早稲田大学大学院　基幹理工学研究科

博士論文概要

論文題目

Studies of coupled nonlinear Schrödinger equations and nonlinear scalar field equations via variational methods

変分法を用いた非線型連立シュレディンガー方程式系，非線型スカラー場方程式の研究

申請者

生駒	典久
Norihisa	Ikoma

数学応用数理専攻　変分問題研究

2010年　9月

論文題目にある変分法とは，ある微分方程式が与えられたとき，その微分方程式に対応する汎関数を考え，微分方程式の解をその汎関数の臨界点として捉えるという方法である．このようなアプローチは微分方程式の解の存在を証明するための非常に強力な方法である．実際，汎関数の臨界点の存在はその汎関数のグラフの形状から示される場合があり，一変数関数に対する Rolle の定理などは良い例である．本論文では非線型 Schrödinger 方程式系および非線型スカラー場方程式に対し，定在波解と呼ばれる解の存在に関する研究を変分法を用いて行った．以下では，本論文の構成とその概要を述べる．

第一章では，非線型連立 Schrödinger 方程式系や非線型スカラー場方程式の説明，研究の背景，既知の結果，本論文における主結果などを述べている．

第二章以下は二つの部から成り立っている．第一部では非線型連立 Schrödinger 方程式系を，第二部では非線型スカラー場方程式を取り扱っている．

第一部では次の非線型連立 Schrödinger 方程式系を考える:

$$\text{(CNLS)} \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u_1 + V_1(x)u_1 = \mu_1 u_1^3 + \beta u_1 u_2^2 & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ -\varepsilon^2\Delta u_2 + V_2(x)u_2 = \beta u_1^2 u_2 + \mu_2 u_2^3 & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ \qquad u_1, u_2 \in H^1(\mathbf{R}^N). \end{cases}$$

但し，$V_1(x), V_2(x) : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ は与えられたポテンシャル関数，$\varepsilon, \mu_1, \mu_2 > 0, \beta \in \mathbf{R}$ は定数，$N = 1, 2, 3$ とする．(CNLS) は非線型光学や二成分 Bose–Einstein 凝縮の分野などで現れる．ここで，(CNLS) に対する注意点を述べる．一つ目は (CNLS) は半自明解と呼ばれる解 $(u_1, 0), (0, u_2)$ を持つことである．実際，単独の Schrödinger 方程式 $-\varepsilon^2\Delta u_i + V_i(x)u_i = \mu_i u_i^3$ を用いて半自明解を構成できる．そこで，半自明解と区別するため，$u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ を満たす (CNLS) の解のことを非自明解と呼ぶ．非自明解の中でも，$\mathbf{R}^N$ 上 $u_1(x), u_2(x) > 0$ を満たす正値解の存在について考える．二つ目は，(CNLS) の正値解の存在を考える際，u_1 と u_2 の相互作用の力の大きさを表すパラメータ β が重要な役割を果たす．実際，$\varepsilon = 1$, $V_1(x) \equiv V_2(x) \equiv 1$ という状況のとき，Bartsch–Wang (2006) や Sirakov (2007) により $\min\{\mu_1, \mu_2\} \leq \beta \leq \max\{\mu_1, \mu_2\}$ ならば (CNLS) は正値解を持たないことが示されている．

第二章では，$\varepsilon = 1$ の仮定の下，(CNLS) を考察する．(CNLS) は近年活発に研究されており，特に $\varepsilon = 1$ かつ $V_1(x), V_2(x)$ が恒等的に正定数に等しい場合 ($V_1(x) \equiv V_1 > 0, V_2(x) \equiv V_2 > 0$) についてよく研究が行われている (Wei–Lin (2005), Bartsch–Wang (2006), Sirakov (2007) など)．一方，この章では $V_1(x) \not\equiv V_1 > 0$ または $V_2(x) \not\equiv V_2 > 0$ という状況下において (CNLS) を考察している．

