

非カオス的ストレンジアトラクター
の発生機構と異常拡散現象

Onset Mechanisms and Anomalous Diffusion
Phenomena of Strange Nonchaotic Attractors

2011 年 2 月

早稲田大学大学院 理工学研究科

物理学及応用物理学専攻 統計物理学研究

三ツ井 孝仁

序

ポアンカレの三体問題にまで遡るカオス研究は、シンプルな決定論的法則が確率的とさえ言える複雑な運動を引き起こすことを明らかにした。カオスは現代科学が直面する多くの非平衡非線形問題に現われる。理論的にも応用的にも重要な非平衡非線形システムの例として、交流駆動される非線形回路や周期的パルス入力を受ける生物振動子などの周期駆動される力学系が挙げられる。一般に、周期駆動される連続力学系の解析にはポアンカレ写像が用いられる。その代表例である標準写像や円写像などの数理的研究は、カオスを含む非線形非平衡現象の普遍的性質を数多く明らかにしてきた。ところが現実の非平衡非線形系が外部から受ける影響は周期的なものばかりではない。実際、多くの系はノイズなどのランダムな外乱の中で作動している。ここでは確率微分方程式やフォッカー・プランク方程式などによる現象のモデル化が定量的理解に役立っている。しかし、周期的な影響を受ける決定論的系の理論から無秩序な外乱を受ける確率論的系の理論へ一足飛びに越えることはできない。その間を繋ぐ理論が必要である。

周期駆動される力学系に対して、一段階複雑な影響を受ける系として準周期駆動される力学系を考えることができる。この拡張は単に現象を込み入らせるだけでなく、非カオス的ストレンジアトラクター (Strange Nonchaotic Attractor; 以下 SNA と略す) と呼ばれる新しい力学的状態を出現させる。SNA は Grebogi ら (1984) と Kaneko (1984) により同時期に発見され、理論・実験の両面から精力的に研究されてきた。SNA 研究において「ストレンジ」とはアトラクターの微分不可能性やフラクタル性などの幾何学的複雑さを意味する。「非カオス的」とは最大リヤプノフ指数が正でないことを指す。すなわち、SNA 上の軌道は初期値に対する指數的鋭敏性を持っていない。エノンアトラクターやローレンツアトラクターなど代表的なストレンジアトラクターにおいてフラクタル性はカオス性の存在と密接に結びついている。これは、これらのストレンジアトラクターが安定・不安定多様体の横断的交差に起因する相空間の折り畳みと引き伸ばしにより形成されることに原因がある。しかし、準周期駆動される力学系には周期点が存在せず、安定・不安定多様体も存在しないので、SNA の形成は相空間の折り畳みと引き伸ばし機構では説明できない。そしてこの形成機構の違いを反映して、SNA には従来のカオス理論では説明の難しい興味深いダイナミクスや統計法則が現れる。

本論文では SNA の示す複雑現象を二つの観点から詳しく研究する。先行研究では、準周期駆動される力学系の分岐現象が精力的に調べられ、これまでに複数の SNA の発生メカニズムが明らかにされて来た。しかし一方、SNA のダイナミクスが持つ統計的性質は未だ十分理解されたとは

言い難い．本論文では SNA の統計的性質を現すものとして，SNA に起因する異常拡散現象を詳しく研究する．もう一つの観点は SNA の力学系における遍在性に関わるものである．これまでの SNA 研究は準周期駆動される連続力学系からポアンカレ写像として導かれるスキュープロダクト写像においてなされてきた．スキュープロダクト写像とは，写像を構成する変数を駆動する側の変数 y と駆動される変数 x に分離できる写像である．一方，非スキュープロダクト写像とは上記の様に変数を分割できない写像である．本論文では，非スキュープロダクト写像における SNA の発生メカニズムを詳しく解析する．以下，各章の概要を述べる．

1 章では SNA の定義と基礎的事柄を述べる．実例として GOPY 写像の SNA を紹介し，SNA の形成メカニズムの一例を示す．

2 章では SNA の特徴である位相鋭敏性と局所指数不安定性について説明する．この章で導入する位相鋭敏性指数はアトラクターの微分不可能性を判別する指標であり，SNA の数値的研究において極めて有用である．位相鋭敏性指数を理論的に決定することは一般に困難であるが，本章では変形 GOPY 写像を用いて位相鋭敏性指数が解析的に導出される例を示す．これにより SNA 上の軌道が持つ局所的な指数不安定性を明らかにする．さらに，この局所的指数不安定性が局所リヤプノフ指数の分布関数によって特徴付けられることを確認する．

3 章では SNA の位相鋭敏性に起因する異常拡散現象を探究する [Mitsui, submitted]．第一のモデルとして $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ 上の準周期駆動される円写像 M を用いる．この写像はトーラス面上 (\mathbb{T}^2 上) でも定義でき， \mathbb{T}^2 上でアトラクターを持ち得る．このアトラクターは，パラメータの変化に伴い，滑らかな不変曲線上の準周期アトラクター (1 トーラス) から SNA を経由してカオスアトラクターへと遷移する．さらに SNA の発生に伴い， \mathbb{R} 上では平均二乗変位 $\langle \Delta x^2 \rangle$ が対数関数的に増加する非常に遅い拡散が発生する．著者は写像 M の拡散現象を非可逆領域も含めて詳細に解析する．その結果，SNA 領域ではトーラス領域近傍において対数的拡散が発生し，カオス領域へ近づくにつれ劣拡散へと徐々に変化し，カオス領域において通常拡散へと遷移することを示す．また，準周期駆動される振り子系やニューロンモデルにおいても同様な拡散現象が見られることを示す．これらの結果が，SNA-カオス遷移を示す系において「劣拡散から通常拡散への遷移」が広く成立するシナリオであるという予想を提案する．さらに，フラクタル時系列解析における局所二次モーメント法により，劣拡散が SNA のダイナミクスにおける反持続性に起因していることを明らかにする．

4 章では非スキュープロダクト写像における SNA の発生メカニズムを探究する [Mitsui and Aizawa 2010]．SNA を発生する非スキュープロダクト写像はほとんど知られていないが，Badard 写像はその一例である．本章では準周期的に回転を拘束したキックされる二つの回転子から拡張された Badard 写像を理論的に導出し，パラメータ平面における分岐現象を数値計算により詳しく解析する．その結果，これまでに知られているトーラス崩壊による SNA の発生ルートに加え，安定・不安定不動点群の連続的対消滅による新たな SNA の発生ルート (間欠性ルート) の存在を示

す．さらに，この間欠性ルートの特徴として，不動点群の最終消滅点近傍への軌道の平均滞在時間 $\langle T \rangle$ が，分岐点からの距離 $\Delta\Omega$ に対し対数特異性 $\langle T \rangle \propto -\ln \Delta\Omega$ を持つことを理論的に導出する．

5 章では，4 章で述べた間欠性ルートの分岐点上における回転数の収束過程を詳しく解析する [Mitsui 2008]．拡張 Badard 写像の y 軸方向に対する間欠的ダイナミクスは準周期ポテンシャルを持つ一階の常微分方程式で近似できる．この準周期ポテンシャル系において，運動の淀み時間 T_n の更新過程を有理数近似の定理を用いて明らかにする．その結果，分岐点上にある拡張 Badard 写像において，典型的な軌道の回転数の収束過程 $(y_n - y_0)/n$ が対数関数の入れ子型の公式で記述されることを理論的に導出する．この公式は典型的な軌道に対する回転数の収束が対数収束 $1/\ln n$ よりも僅かに遅いオーダーの収束型であることを意味している．

6 章では本論文のまとめと今後の SNA 研究に対する展望を議論する．

目次

第 1 章	Strange Nonchaotic Attractors	7
1.1	Strange Nonchaotic Attractors の定義	7
1.2	準周期駆動される散逸力学系: SNA のパラダイム	9
1.3	SNA の基本的性質	11
1.3.1	非カオス性	11
1.3.2	マルチフラクタル性	12
1.4	Grebogi-Ott-Pelikan-Yorke(GOPY) 写像	13
1.5	1 章のまとめ	15
第 2 章	位相鋭敏性と局所指数不安定性	16
2.1	位相鋭敏性	16
2.2	変形 GOPY 写像の位相鋭敏性	18
2.3	局所指数不安定性	23
2.4	2 章のまとめ	24
第 3 章	SNA に起因する異常拡散	25
3.1	確率的拡散と決定論的拡散,そして異常拡散	25
3.2	準周期駆動される円写像 (トレンドのない場合)	27
3.2.1	拡散のタイプ	28
3.2.2	定常性とエルゴ - ド性	34
3.2.3	過去の変位と未来の変位の間に関連	35
3.3	準周期駆動される円写像 (トレンドのある場合)	38
3.4	準周期駆動される減衰振り子	42
3.5	準周期駆動されるニューロンモデル	47
3.6	3 章のまとめ	52
第 4 章	非スキュープロダクト写像における SNA の発生メカニズム	53
4.1	Badard の非スキュープロダクト写像	55
4.2	拡張された Badard 写像の物理モデルからの導出	56

4.3	予備的な解析	59
4.4	解析方法	60
4.5	Ω - V 平面の相図	62
4.5.1	位相ロック条件とアトラクターのタイプ	64
4.6	写像 \tilde{M} の分岐現象	64
4.6.1	スムーズ・サドル・ノード分岐	64
4.6.2	ノンスムース・サドル・ノード分岐	66
4.6.3	SNA へと至る間欠性分岐	68
4.6.4	間欠性分岐近傍のダイナミクスとスケーリング則	70
4.6.5	位相依存型サドル・ノード分岐	73
4.6.6	トーラスのフラクタル化	75
4.7	4章のまとめ	76
第5章	間欠性ルートにおける回転数の遅い収束	78
5.1	準備	78
5.2	淀み運動	79
5.3	滞在時間の密度関数	80
5.4	最大滞在時間の更新	82
5.5	変位の漸近挙動	84
5.5.1	比 $t/x(t)$ の推定	84
5.5.2	変位 $x(t)$ の漸近挙動：時間表示	87
5.6	拡張 Badard 写像への適用	88
5.7	5章のまとめ	89
第6章	まとめと展望	91
付録A	周期的にキックされる回転子におけるストロボ写像の導出	104
付録B	無理数の有理数近似	106
付録C	式 (5.12) の導出	108
付録D	定理 2 の証明	109
付録E	不等式 $\frac{T_n(\varepsilon_n)}{d\varepsilon_n} < 0$ の証明	110
付録F	式 (5.14) の証明	112

第1章 Strange Nonchaotic Attractors

本論文は非カオス的ストレンジアトラクター (Strange Nonchaotic Attractors) について探究する。以下では、このアトラクターを SNA と略す。SNA の概念は、1984年に Grebogi, Ott, Pelikan, Yorke により導入された [Grebogi et al. 1984]。SNA 上ではほとんど全ての軌道の最大リヤプノフ指数が正でなく、システムは初期値に対する指数的鋭敏性を持たない。にも関わらず、アトラクターはフラクタル的で複雑な幾何学的構造を持つ。図 1.1 に SNA の一例を示す。代表的ストレンジアトラクターの多くがカオス的アトラクターを指していることを考えると、“非カオス的ストレンジアトラクター”とは矛盾をはらんだような名前である。そして実際、SNA は秩序性とカオス性を併せ持つキメラのようなアトラクターである。

Grebogi らによる発見以来、SNA は多くの研究者の興味を掻きたて、現在までに多くの理論的・実験的研究がなされてきた。SNA は準周期的に駆動される散逸力学系において典型的に存在することが多くの事例により知られている。ここで“典型的に存在する”とは、多くの準周期駆動される散逸力学系のパラメータ空間において、SNA が有限測度の存在領域を持っていることを意味する。そのようなシステムとして、準周期駆動される粘性振り子 [Romeiras and Ott 1987; Romeiras et al. 1987]、準周期駆動されるダフティング振動子 [Heagy and Ditto 1999; Venkatesan et al. 2000]、準周期駆動される生物振動子 [Ding and Kelso 1994] などが挙げられる。また、SNA は準周期ポテンシャルを伴うシュレディンガー方程式におけるアンダーソン局在とも関係している [Bonds et al. 1985; Ketoja and Satija 1997]。さらに、SNA の秘匿通信への応用も提案されている [Zhou and Chen 1997]。実験的には、準周期駆動される非線形回路 [Yang and Bilimgut 1997; Venkatesan et al. 1999; Thamilmaran et al. 2006] や準周期駆動される磁気弾性リボン [Ditto et al. 1990] などで SNA が観測されている。

本章では、SNA の定義と基本的性質について述べ、一例として GOPY 写像の SNA について概説する。

1.1 Strange Nonchaotic Attractors の定義

本論文における SNA の定義を述べる。過去の文献における SNA の定義は必ずしも統一されておらず、論文の目的によって定義の仕方や厳密さはまちまちである。本論文で採用する定義は文献 [Alsedà and Costa 2009] において提案された定義に基づいている。

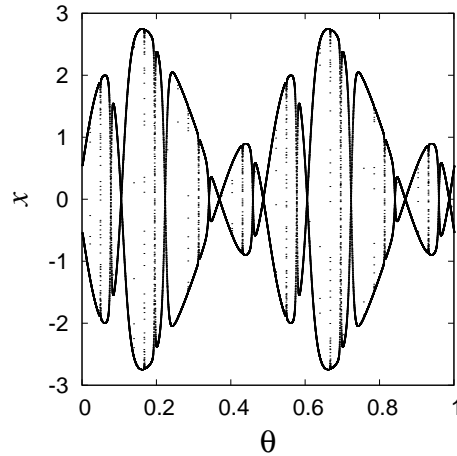


図 1.1: 写像 (1.8) の SNA . パラメータは $\sigma = 1.5$.

滑らかな力学系 $f: M \rightarrow M$ を考える . このとき非カオス的ストレンジアトラクター (SNA) はアトラクター , ストレンジ性 , 非カオス性の三つの属性により定義される :

定義 (アトラクター) 力学系 $f: M \rightarrow M$ の閉不変集合 Λ が次の条件を満たす時 , Milnor の意味のアトラクターである [Milnor 1985]:

(i) 吸引領域 $\rho(\Lambda) = \{x \in M \mid \omega(x) \subset \Lambda\}$ が正の Lebesgue 測度を持つ . ここで $\omega(x)$ は状態点 $x \in M$ の ω 極限集合であり , 次式で定義される

$$\omega(x) := \{y \in M \mid \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{Z}, \lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y\}.$$

(ii) Λ の真部分集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ で , $\mu(\rho(\Lambda')) > 0$ となるものはない . つまり最小のアトラクター (minimal attractor) である .

定義 (ストレンジ性) アトラクターがストレンジとは , 有限個の点または区分的に微分可能な多様体ではないときである .

定義 (非カオス性) 吸引領域 $\rho(\Lambda)$ 内の点から始まるほとんど全ての軌道に対して最大リヤプノフ指数が正でない . すなわち , 初期値に対する指数的鋭敏性を持たない .

Grebogi らが SNA の概念を提案した当時は , まだ Milnor のアトラクターの定義は提案されていなかった . しかし , Grebogi らの定義も ω 極限集合を基礎にしてしており , 両者は非常に近いものである . 上記の定義を採用する . ただし , 本論文では SNA の示す現象に興味があり , SNA の存在の数学的証明には踏み込まない . よって , アトラクターを「たいていの軌道の ω 極限集合となるもの」と考えていて差支えない .

ここで導入したストレンジアトラクターの定義はやや特殊である．アトラクターは，一般に，なんらかの意味でフラクタル性を持つ時，ストレンジアトラクターと呼ばれる [Ott 2002]．本論文においては，アトラクターのタイプを数値計算により分類することが重要となるので，数値的に検証し易い微分不可能性を SNA の定義に用いる．ただし以下で述べるように，幾つかの例においては，SNA がマルチフラクタルアトラクターであることが証明されている [Ding et al. 1989b; Hunt and Ott 2001]．

ストレンジ性と非カオス性は一見矛盾する性質のように思われる．なぜなら，Hénon アトラクターや Lorenz アトラクターなどの代表的ストレンジアトラクターにおいては，相空間の引き伸ばし・折り畳み機構 (スメールの馬蹄) により，ストレンジ性とリヤプノフの意味のカオス性はセットで現れるからである！「ストレンジアトラクター」という用語の発案者の一人である Ruelle においては，ストレンジアトラクターの定義にカオス性を含めている [Eckmann and Ruelle 1985; Ruelle 1989 (p. 24)]．この矛盾を解くには SNA がスメールの馬蹄とは異なる機構で形成されることを理解する必要がある．

1.2 準周期駆動される散逸力学系: SNA のパラダイム

アトラクターを持つ力学系では，時間発展とともに吸引領域に含まれる集合の体積は減少する．このように，相空間の全体または一部の体積が時間発展とともに減少する力学系を散逸力学系と呼ぶ [Ott 2002]．本論文ではアトラクターを持つ系に興味があるので，単に「力学系」と言った場合には「散逸力学系」を意味するものとする．SNA は準周期外力に駆動される散逸力学系において典型的に存在する．時間準周期的に駆動される連続力学系は一般に次のように書ける

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, \phi_1, \phi_2), \\ \dot{\phi}_1 &= \omega_1, \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2.\end{aligned}\tag{1.1}$$

ここで $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ は状態変数であり，速度ベクトル $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \phi_1, \phi_2)$ は角度変数 $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$ に関する 2π 周期関数とする．さらに外力が準周期的であるために，角振動数 ω_1, ω_2 は互いに非通約であるとする．すなわち ω_1/ω_2 は無理数である．式 (1.1) の第 2・第 3 式は $\phi_1 = \omega_1 t + \phi_1(0)$, $\phi_2 = \omega_2 t + \phi_2(0)$ のように解くことができるので，次のようにも書かれる

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega_1 t, \omega_2 t).\tag{1.2}$$

簡単のため $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$ とした．非通約な ω_i を持つ角変数 ϕ_i の数を $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n)$ のように増やすことは可能である．準周期力学系は，これまで物理や工学において精力的に研究されてきた周期駆動力学系の拡張と言える．

式 (1.1) で表されるような流れは，ストロボ写像を構成することで，自由度を一つ減らし考察を容易にできる． ϕ_1 が 2π 変化する周期を $T_1 = 2\pi/\omega_1$ として，離散時刻 $t_n = T_1 n$ ($n \in \mathbb{Z}$) を定義する．式 (1.1) の解の一意性を仮定すれば，状態 $(\mathbf{x}(t_{n+1}), \phi_1(t_{n+1}), \phi_2(t_{n+1}))$ は状態 $(\mathbf{x}(t_n), \phi_1(t_n), \phi_2(t_n))$ によって一意的に定まる．恒等的に $\phi_1(t_n) \pmod{2\pi} = \phi_1(0) \pmod{2\pi}$ であるから，実質的な変数は $(\mathbf{x}(t_n), \phi_2(t_n))$ のみである．ここで，新たな変数 $\theta_n = \phi_2(t_n)/2\pi \pmod{1}$ と無理数パラメータ $\omega = \omega_2/\omega_1$ を取ると， $\theta_{n+1} = \theta_n + \omega \pmod{1}$ を得る．さらに離散変数 $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(t_n)$ を取ると，次のストロボ写像 M が得られる

$$M: \begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \theta_n), \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \omega \pmod{1}. \end{cases} \quad (1.3)$$

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta)$ は θ に関して周期 1 の関数である．2次元のストロボ写像

$$M: \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, \theta_n), \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \omega \pmod{1}. \end{cases} \quad (1.4)$$

は軌道を相平面 (θ, x) に可視化できるので，元の連続系の解析に役立つ．

写像 (1.3) の持つ不変集合の形式について考えよう．次の関数方程式

$$\phi(\theta + \omega) = \mathbf{f}(\phi(\theta), \theta), \quad \forall \theta \in [0, 1)$$

が解 $\phi(\theta)$ を持つならば，関数 $\phi(\theta)$ のグラフ $\Phi = \{(\mathbf{x}, \theta) \in \mathbb{R}^N \times [0, 1) \mid \mathbf{x} = \phi(\theta)\}$ は写像 (1.3) の不変集合である．従って，このグラフの閉包 *Closure* Φ はアトラクターの候補となりうる (閉包を取る理由は ϕ が不連続関数の場合はグラフ Φ が閉集合とは限らないからである)．関数 ϕ が滑らかでないならばグラフの閉包 *Closure* Φ も滑らかでない．関数 ϕ が滑らかで，*Closure* Φ がアトラクターならば，それは準周期トーラスアトラクターと呼ばれる．関数 ϕ が滑らかでなく，*Closure* Φ がアトラクターならば，それはストレンジアトラクターと呼ばれる．また，写像 (1.3) は p 周期の不変集合を持つことがある．それは，関数方程式

$$\phi(\theta + p\omega) = \mathbf{f}^p(\phi(\theta), \theta), \quad \forall \theta \in [0, 1)$$

の異なる p 個の解 $\phi_k(\theta)$ のグラフ $\Phi_k = \{(\mathbf{x}, \theta) \in \mathbb{R}^N \times [0, 1) \mid \mathbf{x} = \phi_k(\theta)\}$ である ($k = 1, 2, \dots, p$)． Φ_k は p 回写像 M^p の不変集合であり，異なる p 個のグラフの和集合 $\{\Phi_k \mid k = 1, 2, \dots, p\}$ は一回写像 M の不変集合である． ϕ_k が滑らかで，*Closure* Φ_k がアトラクターである場合，*Closure* Φ_k は p 周期準周期ト - ラスアトラクター，*Closure* $\{\Phi_k \mid k = 1, 2, \dots, p\}$ は p バンド準周期トーラスアトラクターである．また ϕ_k が滑らかでなく，*Closure* Φ_k がアトラクターである場合，*Closure* Φ_k は p 周期ストレンジアトラクター，*Closure* $\{\Phi_k \mid k = 1, 2, \dots, p\}$ は p バンドストレンジアトラクターである．

ストロボ写像 (1.3) は、次のようなスキュープロダクト写像 (skew-product map) のクラスに含まれる

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \theta_n), \\ \theta_{n+1} = g(\theta_n). \end{cases} \quad (1.5)$$

また、駆動する側 (θ) と応答する側 (\mathbf{x}) に分離できることから自励的写像 (autonomous map) とも呼ばれる。これまでに知られている SNA を典型的に生じる力学系のほとんどが、準周期駆動される連続力学系か、準周期駆動されるスキュープロダクト写像のクラスに含まれる。しかし、本論文の 4 章では非スキュープロダクト写像においても SNA が発生することを示す。

1.3 SNA の基本的性質

前節で導入した準周期駆動されるスキュープロダクト写像 (1.4) において、SNA の持つ基本的な性質を説明する。

1.3.1 非カオス性

写像 (1.4) は少なくとも一つのゼロリヤプノフ指数を持つという特徴がある。 n 回写像 $M^n : x_0 \mapsto x_n$ に対する Jacobi 行列を DM^n とすると、初期接ベクトルを u_0 に対するリヤプノフ指数は次のように定義される

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|DM^n(x_0, \theta_0)u_0\|. \quad (1.6)$$

Jacobi 行列 DM^n は次のように書ける

$$DM^n(x_0, \theta_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_n(x_0, \theta_0)}{\partial x_0} & \frac{\partial x_n(x_0, \theta_0)}{\partial \theta_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

行列 DM^n は固有ベクトル $(1, 0)$ に対して、固有値 $\frac{\partial x_n}{\partial x_0}$ を持つので、 $u_0 = (1, 0)$ に対するリヤプノフ指数 λ_v は単に次のように求められる

$$\lambda_v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\partial x_n}{\partial x_0} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k, \theta_k)|. \quad (1.7)$$

λ_v は垂直リヤプノフ指数とも呼ばれる。また、二次元写像であれば、一般に二つのリヤプノフ指数を持ち得る。もう一方のリヤプノフ指数を $\hat{\lambda}$ とすると、二つのリヤプノフ指数の和 $\lambda_v + \hat{\lambda}$ は次の関係式を満たす

$$\lambda_v + \hat{\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\det DM^n(x_0, \theta_0)|.$$

ここで $\det DM^n(x_0, \theta_0) = \frac{\partial x_n(x_0, \theta_0)}{\partial x_0}$ であるから, $\lambda_v + \hat{\lambda} = \lambda_v$ となる. すなわち

$$\hat{\lambda} \equiv 0$$

であり, ゼロリヤブノフ指数が必ず一つ存在する.

SNA の非カオス性の定義は正のリヤブノフ指数を持たないことであるから, 式 (1.4) に対しては次のように書ける

$$\lambda_v \leq 0.$$

$\lambda_v = 0$ となる SNA も存在し, critical SNA と呼ばれる [Prasad et al. 1999].

非カオス性の条件は SNA において初期値に対する指数的鋭敏性がないことを意味するが, そのことは初期値に対する“非指数的な”鋭敏性までは排除しない. 実際, SNA は初期位相 θ_0 に対する非指数的鋭敏性を持っている. 位相鋭敏性と呼ばれるこの性質はアトラクターのストレンジ性を説明する上で重要である (2章参照). 最近, 数学の論文において SNA が「Devaney の意味での初期値鋭敏性」を持つことが示されている [Glendinning et al. “How chaotic are strange non-chaotic attractors?” 2006]. すなわち, SNA はリヤブノフの意味でのカオスではないが, ある種の弱いカオス性を持ったストレンジアトラクターである.

1.3.2 マルチフラクタル性

マルチフラクタルアトラクターとはマルチフラクタルな自然測度 $\mu(x)$ を持つアトラクターのことである. N 次元空間におけるアトラクターを一辺の長さ ε の N 次元立方体 $C_i(\varepsilon)$ で覆うことを考える. 初期点 x_0 からスタートした軌道が, 時間 $0 \leq t \leq T$ の間に立方体 $C_i(\varepsilon)$ に滞在する総時間を $\eta(C_i(\varepsilon), x_0, T)$ とする. このとき x_0 からスタートした軌道に対する立方体 $C_i(\varepsilon)$ の測度 μ_i は次のように与えられる

$$\mu_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\eta(C_i(\varepsilon), x_0, T)}{T}.$$

吸引領域内のほとんどすべての初期点に対して測度 μ_i が一意に定まるとき, その測度を自然測度 (natural measure) と言う [Ott 2002]. また, 自然測度を与える軌道を典型的な軌道 (typical orbit) という.

アトラクターの一般化次元 D_q は次のように定義される

$$D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln I(q, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad \text{ここで} \quad I(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{\tilde{N}(\varepsilon)} \mu_i^q.$$

$\tilde{N}(\varepsilon)$ はアトラクターを覆い尽くすのに必要な立方体 $C_i(\varepsilon)$ の総数である. 一般化次元 D_q の中でも, 容量次元 (ボックスカウント次元) D_0 と情報次元 D_1 は最も基本的で重要な量である:

$$D_0 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \tilde{N}(\varepsilon)}{\ln \varepsilon},$$

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{\tilde{N}(\varepsilon)} \mu_i \ln \mu_i}{\ln \varepsilon}.$$

2次元写像 (1.4) の SNA は、一般にゼロと負のリヤブノフスペクトラム $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{0, -\}$ で特徴付けられる。Kaplan-Yorke 公式¹に従えば、この SNA のリヤブノフ次元 D_L は 1 である。Kaplan-Yorke 予想によれば情報次元 D_1 はリヤブノフ次元 D_L と一致する [Kaplan and Yorke 1979]

$$D_1 = D_L = 1.$$

一般に、容量次元 D_0 と情報次元 D_1 の間には $D_0 \geq D_1$ の関係が成り立つが、SNA の場合には等号は成立しない

$$D_0 > D_1.$$

これは SNA のマルチフラクタル性を表している。GOPY 写像の SNA に関する具体的な結果を次節で述べる。

1.4 Grebogi-Ott-Pelikan-Yorke(GOPY) 写像

Grebogi, Ott, Pelikan, Yorke らは準周期的に駆動される力学系のストロボ写像のモデルとして、現在では GOPY 写像と呼ばれる次の写像を考察した [Grebogi et al. 1984]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, \theta_n) = 2\sigma \tanh(x_n) \cos(2\pi\theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \omega \pmod{1}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

ここで $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 1)$ である。明確さのため $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ とするが、 $|\sigma| > 1$ において任意の無理数 ω に対して SNA が存在することが、Keller により証明されている [Keller 1996]。図 1.2(b) は $\sigma = 1.5$ における SNA を示している。

GOPY 写像の持ち得る最も単純な不変集合は関数 $\phi(\theta)$ のグラフ $\Phi = \{(x, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 1) \mid x = \phi(\theta)\}$ である。 $\phi(\theta)$ は次の関数方程式を満たす

$$\phi(\theta + \omega) = 2\sigma \tanh(\phi(\theta)) \cos(2\pi\theta), \quad \forall \theta \in [0, 1).$$

$\tanh(\phi)$ は奇関数ゆえ、 $\phi(\theta)$ が解ならば、 $-\phi(\theta)$ も解である。この関数方程式の自明な解は $\phi(\theta) \equiv 0$ である。従って、GOPY 写像は自明な不変集合として一次元トーラス $T = \{x = 0, \theta \in [0, 1)\}$ を持っている。 T 上の軌道 $x_n = 0, \theta_{n+1} = \theta_n + \omega \pmod{1}$ ($n \geq 0$) の垂直リヤブノフ指数 h は次のように与えられる

$$h = \int_0^1 \ln |f_x(0, \theta)| d\theta = \ln \sigma.$$

¹リヤブノフスペクトラム $\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N\}$ が与えられているとする。 $\sum_{i=1}^K \lambda_i \geq 0$ となる最大の整数 K に対してリヤブノフ次元 D_L は次式で与えられる $D_L = K + \frac{1}{|\lambda_{K+1}|} \sum_{i=1}^K \lambda_i$.

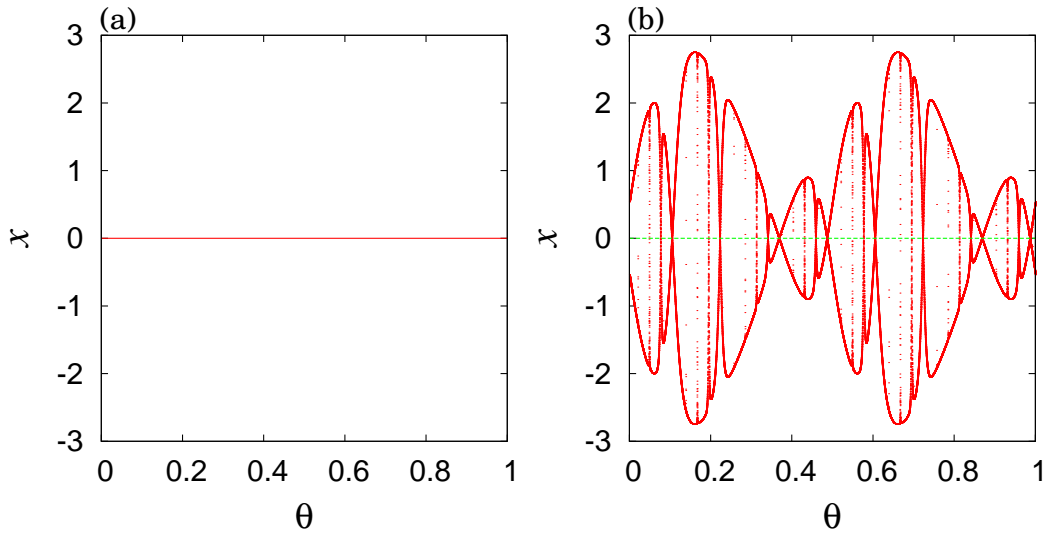


図 1.2: GOPY 写像のアトラクター . (a) 安定トーラス ($|\sigma| < 1$) . (b) SNA ($\sigma = 1.5$) . ダッシュ線は不安定不変トーラス T の位置を示している . SNA における x 方向のリヤプノフ指数は $\lambda \approx -1.0588$.

ここで θ の不変測度が一様な Lebesgue 測度 $\mu(\theta) = d\theta$ になることを用いた . h の符号から不変トーラス T は $|\sigma| < 1$ では安定なアトラクターであるが , $|\sigma| > 1$ では不安定なリペラーであることがわかる²(図 1.2(a) および (b) 参照).

以下では非自明な場合 $|\sigma| > 1$ について考える . Keller は関数 $\phi(\theta)$ が $[0,1)$ 上でほとんど至る所不連続になることを証明している [Keller 1996]. ここではこの事実の直感的説明を行う . 集合 $\{(x, \theta) | \theta = 1/4\}$ および $\{(x, \theta) | \theta = 3/4\}$ 上の点は , 1 ステップ後には全て不変トーラス T 上に移されるので , 集合

$$D = \{\theta = i/4 + \omega n \pmod{1} | n \in \mathbb{N}, i \in \{1, 3\}\}$$

上では $\phi(\theta) = 0$ となる . しかし不変トーラス T はリペラーなので , 集合 $[0, 1) \setminus D$ 上では $\phi(\theta) \neq 0$ となる . 集合 D の点は $[0, 1)$ で稠密に存在するので関数 $\phi(\theta)$ は至る所不連続である . 従って , 閉不変集合 $\Lambda = \text{Closure}\{(x, \theta) | x = \pm\phi(\theta)\}$ はストレンジになる . さらに , Keller は閉不変集合 Λ が吸引領域 $\mathbb{R} \times [0, 1)$ 上のほとんど全ての点の ω 極限集合となることを示している . すなわち , 閉不変集合 Λ はストレンジアトラクターである .

