし、初期値空間を（λ, θ, k, L = L(λ, θ, k), $\dot{I}$ = 0, $\omega = \pi/2$）ととる。この初期値空間は、Anosova, Bertov, Orlovらが考えたものに近く、彼らの研究との比較がし易いという長所も持つ。また、申請者の初期値空間は、自由落下問題の場合の初期値空間の有限性を保ちながら初期速度を与えることができる。その結果、本研究は、Anosova達の主要な結論である「角運動量は系を安定化させる」という事実をより強固なものにした。さらに申請者の変数の取り方では、計算結果の解釈を数学的または物理的にはっきりさせることを可能にしている。得られた主要な４つの結論を以下にまとめると

１）ビリアル条件(k=0.5)を満たす場合、二体衝突曲線はラグランジュ点へ螺旋構造を描きながら吸い込まれていく。この曲線群はフラクタル的な構造を持つ。

２）二つの周期解の候補を発見している。一つは不安定で、他方は安定と予想さ

れる。第一の解はその形から”花弁型”と呼ばれ、第二の解は一般化されたルナ解である。花弁型は非常に特徴的な周期をもち、ルナ解は階層三体構造を持つ。
３）ビリアル比kに対する回転の効果について考察している。一体がある時間内に脱出する三体系の崩壊に対して、ｋ<0.1の時に系は放射性同位元素に似た指数関数的崩壊を示す。0.3<ｋ<0.5では多くの安定系を持つこと、k>0.9 の時にはほとんどの系がすぐに崩壊する。
４）ｋ > 0.5 に対しては、束縛されている部分の相空間の構造が、ラグランジュ点とそれに関連した二体衝突曲線によって支配されている。
これらの成果から、見つけ出した変数の有用性が十分なものであることがわかる。

第６章では、近年注目されている周期解について形状空間の立場からまとめている。例えば、平面等質量三体問題における八の字解が形状空間においてどのように現れるかを示し、新しい周期解の発見に応用している。第７章では、本研究の遂行過程において発見された重要な定理についてまとめている。藤原達は角運動量（慣性モーメントの時間変化）ゼロの三体問題における簡潔な幾何学的定理を発見した(2004 年)。これらは三接線定理(三法線定理)とよばれる。申請者は、これらの定理を一般三体問題へ（つまり角運動量がゼロでなく、慣性モーメントの時間変化がある三次元三体問題へ）拡張した。この定理は、重力に限らず中心力であれば、いかなる相互作用にも成り立つ一般的な定理であり、極めて高い潜在的な応用が期待され、十分に評価できるものである。

最後に第８章で、本研究で得られた結果について総括し、今後の展望についてまとめている。第９章は補足としてよく知られた周期解（ラグランジュ解やオイラー解）の例をまとめている。

以上が本論文の各章ごとの概要とその評価である。要約すると、本研究では、三体問題研究に必要な数値計算における初期値空間構築の系統的な方法を与えており、またこれまで十分には調べられていなかった角運動量効果を系統的に解析し、その効果の重要性を指摘している。さらに、本研究の遂行においていくつかの重要な定理の拡張を与えている。本研究は、これからの三体問題研究に新しい展開をもたらすことが期待できるものとして十分に意義深いものと評価される。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。

２００７年７月

審査員

主査	早稲田大学教授	理学博士（京都大学）	前田　恵一
	早稲田大学教授	理学博士（早稲田大学）	相澤　洋二
	早稲田大学教授	理学博士（東京大学）	大師堂経明
	前国立天文台助教授	理学博士（東京大学）	谷川清隆
	早稲田大学教授	博士（理学）東京大学	山田　章一