二つの場合の最も顕著な違いは，(CNLS) に対応する汎関数が Palais–Smale 条件 ((PS) 条件) を満たすかどうかである．ここで，(PS) 条件とは次のような条

件である: 今考えている汎関数を I とし，点列 (u_n) が

$$(*) \qquad I(u_n) \to c \in \mathbf{R}, \quad I'(u_n) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty$$

を満たせば，(u_n) は強収束部分列を持つ．また，$(*)$ を満たす点列のことを Palais–Smale 列 ((PS) 列) という．この (PS) 条件により臨界点の存在を示すことができる．$V_1(x) \equiv V_1 > 0, V_2(x) \equiv V_2 > 0$ の状況下では，(PS) 条件を満たす場合に帰着できるが，この章で考えている状況では，そのような帰着ができない．

(PS) 条件が成立しない場合，Lions (1984) による concentration-compactness 法を用いて，(PS) 列の挙動を注意深く考察する必要がある．特に，V_1, V_2 のグラフの形状が (PS) 列の挙動に対して大きな影響を与える．

この章では，V_1, V_2 に対して，それらのグラフの形状に条件を課した時，ある正定数 $\beta_1 \leq \beta_2$ が存在し，$0 \leq \beta < \beta_1$ または $\beta_2 < \beta$ が成り立つとき，(CNLS) は正値解を持つことを示している．また，上で得られた正値解について，その解が持つエネルギーによる分類も行っている．$\beta > \beta_2$ が成立する場合，得られた正値解は (CNLS) の最小エネルギー解であり，他方，$\beta > 0$ が十分小さい場合は (CNLS) の最小エネルギー解ではない．また，(PS) 列の挙動は V_1, V_2 のグラフの形状に強く依存することは上で注意したが，ここでは V_1, V_2 がある方向に対して単調に依存する場合，(CNLS) の正値解が存在しないことも示している．

第三章では，$\varepsilon = 1$, V_1, V_2 を球対称としたとき，正値解の一意性とその非退化性を考えている．$\beta > 0$, V_1, V_2 が球対称かつある条件を満たせば，(CNLS) の正値解はある点を対称点とする球対称関数となることが Busca–Sirakov (2000) によって示されている ($V_i(x) \equiv V_i > 0$ $i = 1, 2$ の場合，この条件を満たす)．したがって，(CNLS) の正値解の一意性を考える場合, 球対称であるものだけを考える．また，正値解の非退化性を考える場合も球対称な関数空間において考察する．

この章において, V_1, V_2 が上で述べた条件 ((CNLS) の正値解が球対称であるということを保障する条件) かつさらに付加条件を満たすとき ($V_i(x) \equiv V_i > 0$ $i = 1, 2$ の場合は満たされる)，次のことを示している．ある $\beta_3 > 0$ が存在し，$0 \leq \beta < \beta_3$ ならば，(CNLS) の正値球対称解は一意かつ球対称な関数から成る Sobolev 空間において非退化である．上で注意したように，(CNLS) の解は今考えている状況では全て球対称性を持っているので，上の主張により $0 \leq \beta < \beta_3$ のときは (CNLS) の正値解の構造が決定できる．

第四章では，$\varepsilon \to 0$ としたときの (CNLS) の正値解の存在と挙動について考えている．一般に $\varepsilon \to 0$ としたとき, 解は spike 状の形に成長していく．ここでは，(i) それぞれの成分が別々の点に凝集する，(ii) 両成分が共通の点に凝集する，という二つの場合が考えられる．ここで，(i) のタイプの解の存在について注意をしておく．V_1, V_2 がある条件を満たし，$\beta > 0$ が十分小さいとき，非自明解の中