アトラクター Λ に漸近する軌道の非自明なリヤプノフ指数 λ が負であることは解析的に証明できる . 一般に関数 $\tanh(x)$ に対して不等式 $\frac{\tanh(x)}{x} \geq \frac{d \tanh(x)}{dx} > 0$ が成立する (等号は $x = 0, \pm\infty$

² $\sigma = \pm 1$ で起こる分岐は transcritical blowout 分岐と呼ばれ , 時系列はオン-オフ間欠性を呈する [Yalçinkaya and Lai 1996].

においてのみ成立)．これを利用するとリヤブノフ指数 λ に対し次の不等式が成り立つ

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln \left| 2\sigma \frac{d \tanh(x_j)}{dx} \cos(2\pi\theta_j) \right|, \\ &< \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln \left| \frac{x_{j+1}}{x_j} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{x_n}{x_0} \right| = 0.\end{aligned}$$

ここでリペラーでない条件 $x_n \neq 0$ を用いた． $\sigma = 1.5$ の時のリヤブノフ指数 λ は数値計算から $\lambda \approx -1.0588 < 0$ と見積もられている．以上より $|\sigma| > 1$ では SNA が存在することが示された．

アトラクターを閉包で定義しているので，GOPY の SNA はリペラー (不安定不変トーラス) を内部に含む．アトラクターがフラクタル化するのとは，吸引領域内にいずれリペラーに移される測度ゼロの集合が稠密に存在し，それ以外のほとんど全ての点は，リペラーの任意の近傍に移されるだけでリペラーからは反発されるためである．

GOPY 写像の SNA の容量次元は $D_0 = 2$ ，情報次元は $D_1 = 1$ であることが示されている [Ding 1989b, Jäger 2007]．従って，このアトラクターはマルチフラクタルアトラクターでもある．このことは，直感的には，SNA の点をボックスで全て覆うと 2 次元的であるが，軌道が頻繁に訪れるボックスの集合は 1 次元的に存在していることを意味している．

1.5 1 章のまとめ

準周期駆動される力学系が SNA を持つとき，SNA の吸引領域には時間発展とともにいずれリペラー (GOPY 写像の場合，不安定不変トーラス) に移される点が測度ゼロであるが稠密に存在する．すなわち，SNA は内部にリペラーを含むことになる．しかし，吸引領域にあるほとんど全ての点は，リペラーの任意の近傍に移されるだけでリペラーからは反発される．この内部リペラーの吸引・反発効果により相空間の構造は複雑化し，SNA はフラクタル化している．

第2章 位相鋭敏性と局所指数不安定性

あるアトラクターが SNA であることを示すためには非カオス性とストレンジ性を示す必要がある．アトラクターの非カオス性は最大リヤプノフ指数が非正であることで決定できる．さらに非カオスアトラクターが SNA であるためには微分不可能でなければならない．アトラクターが微分可能なトラスか，微分不可能な SNA か数値的に評価する方法が Pikovsky と Feudel により与えられている [Pikovsky and Feudel 1995; Feudel et al. 2006]．この方法はアトラクターのストレンジ性を判定する効率的でロバストな方法として SNA に関する多くの数値的研究で使用されている．以下では先ずこの方法を解説する．そこで導入される位相鋭敏性と呼ばれる量を用いると，非正のリヤプノフ指数を持つ SNA がなぜ微分不可能なアトラクターになり得るのか説明できる．このことは変形 GOPY 写像を用いて数値的に検証される．本章の結果から，SNA はリヤプノフ指数は非正であるが局所指数不安定性を持つアトラクターであることが示される．

2.1 位相鋭敏性

準周期駆動される力学系の二次元ストロボ写像 (1.4) を考えよう．この系では状態 x_n, θ_n に加えられた摂動は次の摂動方程式に従って時間発展する

$$\begin{pmatrix} \delta x_{n+1} \\ \delta \theta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_n, \theta_n) & f_\theta(x_n, \theta_n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta \theta_n \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

また，位相は $\theta_n = \theta_0 + n\omega \pmod{1}$ のように解けるので， n 回写像の摂動方程式は次のように書ける

$$\begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta \theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial x_0} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta \theta_0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

式 (2.2) に含まれる Jacobi 行列の成分は次の関係式を満たす

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_0} = f_x(x_{n-1}, \theta_{n-1}) \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_0} = \prod_{k=0}^{n-1} f_x(x_k, \theta_k), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial x_n}{\partial \theta_0} = f_x(x_{n-1}, \theta_{n-1}) \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_0} + f_\theta(x_{n-1}, \theta_{n-1}). \quad (2.4)$$

$\frac{\partial x_n}{\partial x_0}$ は θ_0 を固定した下での初期条件 x_0 に対する x_n の依存性を決定する因子であり, $n \rightarrow \infty$ での増減率は式 (1.7) により x 方向のリヤプノフ指数 λ_v を与える. 非カオス的アトラクターにおいては一般に $\lambda_v < 0$ であるから, 十分大きな n に対し $\frac{\partial x_n}{\partial x_0}$ は指数的に減少する

$$\left| \frac{\partial x_n}{\partial x_0} \right| \sim e^{\lambda_v n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.5)$$

このとき, 式 (2.2) により与えられる摂動ベクトルの傾き $\delta x_n / \delta \theta_n$ は次式のように与えられる

$$\frac{\delta x_n}{\delta \theta_n} \rightarrow \frac{\partial x_n}{\partial \theta_0} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.6)$$

アトラクターが滑らかな不変曲線トラスである場合, 摂動ベクトルの傾き $\delta x_n / \delta \theta_n$ は $n \rightarrow \infty$ で軌道点 (x_n, θ_n) におけるアトラクターの微分係数 $(\frac{\partial x}{\partial \theta})_{\theta=\theta_n}$ に漸近していく. すなわち, アトラクターの滑らかさは位相微分 $\frac{\partial x_n}{\partial \theta_0}$ の漸近的振る舞いで評価できる. $\frac{\partial \theta_n}{\partial \theta_0} = 1$ より, $\frac{\partial x_n}{\partial \theta_0}$ は添字を省略して $\frac{\partial x_n}{\partial \theta}$ と書くことができる. $\frac{\partial x_n}{\partial \theta}$ は位相鋭敏性 (*phase sensitivity*) と呼ばれている [Pikovsky and Feudel 1995]. 式 (2.4) を再帰的に使用すると次のように書ける

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_n}{\partial \theta} &= f_x(x_{n-1}, \theta_{n-1}) f_x(x_{n-2}, \theta_{n-2}) \cdots \cdots \cdots f_x(x_2, \theta_2) f_x(x_1, \theta_1) f_\theta(x_0, \theta_0) \\ &\quad + f_x(x_{n-1}, \theta_{n-1}) f_x(x_{n-2}, \theta_{n-2}) \cdots \cdots \cdots f_x(x_2, \theta_2) f_\theta(x_1, \theta_1) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + f_x(x_{n-1}, \theta_{n-1}) f_\theta(x_{n-2}, \theta_{n-2}) \\ &\quad + f_\theta(x_{n-1}, \theta_{n-1}). \end{aligned}$$

これを整理して書くと

$$\frac{\partial x_n}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_n}{\partial x_k} f_\theta(x_{k-1}, \theta_{k-1}), \quad (2.7)$$

$$\text{ここで} \quad \frac{\partial x_n}{\partial x_k} = \prod_{j=k}^{n-1} f_x(x_j, \theta_j) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (2.8)$$

ここで因子 $\partial x_n / \partial x_k$ は $k = 0$ で式 (2.3) と等価な量であり, 非カオス的アトラクターでは大きな $(n - k)$ に対し急速にゼロに向かう.

滑らかな不変曲線トラスアトラクターにおいては, 位相鋭敏性 $|\frac{\partial x_n}{\partial \theta}|$ はアトラクターの微係数の最大値 $\max_{0 \leq \theta < 1} |\frac{\partial x}{\partial \theta}|$ で抑えられる. これに対し, SNA においては微係数が存在しないことに伴い, 位相鋭敏性 $\frac{\partial x_n}{\partial \theta}$ が非有界になる. これを確認するためには時系列に沿った位相微分の最大値の変化 $\gamma(n; x_0, \theta_0)$ を見ると良い

$$\gamma(n; x_0, \theta_0) = \max_{1 < j \leq n} \left| \frac{\partial x_j}{\partial \theta} \right|.$$

さらに, $\gamma(n; x_0, \theta_0)$ における初期条件 (x_0, θ_0) の影響を除くため, 次の量を定義する

$$\Gamma(n) = \min_{x_0, \theta_0} \gamma(n; x_0, \theta_0). \quad (2.9)$$

この $\Gamma(n)$ は位相鋭敏関数 (phase sensitivity function) と呼ばれる. 一般に, 位相鋭敏関数 $\Gamma(n)$ は, 滑らかなトーラスアトラクターに対し有界であり, SNA においてはべき的に増大することが報告されている [Pikovsky and Feudel 1995; Feudel et al. 2006]

$$\Gamma(n) \sim n^\nu.$$

べき指数 $\nu \geq 0$ は位相鋭敏指数 (phase sensitivity exponent) と呼ばれる. 本節で述べた位相鋭敏性指数の方法は二次元以上の写像や準周期駆動される連続力学系にも拡張できる. 詳細は, 前者については [Sosnovtseva et al. 1996] を, 後者は [Feudel et al. 2006 (p. 54)] を参照されたい.

2.2 変形 GOPY 写像の位相鋭敏性

GOPY 写像 [式 (1.8)] を単純化した変形 GOPY 写像 [Jäger, 2007] を例に, SNA における位相微分 $\left| \frac{\partial x_n}{\partial \theta} \right|$ の振る舞いの典型例を見てみよう.

$$\text{変形 GOPY 写像: } \begin{cases} x_{n+1} = 2\sigma \tanh(x_n) |\sin(\pi\theta_n)|, \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \omega \pmod{1}. \end{cases} \quad (2.10)$$

$x \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in \mathbb{S}$ とし, パラメータは $\sigma > 0$ および $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ とする. GOPY 写像の場合と同様の議論により, $\sigma < 1$ では $x = 0$ がトーラスアトラクターであり, $\sigma \geq 1$ では SNA が存在することがわかる. 以下では $\sigma \geq 1$ の場合のみ考察する. 図 2.1 に $\sigma = 1.1$ の場合の SNA を示す.

初期条件を $\theta_0 = 0$ とすると $\theta_n = n\omega \pmod{1}$ となる. 黄金比 ω はフィボナッチ数 F_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) を用いて次のように有理数近似できる (付録 B 参照)

$$\left| \omega - \frac{F_{k-1}}{F_k} \right| \approx \frac{1}{\sqrt{5}F_k^2}. \quad (2.11)$$

これを用いると $\sin(\pi F_k \omega) \approx \pi / \sqrt{5} F_k$ の近似が成り立つので, 時刻 $n = F_k + 1$ において x_{F_k+1} は次のような非常に小さな値を取ることがわかる

$$x_{F_k+1} \approx \frac{2\pi\sigma \tanh(x_{F_k})}{\sqrt{5}F_k}.$$

$n = F_k + 1$ 以降しばらくは x の値は十分小さいと考えられるので, この間 x_n のダイナミクスは乗算過程

$$x_{n+1} \approx 2\sigma |\sin(\pi\theta_n)| x_n$$

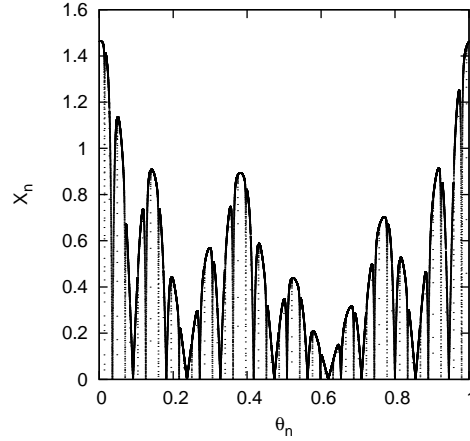


図 2.1: 変形 GOPY 写像の SNA . $\sigma = 1.1$.

で近似できる．この過程は形式的に次のように解ける

$$x_{F_k+1+m} \approx x_{F_k+1} \prod_{j=1}^m [2\sigma |\sin(\pi(F_k + j)\omega)|] \quad (m \geq 1).$$

さらに，両辺の対数を取って近似を行うと次のように書ける¹

$$\begin{aligned} \ln x_{F_k+1+m} &\approx \ln x_{F_k+1} + m \ln 2\sigma + \sum_{j=1}^m \ln |\sin(\pi(F_k + j)\omega)| \quad (m \geq 1), \\ &\approx \ln x_{F_k+1} + m \ln 2\sigma - m \ln 2, \\ &= \ln x_{F_k+1} + m \ln \sigma. \end{aligned}$$

つまり

$$x_{F_k+1+m} \approx x_{F_k+1} e^{m \ln \sigma}. \quad (2.12)$$

以上より，フィボナッチ時間後しばらくの間は，軌道 x_n は指数的に増大することが示される．

$\tanh(x) \approx x$ の近似が有効な範囲を $|x| < \tilde{x} (\approx 0.1)$ とすると， x_n が $x = \tilde{x}$ に到達するまでの時間 \tilde{m} は式 (2.12) から

$$\tilde{m} \approx \ln(\tilde{x}/x_{F_k+1}) / \ln \sigma \approx \ln \left(\frac{\sqrt{5} F_k \tilde{x}}{2\pi\sigma \tanh(x_{F_k})} \right) / \ln \sigma \quad (2.13)$$

と見積もられる．

一方，位相微分 $\frac{\partial x_n}{\partial \theta}$ は次式で与えられる

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial \theta} = 2\sigma(1 - \tanh^2(x_n)) |\sin(\pi\theta_n)| \frac{\partial x_n}{\partial \theta} + 2\pi\sigma \tanh(x_n) \cos(\pi\theta_n).$$

¹部分和の項をオイラー積分 $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$ を利用して近似した．

位相微分 $\frac{\partial x_{F_k}}{\partial \theta}$ が $O(\sqrt{5}F_k)$ のオーダーより十分小さいと仮定すると，第一項は無視できて，位相微分 $\frac{\partial x_{F_k+1}}{\partial \theta}$ は次のように書ける

$$\frac{\partial x_{F_k+1}}{\partial \theta} \approx 2\pi\sigma \tanh(x_{F_k}) < 2\pi\sigma.$$

$x_n < \tilde{x}$ が満たされている間，位相微分 $\frac{\partial x_n}{\partial \theta}$ は次のように時間発展する

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial \theta} \approx 2\sigma |\sin(\pi\theta_n)| \frac{\partial x_n}{\partial \theta} + 2\pi\sigma x_n \cos(\pi\theta_n).$$

第二項が第一項に比べて小さいならば，方程式の大よその挙動は第一項の乗算過程だけでほぼ決定される

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial \theta} \approx 2\sigma |\sin(\pi\theta_n)| \frac{\partial x_n}{\partial \theta}.$$

すなわち，位相微分 $\frac{\partial x_n}{\partial \theta}$ の時間発展と軌道 x_n の時間発展の仕方は同じ乗算仮定に従う．つまり，位相微分も指数的に増大する

$$\left| \frac{\partial x_{F_k+1+m}}{\partial \theta} \right| \approx \left| \frac{\partial x_{F_k+1}}{\partial \theta} \right| e^{m \ln \sigma}. \quad (2.14)$$

フィボナッチ時間後 $n > F_k$ ， x_n が $x = \tilde{x}$ に到達する時間 $n = F_k + 1 + \tilde{m}$ での位相微分は，式 (2.13) を用いると

$$\left| \frac{\partial x_{F_k+1+\tilde{m}}}{\partial \theta} \right| \approx \sqrt{5}\tilde{x}F_k. \quad (2.15)$$

軌道が $x \simeq \tilde{x}$ に到達すると $\tanh'(\tilde{x}) \ll 1$ であるから，位相鋭敏性は速やかに $2\pi\sigma$ 程度の大きさに縮小される． $F_k \sim N$ と置き， $F_k \gg \tilde{m}$ と考えて $F_k + 1 + \tilde{m} \sim N$ としてしまうと式 (2.15) は次のように書ける

$$\left| \frac{\partial x_N}{\partial \theta} \right| \approx \sqrt{5}\tilde{x}N \quad (N \sim F_k, k = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.16)$$

以上の理論予測を数値実験で検証してみる．パラメータは $\sigma = 1.005$ とする．図 2.2 はあるフィボナッチ時間 $n = 121393$ 前後における位相鋭敏性 $\frac{\partial x_n}{\partial \theta_0}$ と時系列 x_n を示している．補助線は位相鋭敏性 $\frac{\partial x_n}{\partial \theta}$ と時系列 x_n が共に一時的な指数的増大を示すことを示している．また図 2.3 は位相鋭敏性の絶対値 $\left| \frac{\partial x_n}{\partial \theta} \right|$ のピークがほぼ式 (2.16) に従うことを示している．図 2.4 は位相鋭敏関数 $\Gamma(n)$ を示す．時間区間 $[10^3, 10^7]$ において最小二乗フィッティングを行った結果，位相鋭敏指数 $\nu = 0.998437 \pm 0.01695$ を得た．

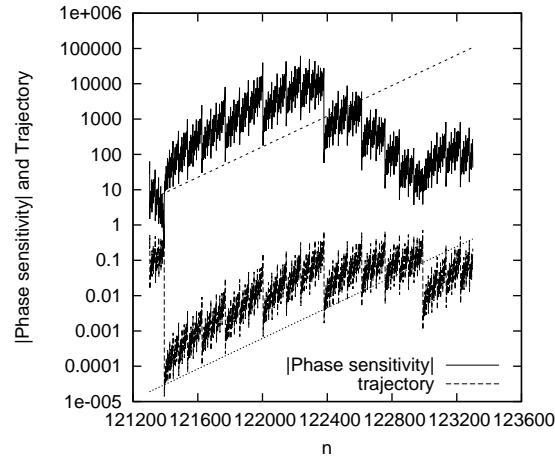


図 2.2: 変形 GOPY 写像のフィボナッチ時間 $n = 121393$ 前後における位相鋭敏性 $\left| \frac{\partial x_n}{\partial \theta} \right|$ (上) と時系列 x_n (下) . $\sigma = 1.005$ の場合. 2つの直線は $\frac{\partial x_n}{\partial \theta}$ と x_n の指数的增长を示すための補助線であり, それぞれ式 (2.14) および式 (2.12) に比例する曲線で与えられている .

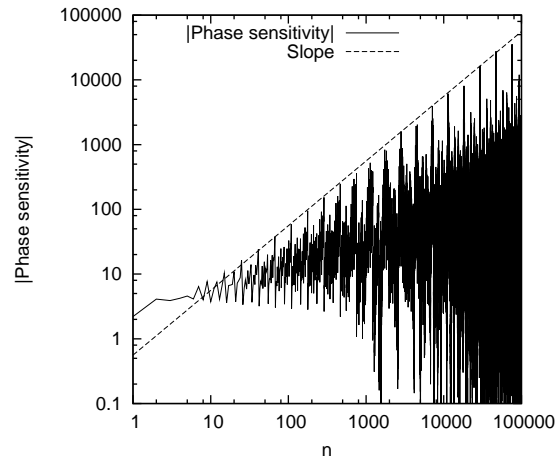


図 2.3: 変形 GOPY 写像における位相鋭敏性 $\left| \frac{\partial x_n}{\partial \theta} \right|$. $\sigma = 1.005$ の場合. 直線はフィボナッチ時間 $N \sim F_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) の位置に現れるピークがおよそ $\sqrt{5} \times 0.25 \times n$ に従って増加していることを示している .

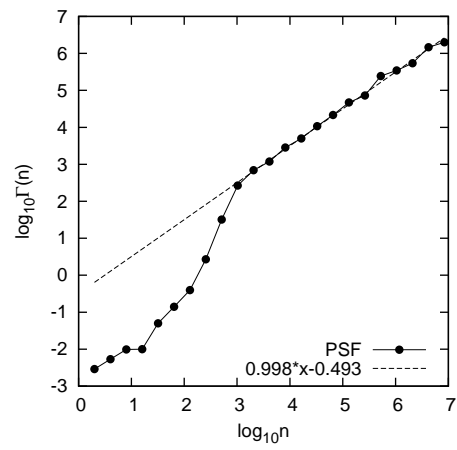


図 2.4: 変形 GOPY 写像における位相鋭敏関数 $\Gamma(n)$. $\sigma = 1.005$ の場合. ダッシュ線は時間区間 $[10^3, 10^7]$ におけるフィッティング直線 $y = 0.998x - 0.493$.

2.3 局所指数不安定性

本章の最後に、位相鋭敏性 $\frac{\partial x_n}{\partial \theta}$ と局所リヤブノフ指数の関係を考えよう。局所リヤブノフ指数 (または有限時間リヤブノフ指数) $\lambda_N(x_i)$ はある時刻 i から始まる長さ N の時系列 $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+N-1}\}$ を用いて次のように定義される

$$\lambda_N(x_i) = \frac{1}{N} \ln \left| \frac{\partial x_{i+N}}{\partial x_i} \right| = \frac{1}{N} \sum_{k=i}^{i+N-1} \ln |f_x(x_k, \theta_k)|. \quad (2.17)$$

式 (2.17) の $N \rightarrow \infty$ の極限はリヤブノフ指数 [式 (1.7)] に収束する。すなわち $\lambda_v = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_N(x_i)$ 。局所リヤブノフ指数の意味するものは時系列の一時的な不安定性であり、アトラクターの局所的な不安定性である。局所リヤブノフ指数 $\lambda_N(x_i)$ を用いると、位相鋭敏性 $\frac{\partial x_n}{\partial \theta}$ は次のように書ける

$$\frac{\partial x_n}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^n \pm \exp[(n-k)\lambda_{n-k}(x_k)] f_\theta(x_{k-1}, \theta_{k-1}). \quad (2.18)$$

この級数が有界であるかどうかは、 $(n-k)$ が十分大きい時の局所リヤブノフ指数 $\lambda_{n-k}(x_k)$ の符号に関わってくる。局所リヤブノフ指数の密度分布 $P(\lambda_N)$ を考えよう

$$P(\lambda_N) = \langle \delta[\lambda_N - \lambda_N(x_i)] \rangle.$$

ここで $\langle \cdot \rangle$ は x_i に関する統計平均を表す。局所リヤブノフ指数 λ_N が正である確率がゼロである場合、言い換えれば確率 1 で $\lambda_N < 0$ ($N \gg 1$) である場合、級数 (2.18) は有界である。級数 (2.18) が任意に大きくなるためには、局所リヤブノフ指数 λ_N が正である確率が十分大きな (ただし有限の) N に対しても有限でなければならない。従って、局所リヤブノフ指数が有限の確率で正であることが SNA の必要条件である。

Pikovsky and Feudel (1995) に倣い、変形 GOPY モデルにおける局所リヤブノフ指数の分布 $P(\lambda_N)$ について大雑把に考察しておこう。今、正の局所リヤブノフ指数に興味があるので、アトラクターの不安定領域 $x \ll \tilde{1}$ に長時間滞在する時系列の部分に注目する。時刻 $n = i$ において非常に小さな $x_i \simeq 0$ からスタートする長さ N の時系列を考えよう。軌道が不安定領域 $x \ll \tilde{1}$ に滞在している時間 T は式 (2.12) から次のように見積もられる

$$T \approx \ln(\tilde{x}/x_i) / \ln \sigma.$$

このとき局所リヤブノフ指数 $\lambda_N(x_i)$ は時刻 $n = i$ から $n = i + T - 1$ までの拡大率の寄与でほぼ決定されると考えると

$$\begin{aligned} \lambda_N(x_i) &\approx \frac{1}{N} \sum_{n=i}^{i+T-1} \ln 2\sigma |\sin \pi n \omega|, \\ &\approx \frac{T}{N} \ln \sigma, \\ &\approx \frac{1}{N} \ln(\tilde{x}/x_i). \end{aligned}$$

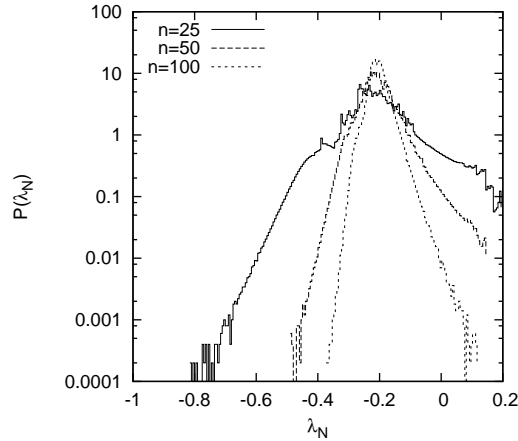


図 2.5: 変形 GOPY 写像における局所リヤプノフ指数 λ_N の密度分布 $P(\lambda_N)$ ($N = 25, 50, 100$). $\sigma = 1.1$.

時系列の長さは N なので, $T \leq N$ 且つ $\lambda_N(x_i) \leq \ln \sigma$ である. ここで θ_{i-1} の密度分布が一様分布であるので, 写像 $x_i = 2\sigma \tanh(x_{i-1}) |\sin(\pi\theta_{i-1})| \simeq 2\sigma \tanh(x_{i-1}) \times \pi\theta_{i-1}$ ($\theta_{i-1} \ll 1$) を通じて, x_i も原点付近 $x \ll 1$ では一様分布していると考えると, 局所リヤプノフ指数 λ_N の正領域の分布型として次式を得る

$$P(\lambda_N) \propto \begin{cases} N \exp(-N\lambda_N) & \text{if } 0 < \lambda_N \leq \ln \sigma, \\ 0 & \text{if } \ln \sigma < \lambda_N. \end{cases} \quad (2.19)$$

図 2.5 は変形 GOPY 写像 ($\sigma = 1.1$) における局所リヤプノフ指数の密度分布 $P(\lambda_N)$ の数値計算の結果を示している. N の値に係らず正の領域 $\lambda_N > 0$ において指数的なテール $P(\lambda_N) \propto \exp(-N\lambda_N)$ があるのが見て取れる.

2.4 2章のまとめ

2章では SNA の特徴である位相鋭敏性と局所指数不安定性について説明した. この章で導入した位相鋭敏性指数はアトラクターの微分不可能性を判別する指標であり, SNA の数値的研究において極めて有用である. 位相鋭敏性指数を理論的に決定することは一般に困難であるが, 本章では変形 GOPY 写像を用いて位相鋭敏性指数が解析的に導出される例を示した. これにより SNA 上の軌道を持つ局所的な指数不安定性が明らかになった. さらに, 位相鋭敏性と局所リヤプノフ指数の関係を議論し, 局所リヤプノフ指数 λ_N が十分大きな N に対しても有限の確率で正であることが SNA の必要条件であることを述べた.

第3章 SNA に起因する異常拡散

準周期駆動される力学系の SNA では、駆動される側の変数 x の安定性は負のリヤプノフ指数で特徴づけられる (1.3 節参照)。すなわち、初期位相 θ_0 を固定した下では、典型的な軌道は初期位置 x_0 の微小変化に対して安定である。さらに、アトラクターがユニークであれば、ベイスン内の異なる初期位置 x_0 から出発した軌道は長時間経過すると同一の軌道に収束する。一方で、2 章で論じたように、SNA 上の軌道は初期位相 θ_0 の値に敏感に依存する (位相鋭敏性)。初期位相 θ_0 がの値が少しでも異なれば同じ初期位相 x_0 から出発した二つの軌道はいずれ分離する。すなわち、SNA のダイナミクスは拡散的性質を持つと言える。このような決定論的力学系における拡散は決定論的拡散と呼ばれる。

SNA の持つ拡散的性質は Feudel らにより報告されている [Feudel et al. 1995]。Feudel らは準周期駆動される円写像を調べ、SNA 領域において平均二乗変位が対数関数的に増加する極めて弱い拡散が生じることを示している。本章では先ず、準周期駆動される円写像に生じる拡散のタイプを写像の非可逆領域まで含めて網羅的に調べる。また、準周期駆動される円写像やニューロンモデルについても同様の解析を行う。そして、これらのモデルで得られた結果を総合し、SNA-カオス遷移を示す力学系における決定論的拡散のシナリオを提示する。さらに、フラクタル時系列解析により劣拡散の原因は非カオス的ストレンジダイナミクスにおける反持続性にあることを示す。

3.1 確率的拡散と決定論的拡散，そして異常拡散

SNA に起因する拡散現象の解析に入る前に、拡散現象の研究について簡単に振り返っておこう。拡散の最も典型的な現象は溶媒中に置かれた微粒子のブラウン運動であろう [米沢 1986]。ブラウン運動の記述には、時空スケールの粗見化のレベルに応じて、確率微分方程式 (またはランジュバン方程式) による理論や離散ランダムウォークによる理論がある [関本 2004]。また、ブラウン粒子の統計集団の振る舞いを記述するにはフォッカー・プランク方程式が用いられる [Gardiner 2004]。理想的なブラウン粒子の時刻 t における位置を確率変数 $B(t)$ で書こう。ブラウン運動の最も基本的な特性は変位 $B(t) - B(0)$ が平均 $\langle B(t) - B(0) \rangle = 0$ 、分散 $\langle [B(t) - B(0)]^2 \rangle = 2Dt$ のガウス分布に従うことである。ここで D は拡散係数である。このように、微粒子という古典力学の対象に確率的記述を持ち込む一つの理由は、溶媒の運動が観測者にとって不確定であるからである。

一方，力学系という運動法則が確定している世界でも決定論的拡散と呼ばれる現象が存在する．決定論的拡散はカオス理論や非平衡統計力学における重要なテーマである [Dorfman 1999]．ブラウン運動のような拡散がランダムな原因によって生じるのに対し，決定論的拡散は力学的不安定性によって生じる．力学的不安定性の良く知られた例はカオス的不安定性である．多くのパラダイムの中で，離散並進対称性を持つ一次元カオス写像 [Dorfman 1999; Geisel and Nierwetberg 1982; Grossmann and Fujisaka 1982; Schell et al. 1982] や二次元のローレンツ気体モデル [Dorfman 1999; Bunimovich and Sinai 1981; Gaspard and Nicolis 1990] は決定論的拡散を含む非平衡統計力学理論の構築に有用な役目を果たしてきた．とりわけ，双曲力学系と呼ばれる強いカオス系においては，拡散係数などの輸送係数とミクロなカオス特性（リヤプノフ指数およびKSエントロピー）の間に基礎的な関係式が導かれている [Dorfman 1999; Gaspard and Nicolis 1990]．しかし，リヤプノフの意味でのカオス性は決定論的拡散の発生に必須ではない．実際，非カオス系 [Dettmann and Cohen 2000; Cecconi et al. 2003] や弱いカオス系 [Geisel and Thomae 1984; Geisel et al. 1985; Korabel et al. 2007; Zaslavsky 2002] においても決定論的拡散が起こることが知られている．Cecconiらは決定論的拡散が起きるための二つの基本的要素について次のように提案している：(1) 局所スケールでの拡散を保証する不安定性メカニズム，(2) 周期軌道を抑制して大域的な拡散を可能とするメカニズム [Cecconi 2003]．次節において我々は準周期駆動される周期ポテンシャル系における決定論的拡散現象を探究する．これらの系はSNAを持つだけでなく，Cecconiの提案した決定論的拡散の基本要素を満足する．

SNAに起因する拡散の興味深い点は，それが異常拡散である点である．異常拡散においては，ダイナミクスに関連の長さに応じて平均二乗変位 $\langle [X(t) - X(0)]^2 \rangle$ は次ベキ則を満たす [Metzler and Klafter 2000]：

$$\langle [X(t) - X(0)]^2 \rangle \sim D_\alpha t^\alpha \quad (t \rightarrow \infty). \quad (3.1)$$

$\alpha = 1$ の場合は通常拡散 (normal diffusion), $\alpha \neq 1$ の場合は異常拡散 (anomalous diffusion), 中でも特に, $1 < \alpha < 2$ を優拡散 (superdiffusion), $0 < \alpha < 1$ を劣拡散 (subdiffusion) と呼ぶ．近年，異常拡散は実験および理論の両面から多くの注目を集めている [Klafter and Sokolov 2005]．

以下で我々は劣拡散の場合に遭遇する．劣拡散の代表的モデルにはいくつかある．一つは待ち時間の期待値が発散する連続時間ランダムウォーク [Continuous-time random walk (CTRW)] とそれに対応するフォッカー・プランク方程式である [Metzler and Klafter 2000]．CTRWは待ち時間とジャンプ幅が確率的に決まるランダムジャンプ過程である．特に劣拡散は，ジャンプの幅が有限のモーメントの確率分布に従っていて，ジャンプ間の待ち時間が裾の広い確率分布 $P(t) \propto t^{-\alpha-1}$ ($0 < \alpha < 1$) に従う場合に導かれる．分布 $P(t)$ では平均待ち時間を含む全てのモーメントが発散している．平均待ち時間の発散するCTRWの特徴は非定常性とエルゴ・ド性の破れである [Bel and Barkai 2005; Lubelski et al. 2008; He et al. 2008]．非定常性によって平均二乗変位 $\langle \sigma_{t_0}^2(t) \rangle = \langle (x_{t_0+t} - x_{t_0})^2 \rangle$ は原点の時間 t_0 に依存する．そしてエルゴ・ド性の破れによって，ア

ンサンプル平均による平均二乗変位 $\langle \sigma^2(t) \rangle$ は時間平均による平均二乗変位

$$\bar{\delta}^2(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-t} \int_0^{T-t} [x(t'+t) - x(t')]^2 dt'$$

と一致しない [Lubelski et al. 2008; He et al. 2008] . すなわち ,

$$\langle \sigma_{t_0}^2(t) \rangle \neq \bar{\delta}^2(t).$$

もう一つのモデルはフラクショナルブラウン運動 [fractional Brownian motion (FBM)] である [Mandelbrot and Van Ness 1968; Biagini et al. 2008]. Hurst 指数 $H \in (0, 1)$ の FBM $\{B_H(t)\}_{t \geq 0}$ は次の共分散を持つ中心化されたガウス過程である [Biagini et al. 2008]

$$\langle B_H(s)B_H(t) \rangle = (1/2)(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

定義より平均二乗変位は $\langle B_H^2(t) \rangle = t^{2H}$ となる. CTRW と違い, FBM の増分は定常かつエルゴ - ド的である [Deng 2009]. FBM における劣拡散は負の相関に起因する :

(i) 単位時間の増分 $dB_H(n) = B_H(n+1) - B_H(n)$ ($n = 0, 1, \dots$) を定義すると, これは自己相関関数 $\rho_H(n) = (1/2)[(n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}]$ を持つ定常ガウス過程である. $0 < H < 1/2$ の時, 相関関数 $\rho_H(n)$ は $n = 0$ を除いて負であり, 次のような遅い収束を示す [Mandelbrot and Van Ness 1968; Biagini et al. 2008]

$$\rho_H(n) \simeq H(2H-1)n^{2H-2} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

(ii) 過去の変位と未来の変位の間相関関数は負の定数である [Mandelbrot and Van Ness 1968]

$$\frac{\langle -B_H(-t)B_H(t) \rangle}{\langle B_H^2(t) \rangle} = 2^{2H-1} - 1 < 0. \quad (3.3)$$

式 (3.3) と定常性から平均二乗変位 $\langle B_H^2(t) \rangle = T^{2H}$ が導かれる.

