早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

博士論文審査報告書

論　文　題　目

On positive stationary solutions for reaction-diffusion systems in mathematical biology

数理生物学に現れる反応拡散系の正値定常解について

申　請　者

大枝	和浩
OEDA	Kazuhiro

数学応用数理専攻　非線形システム研究

2011 年 10 月

本論文は数理生物学分野に現れる，非線形拡散を伴う反応拡散方程式系から生まれる空間的非一様な解を対象とする研究である．同一の領域において，相互作用をしながら棲息している二種類の生物を考える．その個体数密度を $u(x,t), v(x,t)\ \ (x \in R^N, t > 0)$ で表わすと，u, v の時間空間的変化は

$$u_t = \Delta[\varphi(u,v)u] + f(u,v), \quad v_t = \Delta[\psi(u,v)v] + g(u,v)$$

の形の反応拡散方程式系で表わされる．ここで f, g は二種の生物の関係（競合，共生，被食者・捕食者）を記述する反応項である．従来，拡散について生物種のランダムな移動に基く線形拡散を考えることが主であった．しかし，1980 年前後に数理生態学者の A.Okubo, Shigesada-Kawasaki-Teramoto らにより，“bio-diffusion” においては，人口圧力に起因する拡散を意味する $\Delta[\varphi(u,v)u]$ や $\Delta[\psi(u,v)v]$ 型の非線形拡散の重要性も提起された．これらの非線形拡散モデルに対する数値シミュレーションでは，安定な棲み分け現象を示唆するデータが得られ，数学者の関心を引いてきた．

本論文は非線形拡散を伴う共生モデルを扱う第 I 部とプロテクション・ゾーンと呼ばれる，ある種の「保護区」を伴う被食者・捕食者モデルを扱う第 II 部から成り立つ．第 I 部の共生モデルにおいては，線形拡散項だけならば正値定常解は定数解に限られ，それは一意的かつ安定であるところに，非線形拡散の効果を加えた場合どうなるか，を調べることが目標である．第 II 部では被食者・捕食者モデルにプロテクション・ゾーンのアイデアを採り入れる．このゾーンには被食者は自由に出入りできるものの捕食者は出入りできない．さらに被食者に対する方程式に非線形拡散の効果を加えた場合，どんな条件下で二種の共存状態が実現できるか，また非線形拡散の影響はどこに現れるか，を調べることが目標である．申請者はこれらのモデルについて，二種の共存状態を意味する正値解を中心に研究を展開している．

第 I 部においては次の形の反応拡散方程式系が扱われている：

$$\text{(P1)} \qquad \begin{cases} u_t = \Delta[(1+\alpha/(\mu+v))u] + u(a-u+cv) & \text{in} \ \ \Omega \times (0,\infty), \\ v_t = \Delta v + v(-b+du-v) & \text{in} \ \ \Omega \times (0,\infty), \\ \partial_n u = \partial_n v = 0 & \text{on} \ \ \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0 \geq 0, \ \ v(\cdot,0) = v_0 \geq 0 & \text{in} \ \ \Omega. \end{cases}$$

ここで Ω は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ R^N の有界領域，∂_n は境界における外向き法線方向の微分，a, b, c, d, μ は正定数，α は非負定数である．(P1) において c, d が正であることは，u と v が 共生関係にあることを意味している．また，非線形拡散 $\Delta[(1+\alpha/(\mu+v))u]$ は u にとって共生関係にある v の個体数密度の多い地点の方が，拡散効果が抑制されるという，より現実に即した状況を表わしている．(P1) に対する定常問題は

$$\text{(SP1)} \qquad \begin{cases} \Delta[(1+\alpha/(\mu+v))u] + u(a-u+cv) = 0 & \text{in} \ \ \Omega, \\ \Delta v + v(-b+du-v) = 0 & \text{in} \ \ \Omega, \\ \partial_n u = \partial_n v = 0 & \text{on} \ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

で与えられる．この定常問題は条件 $\dfrac{a}{b} > \dfrac{1}{d} > c$ の下で，唯一の正値定常解

$$(u^*, v^*) := \left(\frac{a-bc}{1-cd}, \frac{ad-b}{1-cd}\right)$$

を持つ．この定常解の安定性について，Lou-Nagylaki-Ni ('01) は，線形拡散のみの場合（$\alpha = 0$）には (P1) のすべての正値解が $t \to \infty$ とともに (u^*, v^*) に収束することを示した．申請者が扱った問題は，非線形拡散を考慮した場合に (u^*, v^*) が不安定化して，正値非定数定常解が現れるか，というテーマである．

定理 1. 正定数 $\alpha_* = \alpha_*(a,b,c,d,\mu)$ が存在し，$0 \leq \alpha \leq \alpha_*$ ならば，(u^*, v^*) は (SP1) の唯一の正値解である．

この定理により非線形拡散の影響が小さい，すなわち α が小さいときには (u^*, v^*) は安定である．しかし，$b > \mu$ の条件下では定数定常解が不安定となる可能性が生じる．同次 Neumann 境界条件の下での $-\Delta$ の固有値