の最小エネルギー解は (i) のタイプの挙動を持つことが示せる．したがって，このような状況下のとき，(ii) のタイプの解が存在するかを考察する．

この章では，$\beta > 0$ が小さく，V_1, V_2 が正値有界連続関数かつグラフの形状についてある条件を課したとき，(ii) のタイプの解が存在することを示す．ここで，(ii) のタイプの解は $\beta > 0$ という条件が非常に重要である．実際，$\beta = 0$ のとき，(ii) のタイプの挙動を持つ解が存在しない例を簡単に構成することができる．また，$\beta > 0$ が小さく，(i) と (ii) のタイプの解が共に存在するような V_1, V_2 の例も与えることができる．

第二部では次の非線型スカラー場方程式を取り扱っている:

$$\text{(NSF)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = g(|x|, u) & \text{in } \Omega, \\ \quad u \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

ここで，$\Omega = \mathbf{R}^N$ または $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^N : |x| > R\}$，$N \geq 2$ とする．また，$g(r, s)$ は r, s について連続，s については奇関数とする．さらに，Ω が外部領域のときは，境界条件として斉次 Dirichlet 境界条件と斉次 Nuemann 境界条件を考える．(NSF) は非線型 Schrödinger 方程式や非線型 Klein–Gordon 方程式に対する定在波解を求めるときに現れる方程式の一般化である．(NSF) を考えるときの困難な点は有界な (PS) 列が存在するかという点である．

第五章では，$\Omega = \mathbf{R}^N$ かつ非線型項が r に依存しない場合を考える ($g(r, s) = g(s)$)．ここでは，$g(s)$ に対して Berestycki–Lions (1983) と同じ条件を課したときに (NSF) の正値解の存在と可算無限個の解の存在を示している．さらに正値解は (NSF) の最小エネルギー解に対応することも示されている．解の存在結果は $N \geq 3$ のときは Berestycki–Lions (1983) と同じものであるが，$N = 2$ のときは，Berestycki–Gallouët-Kavian (1983) の結果の拡張になっている．証明のアイデアは $\theta \in \mathbf{R}$ に対して, 変数変換 $x \mapsto x/e^{\theta}$ を用い，付加的な条件を満たす (PS) 列を構成し，その (PS) 列が有界であることを示すことにある．

第六章では，$\Omega = \mathbf{R}^N$ または $\Omega = \{x : |x| > R\}$ とする．また，$g(r, s)$ は一般に r に依存しているものとする．この場合については，Li (1990) や Li–Li (1993) において，$\Omega = \mathbf{R}^N$ の場合と Ω が外部領域かつ Dirichlet 境界条件の場合が考察されている．上の二論文では, (NSF) の正値解と可算無限個の解の存在が示されている．この章では，彼らの，$s = 0$ の近傍における $g(r, s)$ の挙動についての仮定を弱め，空間無限遠での挙動に関する条件を付け，正値解の存在と可算無限個の解の存在を示している．証明方法は第五章と共通する部分が多いが，決定的に違うところは上記の変数変換をそのまま適用できない点である．実際，領域は不変とは限らず，$g(r, s)$ は r を含んでいるためである．そこで，Struwe (1988) によって導入された monotonicity trick (ここでは，Rabier (2007) の結果を適用) と Pohozaev 型の不等式を用いて, 有界な (PS) 列を構成した．