3.2 準周期駆動される円写像 (トレンドのない場合)

トーラス \mathbb{S}^1 上の準周期駆動される円写像 \tilde{M} [Ding et al. 1989a; Feudel et al. 1995; Feudel et al. 1997; Stark et al. 2002; Jäger 2009; Lai 1996] は次のように与えられる

$$\tilde{M} : \begin{cases} x_{n+1} = x_n + b + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x_n) + \varepsilon \sin(2\pi \theta_n) \pmod{1}, \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \omega \pmod{1}. \end{cases}$$

a, b および ε はパラメータで, ω は無理数である. 写像 \tilde{M} はシリンダー $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ 上の持ち上げ写像 M を伴う

$$M : \begin{cases} x_{n+1} = x_n + b + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x_n) + \varepsilon \sin(2\pi \theta_n), \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \omega \pmod{1}. \end{cases}$$

写像 M の非有界運動のタイプを写像 \tilde{M} の ω 極限集合に基づいて特徴づける．その ω 極限集合は非自明なリヤプノフ指数 $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \ln |\partial x_n / \partial x_0|$ と位相鋭敏性指数 ν を用いて特徴付けられる (2章参照)．写像 \tilde{M} の ω 極限集合は次のように分類できる：滑らかな不変曲線上の準周期アトラクター ($\lambda < 0, \nu = 0$)，2 トーラス \mathbb{S}^2 ($\lambda = 0, \nu = 0$)，SNA ($\lambda < 0, \nu > 0$)，およびカオスアトラクター ($\lambda > 0$) [Ding et al. 1989a; Feudel et al. 1995; Feudel et al. 1997]．

本節ではバイアスのない場合 ($b = 0$) を考察する．バイアスのある場合 ($b \neq 0$) は次節 3.3 で考察する．パラメータを $\varepsilon = 2.5$ および $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ に固定し， $a > 0$ を制御パラメータとする．図 3.1(a) はリヤプノフ指数 λ の a 依存性を示している． $a = a_s (\approx 0.85023)$ において，滑らかな不変曲線上の準周期アトラクターは準周期リペラー (不安定不変トーラス) と衝突し SNA へと遷移する [Feudel et al. 1995; Feudel et al. 1997]．これと同時に，持ち上げ写像 M の軌道 x_n は有界な軌道から非有界な軌道へと変わる．図 3.1(b) は $a = 1.7$ における SNA を示している．SNA 領域では位相鋭敏性により，異なる初期位相 θ_0 を持つ軌道集団の変位に拡散が起こる．図 3.1(c) は微小に異なる初期位相 $\theta_0 = 0$ および 10^{-4} を持つ二つの時系列 x_n の分離を示している．さらに，SNA は $a = a_c (\approx 1.8287)$ でカオスアトラクターへと変化する．

3.2.1 拡散のタイプ

写像 M の軌道 x_n の拡散的運動を分析しよう．パラメータ $b = 0$ では，写像 M は変換 $(x, \theta) \rightarrow (-x, \theta + 1/2)$ に対して対称性を持つ．従って，初期密度 $P(x, \theta) = P(-x, \theta + 1/2 \pmod{1})$ を持つ軌道集団において平均のトレンドは生じない．すなわち，そのような軌道集団におけるアンサンブル平均を $\langle \cdot \rangle$ と書くと $\langle x_n \rangle = 0$ である．ここでは，平均二乗変位 (MSD) $\langle \sigma^2(n) \rangle = \langle (x_n - x_0)^2 \rangle$ を，領域 $-0.5 \leq x \leq 0.5, 0 \leq \theta < 1$ に一様に分布した初期値からスタートした 5000 本の軌道に対して計算する．また，各軌道の最初の 5000 ステップは過渡状態として無視し，5001 番目の状態を (x_0, θ_0) と表記する．

対数的拡散．SNA の発生点近傍のパラメータ領域 ($a_s < a \lesssim 1$) では，平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ は振動的に時間発展する (図 3.2)．その最大値は対数的に増大する．図 3.2 における上側の点線 $0.304 \ln n + 2.97$ は平均二乗変位が最大値を取るデータ $\{(n, \langle \sigma^2(n) \rangle) | \langle \sigma^2(j) \rangle < \langle \sigma^2(n) \rangle, 0 \leq \forall j < n\}$ (点) に対して対数関数による最小二乗フィッティングを行った結果である．また，下側の包絡線は平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ のフィボナッチ時間 $n = F_k$ の値をつないだものとして与えられる．フィボナッチ時間は漸化式 $F_1 = 1, F_2 = 2$ 及び $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ で定義される．対数的拡散においては，下側の包絡線が 1 程度の小さい値を保つという特徴を持つ．

対数的拡散は無理数回転に対する有界変動関数の Birkhoff 和 y_n に特徴的なタイプの拡散である

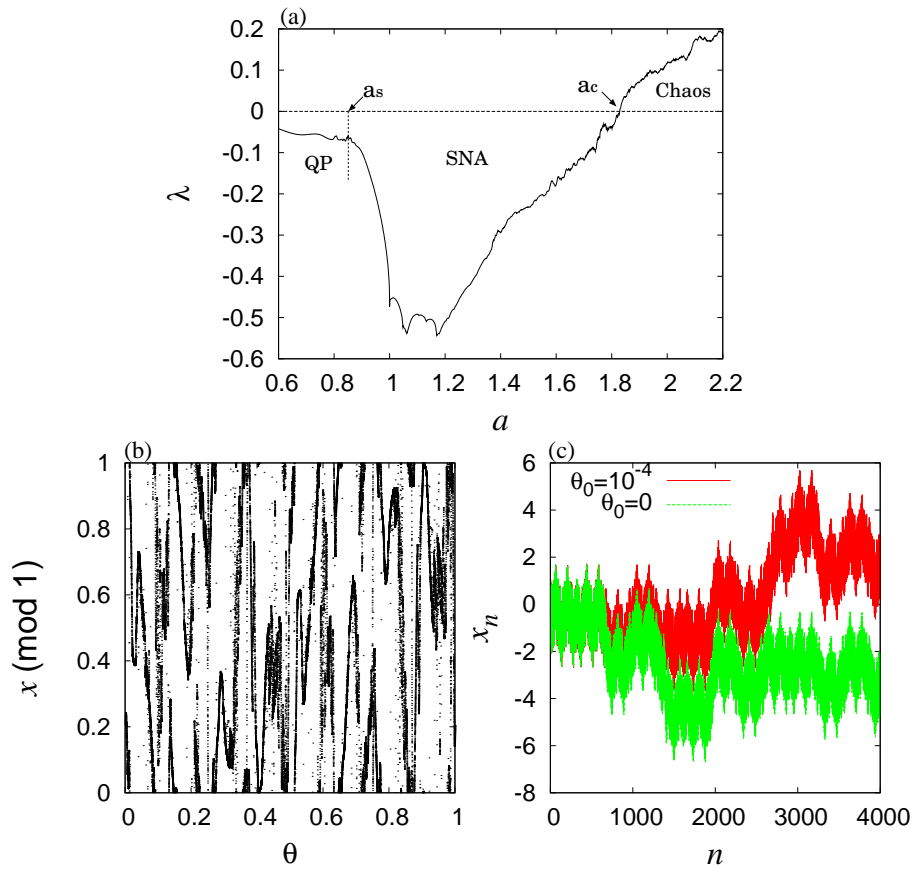


図 3.1: (a) リヤプノフ指数 λ の a 依存性. a が増加すると, 準周期アトラクターは $a = a_s (\approx 0.85023)$ で SNA へと遷移する. そして SNA は $a = a_c (\approx 1.8287)$ でカオスアトラクターへと変化する. (b) $a = 1.7$ における SNA. (c) 僅かに異なる初期位相 $\theta_0 = 0$ (緑) および 10^{-4} (赤) を持つ軌道の分離. いずれも初期位置は $x_0 = 0$, パラメータは $a = 1.7$ である.

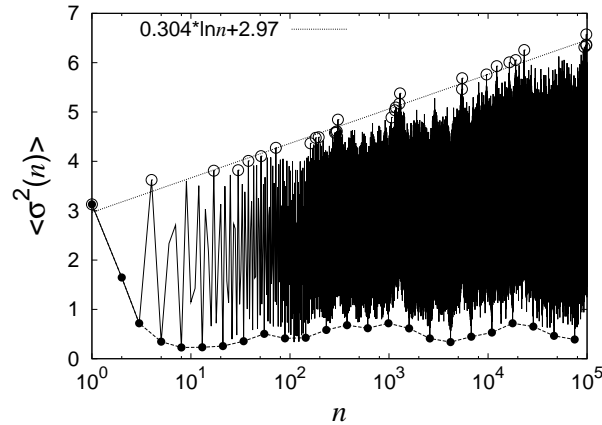


図 3.2: $a = 0.95$ における平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ の時間発展 (実線). 上側の点線 $0.304 \ln n + 2.97$ は平均二乗変位の最大値 $\{(n, \langle \sigma^2(n) \rangle) | \langle \sigma^2(j) \rangle < \langle \sigma^2(n) \rangle, 0 \leq \forall j < n\}$ (点) に対して最小二乗フィッティングを行った結果である. 下側の包絡線は $\langle \sigma^2(n) \rangle$ のフィボナッチ時間 $n = F_k$ ($k \geq 1$) の値 (点) をつないだもの.

[Godrèche et al. 1987; Isola 2006]

$$y_n = y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} g(\theta_0 + j\omega).$$

ここで $g(\theta)$ は $\int_0^1 g(\theta) d\theta = 0$ を満たす解析的でない有界変動関数, ω はコンスタントタイプの無理数である¹. ω の有理数近似を p/q と書くと, Birkhoff 和 y_n に対して Denjoy-Koksma の不等式が成立する [Herman 1979 (p. 73); Cornfeld et al. 1982 (p. 84)]

$$|y_q - y_0| = \left| \sum_{j=0}^{q-1} g(\theta_0 + j\omega) \right| \leq \text{Var}(g).$$

ω が黄金比 $(\sqrt{5} - 1)/2$ の時は, 有理数近似は連続するフィボナッチ数の比 F_{k-1}/F_k で与えられるので $|y_{F_k} - y_0| \leq \text{Var}(g)$ となる. 従って, フィボナッチ時間 $n = F_k$ における平均二乗変位は一定値で抑えられる

$$\langle (y_{F_k} - y_0)^2 \rangle \leq \text{Var}(g)^2.$$

図 3.3 は有界変動関数

$$g(\theta) = \begin{cases} 1 & (0 \leq \theta < 1/2), \\ -1 & (1/2 \leq \theta < 1), \end{cases} \quad (3.4)$$

¹実数 ω がコンスタントタイプ (constant type) とは ω の連分数展開における部分商 q_n に対して q_{n+1}/q_n が有界であることを言う.

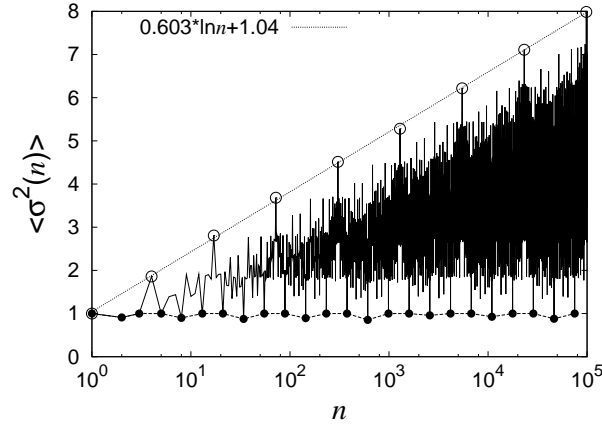


図 3.3: 有界変動関数 g の Birkhoff 和 y_n に対する平均二乗変位 $\langle (y_n - y_0)^2 \rangle$ の時間発展 (実線). 上側の点線 $0.603 \ln n + 1.04$ は顕著な最大値 (点) に対して最小二乗フィッティングを行った結果である. 下側の包絡線は $\langle \sigma^2(n) \rangle$ のフィボナッチ時間 $n = F_k$ ($k \geq 1$) の値 (点) をつないだもの.

に対する Birkhoff 和 y_n の平均二乗変位 $\langle (y_n - y_0)^2 \rangle$ の振る舞いを示している (等価な表現として $g(\theta) = \text{sgn}(\sin(2\pi\theta))$ と書くこともできる). 初期条件の設定は写像 M の場合と同様である. 最大値が対数関数的に増大すること, フィボナッチ時間において平均二乗変位が小さな値を保つことが見て取れる.

議論を写像 M の拡散現象に戻そう. 写像 \tilde{M} の SNA が関数 $x = \varphi(\theta) \pmod{1}$ のグラフで表されるような不変集合であると仮定しよう. すると変位 x_n は次の Birkhoff 和で表される

$$x_n = x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{a}{2\pi} \sin(2\pi\varphi(\theta_0 + j\omega)) + \varepsilon \sin(2\pi(\theta_0 + j\omega)) \right). \quad (3.5)$$

SNA の定義から関数 $\varphi(\theta)$ は θ に関する非有界変動関数であるので, 変位 x_n の振る舞いと Birkhoff 和 y_n の振る舞いとの間にアナロジーは成り立たない. それにも係らず, 両者が類似の対数的拡散を示すというシミュレーション結果は興味深い.

中間の場合. 対数的拡散と以下で説明する劣拡散の間の領域 ($1 \lesssim a \lesssim 1.65$) では, 拡散のタイプはは両者の中間的タイプに見える (図 3.4(a) の $a = 1.6$ に対する平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ の振る舞いを見よ). しかし, 本論文の数値計算量では決定的な結論は出せない.

劣拡散. カオス遷移点近傍の SNA 領域 ($1.65 \lesssim a < a_c$) では, 平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ は図 3.4(a) にあるようにべき的に増加する. しかしながら, パラメータ a が転移点 a_c から離れるほど厳密なべき則からはズレがあるように見える. この平均二乗変位を次に定義される局所スケーリング指数 $H(n)$ を用いて評価しよう

$$\langle \sigma^2(2n) \rangle = 2^{2H(n)} \langle \sigma^2(n) \rangle. \quad (3.6)$$

この特徴付けは FBM の平均二乗変位の振る舞いと比較する際に便利である．なぜなら，FBM の局所スケーリング指数は Hurst 指数 H に一致するからである．次に，時間区間 $[2^m, 2^M]$ における平均スケーリング指数 $\bar{H}_{m,M}$ を次のように定義する

$$\bar{H}_{m,M} = \frac{1}{M-m} \sum_{k=m}^{M-1} H(2^k). \quad (3.7)$$

従って， $\langle \sigma^2(2^M) \rangle = 2^{2\bar{H}_{m,M}(M-m)} \langle \sigma^2(2^m) \rangle$ である．さらに $[2^m, 2^M]$ において最大局所スケーリング指数 $H_{m,M}^{\max}$ と最小局所スケーリング指数 $H_{m,M}^{\min}$ を次のように定義する

$$H_{m,M}^{\max} = \max_{m \leq k < M} H(2^k), \quad H_{m,M}^{\min} = \min_{m \leq k < M} H(2^k).$$

もし，平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ が近似的にべき則で増加するなら，平均スケーリング指数 $\bar{H}_{m,M}$ の添え字は $M \gg m$ において無視できる

$$\bar{H}_{m,M} \simeq \bar{H}.$$

よってこの時，平均二乗変位は次のように書ける

$$\langle \sigma^2(n) \rangle \sim n^{2\bar{H}} \quad (n \rightarrow \infty).$$

図 3.4(b) は平均スケーリング指数 $\bar{H} (\simeq \bar{H}_{20,30})$ を a の関数として描いたものである．縦のバーは局所スケーリング指数の変域 $[H_{20,30}^{\min}, H_{20,30}^{\max}]$ を表している．この結果は $1.65 \lesssim a < a_c$ における拡散のタイプが劣拡散 ($0 < \bar{H} < 1/2$) であることを示している．

通常拡散．カオス領域 ($a > a_c$) においては，通常拡散 ($\bar{H} = 1/2$) が観測される (図 3.4(a), 3.4(b) を見よ)．劣拡散から通常拡散のクロスオーバーは丁度 $a = a_c$ において生じていると考えられる．この帰結は， $a = a_c$ における平均スケーリング指数 $\bar{H}_{m,M}$ が， m と $(M - m)$ 増加させると $1/2$ に接近することに基づいている．

この節で得られた準周期駆動される円写像における決定論的拡散のシナリオをまとめておこう：

有界運動 (準周期アトラクター領域)

→ 対数的拡散から劣拡散へのゆっくりした遷移 (SNA 領域)

→ 通常拡散 (カオスアトラクター領域)．

また写像の (非) 可逆性と拡散のタイプに直接的な因果関係がないことを注意しておく． $\varepsilon = 2.5$ の場合には，対数的拡散と中間的拡散状態の間の遷移は写像の可逆領域と非可逆領域の境界 $a = 1$ 付近で観測されたが，両者は一般に一致しない．例として $\varepsilon = 1.0$ の場合には，SNA は写像の非可逆領域の $a = a_s (\approx 1.4922)$ にて発生し，その近傍において対数的拡散が観測される．

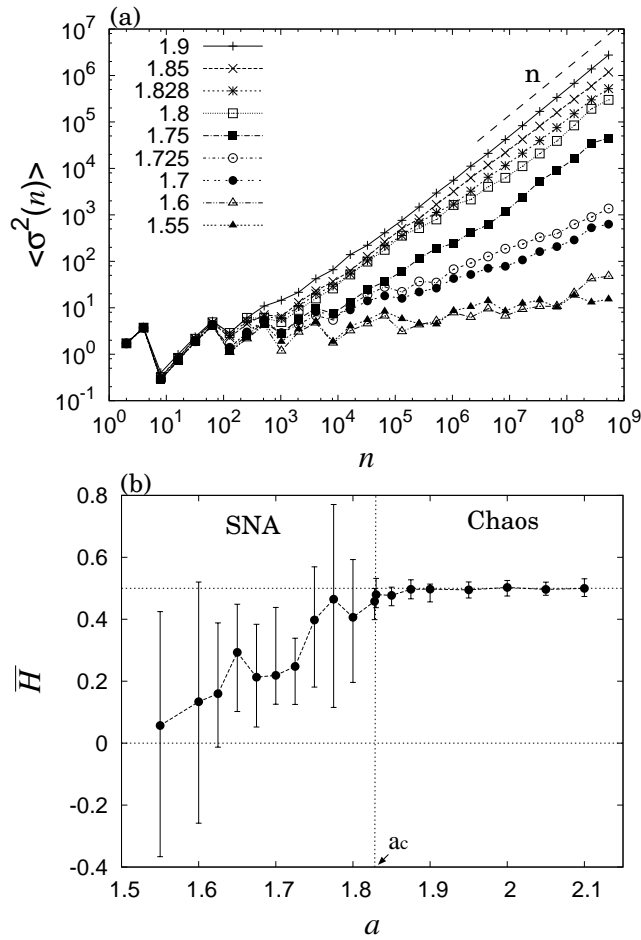


図 3.4: (a) $a_c \approx 1.8287$ 前後の異なる a に対する平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ の時間発展. データは時刻 $n = 2^k$ ($k = 1, 2, \dots, 29$) においてプロットされている. (b) 平均スケーリング指数 \bar{H} の a 依存性. それぞれの指数 \bar{H} ($\approx \bar{H}_{20,30}$) は時間区間 $[2^{20}, 2^{30}]$ ($\approx [10^6, 10^9]$) における平均二乗変位から式 (3.7) を用いて算出されている. 縦バーは変域 $[H_{20,30}^{\min}, H_{20,30}^{\max}]$ を表している.

3.2.2 定常性とエルゴ - ド性

劣拡散の原因を議論する前に変位 $x_n - x_0$ に関する定常性とエルゴ - ド性について述べておく.

各ステップにおける速度を $v_n = x_{n+1} - x_n = (a/2\pi) \sin(2\pi x_n) + \varepsilon \sin(2\pi\theta_n)$ と定義すると, 変位は次のように表される $x_n - x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$. ここで $\{v_n\}_{n \geq 0}$ は広義の定常過程であると仮定する. すなわち

$$\langle v_{n_0} \rangle = \text{const} \quad \text{and} \quad \langle v_{n_0} v_{n_0+n} \rangle = \langle v_0 v_n \rangle \quad \text{for } \forall n_0, n \geq 0. \quad (3.8)$$

第1式は対称性から常に満たされる. 加えて, 次のようなエルゴ - ド性を仮定する

$$\overline{v_{n'}} = \langle v_n \rangle \quad \text{and} \quad \overline{v_{n'} v_{n'+n}} = \langle v_0 v_n \rangle \quad \text{for } \forall n \geq 0. \quad (3.9)$$

ここで $\overline{v_{n'}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} v_{n'}$ および $\overline{v_{n'} v_{n'+n}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-n} \sum_{n'=0}^{N-n-1} v_{n'+n} v_{n'}$ である. 式 (3.8) と (3.9) の確からしさは数値計算により確認できる. 図 3.5(a) は, アンサンブル平均により求められた正規化された自己相関関数 (ACFs) $\langle v_{n_0} v_{n_0+n} \rangle / \langle v_{n_0}^2 \rangle$ を異なる n_0 についてプロットしたものと, 長時間平均により求められた正規化された自己相関関数 $\overline{v_{n'} v_{n'+n}} / \overline{v_{n'}^2}$ をプロットしたものが, 全て一致していることを示している.

式 (3.8) が成立すれば, 平均二乗変位の定常性が示される

$$\langle \sigma_{n_0}^2(n) \rangle = \langle \sigma^2(n) \rangle. \quad (3.10)$$

ここで $\langle \sigma_{n_0}^2(n) \rangle = \langle (x_{n_0+n} - x_{n_0})^2 \rangle$ である. さらに, 式 (3.9) が成立すれば, 平均二乗変位のエルゴ - ド性も示すことができる

$$\langle \sigma^2(n) \rangle = \overline{\delta^2(n)}. \quad (3.11)$$

ここで $\overline{\delta^2(n)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-n-1} \sum_{n'=0}^{N-n-1} (x_{n'+n} - x_{n'})^2$ である. 図 3.5(c) は式 (3.10) と (3.11) が実際に成立していることを示している.

式 (3.8) の定常性を用いると, 平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ は次のように表すことができる

$$\langle \sigma^2(n) \rangle = \langle v_0^2 \rangle n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \langle v_0 v_k \rangle. \quad (3.12)$$

自己相関関数 $\langle v_0 v_k \rangle$ が十分早く減衰するならば, 通常拡散 $\langle \sigma^2(n) \rangle \sim Dn$ ($\overline{H} = 1/2$) が得られる. ここで拡散定数 D はグリーン・久保公式 $D = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle v_0 v_k \rangle / 2$ で与えられる [Dorfman 1999], 一方, 自己相関関数が $\langle v_0 v_k \rangle \sim k^{-\alpha}$ ($0 < \alpha < 2$) のようにべき的にゆっくり減衰すれば, 異常拡散 $\langle \sigma^2(n) \rangle \sim n^{2\overline{H}}$ ($\overline{H} = 1 - \alpha/2$) が発生する [Mannella et al. 1994]. FBM のは後者の場合である. しかし写像 M では, 自己相関 $\langle v_0 v_n \rangle$ は図 3.5(a) のように振動して減衰しない. このことは, 式 (3.12) からスケーリング則 $\langle \sigma^2(n) \rangle \sim n^{2\overline{H}}$ を導くことを困難にしている. 速度から次のように準周期的成分を差し引いても, この困難は変わらない

$$z_n = v_n - \varepsilon \sin(2\pi\theta_n) = (a/2\pi) \sin(2\pi x_n).$$

なぜなら自己相関 $\langle z_0 z_n \rangle$ も非減衰振動を示すからである (図 3.5(b)). このことはカオス領域でも同様である.

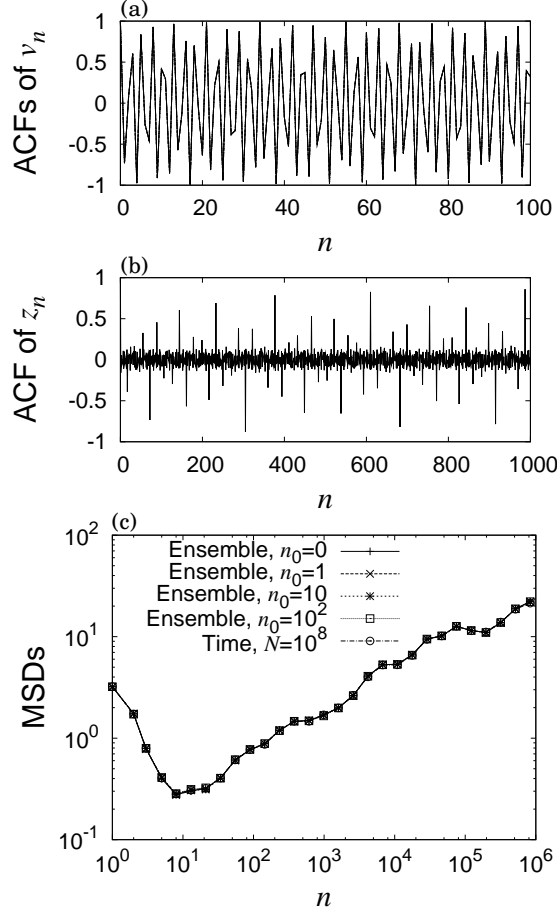


図 3.5: (a) アンサンブル平均により求められた規格化された自己相関関数 (ACFs) $\langle v_{n_0} v_{n_0+n} \rangle / \langle v_{n_0}^2 \rangle$ ($n_0 = 0, 1, 10, 100$) および長時間平均により求められた規格化された自己相関関数 $\overline{v_{n'} v_{n'+n}} / \overline{v_{n'}^2}$. (b) z_n に対する規格化された自己相関関数 $\langle z_0 z_n \rangle / \langle z_0^2 \rangle$. (c) アンサンブル平均された平均二乗変位 $\langle \sigma_{n_0}^2(n) \rangle$ ($n_0 = 0, 1, 10, 100$) および長時間平均された平均二乗変位 $\overline{\delta^2(n)}$. すべての図において $a = 1.7$ とし, 長時間平均には長さ $N = 10^8$ の時系列を用いた.

3.2.3 過去の変位と未来の変位の間の相関

劣拡散の原因を明らかにするため, 写像 M における過去の変位と未来の変位の相関関数 $C(n)$ を考える

$$C(n) = \frac{\langle (x_0 - x_{-n})(x_n - x_0) \rangle}{\langle (x_n - x_0)^2 \rangle}. \quad (3.13)$$

式 (3.10) の定常性を使うと，式 (3.13) は $C(n) = \langle \sigma^2(2n) \rangle / 2 \langle \sigma^2(n) \rangle - 1$ のように書くことができる．さらに，式 (3.6) を使うと $C(n) = 2^{2H(n)-1} - 1$ が得られる．この式を書き換えると

$$H(n) = \frac{1 + \log_2[1 + C(n)]}{2}. \quad (3.14)$$

式 (3.14) により $H(n)$ を求める方法は，フラクタル時系列解析において局所二次モーメント法 (local second moment method) として知られている [Hastings and Sugihara 1993]. 上式において $H(n)$ の値を次のように分類できる:

$$\begin{cases} 1/2 < H(n) < 1 & \text{for } 0 < C(n) < 1, \\ H(n) = 1/2 & \text{for } C(n) = 0, \\ 0 < H(n) < 1/2 & \text{for } -1/2 < C(n) < 0, \\ H(n) \leq 0 & \text{for } -1 < C(n) \leq -1/2. \end{cases}$$

$0 < C(n) < 1$ の場合，過去の n 単位時間における変位の増加 (減少) は，平均として未来の n 単位時間における変位の増加 (減少) を意味する．この性質は持続性 (*persistence*) と呼ばれ， $1/2 < H(n) < 1$ で特徴付けられる局所的な優拡散を引き起こす．一方， $-1/2 < C(n) < 0$ の場合には，過去の n 単位時間における変位の増加 (減少) は，平均的に未来の n 単位時間における変位の減少 (増加) を引き起こす．この性質は反持続性 (*antipersistence*) と呼ばれ， $0 < H(n) < 1/2$ で特徴付けられる局所的な劣拡散を引き起こす．FBM の場合には，局所スケール指数 $H(t)$ と相関関数 $C(t)$ はそれぞれ定数 H と $C(= 2^{2H-1} - 1)$ で，持続性 $0 < C < 1$ は一様な優拡散 ($1/2 < H < 1$) を引き起こし，半持続性 $-1/2 < C < 0$ は一様な劣拡散 $0 < H < 1/2$ を引き起こす．

図 3.6(a) は $a = 1.7$ (SNA) における相関関数 $C(n)$ と局所スケール指数 $H(n)$ を示している．図 3.6(b) は $a = 2.0$ (chaos) における $C(n)$ と $H(n)$ を示している．これらの結果は $0 < H(n) < 1/2$ で特徴付けられる近似的な劣拡散が，大きな n における反持続性 $-1/2 < C(n) < 0$ によることを示している．また， $H(n) \simeq 1/2$ で特徴付けられる通常拡散は，大きな n における相関の喪失 $C(n) \simeq 0$ によることが分かる．

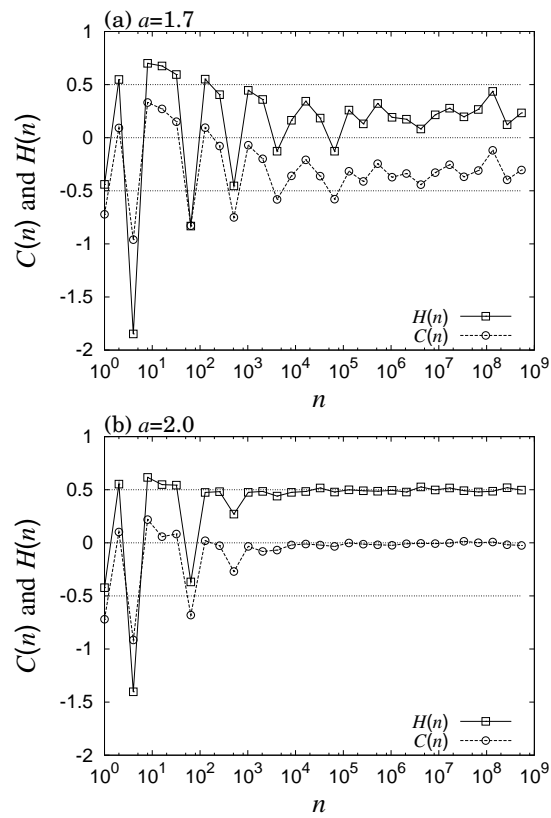


図 3.6: 過去の変位と未来の変位の間的相关 $C(n)$ (丸) と局所スケール指数 $H(n)$ (四角). (a) $a = 1.7$ (SNA) および (b) $a = 2.0$ (chaos). データ点は時刻 $n = 2^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 29$) においてプロットされている.