を $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$ とし，λ_i の代数的重複度を m_i とする．このとき次の定理が成立する．

定理 2. (SP1) の係数がある $\ell \geq 1$ に対して $v^*(b-\mu)/(\mu+v^*) \in (\lambda_\ell, \lambda_{\ell+1})$ をみたし，$\sum_{i=1}^{\ell} m_i$ が奇数とする．このとき $\alpha^*=\alpha^*(a,b,c,d,\mu)$ が存在して，$\alpha \geq \alpha^*$ ならば (SP1) は正値非定数定常解をもつ．

定理 2 により，非線形拡散の影響が大きい場合には空間的に非一様な正値定常解が登場する．これは，共生モデルに対して非線形拡散項が，線形拡散のみの場合とは質的に異なる定常解集合を形成する，という数学的のみならず数理生態学的にも重要な成果を与えている．定理 1，2 の証明において大切な役割を果たすのが，最大値原理と次に述べる Harnack の不等式である．

Harnack の不等式 (Lin-Ni-Takagi ('88), Lou-Ni ('99)) Ω は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ R^N の有界領域で，f は $f \in L^p(\Omega),\ p>\max\{N/2,1\}$, をみたし，$w$ は

$$\Delta w + f(x)w = 0 \quad \text{in} \ \ \Omega, \quad \partial_n w = 0 \quad \text{on} \ \ \partial\Omega,$$

の非負値解とする．このとき次をみたす正定数 C^* が存在する：

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} w(x) \leq C^* \min_{x\in\overline{\Omega}} w(x).$$

申請者は楕円型方程式に対する最大値の原理をうまく利用して，定理 1 を証明している．さらに Harnack の不等式を巧妙に組み合わせることにより，(SP1) の正値解がみたすアプリオリ評価が得られる．これらの評価の下で Leray-Schauder の写像度理論を適用して定理 2 が証明される．第 I 部ではさらに，(SP1) の正値解について $\alpha\to\infty$ のもとでの漸近挙動が調べられ，正値解の極限関数への収束，極限関数のみたすべき非線形楕円型方程式系の導出がなされている．このように第 I 部では興味深い結果が得られており，用いられたアイデア・理論・技法からも申請者の卓越した力量がうかがえる．

第 II 部では，プロテクション・ゾーンを伴う，被食者・捕食者モデルに対する反応拡散方程式系

$$\text{(P2)} \qquad \begin{cases} u_t = \Delta[(1+k\rho(x)v)u] + u(\lambda - u - b(x)v) & \text{in} \ \ \Omega\times(0,\infty), \\ v_t = \Delta v + v(\mu + cu - v) & \text{in} \ \ (\Omega\setminus\overline{\Omega_0})\times(0,\infty), \\ \partial_n u = 0 \quad \text{on} \ \ \partial\Omega\times(0,\infty), \quad \partial_n v = 0 & \text{on} \ \ \partial(\Omega\setminus\overline{\Omega_0})\times(0,\infty), \\ u(\cdot,0)=u_0\geq 0 \quad \text{in} \ \ \Omega, \quad v(\cdot,0)=v_0\geq 0 & \text{in} \ \ \Omega\setminus\overline{\Omega_0}, \end{cases}$$

が扱われる．ここで Ω は R^N の有界領域，Ω_0 は $\overline{\Omega_0}\subset\Omega$ をみたす Ω の部分領域，$\lambda, c>0, k\geq 0, \mu\in R$ は定数，関数 $\rho(x), b(x)$ は

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \ \ x\in\Omega\setminus\Omega_0, \\ 0 & \text{if} \ \ x\in\Omega_0, \end{cases} \qquad b(x) = \begin{cases} \beta & \text{if} \ \ x\in\Omega\setminus\Omega_0, \\ 0 & \text{if} \ \ x\in\Omega_0, \end{cases}$$

（ただし β は正数）をみたすとする．このシステム (P2) において u, v はそれぞれ被食者，捕食者の個体数密度であり，捕食者は Ω_0 内に入り込むことができない．この意味で被食者にとって，Ω_0 は保護区（＝プロテクション・ゾーン）となる．このようなプロテクション・ゾーンを伴うモデルの研究は, Du-Shi ('06) の研究に始まり，色々な生物モデルの定常解集合の構造について興味深い結果が得られている．ここで (P2) のような非線形拡散モデルを提起したのは申請者が最初である．拡散係数 ρ の不連続性により非定常問題 (P2) の適切性については，まだ未解決の課題があるものの，チャレンジングなテーマに取り組む研究姿勢は評価される．

本論文では (P2) に対する定常問題

$$\text{(SP2)} \qquad \begin{cases} \Delta[(1+k\rho(x)v)u] + u(\lambda - u - b(x)v) = 0 & \text{in} \ \ \Omega, \\ \Delta v + v(\mu + cu - v) = 0 & \text{in} \ \ \Omega_1, \\ \partial_n u = 0 \quad \text{on} \ \ \partial\Omega, \quad \partial_n v = 0 & \text{on} \ \ \partial\Omega_1, \end{cases}$$