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

氏 名　　生駒　典久　　　　　印

（２０１０年　９月　現在）

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
論文	1. ○ N. Ikoma, “Uniqueness of Positive Solutions for a Nonlinear Elliptic System” Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, 16 (2009), 555-567. 2. ○ N. Ikoma, “Existence of standing waves for coupled nonlinear Schrödinger equations”, Tokyo Journal of Mathematics, 33 (2010), 89-116. 3. ○ N. Ikoma and K. Tanaka, “A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrödinger equations”, Calculus of Variations and Partial Differential Equations (掲載決定). 4. ○ J. Hirata, N. Ikoma and K. Tanaka, “Nonlinear scalar field equations in R^N: mountain pass and symmetric mountain pass approaches”, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 35 (2010), 253-276. 5. ○ N. Ikoma, “On radial solutions of inhomogeneous nonlinear scalar field equations”, (投稿中)
講演	1. 非線形シュレディンガー方程式系のStanding Waveの存在について, 仙台放物型・楕円型方程式研究集会 - ラプラシアンの解析と幾何 -, 宮城, 2007年11月. 2. Existence of standing waves for coupled nonlinear Schrödinger equation, 第2回非線型偏微分方程式と変分問題, 東京, 2008年2月. 3. Existence of standing waves for coupled nonlinear Schrödinger equation, 日本数学会2008年度会関数方程式論分科会, 大阪, 2008年3月. 4. 非線型シュレディンガー方程式系に対する定在波解, 第30 回発展方程式若手セミナー, 山梨, 2008年9月. 5. 非線型Schrödinger方程式系の正値解の一意性, 日本数学会2008年度秋季総合分科会, 東京, 2008年9月. 6. 非線型Schrödinger 方程式系の正値解の一意性, 埼玉大学解析ゼミ, 埼玉, 2008年10月. 7. A singular perturbation problem for coupled nonlinear Schrödinger equations, 仙台放物型・楕円型方程式研究集会, 宮城, 2008年11月. 8. 非線型Schrödinger 方程式系の正値解の一意性, 第3回非線型偏微分方程式と変分問題, 東京, 2009年2月. 9. A singular perturbation problem for coupled nonlinear Schrödinger equations, 研究集会「若手のための偏微分方程式と数学解析」, 福岡, 2009年2月. 10. 非線型連立Schrödinger 方程式系に対する特異摂動問題, 熊本大学応用解析セミナー, 熊本, 2009年3月. 11. 非線型連立Schrödinger方程式系に対する特異摂動問題, 日本数学会2009年度会関数方程式論分科会, 東京, 2009年3月. 12. 非線型Schrödinger方程式系に対する特異摂動問題, 埼玉大学解析ゼミ, 埼玉, 2009年4月. 13. A singular perturbation problem for coupled nonlinear Schrödinger equations, 変分問題とその周辺, 京都, 2009年6月. 14. Nonlinear Scalar Field Equations in $¥mathbf{R}^N$ - A Mountain Pass Approach -, 1st Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDE's, 仙台, 2009年6月

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
講演	15. 非線型 Schrödinger 方程式系の正値解の一意性について，第 31 回発展方程式若手セミナー，埼玉，2009 年 9 月. 16. 非線型連立 Schrödinger 方程式系に対する特異摂動問題，広島数理解析セミナー，広島，2009 年 10 月. 17. On radial solutions of inhomogeneous nonlinear scalar field equations, The second Chile-Japan Workshop on Nonlinear Elliptic and Parabolic PDEs，東京，2009 年 12 月. 18. On radial solutions of inhomogeneous nonlinear scalar field equations，第 7 回浜松偏微分方程式セミナー，静岡，2009 年 12 月. 19. Uniqueness of positive solutions of coupled nonlinear Schrödinger equations, Darmstadt，2010 年 2 月. 20. A singular perturbation problem for coupled nonlinear Schrödinger equations, University of Giessen，2010 年 2 月. 21. Nonlinear Scalar Field Equations in $¥mathbf{R}^N$ - A Mountain Pass Approach -, JSPS-DFG Japanese-German Graduate Externship Internatinal Workshop on Mathematical Fluid Dynamics，東京，2010 年 3 月. 22. On radial solutions of inhomogeneous nonlinear scalar field equations，日本数学会 2010 年度年会，神奈川，2010 年 3 月. 23. 非斉次非線型スカラー場方程式に対する解の多重性，第 4 回青葉山勉強会，宮城，2010 年 5 月. 24. 非線型スカラー場方程式に対する解の多重性，東工大数理解析セミナー，東京，2010 年 7 月.
その他 (報告集)	N. Ikoma and K. Tanaka, “A singular perturbation problem for coupled nonlinear Schrödinger equations”， 数理解析研究所講究録 1671，変分問題とその周辺，2009 年 12 月.

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）