3.3 準周期駆動される円写像 (トレンドのある場合)

前節ではトレンドのない場合 ($b = 0$) の写像 M の拡散現象を探究した．本節では，トレンドのある場合にも前節と同様な拡散現象のシナリオが成り立つか検証する．新たに $b = 0.01$ と設定し，その他のパラメータは前節と同様とする．

図 3.7(a) は $0.8 < a < 2.0$ におけるリヤプノフ指数 λ の a 依存性を表している． a を増加させると，滑らかな曲線上の準周期アトラクターは $a = a_s (\approx 0.9829)$ で SNA へと遷移し，さらに SNA は $a = a_c (\approx 1.807)$ においてカオスアトラクターへと遷移する． $b \neq 0$ では，回転数 $W = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_0)/n$ はゼロとは限らなくなる．エルゴ - ド性を仮定すれば平均変位 $\langle x_n - x_0 \rangle$ は回転数 W に比例する

$$\langle x_n - x_0 \rangle \simeq Wn.$$

図 3.7(b) は $0.8 < a < 2.0$ における回転数 W の a 依存性を描いたものである． $0.8 < a < a_s$ では，システムは位相ロック状態にあり，回転数 W は次の一定値で与えられる [Ding et al. 1989a; Feudel et al. 1997]

$$W = \frac{k + l\omega}{m} \quad (k, l \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}).$$

一方， $a_s < a < 2.0$ の区間では位相ロックが破れている．すなわち

$$W \neq \frac{k + l\omega}{m} \quad (\forall k, l \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}).$$

位相ロック状態にある準周期アトラクターの場合，次の量 $(x_n - x_0 - Wn)$ は有界である [Stark et al. 2002]. 従ってこのとき拡散は生じない．しかし，位相ロック状態を破った SNA やカオスアトラクターの場合には， $(x_n - x_0 - Wn)$ は非有界になり軌道の拡散が生じる [Stark et al. 2002]. この拡散を特徴づけるために平均変位 $\langle x_n - x_0 \rangle$ を差し引いた平均二乗変位を定義する

$$\langle \sigma^2(n) \rangle = \langle (x_n - x_0)^2 \rangle - \langle x_n - x_0 \rangle^2.$$

対数的拡散. 準周期アトラクターから SNA への遷移点近傍 ($a_s < a \lesssim 1$) では対数的拡散が生じる．図 3.8 は $a = 1.0$ (SNA) における平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ の時間発展を示している．平均二乗変位の最大値が対数的に増加し，下側の包絡線がフィボナッチ時間 $n = F_k$ ($k \geq 1$) の平均二乗変位で与えられるのが見て取れる．この結果は定性的には $b = 0$ の場合と同じである (図 3.2 参照)．

劣拡散の発生と通常拡散への遷移. 図 3.9(a) は，平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ の時間発展を異なる a に対してプロットしたものである． $\langle \sigma^2(n) \rangle$ は $a = a_c$ 前後でベキ的に増加しているが， $a = a_c$ から離れるとゆらぎが顕著になる．ここでも局所スケーリング指数 $H(n)$ を式 (3.6) により定義しよう．図 3.9(b) は平均のスケーリング指数 $\bar{H} (\simeq \bar{H}_{20,30})$ とパラメータ a の関係を示している．縦のバーは局所スケーリング指数の変域 $[H_{20,30}^{\min}, H_{20,30}^{\max}]$ である．この結果は $b \neq 0$ の場合にも，SNA-カオ

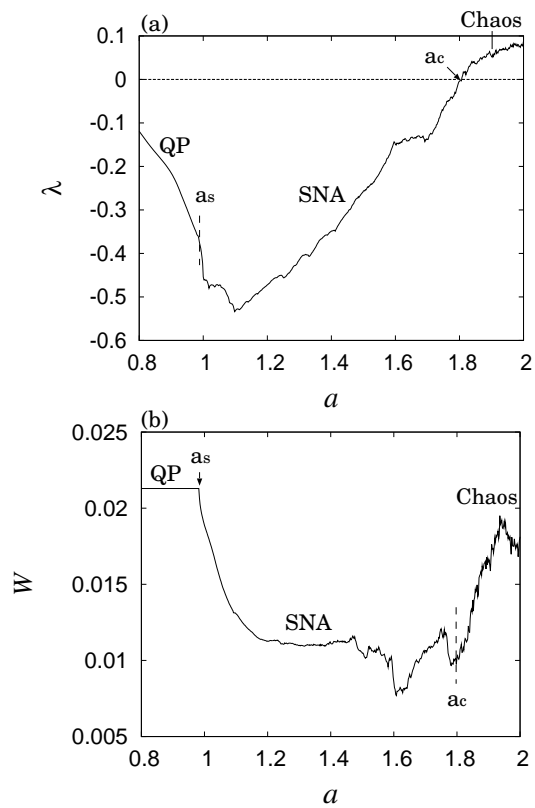


図 3.7: (a) リヤプノフ指数 λ の a 依存性. a が増加すると準周期アトラクターは $a = a_s$ (≈ 0.9829) で SNA へと遷移する (準周期アトラクターの領域を QP と表示). さらに, SNA は $a = a_c$ (≈ 1.807) でカオスアトラクターへと変化する. (b) 回転数 W の a 依存性. $a < a_s$ では位相ロック状態にあり, それ以外では位相ロック状態は破れている.

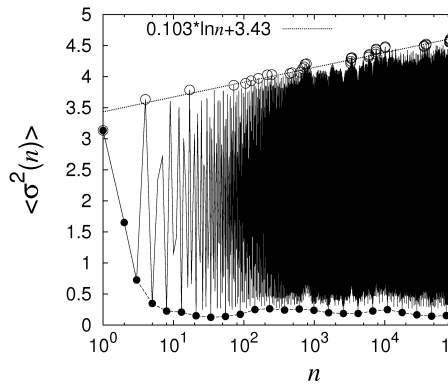


図 3.8: $a = 1.0$ における平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ の時間発展 (実線). 上側にある点線 $0.103 \ln n + 3.43$ は平均二乗変位が最大値を取るデータ $\{(n, \langle \sigma^2(n) \rangle) | \langle \sigma^2(j) \rangle < \langle \sigma^2(n) \rangle, 0 \leq \forall j < n\}$ (点) に対して対数関数による最小二乗フィッティングを施した結果である. 下側の包絡線は $\langle \sigma^2(n) \rangle$ のフィボナッチ時間 $n = F_k$ ($k \geq 1$) の値 (点) を繋いだもの.

ス遷移に伴い劣拡散 ($0 < \bar{H} < 1/2$) から通常拡散 ($\bar{H} = 1/2$) へのクロスオーバーが生じることを示している.

このシステムにおいても, 式 (3.10), (3.11) で記述される平均二乗変位の定常性とエルゴ - ド性が成り立っている (図 3.9(a) 挿入図). よって, $H(n) = \{1 + \log_2[1 + C(n)]\}/2$ もまた成立していなければならない. 従って, 3.2.3 節で議論したように, $0 < H(n) < 1/2$ で特徴付けられる近似的な劣拡散は, 十分大きな n における反持続性 $-1/2 < C(n) < 0$ に起因していると結論できる. また, $H(n) \simeq 1/2$ で特徴付けられる通常拡散は, 十分大きな n における相関の消失 $C(n) \simeq 0$ に起因していると言える.

以上より, トレンドのある場合 ($b = 0.01$) にも前節で得たシナリオが成り立つことが確認された.

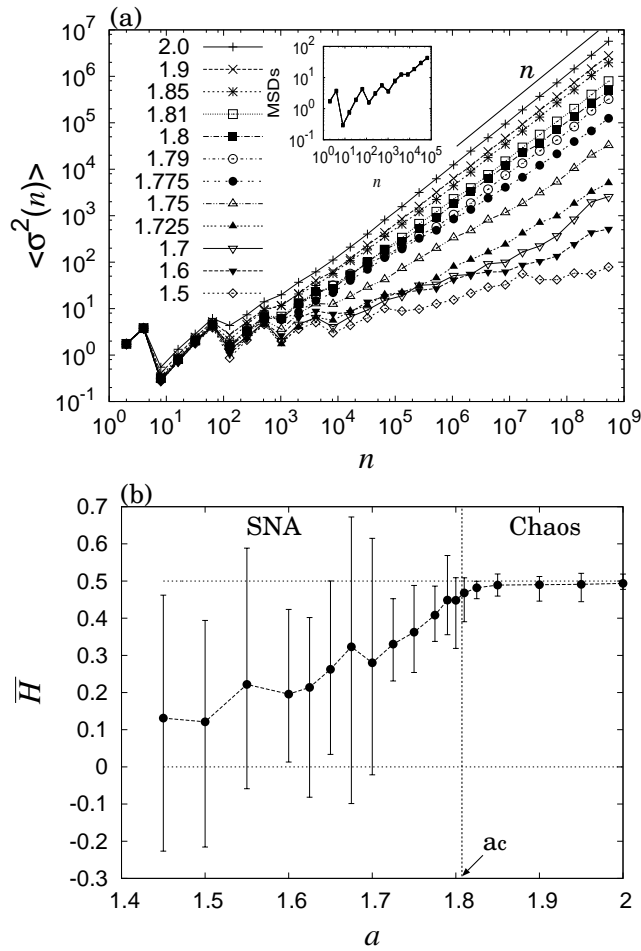


図 3.9: (a) $a_c \approx 1.807$ 前後の異なる a に対する平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ の時間発展. $b = 0.01$ の場合. データは時刻 $n = 2^k$ ($k = 1, 2, \dots, 29$) においてプロットされている. 挿入図はアンサンブル平均により求められた平均二乗変位 $\langle \sigma_{n_0}^2(n) \rangle$ ($n_0 = 0, 1, 10, 100$) と長時間平均により求められた平均二乗変位 $\bar{\delta}^2(n)$ が全て一致していることを示している. (b) 平均スケーリング指数 \bar{H} の a 依存性. それぞれの指数 \bar{H} ($\approx \bar{H}_{20,30}$) 時間区間 $[2^{20}, 2^{30}]$ ($\approx [10^6, 10^9]$) における平均二乗変位の値から式 (3.7) を用いて得られている. 縦のバーは変域 $[H_{20,30}^{\min}, H_{20,30}^{\max}]$ を表している.

3.4 準周期駆動される減衰振り子

より現実的なモデルとして, 準周期駆動される減衰振り子を考えよう [Romeiras and Ott 1987; Lai 1996]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \frac{1}{p}\dot{v} &= -v - \sin x + V_0 + V_1 \sin \phi_1 + V_2 \sin \phi_2, \\ \dot{\phi}_1 &= \omega_1, \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2.\end{aligned}\tag{3.15}$$

ここで $x \in \mathbb{R}$ は角度, $v \in \mathbb{R}$ は角速度, そして $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$ は, 各周波数 ω_1, ω_2 と振幅 V_1, V_2 を持つ準周期外力の二つの位相である. さらに, V_0 はバイアス力, p は減衰率である. 式 (3.15) の解に対する時刻 $t_n = 2\pi n/\omega_1 + t_0$ ($n \in \mathbb{Z}$) におけるストロボ写像は 3 次元の可逆写像となる

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= F(x_n, v_n, \theta_n), \\ v_{n+1} &= G(x_n, v_n, \theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\omega \pmod{2\pi}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

ここで $x_n = x(t_n)$, $v_n = v(t_n)$, $\theta_n = \phi_2(t_n)$, $\omega = \omega_2/\omega_1$ とした. 過減衰極限 $p \rightarrow \infty$ では, 式 (3.15) は次のように縮減される

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sin x + V_0 + V_1 \sin \phi_1 + V_2 \sin \phi_2, \\ \dot{\phi}_1 &= \omega_1, \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2.\end{aligned}\tag{3.17}$$

そして同様にストロボ写像 (3.16) は 2 次元写像となる:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, \theta_n), \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + 2\pi\omega \pmod{2\pi}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

写像 (3.16) および (3.18) は, もともとの連続系が可逆なので, これらも可逆でなければならない. これが 3.2 節で議論された準周期駆動される円写像との違いである.

式 (3.15) の力学的状態はアトラクターのタイプにより分類される. このアトラクターは変数 $v(t)$ と変数, $x(t) \pmod{2\pi}$, $\phi_1(t) \pmod{2\pi}$, $\phi_2(t) \pmod{2\pi}$ により構成される. アトラクターを特徴づけるリヤプノフ指数は 4 つある. そのうち 2 つは恒等的にゼロで準周期駆動力の 2 つの成分に対応する. 最大の非自明なリヤプノフ指数 λ は次のように定義される $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) \ln |d(t)/d(0)|$. ここで $d(t) = [\delta x^2(t) + \delta v^2(t)]^{1/2}$ とし, $\delta x(t)$ および $\delta v(t)$ は変分方程式 $\delta \dot{x} = \delta v$, $(1/p)\delta \dot{v} = -\delta v - \delta x \cos x = 0$ の解である. もう一つの非自明なリヤプノフ指数 λ' は関係式 $\lambda' = -(p + \lambda)$ で

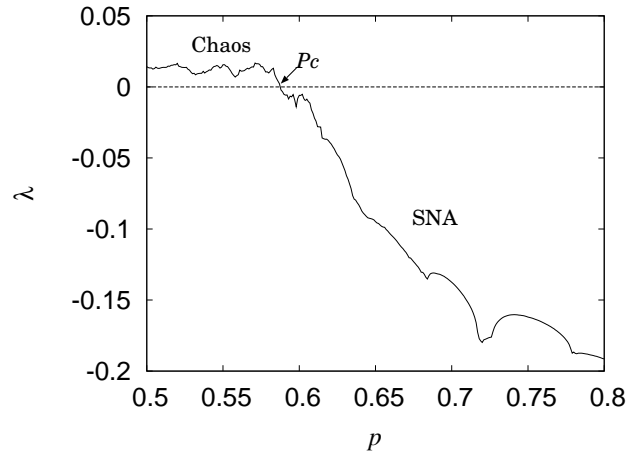


図 3.10: 最大の非自明なリヤプノフ指数 λ とパラメータ p の関係. p が減少するとアトラクターは $p = p_c (\approx 0.5874)$ において SNA からカオスへと遷移する .

与えられる [Romeiras and Ott 1987]. アトラクターのストレンジ性は位相鋭敏性指数 ν で与えられる . ν の計算方法は写像の場合の方法と本質的には変わらない (詳細は文献 [Feudel et al. 2006 (p. 54)] を参照).

シミュレーションでは, パラメータを $\omega_1 = 1, \omega_2 = (\sqrt{5} - 1)/2, V_0 = 0$ および $V_1 = V_2 = 2$ に設定する. これらのパラメータでは, 過減衰極限 $p \rightarrow \infty$ のアトラクターは SNA である . このことは Neumann と Pikovsky により報告されている (文献 [Neumann and Pikovsky 2002] の図 1(b) 参照). パラメータ p が $p = \infty$ から減少するに連れ, SNA は $p = p_c (\approx 0.5874)$ でカオスアトラクターへと遷移する. 図 3.10 はリヤプノフ指数 λ を $p \in [0.5, 0.8]$ の関数として示したものである. このパラメータの範囲では $x(t)$ は非有界かつ拡散的である.

$V_0 = 0$ の場合, 式 (3.15) は変換 $(x, v, \phi_1, \phi_2) \rightarrow (-x, -v, \phi_1 + \pi, \phi_2 + \pi)$ に対する対称性を持つ. 従って, 対称な初期密度 $P(x, v, \phi_1 \pmod{2\pi}, \phi_2 \pmod{2\pi}) = P(-x, -v, \phi_1 + \pi \pmod{2\pi}, \phi_2 + \pi \pmod{2\pi})$ を持つアンサンブルに対して平均のトレンドは存在しない. 便宜的に, 平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle = \langle [x(t_n) - x(0)]^2 \rangle$ を離散時間 $t = t_n$ において評価する. アンサンブル平均 $\langle \cdot \rangle$ は初期に領域 $x = v = 0, 0 \leq \phi_{1,2} < 2\pi$ に一様に分布した 1000 本の軌道に対して計算した. 解の初期部分 $x(t_n) (n = 0, 1, \dots, 100)$ は過渡状態と見なして除外した .

対数的拡散. 大きな値の $p (p \gtrsim 10)$ に対して, 平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ は振動しながら時間発展し, その最大値は対数的に増加する . 図 3.11(a) と 3.11(b) はそれぞれパラメータ $p = 20$ と $p = \infty$ における平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ を示している . 上側にある点線は平均二乗変位が最大値を取るデータ $\{(n, \langle \sigma^2(n) \rangle) | \langle \sigma^2(j) \rangle \leq \langle \sigma^2(n) \rangle, 0 \leq \forall j \leq n\}$ (点) に対して対数関数による最小二乗フィッティングを施した結果である . 下側の包絡線はフィボナッチ時間 $n = F_k (k \geq 1)$ における平均二乗変

位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ によって与えられる. 図 3.11(a) と 3.11(b) の間に質的な違いは見られない.

中間の場合. 対数的拡散と劣拡散の間の領域 ($0.61 \lesssim p \lesssim 10$) では, 拡散のタイプはそれらの中間に見えるが, 我々の数値計算量では結論ははっきりしない.

劣拡散. カオス遷移点近傍の SNA 領域 ($p_c < p \lesssim 0.61$) では, 図 3.12(a) に見られるように平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ はべき的に増加する. ここでも局所スケーリング指数 $H(n)$ を式 (3.6) により定義しよう. 図 3.12(b) は平均のスケーリング指数 $\bar{H} (\simeq \bar{H}_{14,20})$ とパラメータ p の関係を示している. 縦のバーは局所スケーリング指数の変域 $[H_{14,20}^{\min}, H_{14,20}^{\max}]$ を示している. この結果は式 (3.15) のシステムが領域 $p_c < p \lesssim 0.61$ において劣拡散 ($0 < \bar{H} < 1/2$) を生じること示している.

通常拡散. カオス領域 ($p < p_c$) では, 通常拡散 ($\bar{H} = 1/2$) が観測される. 従って, 劣拡散から通常拡散へのクロスオーバーはアトラクターの転移点 $p = p_c$ に一致する.

このシステムにおいても, 式 (3.10), (3.11) で記述される平均二乗変位の定常性とエルゴ - ド性が成り立っている (図 3.12(a) 挿入図). よって, $H(n) = \{1 + \log_2[1 + C(n)]\}/2$ もまた成立していなければならない. 従って, 3.2.3 節で議論したように, $0 < H(n) < 1/2$ で特徴付けられる近似的な劣拡散は, 十分大きな n における反持続性 $-1/2 < C(n) < 0$ に起因していると結論できる. また, $H(n) \simeq 1/2$ で特徴付けられる通常拡散は, 十分大きな n における相関の消失 $C(n) \simeq 0$ に起因していると言える.

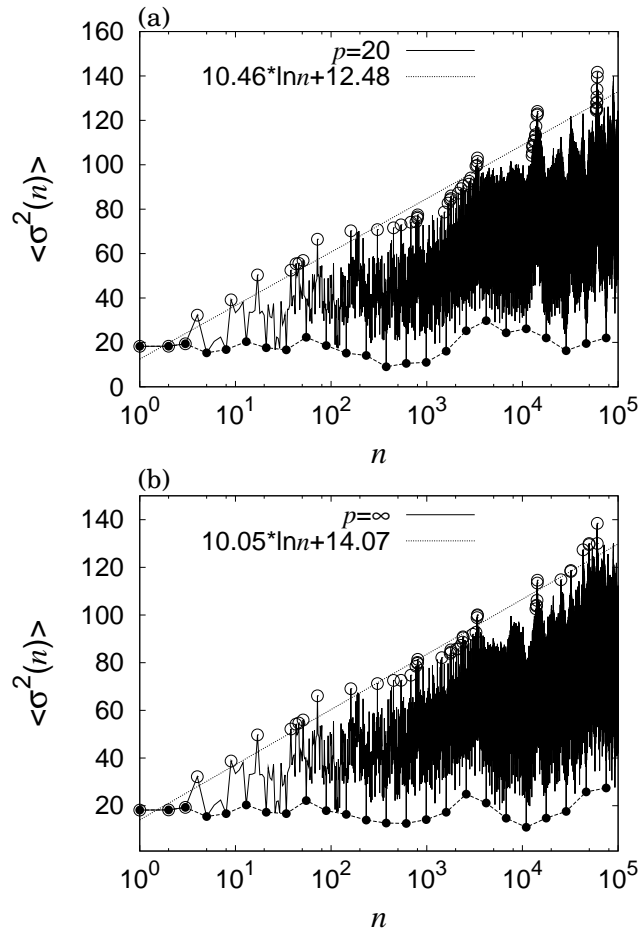


図 3.11: (a) $p = 20$ および (b) $p = \infty$ における平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ の時間発展．上側にある点線は平均二乗変位が最大値を取るデータ $\{(n, \langle \sigma^2(n) \rangle) | \langle \sigma^2(j) \rangle < \langle \sigma^2(n) \rangle, 0 \leq j < n\}$ (点) に対して対数関数による最小二乗フィッティングを施した結果であり，(a) では $10.46 \ln n + 12.49$ ，(b) では $10.05 \ln n + 14.07$ である．どちらの図においても，下側の包絡線はフィボナッチ時間 $n = F_k$ ($k \geq 1$) における平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ (点) によって与えられる．

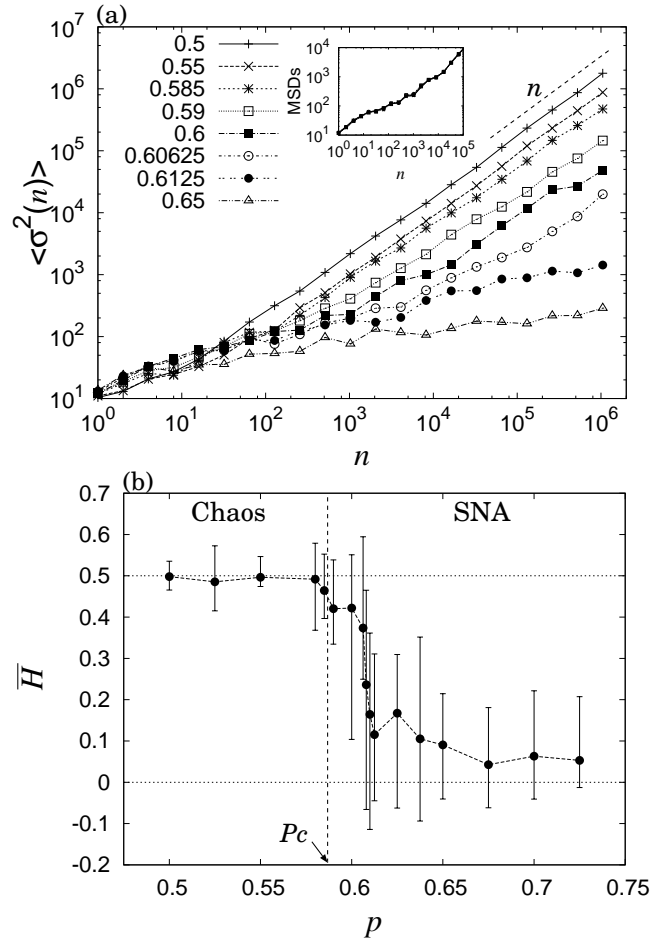


図 3.12: (a) 異なる p に対する平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ の時間発展．データは離散時刻 $n = 2^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 20$) においてプロットされている．挿入図はアンサンブル平均により求められた平均二乗変位 $\langle \sigma_{n_0}^2(n) \rangle$ ($n_0 = 0, 1, 10, 100$) と長時間平均により求められた平均二乗変位 $\overline{\delta^2(n)}$ が全て一致していることを示している．(b) 平均スケーリング指数 \bar{H} と p の関係．指数 \bar{H} ($\simeq \bar{H}_{14,20}$) は離散時間区間 $[2^{14}, 2^{20}]$ ($= [16384, 1048576]$) において式 (3.7) を用いて決定されている．縦バーは各指数の変域 $[H_{14,20}^{\min}, H_{14,20}^{\max}]$ を示す．

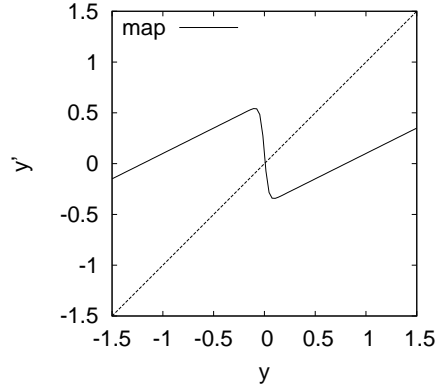


図 3.13: θ を適当に固定した時の写像 $y' = ky - \alpha/(1 + e^{-y/\epsilon}) + 0.6$ のグラフ. ただし, $\alpha = 1.0, k = 0.5$.

3.5 準周期駆動されるニューロンモデル

最後に, 空間周期性を持たない準周期駆動される系においても, 適切な位置変数を構成することで前節までに述べたものと同様の拡散現象が観測されることを示そう.

合原らにより提案されたニューロンモデルに, 準周期的に変化する入力を加える場合を考える. 論文 [Aihara et al. 1990] 中の式 (12) で定数として扱われたパルス振幅 a を $a + b \cos(2\pi\theta_n)$ に置き換える

$$\begin{cases} y_{n+1} = ky_n - \alpha g(f(y_n)) + a + b \cos(2\pi\theta_n), \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \omega \pmod{1}. \end{cases} \quad (3.19)$$

y はニューロンの内部状態を表す変数であり, θ は準周期的パルス入力の位相である². このときニューロンの出力値 v_n は

$$v_n = f(y_n)$$

与えられ, ニューロンの発火状態 (1 または 0) は閾値関数 $h(v)$ により次のように与えられる

$$h(v) = \begin{cases} 1 & \text{if } v \geq 0.5 \text{ (発火している)}, \\ 0 & \text{if } v < 0.5 \text{ (発火していない)}. \end{cases} \quad (3.20)$$

以下では $\alpha = 1.0, f(y) = 1/(1 + e^{-y/\epsilon}), g(x) = x, \epsilon = 0.02, k = 0.5, b = 0.1, \omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ とし, a を制御パラメータとする. 図 3.13 に θ を適当に固定した時の変数 y の写像を例示する.

写像 (3.19) のアトラクターをリヤプノフ指数 $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \ln |\partial y_n / \partial y_0|$ と位相鋭敏性指数 ν で特徴付ける. これらの指数によりアトラクターは準周期アトラクター ($\lambda < 0, \nu = 0$),

²論文 [Aihara et al. 1990] の閾値 θ とは異なることに注意.

SNA($\lambda < 0, \nu > 0$) およびカオス ($\lambda > 0$) の3つに分けられる．図 3.14(a) はリヤプノフ指数 λ の a 依存性を示している． a が増加すると，準周期アトラクターは $a = a_s (\approx 0.639473)$ を境に SNA へと遷移する．さらに，SNA は $a = a_c (\approx 0.6607)$ を境にカオスアトラクターへと変化する．

時間区間 $[1, n]$ におけるニューロンの発火数を x_n で表す

$$x_n = \sum_{i=1}^n h(v_i).$$

このとき，ニューロンは平均発火率は次のように与えられる

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}.$$

図 3.14(b) は，区間 $0.62 < a < 0.68$ におけるニューロンの平均発火率 r の a 依存性を示している． $a < a_l (\approx 0.6380081)$ では $r = 1/2$ の位相ロックが起き， $a > a_l$ では位相ロックが外れているのが見てとれる ($a_l \neq a_s$ であることに注意せよ³)．

劣拡散の発生と通常拡散への遷移．ニューロンの発火数 x_n の拡散現象を調べるために， x_n の平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ を次のように定義する

$$\langle \sigma^2(n) \rangle = \langle x_n^2 \rangle - \langle x_n \rangle^2.$$

図 3.15(a) は，平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ の時間発展を異なる a に対してプロットしたものである． $\langle \sigma^2(n) \rangle$ は $a = a_c$ 前後でべき的に増加しているが， $a = a_c$ から離れるとゆらぎが顕著になる．ここでも局所スケーリング指数 $H(n)$ を式 (3.6) により定義しよう．図 3.15(b) は平均のスケーリング指数 $\bar{H} (\simeq \bar{H}_{17,26})$ とパラメータ a の関係を示している．図中のバーは局所スケーリング指数の変域 $[H_{17,26}^{\min}, H_{17,26}^{\max}]$ である．この結果は，発火数 x_n が，SNA 領域 ($a < a_c$) において劣拡散 ($0 < \bar{H} < 1/2$) を，カオス領域 ($a > a_c$) において通常拡散 ($\bar{H} = 1/2$) を生じることを示している．

このモデルでは準周期アトラクターから SNA への遷移直後 (すなわち拡散の発生直後) において対数的拡散は観測されなかった．図 3.16 は SNA への遷移直後 $a = 0.63948 (\gtrsim a_s)$ における平均二乗変位の時間発展を示している．図 3.16 から算出される平均スケール指数は $\bar{H} (\simeq \bar{H}_{17,26}) = 0.157$ であり，対数的拡散ではない．

³位相ロックの破れと SNA への転移は 3.3 節の例のように一致する場合もあれば，この節の例のように一致しない場合もある．位相ロックの破れはアトラクターの相空間における構造変化に起因している．ニューロンモデルにおいて $a = a_l$ を境に位相ロックが破れる理由は，この点以降 ($a > a_l$)，準周期アトラクターの一部が閾値 $y_{th} = f^{-1}(0.5)$ を横切ようになるためである．

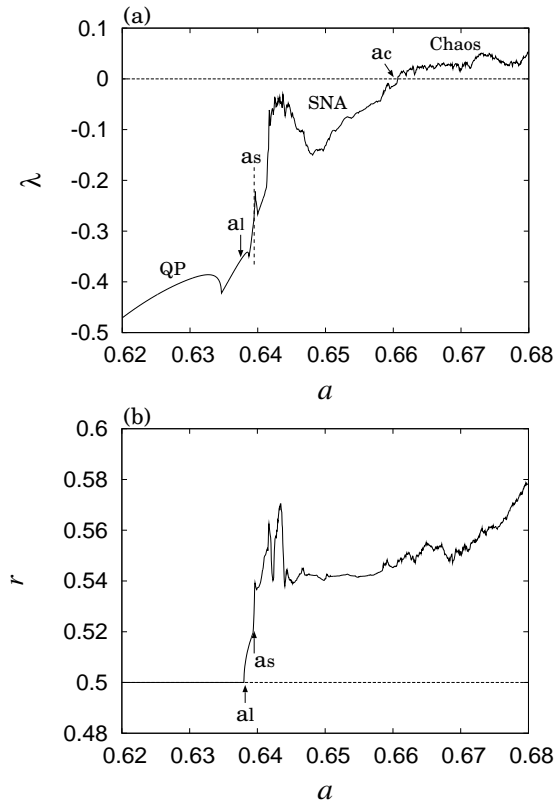


図 3.14: (a) リヤプノフ指数 λ の a 依存性. a が増加すると, 準周期アトラクターは $a = a_s (\approx 0.639473)$ を境に SNA へと遷移する (準周期アトラクターの領域を QP と表示). さらに, SNA は $a = a_c (\approx 0.6607)$ を境にカオスアトラクターへと変化する. (b) ニューロンの平均発火率 r の a 依存性. $a < a_l$ では位相ロック状態 $r = 1/2$ が実現し, それ以外では位相ロックが破れている. $a_l \neq a_s$ であることに注意.

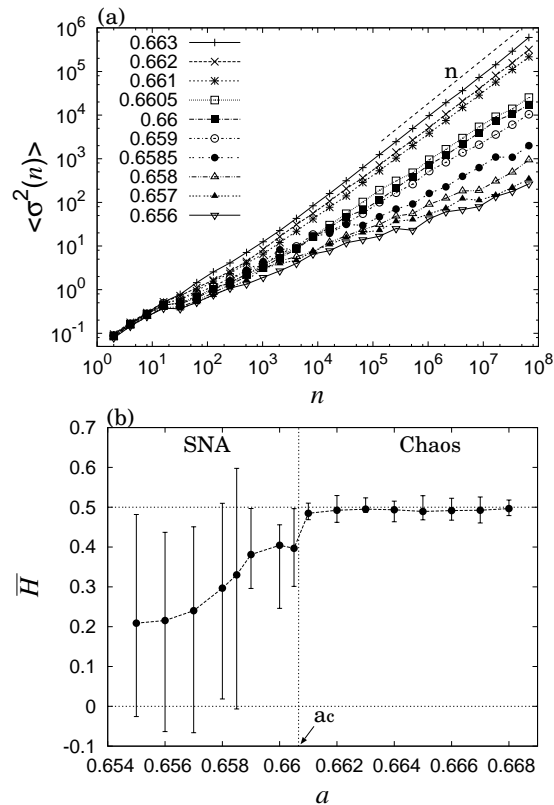


図 3.15: (a) 平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ の時間発展. データは時刻 $n = 2^k$ ($k = 1, 2, \dots, 26$) においてプロットされている. (b) 平均スケーリング指数 \bar{H} の a 依存性. それぞれの指数 \bar{H} ($\simeq \bar{H}_{17,26}$) 時間区間 $[2^{17}, 2^{26}]$ ($\approx [10^5, 10^8]$) における平均二乗変位の値から式 (3.7) を用いて得られている. 縦のバーは変域 $[H_{17,26}^{\min}, H_{17,26}^{\max}]$ を表している.