（ただし $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega_0}$）を考える．ここで (SP2) の正値解について

(i) (SP2) の正値解の存在・非存在条件を明らかにすること，

(ii) (SP2) の正値解について $k \to \infty$ での漸近挙動を明らかにすること

が主要なテーマである．主結果の一つが正値解の存在・非存在に関わる次の定理である．

定理 3. (i) $\mu \geq 0$ とする．(SP2) が正値解を持つための必要十分条件は $\lambda > \lambda^*(\mu)$ である．ここで $\lambda^*(\mu)$ は μ に関する単調増加な連続関数で $\lambda^*(0) = 0, \lim_{\mu\to\infty} \lambda^*(\mu) \leq \lambda_1^D(\Omega_0)$ をみたす．ただし，$\lambda_1^D(\Omega_0)$ は，Ω_0 における同次 Dirichlet 境界条件下での $-\Delta$ の最小固有値である．
(ii) $\mu < 0$ とする．このとき $\lambda > -\mu/c$ ならば，(SP2) は正値解をもつ．

定理 3 はとくに，$\mu > 0$ の場合，正値解の存在のための必要十分条件を導いており，きわめて優れた結果である．解の存在のための十分条件はアプリオリ評価と分岐理論を組み合わせて求められる．また，必要性については楕円型方程式に対する最大値原理と最小固有値の特性を利用した証明になっている．両者とも，応用範囲の広いアイデア・技法である．なお，定理 3 に現れる $\lambda_1^D(\Omega_0)$ は線形拡散の場合には，重要な値である．実際，Du 達の研究グループは，$\lambda \geq \lambda_1^D(\Omega_0)$ ならば正値解は常に存在し，$\lambda < \lambda_1^D(\Omega_0)$ ならば μ が大きいときには被食者が絶滅することを示した．この意味で $\lambda_1^D(\Omega_0)$ は数学的には大切な閾値である．また生態学的には 2 種の共存のためには一定の大きさのプロテクション・ゾーンが必要であることを意味している．

一方，非線形拡散項がある場合，$k \to \infty$ とともに $\lambda^*(\mu, k, \Omega_0) := \lambda^*(\mu)$ がどのように変化するかを調べた結果が次の定理である．

定理 4. $\mu > 0$ とする．このとき $\lambda^*(\mu, k, \Omega_0)$ は $k \geq 0$ について狭義単調減少で次の関係をみたす：

$$\lambda_\infty^*(k, \Omega_0) := \lim_{\mu\to\infty} \lambda^*(\mu, k, \Omega_0) < \frac{\beta|\Omega \setminus \Omega_0|}{k|\Omega_0|} \qquad \text{かつ} \qquad \lim_{k\to\infty} k\lambda_\infty^*(k, \Omega_0) = \frac{\beta|\Omega \setminus \Omega_0|}{|\Omega_0|}.$$

定理 4 より $\lim_{k\to\infty} \lambda_\infty^*(k, \Omega_0) = 0$ であり，$\lambda, \mu > 0$ の如何に関わらず，非線形拡散の影響が大きければ，二種の共存が可能となることがわかる．これは線形拡散のみの場合と大きく異なる状況を産み出す，非常に貴重な結果である．また，共存状態に対応する正値解のプロファイルがどのような形状になるか，を知ることは非常に大切な課題である．この点について次の定理が成り立つ．

定理 5. (u_k, v_k) を (SP2) の正値解とする．$\mu \geq 0$ ならば $1 \leq N \leq 3$ の下

$$\lim_{k\to\infty} (u_k, u_k, v_k) = (\lambda, 0, \mu) \quad \Omega_0 \times \overline{\Omega_1} \times \overline{\Omega_1} \ \text{において一様収束}$$

が成立する．ただし，$\Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_0$ である．

この定理は Harnack の不等式を利用して，(u_k, v_k) について k に無関係なアプリオリ評価を導くことがポイントである．空間次元への制約 $N \leq 3$ は Harnack の不等式を適用する際に必要となる条件である．定理 5 により，非線形拡散の効果が大きい場合には被食者はプロテクション・ゾーン Ω_0 内に集中するという，ある意味自然な棲み分けが実現される．なお，$\mu < 0$ の場合にも正値解の挙動について，非常に詳しい成果が求められている．

以上述べてきたように，申請者は数理生物学分野に現れる反応拡散方程式系についてきわめて精緻な研究をおこない，数学的にも数理生態学的にも，価値ある結果を得ている．また，論文の中で展開されてきた理論・技法は独創性に富み，関連分野の今後の研究に大きく貢献すると思われる．よって本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める．
2011 年 7 月

審査員

（主査）	早稲田大学教授	理学博士（名古屋大学）	山田 義雄
	早稲田大学教授	理学博士（東京大学）	大谷 光春
	早稲田大学教授	理学博士（早稲田大学）	田中 和永
	電気通信大学准教授	博士（理学）早稲田大学	久藤 衡介