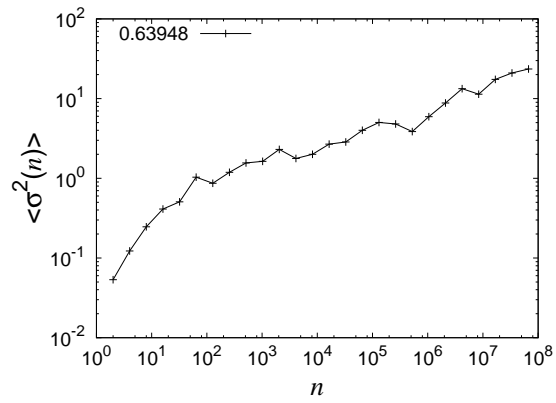


図 3.16: 拡散の発生直後 (準周期アトラクターから SNA への遷移直後) における平均二乗変位 $\langle \sigma^2(n) \rangle$ の時間発展. $a = 0.63948$. データは時刻 $n = 2^k$ ($k = 1, 2, \dots, 26$) においてプロットされている. 平均スケーリング指数は $\bar{H} (\bar{H}_{17,26}) = 0.157$ である.

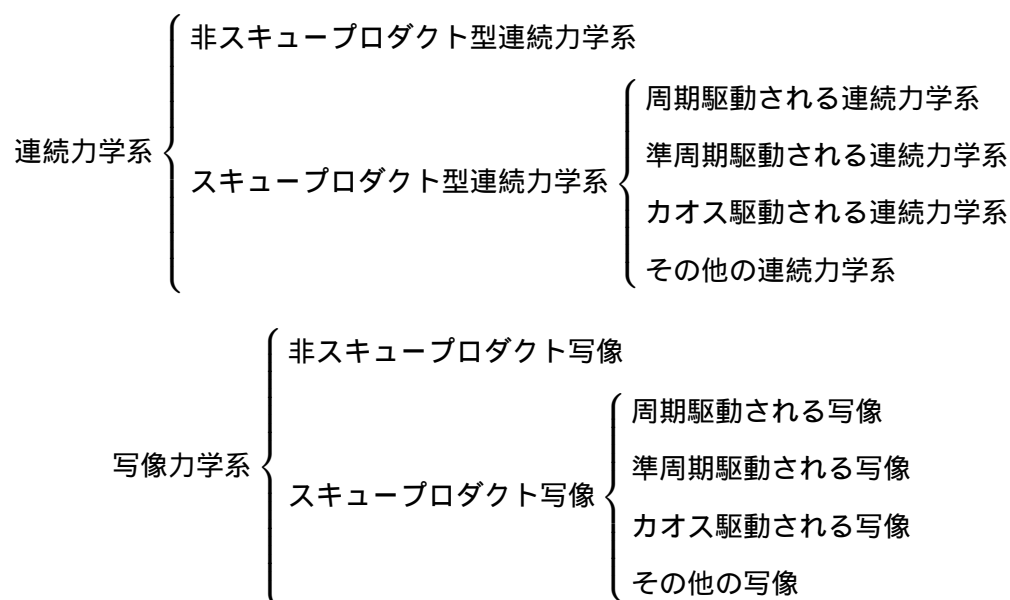
3.6 3章のまとめ

本章では、準周期駆動される円写像と減衰振り子、およびニューロンモデルに起こる決定論的拡散現象を調べた。これらの系では、SNAに起因して対数的拡散や劣拡散、およびその中間型の拡散が生じることが分かった。これらの系に共通する結果から、次のような決定論的拡散のシナリオが提案できる: SNA-カオス遷移を示す系では、平均トレンド差し引いた適切な位置変数に対して、対数的拡散から劣拡散へのゆっくりとした遷移 (SNA 領域) および SNA-カオス遷移に伴う劣拡散から通常拡散への遷移が観測される。

また、フラクタル時系列解析における局所二次モーメント法により、ここで観測された劣拡散は非カオス的ストレージダイナミクスにおける反持続性に起因することが示された。このことは、SNAの生成する劣拡散は、連続時間ランダムウォーク型の劣拡散ではなく、非整数ブラウン運動型の劣拡散であることを示している。

第4章 非スキュープロダクト写像におけるSNAの発生メカニズム

前章までに見てきたように，SNAは準周期駆動される連続力学系に典型的に存在する．同様に，これらの連続力学系からポアンカレ断面の方法によって自然に導かれる準周期駆動されるスキュープロダクト写像系(1.3)にもSNAは典型的に存在する．これら以外のクラスの力学系にSNAは存在しないのだろうか．決定論的力学系を次のように分類して考えてみよう．



スキュープロダクト型連続力学系 (Skew-product continuous dynamical systems) およびスキュープロダクト写像 (Skew-product maps) とは，システム全体を駆動する側のサブシステム x と駆動される側のサブシステム y に分割できる力学系であり，それぞれ次のように書ける

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(y), \end{cases} \quad (4.1)$$

および

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = g(y_n). \end{cases} \quad (4.2)$$

スキュープロダクト系を非自励系と呼ぶこともある．駆動する側のシステム y のダイナミクスには，周期的な場合，準周期的な場合，カオス的な場合などが存在する．これら以外の場合も存在するが，特に興味深いものとしてこれら三つが挙げられる． y が準周期的な場合に SNA が存在し得るのに対し，周期的な場合には SNA は典型的には存在しないと考えられている． y がカオス的な場合，定義より SNA は存在できないが，リヤプノフ指数ゼロの弱いカオスの場合には SNA の定義を満たすアトラクターが存在しうる (6 章)．

非スキュープロダクト連続力学系および非スキュープロダクト写像は，全体を駆動する側のサブシステム x と駆動される側のサブシステム y に分割できない力学系で，それぞれ次のように書ける

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y), \end{cases} \quad (4.3)$$

および

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n). \end{cases} \quad (4.4)$$

Grebogi らは GOPY 写像 (1.8) にスキュープロダクト性を壊すような摂動を加えて，SNA がそのまま維持されるかどうか調べる実験を行っている [Grebogi et al. 1984]:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2\sigma(\tanh x_n) \cos(2\pi\theta_n), \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \omega + \varepsilon_1 x_n + \varepsilon_2 \sin(2\pi\theta_n) \pmod{1}, \end{cases} \quad (4.5)$$

その結果， 10^{-4} 程度の小さな $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ に対して SNA は維持されず， ε の値に依存してカオスアトラクターや周期アトラクターに転移したと報告している．この結果から，Grebogi らはスキュープロダクト写像における SNA は，スキュープロダクト構造を壊すような微小な摂動に対して構造不安定であると予想した．[Grebogi et al 1984] の追試実験の結果を付録 G に示す．ここでは，摂動規模 ε をどのように取っても，SNA は長周期の周期点またはカオスアトラクターに遷移するという結果を得ている．これは，最大リヤプノフ指数の絶対値 $|\lambda_{\max}|$ が摂動の大きさ ε に対して， $|\lambda_{\max}| \sim \varepsilon$ のようにスケールされるという観測に基づいている．

この否定的な予想を覆すかの様に，Anishchenko らは非スキュープロダクト写像を調べ，SNA が存在すると主張した [Anishchenko et al. 1996]．ところがこの結果は Pikovsky と Feudel により数値計算の誤差であることがコメント論文において指摘された [Pikovsky and Feudel 1997]．これらの先行研究は SNA が非スキュープロダクト系には存在しないかもしれないという予想を生んだ．では，どのような非スキュープロダクト写像にも SNA は存在しないのだろうか？ SNA の遍在性に関する問いをいくつかに分けて挙げてみよう:

問 1．非スキュープロダクト連続力学系は SNA を持ち得るか？

問 2 . 周期駆動される連続力学系は SNA を持ち得るか？

問 3 . 非スキュープロダクト写像は SNA を持ち得るか？

問 4 . 周期駆動される写像は SNA を持ち得るか？

結論を先に述べると，問 1 および問 4 には現在でも解答が与えられていないが，問 3 には肯定的な解答を与える写像のクラスが存在する．そして問 2 の問題には，周期駆動される準周期ポテンシャルを持つ連続力学系には SNA が存在するという解答が与えられる．

4.1 Badard の非スキュープロダクト写像

前節で述べたような背景の中，Badard により SNA を発生する非スキュープロダクト写像に関する研究が報告された [Badard 2006; 2008] . 準周期駆動される振動子のモデルとして \mathbb{R}^3 上の微分方程式系を考える

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 + aF(x, y, z), \\ \dot{y} &= \alpha, \\ \dot{z} &= \beta.\end{aligned}\tag{4.6}$$

関数 F はリプシッツ条件を満たし，変数 x, y, z に対しそれぞれ周期 1 の周期関数であるとし，パラメータ α, β の値はお互いに非通約であるとする．さらに，変数 x が常に増加しているように， $|F| \leq 1$ 且つ $|a| < 1$ であるとする．この系は変数 x, y, z について法 (modulo) 1 を取ることで 3 トーラス上でも定義できる．

連続系を解析するにはポアンカレ断面の方法で系を離散化すると自由度を低減出来て便利である．ポアンカレ断面には無数に多くの取り方があるが，通常は準周期外力の 2 つの周期 (ここでは $1/\alpha$ と $1/\beta$) のどちらかでシステムを離散化する．その結果，式 (1.4) のタイプのスキュープロダクト写像が得られる．Badard は他の離散化の方法として，変数 x が整数値を取る瞬間 $t = t_n$ (すなわち $x(t_n) \in \mathbb{Z}$) でストロボ写像を考えた． x の値が 1 増加するのにかかる時間 $t_{n+1} - t_n$ は変数 $y(t_n) = y_n, z(t_n) = z_n$ のみの関数 $\tau(y_n, z_n)$ で与えられる．変数 $y(t), z(t)$ は時間に比例して増加するだけだから，次の非スキュープロダクト型のストロボ写像が得られる

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \alpha\tau(y_n, z_n), \\ z_{n+1} &= z_n + \beta\tau(y_n, z_n).\end{aligned}\tag{4.7}$$

また，この写像は変数 y, z について法 1 を取ることでトーラス上の写像としても定義できる

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \alpha\tau(y_n, z_n) \pmod{1}, \\ z_{n+1} &= z_n + \beta\tau(y_n, z_n) \pmod{1}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

ストロボ写像 (4.7), (4.8) に対して Badard は次の命題を証明している [Badard 2006] :

定理 1 系 (4.6) において $a < 1$ であると仮定する．その時，関数 $\tau(o, o)$ は連続であり，各変数に対し周期的であり，厳密に正であり，且つ有界である．従って，すべての y, z に対して $0 < m \leq \tau(y, z) \leq M$ が成立する．対応する写像 (4.7) は \mathbb{R}^2 の同相写像であり，法 (modulo) 1 を取った写像 (4.8) は 2 トーラス \mathbb{T}^2 上の同相写像である．比 α/β が無理数の場合，写像 (4.8) はいかなる周期点も持たず，初期条件に依存しない回転ベクトル (y および z 方向の回転数) を持つ．

Badard は数値実験において τ を次の関数形

$$\tau(y, z) = K + \frac{H}{2\pi\alpha} \sin(2\pi y) + \frac{Q}{2\pi\beta} \sin(2\pi z) \quad \text{with } K > \frac{|H|}{2\pi\alpha} + \frac{|Q|}{2\pi\beta} \quad (4.9)$$

に選び，写像 (4.8)，(4.9) が SNA を生じることを示した [Badard 2008]．以下では，写像 (4.8)，(4.9) を Badard の非スキュープロダクト写像，または単に，Badard 写像と呼ぶ．ただし，Badard による SNA の同定方法は，初期条件が 10^{-9} 程度異なる二つの軌道の分離を確認するというアドホックな方法に止まり，数値的検証方法として十分とは言い難かった [Badard 2008]．次節以降では Badard 写像を拡張するとともに，この写像における SNA のより精密な特徴付けの方法を導入する．

4.2 拡張された Badard 写像の物理モデルからの導出

ここでは拡張された Badard 写像を物理モデルから導出する．図 4.1 に示すようなキックされる連結回転子の運動を考えよう．それぞれの回転子 R_i ($i = 1, 2$) は半径 r_i ，回転角 $\phi_i \in \mathbb{R}$ を持つ．二つの回転子は伸縮しない軽いロープで連結され，拘束条件 $\phi_2 = k\phi_1 + \delta$ を満たしながら回転する．ここで半径の比 $k = r_1/r_2$ は無理数であり， δ は $\phi_1 = 0$ の時の ϕ_2 の値である．それぞれの回転子は質量 m_i を円周上の固定された点に持つ．それぞれの質量は重力 $m_i g$ と回転力 T_i による

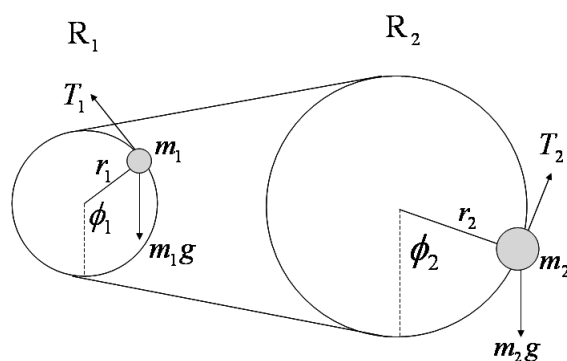


図 4.1: キックされる連結回転子

キックを周期 t_p で受けるとする．さらにそれぞれの質量は摩擦係数 γ_i の速度に比例する摩擦力を受けているとする．以上の設定から回転の運動方程式は次のように書ける

$$\begin{aligned} m_1 r_1^2 \ddot{\phi}_1 &= -\gamma_1 r_1^2 \dot{\phi}_1 - r_1 P + (r_1 T_1 - m_1 g r_1 \sin \phi_1) \sum_n \delta(t - t_p n), \\ m_2 r_2^2 \ddot{\phi}_2 &= -\gamma_2 r_2^2 \dot{\phi}_2 + r_2 P + (r_2 T_2 - m_2 g r_2 \sin \phi_2) \sum_n \delta(t - t_p n), \end{aligned}$$

ここで P はロープに生じた張力である．この張力 P を消去し特徴的な時間 $t_c = \{(1+m_2/m_1)r_1/g\}^{1/2}$ で方程式を無次元化すると次式を得る

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_1 &= -\eta \dot{\phi}_1 + (T - \sin \phi_1 - a \sin(k\phi_1 + \delta)) \sum_n \delta(t - \tau n), \\ \phi_2 &= k\phi_1 + \delta, \end{aligned} \tag{4.10}$$

ここで導入されたパラメータは $a = m_2/m_1$, $\eta = (\gamma_1 + \gamma_2)r_1 t_c^{-1/2}/m_1 g$, $T = (T_1 + T_2)/m_1 g$ 及び $\tau = t_p/t_c$ である．このシステムは次のように二変数の常微分方程式としても記述できる

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_1 &= -\eta \dot{\phi}_1 + (T - \sin \phi_1 - a \sin \phi_2) \sum_n \delta(t - \tau n), \\ \ddot{\phi}_2 &= -\eta \dot{\phi}_2 + k(T - \sin \phi_1 - a \sin \phi_2) \sum_n \delta(t - \tau n). \end{aligned} \tag{4.11}$$

ただし拘束条件が満たされるためには，初期条件が $\dot{\phi}_2(0) = k\dot{\phi}_1(0)$ 且つ $\phi_2(0) = k\phi_1(0) + \delta$ でなければならない．

キックされる微分方程式系 (4.10), (4.11) の利点は，時刻 $t_n = n\tau$ での厳密なポアンカレ写像 (ストロポ写像) を導けることである． n 回目のキックを受ける直前の時刻 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}(n\tau - \varepsilon)$ の回転子 R_1 の回転角 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_1(n\tau - \varepsilon)$ と角速度 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dot{\phi}_1(n\tau - \varepsilon)$ を用いて次の変数を定義する

$$(v_n, \phi_n) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\dot{\phi}_1(n\tau - \varepsilon), \phi_1(n\tau - \varepsilon) \right).$$

系 (4.10) の第 1 式を n 回目のキックの直前から $n+1$ 回目のキックの直前まで積分すると，次の二次元写像を得る (付録 A 参照)

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= e^{-\eta\tau} [v_n + T - \sin \phi_n - a \sin(k\phi_n + \delta)], \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \frac{1 - e^{-\eta\tau}}{\eta} [v_n + T - \sin \phi_n - a \sin(k\phi_n + \delta)]. \end{aligned} \tag{4.12}$$

この二次元写像はヤコビアン $-e^{-\eta\tau}$ を持つ．すなわち有限の τ に対して逆像が一意に存在するという意味で可逆である．しかしながら， $\eta(>0)$ を有限値に固定した下で $\tau(=t_p/t_c) \rightarrow \infty$ として得られる過減衰極限では，写像 (4.12) は非可逆になる．これは前回の状態 (v_n, ϕ_n) に関する記憶

の喪失に起因する．このとき，二次元写像は $x_n = -\phi_n/2\pi$ を新たな変数とする次の一次元写像 $f_\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に縮減できる

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Omega + \frac{V}{2\pi} \left(\sin 2\pi x_n + \frac{\alpha}{k} \sin 2\pi(kx_n + \theta) \right), \\ &\equiv f_\theta(x_n). \end{aligned} \quad (4.13)$$

ここでさらに新しいパラメータ $V = 1/\eta$, $\Omega = -T/2\pi\eta$, $\theta = -\delta/2\pi$, 及び $\alpha = ka$ を導入した．この写像は $V \leq V_c[:= 1/(1+\alpha)]$ では可逆であり， $V > V_c$ では非可逆である． $\alpha = 0$ の場合，写像 f_θ は良く知られたアーノルドの円写像である．後述するように，パラメータとして導入した θ をあえて“変数”として扱うと見通しが良くなることがある．その場合は f_θ を二次元へと拡張した次の写像 $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を扱う

$$(x_{n+1}, \theta) = F(x_n, \theta) := (f_\theta(x_n), \theta).$$

写像 (4.13) を得た際と同様な積分操作と極限操作を行うことにより，式 (4.11) からは変数

$$(y_n, z_n) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\phi_1(n\tau - \varepsilon)/2\pi, -\phi_2(n\tau - \varepsilon)/2\pi)$$

に対して次の二次元写像が得られる．

$$M : \begin{cases} y_{n+1} = y_n + \Omega + \frac{V}{2\pi} \left(\sin 2\pi y_n + \frac{\alpha}{k} \sin 2\pi z_n \right), \\ z_{n+1} = z_n + k \left[\Omega + \frac{V}{2\pi} \left(\sin 2\pi y_n + \frac{\alpha}{k} \sin 2\pi z_n \right) \right]. \end{cases}$$

ここで再び次の拘束条件が成り立つ

$$z_n = ky_n + \theta. \quad (4.14)$$

写像 F と M は次の微分同相写像 h により位相共役の関係にある

$$(y_n, z_n) = h(x_n, \theta) := (x_n, kx_n + \theta). \quad (4.15)$$

この位相共役性により写像 M のダイナミクスはより簡単な写像 F (実質的には写像 f_θ) により調べることができる．

写像 M は 2 トーラス \mathbb{T}^2 上で定義することもできる．写像 M の変数 y, z に対して法 1 を取って得られる写像を \tilde{M} と表記しよう

$$\tilde{M} : \begin{cases} y_{n+1} = y_n + \Omega + \frac{V}{2\pi} \left(\sin 2\pi y_n + \frac{\alpha}{k} \sin 2\pi z_n \right) \pmod{1}, \\ z_{n+1} = z_n + k \left[\Omega + \frac{V}{2\pi} \left(\sin 2\pi y_n + \frac{\alpha}{k} \sin 2\pi z_n \right) \right] \pmod{1}. \end{cases}$$

このとき写像 M は写像 \tilde{M} の持ち上げ (*lift*) と呼ばれる。写像 \tilde{M} は単純なパラメータ変換により Badard 写像 (4.8), (4.9) に一致する¹。ただし, 写像 \tilde{M} において非可逆領域と不動点領域を考えると物理的意味を持つのに対し, Badard 写像ではこれらの領域は定理 1 より存在しない。以下では, 写像 \tilde{M} (および M) を拡張された Badard 写像, または単に, 拡張 Badard 写像と呼ぶ。

4.3 予備的な解析

本論文では写像 \tilde{M} のアトラクター, 特に SNA に興味がある。その他の写像 f_θ, F 及び M は必要に応じて呼び出すことにしよう。以下では V と Ω を制御パラメータとして扱う。この際, 一般性を失うことなく $\Omega \geq 0$ とできる。また定義より $V > 0$ である。

写像 f_θ と同様, 写像 \tilde{M} は $V \leq V_c$ で可逆であり, $V > V_c$ で非可逆である。可逆領域では持ち上げ写像 M に関する回転数は初期条件によらずに与えられる [Badard 2006]

$$W_y = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - y_0)/n \text{ and } W_z = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - z_0)/n. \quad (4.16)$$

拘束条件 (4.14) から回転数は次の関係式を満たす

$$W_z = kW_y$$

これに対し非可逆領域では回転数は初期条件に依存する可能性がある [Badard 2008]。

パラメータ平面は二つの直線 $V = V_c = \frac{1}{1+\alpha}$ と $\Omega = \Omega_b(V) = \frac{V}{2\pi} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)$ により, 次の 4 つの領域に区切ることができる (図 4.2):

領域 1 $\Omega < \Omega_b(V)$ 且つ $V \leq V_c$: アトラクターは不動点のみ。 $W_y = W_z = 0$ 。

領域 2 $\Omega < \Omega_b(V)$ 且つ $V > V_c$: 常に不動点が存在し, 周期点やカオスアトラクターも共存可能。

領域 3 $\Omega > \Omega_b(V)$ 且つ $V \leq V_c$: いかなる不動点も周期点もカオスアトラクターも存在しないが, 準周期アトラクターや非周期アトラクターが存在。 $W_y = kW_z > 0$ 。

領域 4 $\Omega > \Omega_b(V)$ 且つ $V > V_c$: いかなる不動点も周期点も存在しないが, 非周期アトラクターやカオスアトラクターが存在。 $W_y = kW_z > 0$ 。

¹Badard 写像から写像 \tilde{M} へのパラメータ変換は $k\alpha \rightarrow \Omega, \beta/\alpha \rightarrow k, Q/H \rightarrow \alpha$ 。

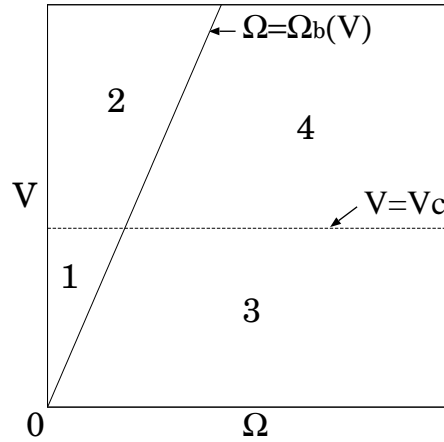


図 4.2: Ω - V 平面の分割．数字は4つの領域の番号を示す．

4.4 解析方法

ここでは数値計算によってアトラクターがSNAであるか検証する一つの方法を提案する．ここで与える方法は，2章で述べたスキュープロダクト写像におけるSNAの検証方法である位相鋭敏性指数の方法 [Pikovsky and Feudel 1995] を非スキュープロダクト写像に適用したものである．

まず，写像 M のリヤプノフスペクトルを調べ，一つのリヤプノフ指数が常にゼロで，もう一つのリヤプノフ指数が写像 f_θ のリヤプノフ指数に一致していることを見る．写像 \tilde{M} において，接ベクトル u_0 に対応するリヤプノフ指数は次式で与えられる

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|D\tilde{M}^n(y_0, z_0)u_0\|. \quad (4.17)$$

ここで $D\tilde{M}^n(y_0, z_0)$ は n 回写像 $(y_n, z_n) = \tilde{M}^n(y_0, z_0)$ のヤコビ行列である

$$D\tilde{M}^n(y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_n}{\partial y_0} & \frac{\partial y_n}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z_n}{\partial y_0} & \frac{\partial z_n}{\partial z_0} \end{pmatrix}.$$

式 (4.15) からヤコビ行列 $D\tilde{M}^n(y_0, z_0)$ は次のように変換される

$$D\tilde{M}^n(y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial x_0} - k \frac{\partial x_n}{\partial \theta} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta} \\ k \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_0} - k \frac{\partial x_n}{\partial \theta} \right) - k & k \frac{\partial x_n}{\partial \theta} + 1 \end{pmatrix}.$$

すぐにチェックできるように， $D\tilde{M}^n(y_0, z_0)$ は固有値 $\frac{\partial x_n}{\partial x_0}$ に属する固有ベクトル $(1, k)$ を持つ．従って，式 (4.17) において接ベクトルを $u_0 = (1, k)$ に取ると，リヤプノフ指数の一つが次のように与えられる

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\partial x_n}{\partial x_0} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln |f'_\theta(x_j)| \equiv \lambda_{f_\theta}. \quad (4.18)$$

すなわち，リヤプノフ指数の一つは写像 f_θ のリヤプノフ指数 λ_{f_θ} に一致する．式 (4.17) は u_0 に依存して最大二つの値を持つ．もう一つのリヤプノフ指数を $\bar{\lambda}$ で表そう．このとき，これらの指数は次の関係を満足しなければならない

$$\lambda_{f_\theta} + \bar{\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\det D\tilde{M}^n(y_0, z_0)|.$$

式 $\det D\tilde{M}^n(y_0, z_0) = \frac{\partial x_n}{\partial x_0}$ から $\lambda_{f_\theta} + \bar{\lambda} = \lambda_{f_\theta}$ であるので，リヤプノフ指数 $\bar{\lambda}$ は常にゼロであるわかる．従って，写像 \tilde{M} のアトラクターはリヤプノフ指数 λ_{f_θ} が正であればカオスアトラクターであり，ゼロまたは負であれば非カオスアトラクターである．他の写像 F と M も同一のリヤプノフスペクトラム $\{\lambda_\theta, 0\}$ を持つ．

次に，アトラクターのストレンジ性を特徴付けるため， n 回写像 \tilde{M}^n の摂動方程式 $\delta \mathbf{u}_n = D\tilde{M}^n(y_0, z_0)\delta \mathbf{u}_0$ ，の振る舞いを調べよう．ここで $\delta \mathbf{u}_n = (\delta y_n, \delta z_n)$ は無限小の摂動ベクトルである．行列 $U = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ による直交変換により摂動方程式は $\delta \mathbf{u}'_n = UD\tilde{M}^n(y_0, z_0)U^{-1}\delta \mathbf{u}'_0$ へと変換される．ここで $\delta \mathbf{u}'_n = U\delta \mathbf{u}_n$ 及び

$$UD\tilde{M}^n(y_0, z_0)U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\frac{\partial x_n}{\partial x_0} - (k^2+1)\frac{\partial x_n}{\partial \theta} - k & \frac{\partial x_n}{\partial x_0} \end{pmatrix}$$

である．リヤプノフ指数 λ_{f_θ} が負の場合，微分係数 $\frac{\partial x_n}{\partial x_0} \sim e^{\lambda_{f_\theta} n}$ は大きな n に対し指数的に減少する．このとき摂動方程式は次のように近似される

$$\delta \mathbf{u}'_n \approx \delta y'_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -(k^2+1)\frac{\partial x_n}{\partial \theta} - k \end{pmatrix}.$$

すなわち，回転座標系 (y', z') ではアトラクターの微係数が軌道に沿って $\delta z'_n/\delta y'_n \approx -(k^2+1)\frac{\partial x_n}{\partial \theta} - k$ のように与えられる．よって，アトラクターのストレンジ性は微係数 $|\delta z'_n/\delta y'_n|$ の漸近挙動で測ることができる．これは [Pikovsky and Feudel 1995] の方法と同じストレンジ性の判定基準を与える．もし位相微分 $|\frac{\partial x_n}{\partial \theta}|$ が全ての n に対して有界であれば，アトラクターは滑らかである．一方，位相微分 $|\frac{\partial x_n}{\partial \theta}|$ が非有界で，軌道に沿って任意に大きくなるのであれば，アトラクターは滑らかではあり得ない．式 (4.13) より，位相微分 $\frac{\partial x_n}{\partial \theta}$ は次の再帰式により与えられる

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial \theta} = \frac{\partial f_\theta(x_n)}{\partial x} \frac{\partial x_n}{\partial \theta} + \frac{\partial f_\theta(x_n)}{\partial \theta}. \quad (4.19)$$

[Pikovsky and Feudel 1995] に従って，アトラクターのストレンジ性を次の位相鋭敏性関数 $\Gamma(n)$ によって評価しよう

$$\Gamma(n) = \min_{x_0, \theta_0} \left[\max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{\partial x_k}{\partial \theta} \right| \right].$$

表 4.1: 図 4.3 におけるアトラクタータイプ

アトラクター	記号・色	特性指数	判定基準
不動点	P ・黒	$\lambda_{f_\theta} < 0, \mu = 0$	$\Omega < \Omega_b(V)$
1 トーラス	$T1$ ・黒	$\lambda_{f_\theta} < 0, \mu = 0$	$\lambda_{f_\theta} < -10^{-5}, \nu < 0.1$
2 トーラス	$T2$ ・青	$\lambda_{f_\theta} = 0, \mu = 0$	$ \lambda_{f_\theta} < 10^{-5}$
SNA	S ・緑	$\lambda_{f_\theta} < 0, \mu > 0$	$\lambda_{f_\theta} < -10^{-5}, \nu > 0.1$
カオス	C ・赤	$\lambda_{f_\theta} > 0$ (μ undefined)	$\lambda_{f_\theta} > 10^{-5}$

$\Gamma(n)$ は SNA に対しては次のような漸近挙動を示す

$$\Gamma(n) \sim n^\nu (\nu > 0).$$

ここで ν は位相鋭敏性指数である。従って、写像 \tilde{M} のアトラクターは $\lambda_{f_\theta} < 0$ 且つ $\nu > 0$ の場合に SNA であると言える。 $\lambda_{f_\theta} = 0$ 且つ $\nu > 0$ の場合、critical SNA と呼ばれる [Prasad et al. 1999; Negi and Ramasawamy 2001; Datta et al. 2003]。経験的には critical SNA が生じるパラメータ領域の測度はゼロである。

4.5 Ω - V 平面の相図

以下ではパラメータを $k = (\sqrt{5} - 1)/2$, $\alpha = 0.5$ に設定する。図 4.3 は写像 \tilde{M} の Ω - V 平面における相図である。色の違う領域はリヤプノフ指数 λ_{f_θ} と位相鋭敏性指数 ν により特徴づけられている (表 4.1 参照)。 $\Omega < \Omega_b(V)$ の領域 FP (黒) では、複数の不動点アトラクターが存在し、これらが唯一のアトラクターである。これに対し $\Omega > \Omega_b(V)$ では正の回転数を持つ次のタイプのアトラクターが存在する:

1 トーラス。一つかそれ以上の滑らかな曲線上の準周期アトラクター。 $\lambda_{f_\theta} < 0$ 且つ $\nu = 0$ を持ち、 $T1$ でラベルされた Arnold tongue 状の領域 (黒) に存在する。以後、これらのアトラクターを (シングルまたは重複) “1 トーラス” と呼ぶ。

2 トーラス。2 トーラス全体に広がった準周期アトラクター。 $\lambda_{f_\theta} = 0$ 且つ $\nu = 0$ を持ち、 $T1$ -tongue に挟まれた可逆領域 (青) に存在する。以後、これらのアトラクターを “2 トーラス” と呼ぶ。

カオスアトラクター。 $\lambda_{f_\theta} > 0$ を持ち、非可逆領域 Ch (赤) に存在する。

SNA。 $\lambda_{f_\theta} < 0$ 且つ $\nu > 0$ を持ち、 $T1$ -tongue の境界付近の領域 SNA (緑) に存在する。

数値計算における判定基準を表 4.1 に示す²。

²この際、リヤプノフ指数 λ_{f_θ} の計算には最初の 5×10^3 ステップを除いた 2×10^6 ステップのデータを用いる。また、位相鋭敏性指数 ν には位相鋭敏性関数 $\log \Gamma(n)$ の区間 $[10^5, 10^7]$ におけるベキ指数を用いる。

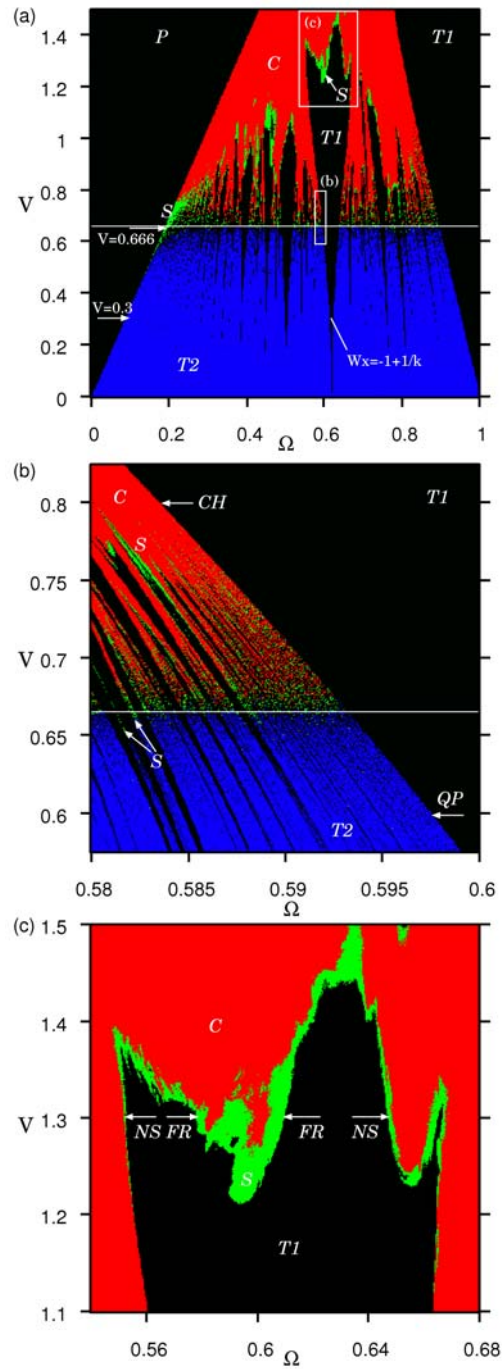


図 4.3: (a) 写像 \tilde{M} の Ω - V 平面の相図. 不動点領域 FP は黒色, 1 トーラス領域 $T1$ も黒色, 2 トーラス $T2$ 領域は青色, SNA 領域は緑色, カオス領域 Ch は赤色で示している. 実線 $V = V_c (= 2/3)$ は平面を可逆領域 (下) と非可逆領域 (上) に分ける. (b) 小領域 “(b)” の拡大図. 矢印 QP と CH はそれぞれ 2 トーラスまたはカオスへと至るスムーズ・サドル・ノード分岐ルートを示している. (c) 小領域 “(c)” の拡大図. 矢印 NS は nonsmooth・サドル・ノード分岐ルートを, FR はトーラス・フラクタル化ルートを示している.

4.5.1 位相ロック条件とアトラクターのタイプ

領域 FP と $T1$ -tongue ではダイナミクスは位相ロックされた状態にある．すなわち，回転数は次の条件を満たす一定値で与えられる

$$W_y = \frac{m}{n} + \frac{l}{n} \cdot \frac{1}{k}, \quad W_z = \frac{m}{n}k + \frac{l}{n} \quad (l, m, n \in \mathbb{Z}). \quad (4.20)$$

図 4.4 は $V = V_c (= 2/3)$ における回転数 W_y を Ω の関数として書いたものである．平らな部分が簡単な整数の組 (m, l, n) で与えられていることがわかる．1 トーラスアトラクターを構成する曲線の一つを取り出してみると， y, z 方向の重複度の比が $|m/l|$ で与えられる．しかし，三つ組 (m, l, n) 自体はトーラスの形状からは決定できない．ここで注意しておくとして，領域 FP と $T1$ は位相ロック領域全体に含まれるが，その逆は必ずしも成り立っていない．実際，位相ロック条件を満たす SNA やカオスアトラクターも存在する．

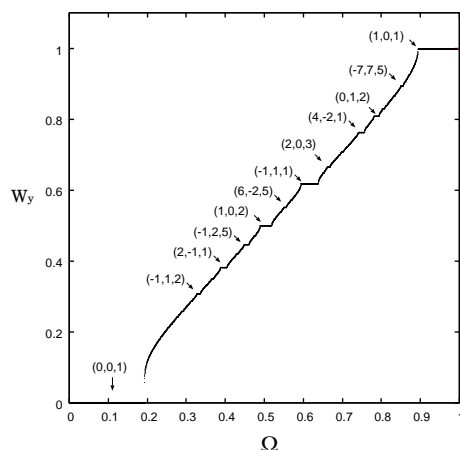


図 4.4: 悪魔の階段: $V_c = 2/3$ での回転数 W_y . 各位相ロック領域は式 (4.20) における整数組 (m, l, n) で特徴付けられる.

4.6 写像 \tilde{M} の分岐現象

写像 \tilde{M} の $\Omega - V$ 平面における分岐現象をタイプごとに詳しく解析する．

4.6.1 スムース・サドル・ノード分岐

まず 1 トーラスが 2 トーラスおよびカオスアトラクターに分岐するメカニズムについて述べる．回転数 $W_y = -1 + 1/k$ を持つ $T1$ -tongue に注目する (図 4.3(a) および拡大図 4.3(b)) . ただし，以

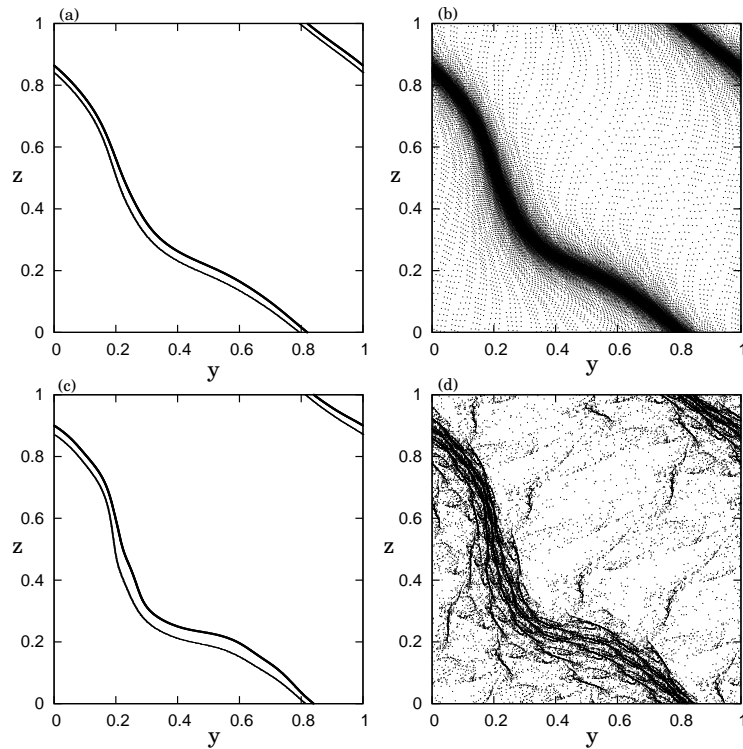


図 4.5: 安定トーラスと不安定トーラスの衝突による 1 トーラスから大域的アトラクターへの分岐 . (a) 遷移前の安定トーラス (太線) と不安定トーラス (細線) ($\Omega = 0.5976, V = 0.6$). (b) 遷移後の 2 トーラス ($\Omega = 0.5974, V = 0.6$) (ルート QP). (c) 遷移前の安定トーラス (太線) と不安定トーラス (細線) ($\Omega = 0.5838, V = 0.8$). (d) 遷移後のカオスアトラクター ($\Omega = 0.582, V = 0.8$) (ルート CH).

下で説明する分岐現象は一般に他の $T1$ -tongue でも観察される. パラメータ (Ω, V) が $T1$ -tongue の境界を横切ると, 1 トーラスは領域境界点のパラメータ値に依存して異なるタイプのアトラクターに遷移する. 図 4.5(a) と 4.5(b) はルート QP に沿って 1 トーラス (太線) が 2 トーラスに遷移する様子を示している. また, 図 4.5(c) と 4.5(d) はルート CH に沿って 1 トーラス (太線) がカオスアトラクターに遷移する様子を示している. どちらのルートにおいても安定トーラス (太線) と不安定トーラス (細線) が一様に接近し, 遷移点において衝突し大域的なアトラクターとなる. このような分岐はスムーズ・サドル・ノード分岐と呼ばれている [Feudel et al. 1997; Feudel et al. 2006].

4.6.2 ノンスムース・サドル・ノード分岐

論文 [Badaed 2006] で言及されているように，写像 \tilde{M} ではノンスムース・サドル・ノード分岐によって 1 トーラスから SNA へ遷移が起こる (例えば図 4.6 の \times 印の位置)．パラメータが $T1$ -tongue の境界を横切るとき，1 トーラスは不安定 1 トーラスと衝突し SNA へと遷移する．そのような遷移の一つが $V = 0.666$ のレベルでは $\Omega^* = 0.29406734$ で生じる．図 4.7(a) は $V = 0.666$, $\Omega = 0.294060$ における 7 バンド 1 トーラスと不安定トーラスを示している．この安定な 1 トーラスは指数 $\lambda_{f_\theta} = -0.004863$, $\nu = 0$ で特徴付けられる．また図 4.7(b) は $\Omega = 0.2940674$, $V = 0.666$ における SNA を示している．この SNA の特性指数は $\lambda = -0.000406$, $\nu = 1.03$ である．一般にノンスムース・サドル・ノード分岐においては位相ロック条件が破れている．実際このとき， y の回転数は $W_y = (-3 + 3/k)/7 \approx 0.2648717$ から $W_y \approx 0.2648790$ へと変化している．

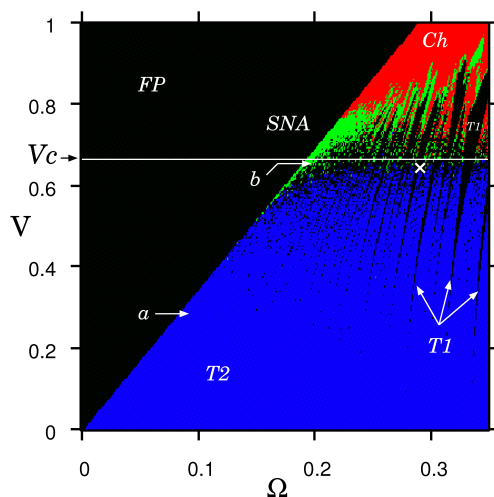


図 4.6: Ω - V 平面の相図における境界 $\Omega = \Omega_b(V)$ 付近の拡大図．領域のラベルや色は図 4.3 と同じ．

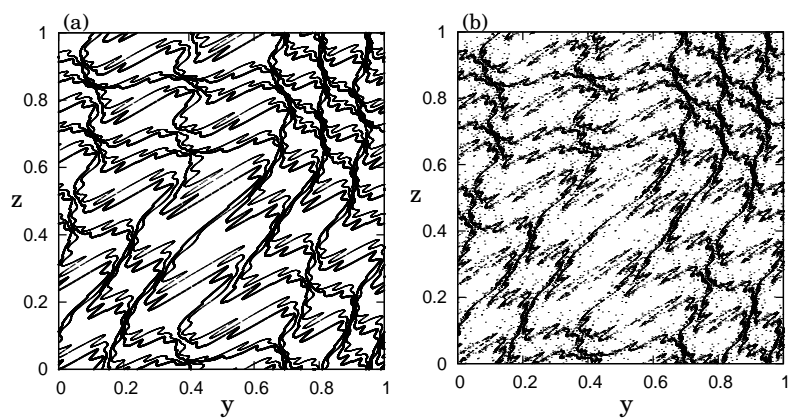


図 4.7: ノンスムース・サドル・ノード分岐による SNA の発生 (転移点 $\Omega^* = 0.29406734$, $V = 0.666$ 付近): (a) 7バンド安定 1 トーラス (太点) と 7バンド不安定トーラス (細点) . $\Omega = 0.294060$, $V = 0.666$. (b) SNA . $\Omega = 0.2940674$, $V = 0.666$.

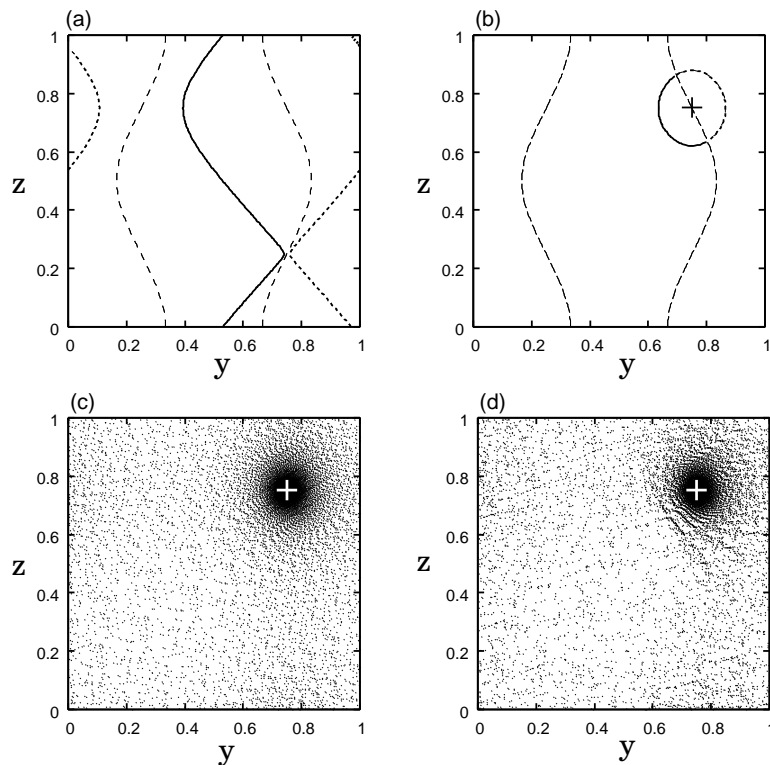


図 4.8: 不変曲線上に存在する安定不動点 (実線部), 不安点不動点 (点線部). (a) 最初の不動点対が衝突する直前 $V = 0.666$, $\Omega = 0.02$. (b) 不動点対が衝突を始めた後 $V = 0.666$, $\Omega = 0.165$. (a), (b) において臨界曲線 $\Lambda(y, z) = 0$ はダッシュ線で示されている. 二本の臨界曲線の内側は縮小領域, 外側は拡大領域である. (c) 境界より少し外側の $V = 0.3$, $\Omega = \Omega_b(0.3) + 10^{-6}$ における 2 トーラス. (d) $V = 0.666$, $\Omega = \Omega_b(0.666) + 10^{-6}$ における SNA. プラス (+) は最後の不動点対が消滅する点 $(y, z) = (3/4, 3/4)$ の位置を示す.

4.6.3 SNA へと至る間欠性分岐

可逆領域では上記の nonsmooth-saddle-node 分岐に加え, SNA へと至るもう一つのルートが存在する. この分岐はパラメータが境界 $\Omega = \Omega_b(V)$ を横切るときに起こる. 領域 FP では不動点群が一本もしくは複数本の不変曲線上に存在している. この不変曲線は相空間上で $\sin(2\pi y) + \frac{\alpha}{k} \sin(2\pi z) = -\frac{2\pi\Omega}{V}$ を満たすように与えられる [図 4.8(a)]. この不動点に対する線形安定性解析によれば, 相空間は臨界曲線 $\Lambda(y, z) \equiv \cos(2\pi y) + \alpha \cos(2\pi z) = 0$ によって相体積が縮小する領域と拡大する領域に分けられる. 不動点は $\Lambda(y, z) < 0$ で安定で, $\Lambda(y, z) > 0$ で不安定である. $\Omega < \frac{V}{2\pi} (1 - \frac{\alpha}{k})$ の場合, 安定不動点 (実線) と不安定不動点 (点線) は図 4.8(a) のように, 二つの臨界曲線 (ダッシュ線) で分けられている. これに対して境界に近い $\frac{V}{2\pi} (1 - \frac{\alpha}{k}) \leq \Omega < \Omega_b(V)$ では, 安定・不安定不動点

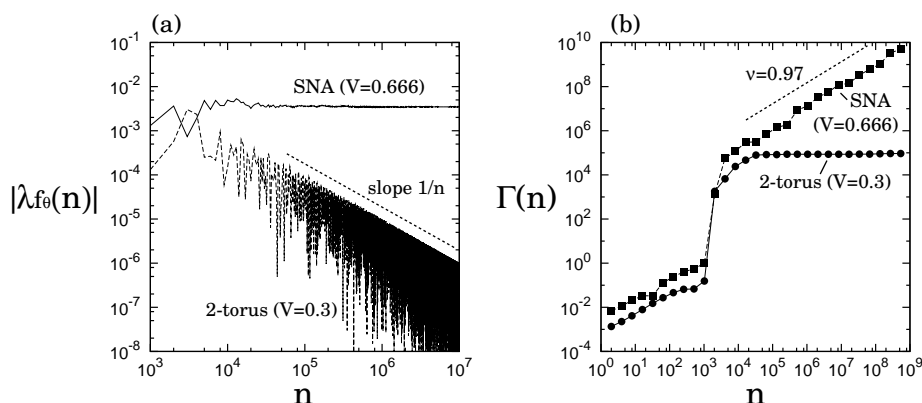


図 4.9: (a) 有限時間リヤプノフ指数の絶対値 $|\lambda_{f_\theta}(n)|$ の収束過程. (b) 位相鋭敏関数 $\Gamma(n)$. $V = 0.3$ は図 4.8(c) の 2 トーラスと $V = 0.666$ は図 4.8(d) の SNA に対応する.

群のいくらかが対消滅し、残った不動点はリング状の不変曲線を形成する [図 4.8(b)]. さらに境界に近づくとそのリング状の不変曲線は安定・不安定不動点群の連続的な対消滅を伴って収縮し、終に $\Omega = \Omega_b(V)$ では、最後の不動点对が $(y, z) = (3/4, 3/4)$ で消滅する. 結果として、2 トーラス, SNA, カオスアトラクターなど様々なタイプのアトラクターがパラメータ値に応じて出現する.

図 4.8(c) は $V = 0.3, \Omega = \Omega_b(0.3) + 10^{-6}$ における 2 トーラス ($\lambda_{f_\theta} = 0, \nu = 0$) を, 図 4.8(d) は $V = 0.666, \Omega = \Omega_b(0.666) + 10^{-6}$ における SNA ($\lambda_{f_\theta} \approx -0.00349, \nu \approx 0.97$) を示している. 2 トーラスが実際にゼロリヤプノフ数 $\lambda_{f_\theta} = 0$ を持っていることを確認するため, 有限時間リヤプノフ数 $\lambda_{f_\theta}(n) := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln |f'_\theta(x_j)|$ の収束過程を調べる. 図 4.9(a) は有限時間リヤプノフ数の絶対値 $|\lambda_{f_\theta}(n)|$ を図示したものであるが, SNA のそれがゼロでない値に収束するのに対し, 2 トーラスでは $|\lambda_{f_\theta}(n)| \sim 1/n$ のスピードでゼロへと収束していくのが分かる. 図 4.9(b) はこの二つのアトラクターに対して位相鋭敏関数 $\Gamma(n)$ の増大を図示したものであるが, 2 トーラスでは $\Gamma(n)$ が有限値に飽和するのに対し, SNA では明瞭なべき発散が確認できる.

我々は境界の近くに存在する SNA の例を見たが, 境界の極近傍にも SNA が存在するかどうかは調べるべき問題である. なぜなら境界の極近傍には $T1$ -tongues が密に存在しているからである. 図 4.10(a) と図 4.10(b) はリヤプノフ指数 λ_{f_θ} と位相鋭敏指数 ν のパラメータ $\Delta\Omega = \Omega - \Omega_b(V)$ 依存性を示している. $V = 0.666$ の場合には小さい値 $\Delta\Omega$ において, 位相鋭敏指数 ν が 1.0 ± 0.3 の高い値を維持するのが見て取れる. これは境界近傍に多くの SNA が存在することを示唆している. これにより, 我々は SNA が不動点群の対消滅というメカニズムによって生じると結論する.

この様に発生したアトラクターは, 相空間に大域的に広がり, ダイナミクスは強い間欠性を呈する. 図 4.8(c), 4.8(d) のプラス (+) は最後の不動点对が消滅する位置を示している. 分岐後も軌道はこの不動点の“廃墟”近傍に長時間捕らわれる. 次節で詳しく説明するように, この間欠性

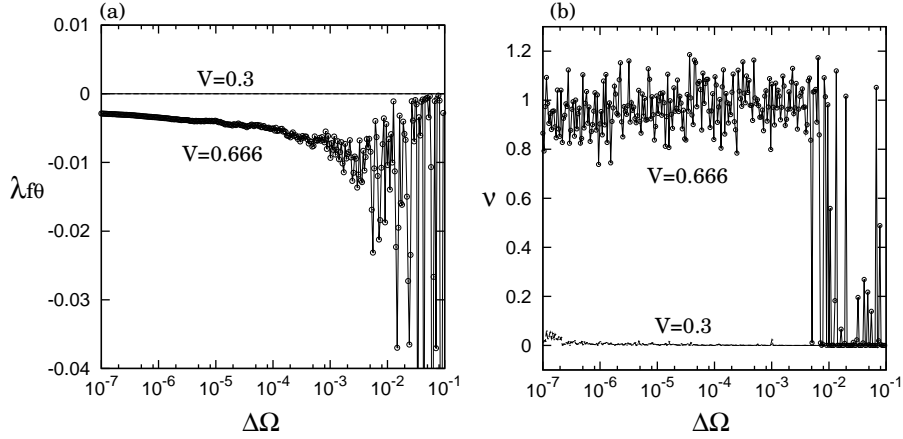


図 4.10: (a) リヤプノフ指数 λ_{f_θ} と $\Delta\Omega = \Omega - \Omega_b(V)$ の関係 . (b) 位相鋭敏指数 ν と $\Delta\Omega$ の関係 . $V = 0.3$ は図 4.3 のルート a , $V = 0.666$ はルート b に対応する .

のタイプはこれまでに報告された例のないものであり , 我々はこのルートを新しい間欠性ルートとして分類する .

4.6.4 間欠性分岐近傍のダイナミクスとスケーリング則

ここでは不動点群の連続的対消滅により発生する SNA の間欠性をより詳細に調べよう . その結果 , 平均滞在時間および回転数における対数特異性の存在が明らかになる .

同相写像 (4.15) により , 写像 \tilde{M} のトラジェクトリー $(y_n, z_n) \in \mathbb{T}^2$ は , 写像 f_θ [式 (4.13)] のトラジェクトリー $x_n \in \mathbb{R}$ に一対一対応している . 後者におけるインターミッション (小休止) は状態 x_n が写像 $f_\theta(x)$ と 45° ラインの狭いチャンネルを通過するとき起こる (図 4.11) . パラメータ Ω が $\Omega_b(V) [\equiv \frac{V}{2\pi} (1 + \frac{\alpha}{k})]$ より僅かに大きく , $V \leq V_c [\equiv 1/(1 + \alpha)]$ の場合 , 写像 $f_\theta(x)$ は 45° ラインより常に上にあり且つ単調増加である . 従って , 状態 x_n は $I_m \equiv [m, m + 1)$ ($m \geq \lfloor x_0 \rfloor$) で定義されるそれぞれの単位区間を必ず一度だけ通過する ($\lfloor x_0 \rfloor$ は x_0 を超えない最大の整数) . ここで滞在時間 $T_m(x_0, \theta)$ を状態 x_n が区間 I_m に滞在している時間として定義する:

$$T_m(x_0, \theta) = \min\{n | x_n \geq m + 1\} - \min\{n | x_n \geq m\}. \quad (4.21)$$

状態 x_n は写像関数と 45° ラインの間の狭いチャンネルを通過する時に多くのステップを要する . そのような狭いチャンネルは二つの \sin 項が同時に -1 に近づく場所である . すなわち少なくとも $x \approx 3/4 + m$ ($m \in \mathbb{Z}$) でなければならない . 各単位区間 I_m で変数を $\tilde{x} = x - (3/4 + m)$ のように

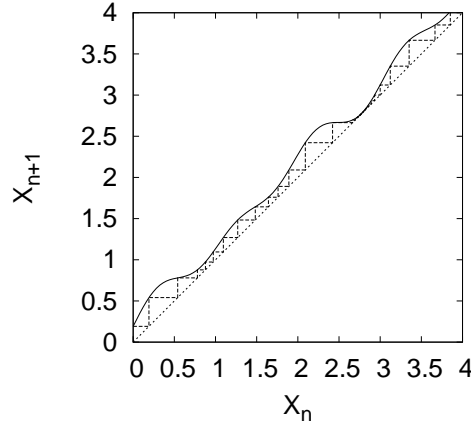


図 4.11: 間欠性分岐直後の写像 $x_{n+1} = f_\theta(x_n)$ のダイナミクス．実線は写像 $f_0(x)$ のグラフ．

取ると, チャネル近傍での振る舞いは次の常微分方程式で近似できる

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dn} &\approx \Omega + \frac{V}{2\pi} \left[-\cos 2\pi\tilde{x} + \frac{\alpha}{k} \sin [k(\tilde{x} + 3/4 + m) + \theta] \right], \\ &= \Omega - \frac{V}{2\pi} \left[\cos 2\pi\tilde{x} + \frac{\alpha}{k} \cos 2\pi(k\tilde{x} + \varepsilon_m) \right]. \end{aligned}$$

ここで n は連続変数と見なされている．パラメータ ε_m は各セルで次のように定義されている:

$$\varepsilon_m := \begin{cases} [k(3/4 + m) + \theta - 3/4] \pmod{1} & \text{if } [k(3/4 + m) + \theta - 3/4] \pmod{1} \leq 1/2, \\ [k(3/4 + m) + \theta - 3/4] \pmod{1} - 1 & \text{if } [k(3/4 + m) + \theta - 3/4] \pmod{1} > 1/2. \end{cases}$$

数列 ε_m は円周上 $(-1/2, 1/2]$ の角度 k の一様回転と捉えられる．従って, ε_m は無限に小さくなり得る ($\liminf_{m \rightarrow \infty} |\varepsilon_m| = 0$). 大きなインターミッションは非常に小さな ε_m のセルで発生する．そこでは $2\pi\tilde{x}$ と $2\pi(k\tilde{x} + \varepsilon_m)$ が非常に小さくなるので上記の微分方程式は次の二次形式で近似できる

$$\frac{d\tilde{x}}{dn} \approx \Delta\Omega + \pi V \left[(1 + k\alpha) \left(\tilde{x} + \frac{\alpha\varepsilon_m}{1 + k\alpha} \right)^2 + \frac{\alpha\varepsilon_m^2}{k(1 + k\alpha)} \right].$$

大きなインターミッションの場合, 式 (4.21) で定義される滞在時間 T_m はチャネル近傍への滞在時間で占められる．この二次形式の常微分方程式を \tilde{x} で $\tilde{x} = 0$ を跨ぐように積分すると T_m は次のように求められる

$$T_m \simeq \frac{\pi}{\sqrt{\pi V(1 + k\alpha)\Delta\Omega + \alpha(\pi V\varepsilon_m)^2/k}}. \quad (4.22)$$

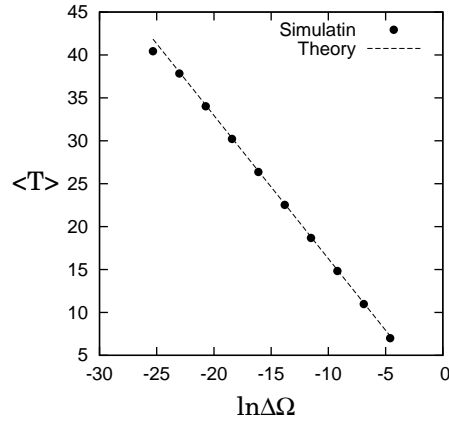


図 4.12: 単位区間への平均滞在時間 $\langle T \rangle$ の $\Delta\Omega$ 依存性 (黒丸). ダッシュ線は理論式 (4.23) を表す. $\ln \Delta\Omega < -25$ に見られる両データの乖離は統計データの不足によるものである. 実際, 統計データを増減するとそれに伴い乖離点も移動する.

数列 ε_m は $(-1/2, 1/2]$ において一様密度 $P(\varepsilon) = 1$ を持つ (添字 m は落としてある). ε で T_m についてアンサンブル平均を取ると, 滞在時間の平均値は次のように計算される

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &\simeq c \left[\ln \left| \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta\Omega/p} \right| \right]_{\varepsilon=-1/2}^{\varepsilon=1/2}, \\ &\rightarrow -c \ln \Delta\Omega + c \ln p^{-1} \quad (\Delta\Omega \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (4.23)$$

ここで, $c = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{k}{\alpha}}$ 且つ $p = \frac{\alpha\pi V}{k(1+k\alpha)}$ である. 図 4.12 は理論式 (4.23) と数値計算結果の良い対応を示している. 定義より y の回転数は $W_y = 1/\langle T \rangle$ と書けるので, $W_y, W_z (= kW_y)$ も $\Delta\Omega$ に対して対数特異性を持つ.

軌道が不動点の廃墟を去るとき, 位相微分 $\left| \frac{\partial x_n}{\partial \theta} \right|$ は式 (4.19) に従って乗算的に大きくなる. これは微分 $f'_\theta(x_n)$ が絶対値が 1 より大きな値を長時間取り続けることによる. これが図 4.9(b) において位相鋭敏関数 $\Gamma(n)$ が最大滞在時間 ($n \approx 2 \times 10^3$) 付近で突然増加する理由である.

丁度境界線上 $\Omega = \Omega_b(V)$ では, 滞在時間の平均値 $\langle T \rangle$ が発散するので, 回転数 W_y, W_z はともにゼロである. しかしこのとき, 回転数のゼロへの収束過程には対数関数の入れ子型の公式で表される遅い収束が見られる. この結果は 5 章で詳しく解析する.

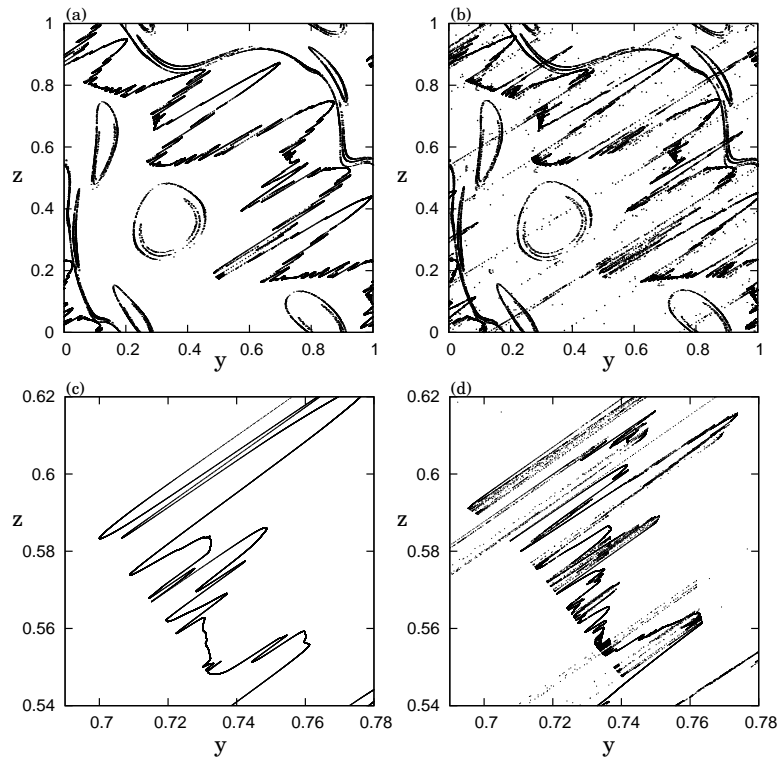


図 4.13: 安定 1 トーラスと不安定不変集合の部分的衝突による SNA の発生 . (a) 衝突直前の安定 1 トーラス (太点) および不安定不変集合 (細点) . パラメータはルート SN 上の $(\Omega, V) = (0.646, 1.3)$. (b) 衝突後の SNA (太点) と不安定不変集合 (細点) . パラメータはルート SN 上の $(\Omega = 0.647, V = 1.3)$. SNA のリヤプノフ指数は $\lambda_{f_\theta} \approx -0.02243$. (c) と (d) はそれぞれ (a) および (b) のアトラクターの拡大図である .

4.6.5 位相依存型サドル・ノード分岐

非可逆領域では 1 トーラスから SNA を経由してカオスへ至るいくつかのタイプの分岐ルートが存在する . その一つが位相依存型サドル・ノード分岐 [Kim et al. 2003] である . 図 4.3(c) において NS とラベルされたルートがこれに相当する . パラメータ (Ω, V) が領域 $T1$ の内側から境界に近づくとき, 安定な 1 トーラスは次第によじれ不安定不変集合 (リペラー)³ に接近する [図 4.13(a)] . そして転移点において 1 トーラスが不安定不変集合と「部分的に」衝突し, SNA へと遷移する [図 4.13(b)] . 図 4.13(c) および 4.13(d) はそれぞれ 1 トーラスと SNA の拡大図である . 比較のため位相鋭敏関数 $\Gamma(n)$ の振る舞いの違いを図 4.14 に示す .

³非可逆領域では写像 \tilde{M} の逆写像は多価になるので, 複数ある逆元から一つをランダムに選ぶことで不安定不変集合 (リペラー) を計算した .

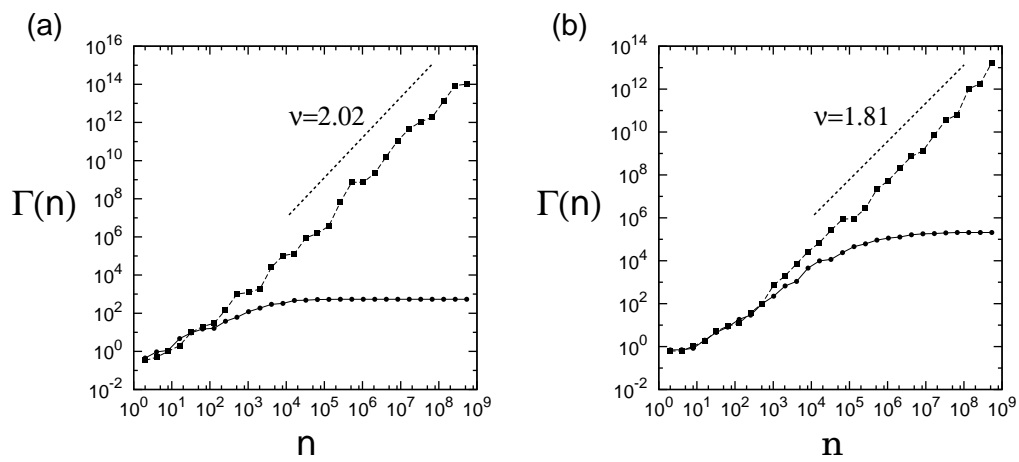


図 4.14: (a) 図 4.13(a) のトーラス (丸) と 4.13(b) の SNA(四角) に対する位相鋭敏関数 $\Gamma(n)$. (b) 図 4.15(a) のトーラス (丸) と 4.15(b) の SNA(四角) に対する位相鋭敏関数 $\Gamma(n)$.

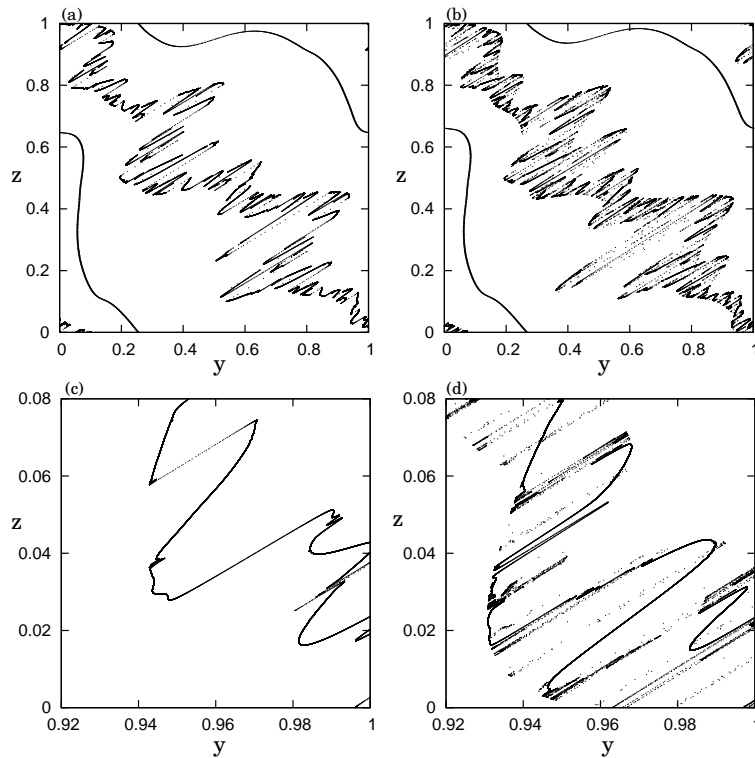


図 4.15: ルート FR に沿った 1 トーラスのフラクタル化による SNA の出現. (a) 安定 1 トーラス (太点) と不安定 1 トーラス (細点). パラメータは $(\Omega = 0.61, V = 1.3)$. (b) SNA (太点) と不安定 1 トーラス (細点). パラメータは $(\Omega = 0.605, V = 1.3)$ (c), (d) はそれぞれ (a) と (b) のアトラクターの拡大図である.

4.6.6 トーラスのフラクタル化

SNA を発生させるもう一つのメカニズムは, 図 4.3(c) のルート FR で起こるトーラスのフラクタル化である. このメカニズムは準周期駆動される写像系において Kaneko らにより発見された [Kaneko 1984; Nishikawa and Kaneko 1996]. パラメータ (Ω, V) が転移点に近づくと 1 トーラスはよじれ, 不安定不変集合との衝突無しにフラクタル化する. 図 4.15(a) と 4.15(b) は安定 1 トーラスが不安定 1 トーラスと衝突せずに SNA に遷移する様子が示されている. 図 4.15(c) と 4.15(d) はそれぞれ図 4.15(a) と 4.15(b) の拡大図である. 図 4.14(b) は図 4.15(a) の安定 1 トーラスと 4.15(b) の SNA に対する位相鋭敏関数の振る舞いを示したたものである. SNA に対しては $\Gamma(n) \sim n^\nu$ ($\nu \approx 1.81$) が成立している.

4.7 4章のまとめ

本章では非スキュープロダクト写像における SNA の発生メカニズムを探究した．準周期的に回転を拘束したキックされる二つの回転子から拡張された Badard 写像を理論的に導出し，パラメータ平面における分岐現象を数値計算により詳しく解析した．ここでは 2 章で述べられた位相鋭敏性指数の方法を非スキュープロダクト写像に適用できるように拡張して用いた．その結果，次のような分岐現象が観測された：

- 「スムーズ・サドル・ノード分岐」による 1 トーラスから 2 トーラスへの遷移，および 1 トーラスからカオスアトラクターへの遷移
- 「ノンスmooth・サドル・ノード分岐」による 1 トーラスから SNA への遷移
- 「安定・不安定不動点群の連続的対消滅」による不動点から SNA への直接遷移 (間欠性ルート)
- 「位相依存型サドル・ノード分岐」による 1 トーラスから SNA への遷移
- 「トーラスのフラクタル化」による不安定不変集合との衝突を経ない 1 トーラスから SNA への遷移

さらに，間欠性ルートの特徴として，不動点の最終消滅点近傍への軌道の平均滞在時間 $\langle T \rangle$ が，分岐点からの距離 $\Delta\Omega$ に対し対数特異性 $\langle T \rangle \propto -\ln \Delta\Omega$ を持つことを理論的に示した．

Badard の導入したストロボ写像 (4.7) は幾分一般化することができる．次の \mathbb{R}^2 上の非スキュープロダクト写像を考える

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Omega_y + F(y_n, z_n), \\ z_{n+1} &= z_n + \Omega_z + kF(y_n, z_n). \end{aligned} \quad (4.24)$$

ここで $F(y, z)$ は y, z の周期関数であり， Ω_y, Ω_z, k は任意の実数であるとする．4.4 節と同様の方法により，写像 (4.24) は少なくとも一つのゼロリヤブノフ指数を持つことを証明できる．また，微分同相写像 $(x_n, \theta_n) = (y_n, z_n - ky_n)$ により，写像 (4.24) は別のクラスのスキュープロダクト写像に変換できる

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Omega_y + F(x_n, kx_n + \theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \omega. \end{aligned} \quad (4.25)$$

ここで $\omega = \Omega_z - k\Omega_y$ である．Badard のストロボ写像は k が無理数かつ $\omega = 0$ の場合に相当する． ω が無理数であれば，写像 (4.25) は準周期駆動されるスキュープロダクト写像になり，SNA が典型的に存在する． ω が有理数であれば，写像 (4.25) は周期駆動されるスキュープロダクト写像になる．このとき， k を無理数に選べば，拡張 Badard 写像の場合と同じく SNA が存在できると予

想される. 従って, 関数 F を適切に選べば, 式 (4.24) のクラスの非スキュープロダクト写像には SNA が存在すると予想される.

第5章 間欠性ルートにおける回転数の遅い収束

前章では、拡張された Badard 写像 \tilde{M} において、安定・不安定不動点群の連続的対消滅の果てに、間欠的 SNA が発生することを示した (間欠性ルート)。この章では、この間欠性ルートの分岐点上におけるダイナミクスを詳細に考察し、回転数 W_y が対数関数の入れ子型の公式で表される遅い収束を示すことを明らかにする。以下、断らない限り本章で用いる記号は前章と同様とする。

5.1 準備

拡張された Badard 写像 $M : (y_n, z_n) \mapsto (y_{n+1}, z_{n+1})$ は、微分同相変換 $(y_n, z_n) = (x_n, kx_n + \theta)$ により、実質的に一次元写像 $x_{n+1} = f_\theta(x_n)$ と同等であった (4.2 節参照)。すなわち、回転数の収束過程 $(y_n - y_0)/n$ を調べることは、一次元写像 f_θ における $(x_n - x_0)/n$ の漸近挙動を調べることと等しい。本章では f_θ に対して $x'_n = x_n + 3/4$, $\theta' = \theta + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}k$ の変数変換を行い、改めてダッシュ (') を省略した次の一次元写像を解析する:

$$x_{n+1} = x_n + \Omega - \frac{V}{2\pi} \left(\cos 2\pi x_n + \frac{\alpha}{k} \cos 2\pi(kx_n + \theta) \right). \quad (5.1)$$

ここで、パラメータは分岐点上の条件 $\Omega = \Omega_b(V)$ を満たすとする。前章で述べたように、一次元写像 (5.1) の運動は、狭いチャンネル付近で次のような連続時間近似が可能である

$$\frac{dx}{dt} = \Omega - \frac{V}{2\pi} \left(\cos 2\pi x + \frac{\alpha}{k} \cos 2\pi(kx + \theta) \right). \quad (5.2)$$

さらに前章では、滞在時間の統計的性質がチャンネル近傍のダイナミクスで本質的に決定されることを示した。すなわち、一次元写像 (5.1) の長時間挙動は、常微分方程式 (5.2) の長時間挙動とほぼ同じである。本章では、式 (5.2) において、パラメータを $\Omega = 1$, $\theta = 0$, $\alpha = k$ に固定して得られる次の常微分方程式系を解析する [Mitsui 2008]

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{2} \cos(2\pi x) - \frac{1}{2} \cos(2\pi kx), \quad x(0) = x_0. \quad (5.3)$$

改めてパラメータ k は任意の実数であるとする。式 (5.3) を解析する理由は便宜的なものであるが、そこで得られた結果は、時間スケール変換により、すぐさま一次元写像 (5.1) に適用できることを後に説明する。

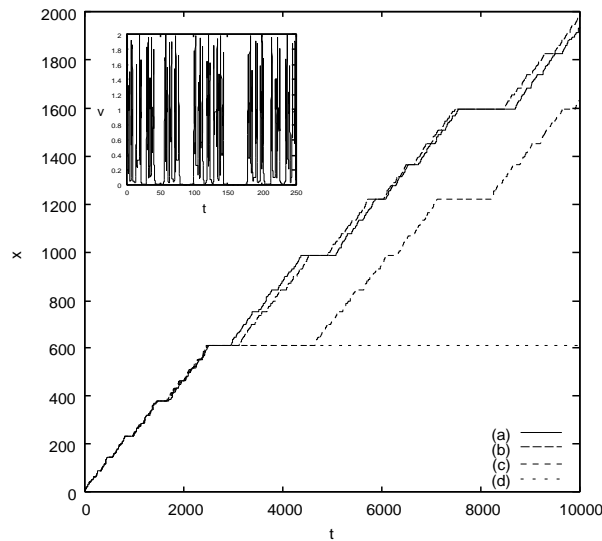


図 5.1: 時系列 $x(t)$. いずれも初期条件は $x_0 = 1/2$. 時系列 (a)-(b) は逆黄金比 $\varphi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ に近いが微小に異なるパラメータ k を持つ (表 5.1 参照). 挿入図は丁度 $k = \varphi^{-1}$ の場合の速度 $\dot{x}(t) = v(t)$ の時系列である.

表 5.1: 図 5.1 の時系列 (a)-(b) のパラメータ k 値. 有理数近似の記法は 5.4 節参照.

時系列	k	有理数近似	近似値
(a)	$\frac{102334155}{165580141}$	$[0; \bar{1}^{40}]$	0.618033988749894
(b)	$\frac{148099316}{239629871}$	$[0; \bar{1}^{14}, 2, \bar{1}^{25}]$	0.618033617353155
(c)	$\frac{514220604}{832027711}$	$[0; \bar{1}^{14}, 10, \bar{1}^{25}]$	0.618033260658830
(d)	$\frac{377}{610}$	$[0; \bar{1}^{14}]$	0.618032786885245

5.2 淀み運動

方程式 (5.3) から明らかなように変位 $x(t)$ は非減少であるが, 準周期的に傾きがゼロに近づく勾配の影響で頻りに速度が遅くなる. 図 5.1 は初期位置 $x_0 = 1/2$ をスタートした軌道の時系列 $x(t)$ を示している. 複数の時系列は, 逆黄金比 $\varphi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ に近いが微小に違うパラメータ k に対応している (表 5.1).

k が有理数 p/q である場合, 変位 $x(t)$ は最終的には平衡点の一つ $x = qn$ ($n \in \mathbb{Z}$) へ至る. 実際図 5.1 の $k = 377/610$ に相当する時系列 (d) は平衡点の一つ $x = 610$ へ収束している. パラメータ k が p/q とは若干異なる有理数 p'/q' , ただし $q' > q$, である時, 変位 $x(t)$ は p/q の場合の平衡点 $x = qn$ の近傍を通過するのに大きな時間を要する. このゆっくりとした運動を淀み運動と呼ぼう.

実際，図 5.1 の時系列 (a)-(c) は有理数 $337/610$ とは若干異なるパラメータ k を持つが， $x = 610$ 近傍を通過するのに多くの時間を要しており，パラメータが $337/610$ に近いほど淀み時間は長くなっている．淀み運動とそれ以外の早い運動の交代は良く知られた間欠性カオスを思い起こさせる (図 5.1 の挿入図に示された速度の時系列を見よ)．

k が無理数の場合は原点 $x = 0$ 以外の平衡点は無くなるが，パラメータ k が有理数 p/q に近い場合には $x = qn$ 近傍において軌道は淀む．パラメータ k が有理数の場合，可算無限個の平衡点があり，無理数では原点のみという点で，方程式 (5.3) は k に対して構造不安定である．

淀み点近傍のダイナミクス: x は際限なく単調増加するので，淀み点近傍の運動について解析するには局所的な変数を導入するのが良い．淀み運動が起きるとき，二つの \cos 項が 1 に近づいている必要がある．そのような場所は少なくとも整数点付近 $x \simeq n$ でなければならない．このことを考慮し，各单位区間 $I_n \equiv [n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$ において相対変数 $y = x - n$ ($-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$) を導入しよう．さらに，パラメータ列

$$\begin{aligned} \gamma_n &\equiv \begin{cases} kn \pmod{1} & \text{if } kn \pmod{1} \leq 1/2, \\ kn \pmod{1} - 1 & \text{if } kn \pmod{1} > 1/2, \end{cases} \\ \varepsilon_n &\equiv |\gamma_n| = \min[kn \pmod{1}, 1 - kn \pmod{1}]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

を導入すると単位区間 I_n におけるダイナミクスは次の様に書ける

$$\frac{dy(t)}{dt} = 1 - \frac{1}{2} \cos(2\pi y) - \frac{1}{2} \cos(2\pi(\gamma_n + ky)). \quad (5.5)$$

パラメータ γ_n と ε_n は単位区間 I_n において $-\frac{1}{2} < \gamma_n \leq \frac{1}{2}$ 及び $0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{2}$ の範囲で一意に定まる．それらは各单位区間での淀み時間の大きさを決定する．

5.3 滞在時間の密度関数

以下ではパラメータ k を無理数に限定し，初期条件を $x_0 = 1/2$ に設定しよう．このような設定をすると軌道 $x(t)$ は全ての単位区間 I_n ($n \geq 1$) を一度は訪れる．単位区間 I_n における滞在時間 T_n を次のように定義する

$$T_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{1 - \frac{1}{2} \cos(2\pi y) - \frac{1}{2} \cos(2\pi(\gamma_n + ky))}.$$

この積分における γ_n は積分区間の対称性を利用して ε_n に置き換えることができる

$$T_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{1 - \frac{1}{2} \cos(2\pi y) - \frac{1}{2} \cos(2\pi(\varepsilon_n + ky))}. \quad (5.6)$$

滞在時間の ε_n 依存性を解析的に知るために、積分に大きく寄与する、 $\cos(2\pi y) \sim 1$ 且つ $\cos(2\pi(\gamma_n + ky)) \sim 1$ となる y の領域を考える。この領域では両 \cos 項は 0 点回りでテイラー展開できる。 $k < 1$ では、各单位区間で多くても一つである。パラメータ $r \lesssim 1$ を使ってこの領域を具体的に書くと

$$\begin{aligned} I_{n,r} &= \{y \mid \cos(2\pi y) > r \wedge \cos(2\pi(\gamma_n + ky)) > r\}, \\ &= (\max[-\delta(r), -(\delta(r) + \gamma_n)/k], \min[\delta(r), (\delta(r) - \gamma_n)/k]). \end{aligned}$$

ここで $\delta(r) = \frac{1}{2\pi} \arccos(r)$ である。 $k > 1$ の場合は、式 (5.3) は変数変換 $k' = 1/k$, $x' = kx$, $t' = kt$ により $0 < k' < 1$ の場合と同様になる。よって以下ではパラメータを $0 < k < 1$ に限る。領域 $I_{n,r}$ では、式 (5.5) は二次のテイラー展開として次のように書ける

$$\frac{dy}{dt} \simeq \pi^2(1+k^2) \left(y + \frac{k}{1+k^2} \gamma_n \right)^2 + \frac{\pi^2 \varepsilon_n^2}{1+k^2}. \quad (5.7)$$

式 (5.7) の第 2 項は各单位区間における速度の最小値を与える。領域 $I_{n,r}$ における滞在時間 $T_{n,r}$ は式 (5.7) の積分により次のように与えられる

$$\begin{aligned} T_{n,r} &\simeq \frac{1}{\pi^2(1+k^2)} \left[\frac{1+k^2}{\varepsilon_n} \arctan \left[\frac{(1+k^2)y}{\varepsilon_n} \right] \right]_{\max[-\delta(r), -(\delta(r)+\gamma_n)/k] + \frac{k\gamma_n}{1+k^2}}^{\min[\delta(r), (\delta(r)-\gamma_n)/k] + \frac{k\gamma_n}{1+k^2}}, \\ &\rightarrow \frac{1}{\pi\varepsilon_n} \quad (\varepsilon_n \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (5.8)$$

単位区間中の $I_{n,r}$ 以外の領域 ($I_n \setminus I_{n,r}$) では、滞在時間は $1/(1-r)$ 以下である (なぜなら $\dot{y} > 1-r$)。従って、小さな ε_n を持つ単位区間では、滞在時間 T_n はチャネル近傍への滞在時間 $T_{n,r}$ でほぼ占められる。従って、

$$T_n \sim \frac{1}{\pi\varepsilon_n}. \quad (5.9)$$

チャネル幅 $d_n = \pi^2 \varepsilon_n^2 / (1+k^2)$ と滞在時間 T_n はスケーリング関係 $d_n \propto \varepsilon_n^{-1/2}$ ($\varepsilon_n \rightarrow 0$) を持っており、タイプ 1 間欠性に特徴的なスケーリング指数 $-1/2$ と等しい [Pomeau and Manneville 1980]。

十分な変位の後、観測される ε_n の密度分布は区間 $[0, 1/2]$ 上の一様分布 $F(\varepsilon_n) = 2$ となる¹。結果として、滞在時間の密度関数 $P(T)$ は公式 $P(T) = -F(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{dT}$ を使って十分大きな T に対し逆二乗則を満たすことがわかる

$$P(T) \rightarrow \frac{2}{\pi T^2} \quad (T \rightarrow \infty). \quad (5.10)$$

この密度分布においては平均、分散を含むすべてのモーメントが発散する。密度関数 $P(T)$ がパラメータ k に依存していないことに注意したい。

図 5.2 は、数値計算の結果と式 (5.9), (5.10) が良く一致していること示している。

¹ $kn \pmod{1}$ ($n \in \mathbb{N}$) が $[0, 1)$ に一様稠密に分布することによる (Jacobi の定理)[Arnold and Avez 1968]

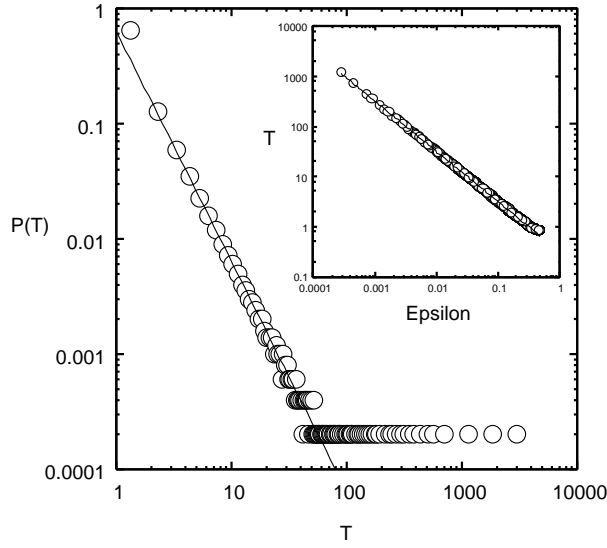


図 5.2: 滞在時間の密度関数 $P(T)$. パラメータは $k = \varphi^{-1}$. 初期条件は $x_0 = 1/2$ とし, 滞在時間は T_1 から T_{5000} までを用いた (ビンの幅は 1 に設定). 実線は理論式 (5.10) を表している. 大きな T で見られる数値実験データと理論式の乖離は, 十分な統計アンサンブルが得られていないことによるもの. 挿入図は T_n と $\varepsilon_n (n = 1, \dots, 2000)$ の関係を示している. 実線は理論式 (5.9) である. 数値実験値と理論式 $|T_n - \frac{1}{\pi\varepsilon_n}|$ の誤差は $\varepsilon_n < 0.001$ で 0.063 ± 0.001 に収束している.

5.4 最大滞在時間の更新

軌道 $x(t)$ が区間 $\cup_{n=1}^{n_l} I_n = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + n_l)$ を通過し終えた状況を考えよう. 観測される滞在時間 $T_j (j = 1, 2, \dots, n_l)$ のうち最大のを次のように書く

$$T_{n \leq n_l}^{\max} = T_{n < n_l + 1}^{\max} = \max\{T_n \mid 1 \leq n \leq n_l\}.$$

軌道が通過した区間の数 n_l が増えるにつれ, 最大滞在時間 $T_{n \leq n_l}^{\max}$ は更新される.

本節では最大滞在時間の大きさとその更新が起きる場所を特定する. そのためにパラメータ k の連分数展開を考える

$$k = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{i-1} + \frac{1}{\theta_i}}}}}} = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, \theta_i].$$

ここで $q_0 \in \mathbb{Z}$, $q_i \in \mathbb{N}$, $\theta_i \in \mathbb{R}$ および $\theta_i > 1$ である. q_i は部分商と呼ばれ $q_i = \lfloor \theta_i \rfloor$ で定義される. θ_i は i 番目の完全商と呼ばれ再帰式 $\theta_i = q_i + \frac{1}{\theta_{i+1}}$ により生成される. 完全商 θ_i を部分商 q_i に置き

換えることで, k の i 番目の有理数近似が得られる $P_i/Q_i = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, q_i]$. この有理数近似の列は次の再帰式により求められる [Rockett and Szusz 1992]

$$\begin{aligned} P_i &= q_i P_{i-1} + P_{i-2}, & P_{-2} &= 0, & P_{-1} &= 1, \\ Q_i &= q_i Q_{i-1} + Q_{i-2}, & Q_{-2} &= 1, & Q_{-1} &= 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

定義より数列 $\{P_i\}$ と $\{Q_i\}$ は単調増加である.

整数 m を kn に最も近い整数と定義すると, 5.2 節で定義したパラメータ列 ε_n は $\varepsilon_n = |kn - m|$ で与えられる. 連分数展開と有理数近似の知識を使うと, ε_n は $n = Q_i$ ($i \geq 1$) の場合には次のように与えられる (付録 C 参照)

$$\varepsilon_{Q_i} = |kQ_i - P_i| = \frac{1}{\theta_{i+1}Q_i + Q_{i-1}} \quad (i \geq 1). \quad (5.12)$$

次のラグランジェの定理は数列 $\{\varepsilon_n\}$ における順序関係を述べる [Rockett and Szusz 1992].

定理 2 m/n を分母 $1 \leq n \leq Q_{i+1}$ を持ち P_i/Q_i と P_{i+1}/Q_{i+1} と異なる有理数であるとする. このとき次の大小関係が成り立つ

$$|nk - m| > |kQ_i - P_i| > |kQ_{i+1} - P_{i+1}|.$$

定理 2 の証明は付録 D で行う. 式 (5.12) と定理 2 より次の系 1 が成り立つ.

系 1 ラグランジェの定理よりパラメータ ε_n に対し次の大小関係が成立する. $j < Q_{i+1}$ 且つ $j \neq Q_i$ を満たす任意の整数 j に対し

$$\varepsilon_j > \varepsilon_{Q_i} > \varepsilon_{Q_{i+1}}.$$

さらに, 式 (5.6) より最大滞在時間 T_n はパラメータ ε_n により決定されるので次の系も成立する

系 2 系 1 より, $j < Q_{i+1}$ 且つ $j \neq Q_i$ を満たす任意の整数 j に対し

$$T_j < T_{Q_i} < T_{Q_{i+1}}.$$

系 2 の証明: 滞在時間 T_n は ε_n の単調減少関数 ($\frac{dT_n}{d\varepsilon_n} < 0$) なので系 1 から系 2 が導かれる. 不等式 $\frac{dT_n}{d\varepsilon_n} < 0$ の証明は付録 E に示す. □

系 2 は最大滞在時間 $T_{n \leq n_i}^{\max}$ の更新が区間 I_{Q_i} ($i \geq 1$) でのみ起こることを示している. 従って, 式 (5.12) を使うと最大滞在時間は次のように書ける

$$T_{n < Q_{i+1}}^{\max} = T_{Q_i} \simeq \frac{\theta_{i+1} Q_i + Q_{i-1}}{\pi}. \quad (5.13)$$

すなわち, k の連分数展開に関する情報から, どの単位区間で最大滞在時間の更新が起き, その大きさがどの程度になるかを決定できる. 例えばパラメータが $k = \varphi^{-1}$ の場合, 部分商は単に $q_0 = 0$ and $q_i = 1$ ($i \geq 1$) であるから, 再帰方程式は $Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2}$ となり, 更新が起きる単位区間の番号はフィボナッチ数となって現れる (図 5.1 の時系列 (a) の場合).

5.5 変位の漸近挙動

最大滞在時間が更新されていくにつれ, 有限時間における平均速度 $x(t)/t$ は次第に減少していくと予想される. ただし, モデルの定義よりそれは常に正である. 本節では $x(t)$ の漸近挙動 ($t \rightarrow \infty$) の性質を詳しく調べる.

5.5.1 比 $t/x(t)$ の推定

比 $t/x(t)$ のゆらぎは変位 $x(t)$ の線形増加からのずれを表している. 初期条件 $x_0 = 1/2$ の下で式 (5.3) が解けたと仮定すると, 比 $r(x) = t/x(t)$ は変数 x の関数として書ける. 比 $r(x)$ は大きな Q_i に対して次の不等式を満たすことが示せる

$$r\left(Q_i + \frac{1}{2}\right) \gtrsim r\left(n + \frac{1}{2}\right) \gtrsim r\left(Q_{i+1} - \frac{1}{2}\right) \quad (n = Q_i, Q_i + 1, \dots, Q_{i+1} - 1). \quad (5.14)$$

証明は付録 F で与えられるが, パラメータ $\{\varepsilon_n\}$ のエルゴ - ド性を使って示すことができる. 不等式 (5.14) の各辺は大きな n に対し $r\left(n + \frac{1}{2}\right) \simeq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T_j$ のように書ける (つまり滞在時間の算術平均である). 不等式 (5.14) の最左辺 $r\left(Q_i + \frac{1}{2}\right)$ は大きな Q_i に対し次のように近似できる

$$\begin{aligned} r\left(Q_i + \frac{1}{2}\right) &\simeq \frac{1}{Q_i - 1} \sum_{j=1}^{Q_i-1} T_j + \frac{T_{Q_i}}{Q_i}, \\ &\simeq \int_{T^{\min}}^{T_{Q_i-1}} TP(T) dT + \frac{T_{Q_i}}{Q_i}, \\ &= \frac{2}{\pi} \ln T_{Q_i-1} + C_0(k) + \frac{T_{Q_i}}{Q_i}. \end{aligned}$$

ここで $T_{n < Q_i}^{\max} = T_{Q_{i-1}}$ を用いた. また, T^{\min} は最小の滞在時間である. 定数項 $C_0(k)$ は $C_0(k) = \int_{T^{\min}}^{T_{Q_i-1}} TP(T) dT - \frac{2}{\pi} \ln T_{Q_i-1}$ のように定義される. その値は分布 $P(T)$ の T が小さいところの振る舞いのみに依存し, 大きな Q_i に対しほぼ一定値に収束することが数値的に確かめられている

(例えば $C_0(\varphi^{-1}) \approx 0.558$). 式 (5.13) を使うと, 比 $r(Q_i + \frac{1}{2})$ はパラメータ k の連分数展開の情報のみで書ける

$$r\left(Q_i + \frac{1}{2}\right) \simeq \frac{2}{\pi} \ln(Q_i + Q_{i-1}/\theta_{i+1}) + \frac{\theta_{i+1}Q_i + Q_{i-1}}{\pi Q_i} + C_1(k). \quad (5.15)$$

ここで定数 $C_1(k) = C_0(k) - \frac{2}{\pi} \ln \pi$ を導入した. 同様に不等式 (5.14) の最右辺 $r(Q_{i+1} - \frac{1}{2})$ は大きな Q_{i+1} に対して次のように与えられる

$$r\left(Q_{i+1} - \frac{1}{2}\right) \simeq \frac{2}{\pi} \ln(Q_{i+1} + Q_i/\theta_{i+2}) + C_1(k). \quad (5.16)$$

以上の式 (5.14), (5.15) and (5.16) から最終的に比 $r(x)$ は次のように評価できる

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \ln Q_{i+1} + C_1(k) \lesssim r\left(n + \frac{1}{2}\right) \lesssim \frac{2}{\pi} \ln Q_i + \frac{2}{\pi} \ln\left(1 + \frac{1}{q_i \theta_{i+1}}\right) + \frac{\theta_{i+1} + 1/q_i}{\pi} + C_1(k) \\ \text{ここで } n = Q_i, Q_i + 1, \dots, Q_{i+1} - 1. \end{aligned} \quad (5.17)$$

$x = n + \frac{1}{2}$ ($n = Q_i, Q_i + 1, \dots, Q_{i+1} - 1$) のとき, x は $Q_i < x < Q_{i+1}$ を満足し, 式 (5.17) は次の不等式を導く

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \ln x + C_1(k) < \frac{t}{x} < \frac{2}{\pi} \ln x + \frac{\theta_{i+1}}{\pi} + \frac{2 \ln 2 + 1}{\pi} + C_1(k), \\ \text{ただし } x \in S_i \equiv \left\{ n + \frac{1}{2} \mid n = Q_i, Q_i + 1, \dots, Q_{i+1} - 1 \right\}. \end{aligned}$$

ここで $1/q_i \leq 1$ および $1/(q_i \theta_{i+1}) < 1$ を利用した. すなわち, t/x は x の対数項と有界関数 $f(x)$ を用いて次のように評価できる

$$\frac{t}{x} \simeq \alpha \ln x + f(x), \quad (5.18)$$

$$C_1(k) < f(x) < \frac{\theta_{i+1}}{\pi} + \frac{2 \ln 2 + 1}{\pi} + C_1(k) \quad (5.19)$$

$$\text{ただし } x \in S_i \equiv \left\{ n + \frac{1}{2} \mid n = Q_i, Q_i + 1, \dots, Q_{i+1} - 1 \right\}.$$

ここで

$$\alpha = \frac{2}{\pi}$$

とした.

式 (5.15) から (5.19) までの比 $r(x)$ に対する評価は数値計算ともよく合うことが確かめられる. 図 5.3 は $k = \varphi^{-1}$ および $k = 1/e$ (自然対数の逆比) の場合の $r(x)$ を描いたものである. ダッシュ線は $k = \varphi^{-1}$ の場合の下限 $\alpha \ln x + C_1(\varphi^{-1})$ を描いたものであるが, $k = 1/e$ (自然対数の逆比) の場合にも下限はほとんど変わらないのがわかる (これは $C_1(\varphi^{-1}) \simeq C_1(1/e)$ による). 反対に上限はパラメータ k に依存して大きく違っている.

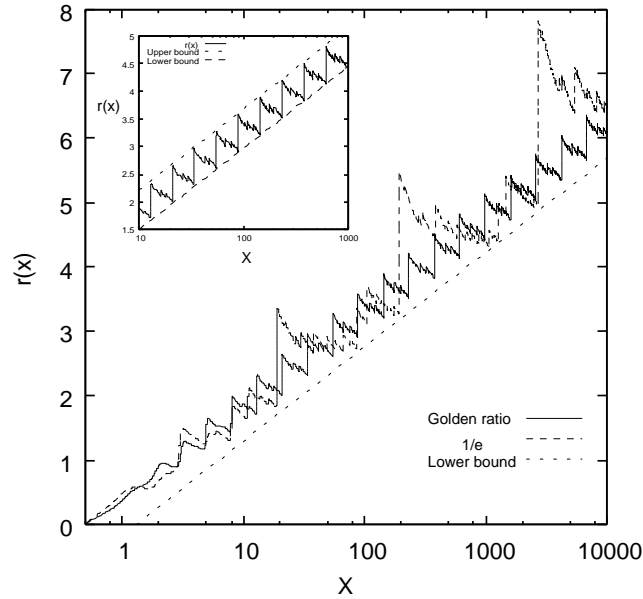


図 5.3: 位置 x の関数としての比 $r(x)$. パラメータは $k = \varphi^{-1}$ および $k = 1/e$ (自然対数の逆比). ダッシュ線は $r(x)$ の下限 $\alpha \ln x + C_1(\varphi^{-1})$ を表している . 挿入図は $k = \varphi^{-1}$ の場合の拡大図である . 挿入図中に示された $r(x)$ の下限と上限はそれぞれ式 (5.20) , (5.21) で与えられる .

もし完全商 θ_{i+1} と部分商の比 Q_i/Q_{i-1} について知っているなら, 比 $r(x) = t/x$ の上限・下限は式 (5.18) , (5.19) 以上に正確に求められる. 黄金比 $k = \varphi^{-1}$ の場合, $\theta_{i+1} = \varphi$, $Q_i/Q_{i-1} \simeq \varphi$ が大きな i に対して成り立つので, 比 $r(x)$ の下限 $r_L(x)$ と上限 $r_U(x)$ は次のように与えられる :

$$r_L(x) \lesssim r(x) \lesssim r_U(x) \text{ for } k = \varphi^{-1},$$

$$r_L(x) = \alpha \ln x + f_L, \tag{5.20}$$

$$r_U(x) = \alpha \ln x + f_L + \sqrt{5}/\pi. \tag{5.21}$$

ここで $f_L = \alpha \ln \left(1 + \frac{1}{\varphi^2}\right) + C_1(\varphi^{-1})$. 下限 $r_L(x)$ と上限 $r_U(x)$ は添え字 i に依らない .

図 5.3 の挿入図は $k = \varphi^{-1}$ の場合の比 $r(x)$ を拡大して示している . 対数スケールの x に対して等間隔のジグザグ構造が見てとれる . 大きなジャンプはフィボナッチ数ごとの単位区間 I_{Q_i} で発生する淀み運動に対応している .

下限 (5.20) は次のように解ける

$$x(t) = \frac{1}{\beta \mathfrak{L}_{\beta t/\alpha}^{\infty}(1/e)}, \quad \mathfrak{L}_s(u) = \log_{(e^{-s})} u = \frac{1}{s} \ln \frac{1}{u}$$

ここで $\beta = e^{f_L/\alpha}$. 下限の第 n 近似を $x^{(n)}(t) = 1/[\beta \mathfrak{L}_{\beta t/\alpha}^n(1/e)]$ で定義しよう. 図 5.4 は, 時間 t の関数としての比 t/x と, 最初の 5 番目までの下限の近似式 $t/x^{(n)}(t)$ ($n = 1, 2, \dots, 5$) を示している

$$\begin{aligned} \frac{t}{x^{(1)}} &= \alpha, \\ \frac{t}{x^{(2)}} &= \alpha \ln \frac{t}{\alpha} + f_L, \\ \frac{t}{x^{(3)}} &= \alpha \ln \frac{t}{\alpha \ln \frac{t}{\alpha} + f_L} + f_L, \\ \frac{t}{x^{(4)}} &= \alpha \ln \frac{t}{\alpha \ln \frac{t}{\alpha \ln \frac{t}{\alpha} + f_L} + f_L} + f_L. \end{aligned}$$

高次の対数補正ほど数値計算と良く一致しているのが見てとれる. 近似関数 $\{x^{(n)}(t)\}$ は補正数 n に対して上下に振動しながらユニークな関数 $x^{(\infty)}(t)$ に収束していく.

5.6 拡張 Badard 写像への適用

最後に, 式 (5.3) の解析において得られた結果を一次元写像 (5.1) に適用する. 写像 (5.1) において $\theta = 0$ の時, $x_0 = 1/2$ からスタートした軌道の単位区間 I_n への滞在時間は次のように書ける

$$T_n \simeq \frac{\sqrt{k/\alpha'}}{V\varepsilon_n} \quad (\varepsilon_n \rightarrow 0). \quad (5.23)$$

ここで前章の α を本章の α と区別して α' と表記している. ε_n は本章の式 (5.4) で定義されている. 式 (5.23) と式 (5.9) を比較すると, 違いは定数倍のみであることが分かる. すなわち, 時間を

$$t \rightarrow \frac{V}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha'}{k}} n$$

のように取り直せば, 式 (5.3) に対して導かれた結論はそのまま写像 (5.1) にも成立する. その結果, 十分大きな n に対し, $x_0 = 1/2$ からスタートした軌道 x_n は次のような漸近挙動を示す:

$$\frac{x_n - x_0}{n} \simeq \frac{1}{\gamma \ln \frac{n}{\gamma \ln \frac{n}{\gamma \ln \frac{n}{\gamma \ln \frac{n}{\dots}}}}}. \quad (5.24)$$

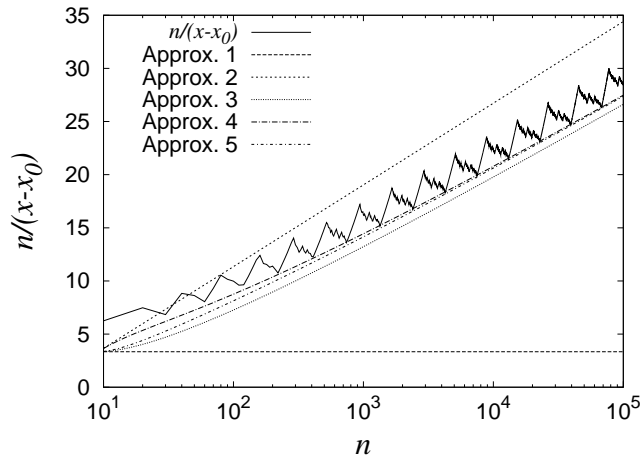


図 5.5: 一次元写像 (5.1) における $n/(x_n - x_0)$ の漸近挙動 (実線) . 初期条件は $x_0 = 1/2$. その他の線は下限の近似曲線を表している: γ (Approx. 1); $\gamma \ln(n/\gamma)$ (Approx. 2); $\gamma \ln(n/(\gamma \ln(n/\gamma)))$ (Approx. 3); $\gamma \ln(n/(\gamma \ln(n/(\gamma \ln(n/\gamma))))$ (Approx. 4); $\gamma \ln(n/(\gamma \ln(n/(\gamma \ln(n/(\gamma \ln(n/\gamma))))))$ (Approx. 5).

ここで $\gamma = \frac{\alpha\pi}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{k}{\alpha'}}$ である . 図 5.5 は $x_0 = 1/2$ とした時の $(x_n - x_0)/n$ の漸近挙動に対する数値計算の結果を示している . 微分同相写像 (4.15) を考慮すると , 以上の結果は拡張 Badard 写像 M において回転数 $(y_n - y_0)/n$ が式 (5.24) のように収束する初期条件 (y_0, z_0) があることを示している . これは $1/\ln n$ のオーダーより若干遅い収束である . では , その他一般の初期条件に対して $(y_n - y_0)/n$ の収束はどのようになるか . 拡張 Badard 写像 M において初期条件 (y_0, z_0) をランダムに選ぶことは , 式 (5.1) において x_0 と θ をランダムに選ぶことに相当する . このシミュレーション結果を図 5.6 に示す . $(x_n - x_0)/n$ の下限は初期条件 (x_0, θ) によって大きく異なるが , 上限は初期条件に係らず , 式 (5.24) で与えられることが確認できる (図 5.6 は $n/(x_n - x_0)$ を示しており上限・下限は逆である .) 最も早い収束は $(x_n - x_0)/n \sim 1/n$ に従う . 例えば , 式 (5.1) において $\theta = 0$ とし原点 $x = 0$ より僅かに小さい初期条件 $x_0 \lesssim 0$ からスタートする軌道を考えよ .

5.7 5章のまとめ

この章では臨界的な準周期ポテンシャルを持つ常微分方程式の漸近挙動を調べた . その結果から , 間欠性ルートの分岐点上における拡張 Badard 写像の回転数 W_y の収束過程が対数関数の入れ子型の公式で表されることが明らかになった . この公式は典型的な軌道に対する回転数の収束が対数収束 $1/\ln n$ よりも僅かに遅いオーダーの収束型であることを示している .

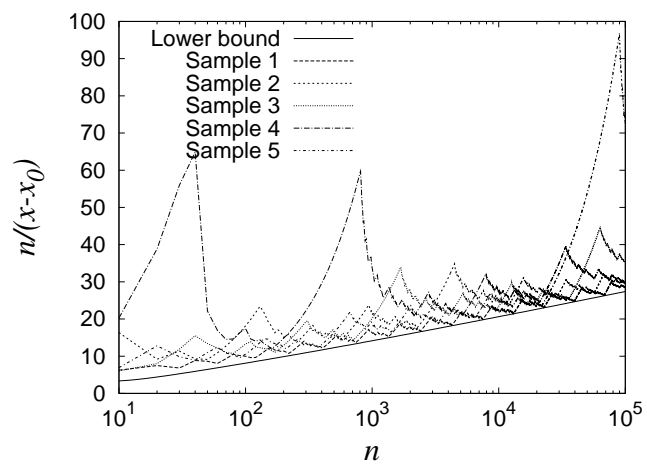


図 5.6: θ をランダムに選んだ一次元写像 (5.1) における $n/(x_n - x_0)$ の漸近挙動 (Sample 1-5) . 初期条件はいずれも $x_0 = 1/2$. 実線は式 (5.24) で表される下限を示している .

第6章 まとめと展望

本論文では非カオス的ストレンジアトラクター (SNA) の示す異常拡散現象と非スケープロダクト写像における SNA の発生機構について探究した。

1章では、GOPY 写像の SNA を解析し、この SNA が内部にリペラーを含むことを述べた。さらに、SNA の吸引領域にはいずれリペラーに移される測度ゼロの集合が稠密に存在しており、吸引領域にあるほとんど全ての点は、リペラーの任意の近傍に移されるだけで最終的には反発されることを述べた。すなわち、SNA は内部リペラーの特殊な吸引・反発効果に起因してフラクタル化していると言える。

2章では変形 GOPY 写像を用いて位相鋭敏性指数を解析的に導出できる例を示した。これにより SNA 上の軌道が、実は局所的な指数不安定性を持っていることが明らかにされた。さらに、この局所的指数不安定性が局所リヤブノフ指数の分布関数によって特徴付けられることを確認した。

3章では、準周期駆動される円写像と減衰振りを調べ、準周期駆動される周期ポテンシャル系において次のような決定論的拡散のシナリオを得た。SNA-カオス遷移を示す系では、平均トレンド差し引いた位置変数に対して次のような拡散現象が観測される:

対数的拡散から劣拡散へのゆっくりした遷移 (SNA 領域) → 通常拡散 (カオスアトラクター領域).

また、フラクタル時系列解析における局所二次モーメント法により、ここで観測された劣拡散は非カオス的ストレンジダイナミクスにおける反持続性に起因していることを示した。さらに、準周期駆動されるニューロンモデルを調べ、空間周期性を持たない準周期駆動される力学系に対しても、非カオス的ストレンジダイナミクスを示す変数から適切な位置変数を構成することで、劣拡散から通常拡散への遷移が観測できる可能性を示した。この拡散現象の十分な理解には、平均スケーリング指数 \bar{H} を決定する理論が必要であるが、これは将来の課題である。

近年、SNA の実験的観測が数多く報告されている [Feudel et al. 2006 (p. 26)]。実験的に観測される SNA において、上記のような異常拡散が観測されるかどうかは興味深い問題である。実験ではノイズが存在するので、ノイズの影響を考慮したモデル化・解析が必要がある。特にノイズが変位に対して加算的に加えられる系では、平均二乗変位は最低でも時間 t に比例して漸近的に増加する。従って、劣拡散が観測されるとしたら過渡的であると予想される。これらの検証は今後の課題である。

4章では非スケープロダクト写像における SNA の発生メカニズムを探究した。準周期的に回

転を拘束したキックされる二つの回転子から拡張された Badard 写像を理論的に導出し、パラメータ平面における分岐現象を数値計算により詳しく解析した。ここでは 2 章で述べられた位相鋭敏性指数の方法を非スキュープロダクト写像に適用できるように拡張して用いた。その結果、これまでに知られているトーラス崩壊による SNA の発生ルートに加え、安定・不安定不動点群の連続的対消滅による SNA の発生ルート (間欠性ルート) の存在を発見した。さらに、この間欠性ルートの特徴として、不動点の最終消滅点近傍への軌道の平均滞在時間 $\langle T \rangle$ が、分岐点からの距離 $\Delta\Omega$ に対し対数特異性 $\langle T \rangle \propto -\ln \Delta\Omega$ を持つことを理論的に導出した。本章の結果は式 (4.24) で表される非スキュープロダクト写像にも SNA が現れることを示しており、力学系における SNA の遍在性についての知見を広げるものと考えられる。

5 章では、4 章で述べた間欠性ルートの分岐点上における回転数の収束過程を詳しく解析した。拡張 Badard 写像の y 軸方向に対する間欠的ダイナミクスは準周期ポテンシャルを持つ一階の常微分方程式で近似できる。この準周期ポテンシャル系において、運動の淀み時間 T_n の最大値の更新過程を有理数近似の定理を用いて明らかにした。その結果、分岐点上にある拡張 Badard 写像において、典型的な軌道の回転数の収束過程 $(y_n - y_0)/n$ が対数関数の入れ子型の公式で記述されることを理論的に導出した。この公式は典型的な軌道に対する回転数の収束が対数収束 $1/\ln n$ よりも僅かに遅いオーダーの収束型であることを意味していた。

序章において、準周期駆動される力学系は非自励的力学系の一つであり、周期駆動される力学系と不規則外乱を受ける力学系を繋ぐものであると述べた。ただし、これまでに論じてきたように、準周期駆動される力学系の性質は「準周期」という特有の秩序構造に大きく支配されていた。従って、準周期駆動される力学系において得られた理論やカオス観が、不規則外乱を受ける系にどこまで応用できるかは未知数である。一つの希望は、これら一方向的に駆動される力学系には、一般化された同期 (Generalized Synchronization) と呼ばれる共通の現象が存在する点である。一般に、一方向的に駆動される力学系は次のようなスキュープロダクト型のシステムで記述できる

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{g}(\mathbf{y}),\end{aligned}\tag{6.1}$$

または

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n), \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{g}(\mathbf{y}_n).\end{aligned}\tag{6.2}$$

一般化された同期とは、駆動される側の変数 \mathbf{x} が駆動する側の変数 \mathbf{y} により一意に決まることを言う [Rulkov et al. 1996]。すなわち、関数関係

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y})$$

が成立することを言う．従って，関数関係 $x = \Phi(y)$ で記述できる SNA は，一般化された同期現象の一つと言える [Pikovsky et al. 2001 (p. 352)]．ただし SNA の場合は，正のリヤブノフ指数が存在せず， Φ が微分不可能な場合である (weak generalized synchronization と呼ばれる)．

近年，カオス的に駆動される力学系における一般化された同期現象と準周期駆動される力学系の SNA の類似性が報告されている [Singh et al. 2008]．ここでは 2 章で示した位相鋭敏性指数の方法と類似の方法を用いて，一般化された同期現象の分岐解析が行われている．これは SNA の理論が不規則外乱を受ける系の解析に応用された例である．さらに，ランダム駆動される力学系の非カオスアトラクターが，SNA と類似のスペクトル特性や局所不安定性を持つことも報告されている [吉田・佐藤・石村 1998; 吉田・佐藤 1999; Wang et al. 2004]．このように，今後 SNA の理論は，一般化された同期という広い枠組みの中で発展していくことが期待される．

最後に，スキュープロダクト写像において，駆動する側のダイナミクスがリヤブノフ指数ゼロの非定常カオスの場合に，SNA の定義を満たすアトラクターが存在する可能性を指摘しておく．次の写像の例を考える

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= \begin{cases} \frac{x_n}{(1-x_n^\alpha)^{1/\alpha}} & \text{if } x_n \in X_0 = [0, (1/2)^{1/\alpha}), \\ \frac{1-x_n}{1-(1/2)^{1/\alpha}} & \text{if } x_n \in X_1 = [(1/2)^{1/\alpha}, 1], \end{cases} \\
 y_{n+1} &= \begin{cases} \frac{y_n}{(1+y_n^\alpha)^{1/\alpha}} & \text{if } x_n \in X_0, \\ 1 - (1 - (1/2)^{1/\alpha})y_n & \text{if } x_n \in X_1, \end{cases} \\
 z_{n+1} &= (a + \varepsilon \cos(2\pi y_n))z_n(1 - z_n).
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

ここで変数 x は Yuri により導入された写像である [Yuri 1986]．この写像は非双曲型不動点 $x = 0$ を持ち，これに起因して $\alpha \geq 1$ で $[0,1]$ 区間上に規格化出来ない不変測度 (無限不変測度) を持つ．Yuri 写像は非可逆であるが，変数 (x, y) の二次元写像に拡張することで可逆な写像を構成することができる [Tsugawa and Aizawa in preparation]．変数 (x, y) のダイナミクスも原点に非双曲不動点を持つ非定常カオスで，リヤブノフ指数は $\{0, 0\}$ である．パラメータを $\varepsilon = \varepsilon'(4/a - 1)$, $\varepsilon' = 0.2$, $\alpha = 1.1$ に設定し， a を制御パラメータとする．図 6.1(a) および (b) はそれぞれ $a = 2.0$ および $a = 3.2$ における滑らかなアトラクターとストレンジアトラクターを示している．どちらのアトラクターのリヤブノフ指数も，変数 x, y に対応して二つがゼロであり，変数 z に対応して一つが負である．負のリヤブノフ指数の収束は非常に遅いが，有限時間リヤブノフ指数 λ_N の分布関数 $P(\lambda_N)$ から負の値に収束することがわかる (図 6.2)．このような，非定常カオスに駆動される系の一般化された同期現象はこれまでほとんど解析されたことがなく，今後の研究が望まれる．そこで得られる非定常駆動力学系の普遍法則は，脳や生体リズムなど非定常性を持つ系が示す複雑現象の理解に役立つと期待される．

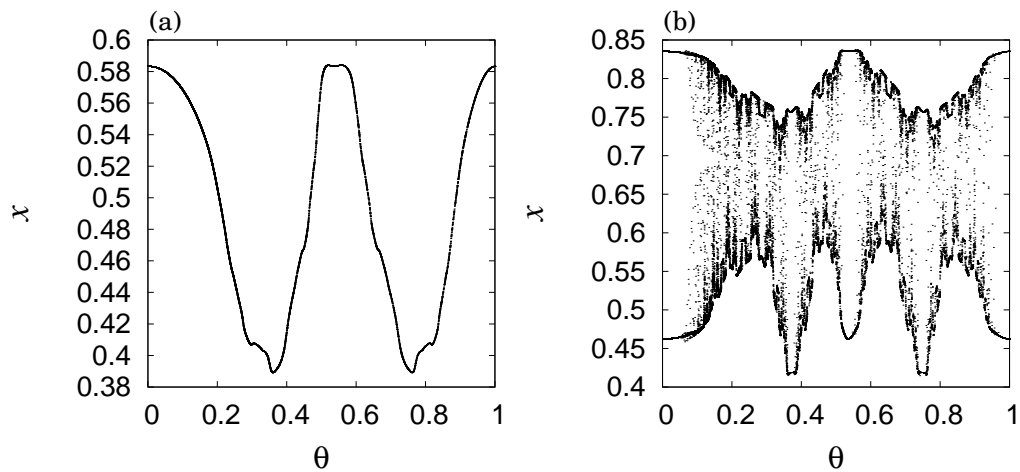


図 6.1: 式 (6.3) のアトラクター. (a) $a = 2.0$, (b) $a = 3.2$.

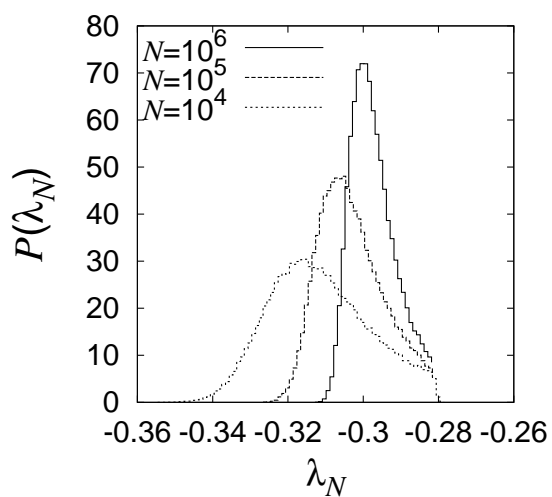


図 6.2: $a = 3.2$ における有限時間リャプノフ指数 λ_N の分布の収束の様子. 長さ N の時系列 10^5 本から計算した ($N = 10^4, 10^5, 10^6$).

引用文献

- [1] L. Alsedà and S. Costa, On the definition of strange nonchaotic attractor, *Fund. Math.* **206**, 23 (2009).
- [2] K. Aihara, T. Takebe, and M. Toyoda, Chaotic Neural Networks, *Phys. Lett. A* **144**, 333 (1990).
- [3] Y. Aizawa and T. Kohyama, Asymptotically Non-Stationary Chaos, *Prog. Theor. Phys.* **4**, 847 (1984).
- [4] Y. Aizawa, Comments on the non-stationary chaos, *Chaos, Soliton and Fractals* **11**, 263 (2000).
- [5] T. Akimoto and Y. Aizawa, Scaling Exponents of the Slow Relaxation in Non-hyperbolic Chaotic Dynamics, *Nonlinear Phenomena in Complex Systems* **9**, 178 (2006).
- [6] V. S. Anishchenko, T. E. Vadivasova, and O. Sosnovtseva, Strange nonchaotic attractors in autonomous and periodically driven systems *Phys. Rev. E* **54**, 3231 (1996).
- [7] V. S. Anishchenko, T. E. Vadivasova, and O. Sosnovtseva, Reply to “Comment on ‘Strange nonchaotic attractors in autonomous and periodically driven systems’”, *Phys. Rev. E* **56**, 7322 (1997).
- [8] V. I. Arnold, Small Denominators, I: Mappings of the Circumference Into Itself, *AMS Transl. Series 2*, **46**, 213 (1965).
- [9] V. I. Arnold and A. Avez, *Ergodic problems of Classical Mechanics* (Benjamin, New York, 1968).
- [10] R. Badard, Unwrapping trajectories of a quasi-periodic forced oscillator can give maps of the real line with SNA, *Chaos, Solitons and Fractals* **28**, 1327 (2006).
- [11] R. Badard, A lot of strange attractors: Chaotic or not?, *Chaos* **18**, 023127 (2008).

- [12] A. Barone and G. Paternò, *Physics and Applications of the Josephson Effect* (John Wiley & Sons, New York, 1982).
- [13] G. Bel and E. Barkai, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 240602 (2005).
- [14] P. Bergé, M. Dubois, P. Manneville, and Y. Pomeau, Intermittency in Rayleigh-Benard convection, *J. Phys. (France) Lett.* **41**, L341 (1980).
- [15] B. B. Mandelbrot and J.W. Van Ness, *SIAM Rev.* **10**, 422 (1968).
- [16] F. Biagini, T. Fu, B. Oksendal, and T. Zhang, *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications* (Springer, London, 2008).
- [17] A. Bondeson, E. Ott and T. M. Antonsen, Jr., Quasiperiodically forced damped pendula and Schrödinger equation with quasiperiodic potentials : Implication of their equivalence *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2103 (1985).
- [18] L. A. Bunimovich and Ya. G. Sinai, Statistical properties of the Lorentz gas with a periodic configuration of scatterers, *Commun. Math. Phys.* **78**, 479 (1981).
- [19] F. Cecconi, D. del-Castillo-Negrete, M. Falcioni, and A. Vulpiani, The origin of diffusion: the case of non chaotic systems, *Physica D* **180**, 129 (2003).
- [20] F. Cecconi, M. Cencini, M. Falcioni, and A. Vulpiani, Brownian motion and diffusion: from stochastic processes to deterministic chaos, *Chaos* **15**, 026102 (2005).
- [21] Y. Cho and K. Park, Inverse Function of $y = x^{1/x}$, *The American Mathematical Monthly*, **108**, 963 (2001).
- [22] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, and Ya. G. Sinai, *Ergodic Theory* (Springer Verlag, 1982).
- [23] D. R. Cox, *Renewal Theory* (Methuen, New York, 1962).
- [24] S. Datta, A. Sharma, and R. Ramaswamy, Thermodynamics of critical strange nonchaotic attractors, *Phys. Rev. E* **68**, 036104 (2003).
- [25] W. Deng and E. Barkai, *Phys. Rev. E* **79**, 011112 (2009).
- [26] C. Dettmann and E. G. D. Cohen, Microscopic chaos and diffusion, *J. Stat. Phys.* **101**, 775 (2000).

- [27] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1986).
- [28] M. Ding, C. Grebogi, and E. Ott, Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: From quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic, *Phys. Rev. A* **39**, 2593 (1989a).
- [29] M. Ding, C. Grebogi, and E. Ott, Dimensions of strange nonchaotic attractors, *Phys. Lett. A* **137**, 167 (1989b).
- [30] M. Ding and J. A. S. Kelso, Phase-Resetting Map and the Dynamics of Quasi-Periodically Forced Biological Oscillators, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **4**, 553 (1994).
- [31] W. L. Ditto, M. L. Spano, H. T. Savage, S. N. Rauseo, J. Heagy, and E. Ott, Experimental observation of a strange nonchaotic attractor, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 533 (1990).
- [32] J. R. Dorfman, *An Introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [33] J.-P. Eckmann and D. Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617 (1985).
- [34] U. Feudel, J. Kurths, and A. Pikovsky, Strange non-chaotic attractor in a quasiperiodically forced circle map, *Physica D* **88**, 176 (1995).
- [35] U. Feudel, C. Grebogi, and E. Ott, Phase-locking in quasiperiodically forced systems, *Phys. Rep.* **290**, 11 (1997).
- [36] U. Feudel, S. Kuznetsov, and A. Pikovsky, *Strange Nonchaotic Attractors* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006).
- [37] C. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and the Natural Sciences 3rd edition* (Springer, 2004).
- [38] P. Gaspard and X.-J. Wang, Sporadicity: between periodic and chaotic dynamical systems, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **85**, 4591 (1988).
- [39] P. Gaspard and G. Nicolis, Transport properties, Lyapunov exponents, and entropy per unit time, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1693 (1990).
- [40] T. Geisel and J. Nierwetberg, Onset of Diffusion and Universal Scaling in Chaotic Systems, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 7 (1982).

- [41] T. Geisel and S. Thomae, Anomalous Diffusion in Intermittent Chaotic Systems, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1936 (1984).
- [42] P. Glendinning, T. H. Jäger, and G. Keller, How chaotic are strange non-chaotic attractors?, *Nonlinearity* **19**, 2005 (2006).
- [43] C. Godrèche, J. M. Luck and F. Vallet, Quasiperiodicity and types of order; a study in one dimension, *J. Phys. A: Math. Gen.* **20**, 4483 (1987).
- [44] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, Are Three-Frequency Quasiperiodic Orbits to Be Expected in Typical Nonlinear Dynamical Systems?, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 339 (1983).
- [45] C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, and J. A. Yorke, Strange attractors that are not chaotic, *Physica D* **13**, 261 (1984).
- [46] S. Grossmann and H. Fujisaka, Diffusion in discrete nonlinear dynamical systems, *Phys. Rev. A* **26**, 1779 (1982).
- [47] H. M. Hastings and G. Sugihara, *Fractals: A User's Guide for the Natural Sciences* (Oxford University Press, New York, 1993).
- [48] Y. He, S. Burov, R. Metzler, and E. Barkai, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 058101 (2008).
- [49] J. Heagy and W. L. Ditto, Dynamics of a two-frequency parametrically driven duffing oscillator, *J. Nonlinear Science*, **1**, 423 (1991).
- [50] M. R. Herman, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.*, tome **49**, 5 (1979).
- [51] B.R. Hunt and E. Ott, Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 254101 (2001).
- [52] S. Isola, Dispersion properties of ergodic translations, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* **2006**, 1 (2006).
- [53] T. H. Jäger, On the structure of strange non-chaotic attractors in pinched skew products, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **27**, 493 (2007).
- [54] T. H. Jäger, Strange Non-Chaotic Attractors in Quasiperiodically Forced Circle Maps, *Commun. Math. Phys.* **289**, 253 (2009).

- [55] K. Kaneko, Fractalization of Torus, Prog. Theor. Phys. **71**, 1112 (1984).
- [56] J. L. Kaplan and J. A. Yorke, Chaotic behaviors of Multidimensional Difference Equations, *Functional Differential Equations and Applications of Fixed Points*, editid by H.-O. Peitgen and H.-O. Walter, Lecture Notes in Mathematics, **730**, 204 (Springer, Berlin, 1979).
- [57] G. Keller, A note on strange nonchaotic attractors, *Fundamenta Mathematicae* **151**, 139 (1996).
- [58] J. A. Ketojää and I. I. Satija, Harper equation, the dissipative standard map and strange nonchaotic attractors: Relationship between an eigenvalue problem and iterated maps, *Physica D* **109**, 70 (1997).
- [59] S.-Y. Kim, W. Lim, and E. Ott, Mechanism for the intermittent route to strange nonchaotic attractors, *Phys. Rev. E* **67**, 056203 (2003).
- [60] J. Klafter and I. M. Sokolov, Anomalous Diffusion Spreads its Wings, *Physics World* **18**, 29 (2005).
- [61] 國府寛司 , カオス全書 2 力学系の基礎 (朝倉書店 2000).
- [62] Y.-C. Lai, Transition from strange nonchaotic to strange chaotic attractors, *Phys. Rev. E* **53**, 57 (1996).
- [63] W. Lim and S.-Y. Kim, Strange nonchaotic oscillations in the quasiperiodically forced Hodgkin-Huxley neuron, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 265103 (2009).
- [64] W. Lim, S.-Y. Kim, and Y. Kim, Strange Nonchaotic Responses of the Quasiperiodically Forced Morris-Lecar Neuron, *Progress of theoretical physics* **121**, 671 (2009).
- [65] A. Lubelski, I. M. Sokolov, and J. Klafter, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 250602 (2008).
- [66] B. B. Mandelbrot and J.W. Van Ness, *SIAM Rev.* **10**, 422 (1968).
- [67] R. Mannella, P. Grigolini, and B. J. West, A Dynamical Approach to Fractional Brownian Motion, *Fractals* **2**, 81 (1994).
- [68] P. Manneville, Intermittency, self-similarity and $1/f$ spectrum in dissipative dynamical systems, *J. Phys. (France) Lett.* **41**, 1235 (1980).
- [69] R. Metzler and J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, *Phys. Rep.* **339**, 1 (2000).

- [70] J. Milnor, On the concept of attractor, *Commun. Math. Phys.* **99**, 177 (1985).
- [71] T. Mitsui, Nonchaotic stagnant motion in a marginal quasiperiodic gradient system, *Phys. Rev. E* **78**, 026206 (2008).
- [72] T. Mitsui, Latent Instability in the Nonchaotic Stagnant Motion in Marginal Quasiperiodic Gradient System, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **173**, 243 (2008).
- [73] T. Mitsui and Y. Aizawa, Intermittency route to strange nonchaotic attractors in a non-skew-product map, *Phys. Rev. E* **81**, 046210 (2010).
- [74] T. Mitsui, Subdiffusion due to Strange Nonchaotic Dynamics: A Numerical Study, submitted to *Phys. Rev. E*.
- [75] D.E. McCumber, Effect of ac Impedance on dc Voltage-Current Characteristics of Superconductor Weak-Link Junctions, *J. Appl. Phys.* **39**, 3113 (1968).
- [76] S. S. Negi and R. Ramaswamy, Critical states and fractal attractors in fractal tongues: localization in the Harper map, *Phys. Rev. E* **64**, 045204(R) (2001).
- [77] E. Neumann and A. Pikovsky, Quasiperiodically driven Josephson junctions: strange nonchaotic attractors, symmetries and transport, *Eur. Phys. J. B* **26**, 219 (2002).
- [78] S. Newhouse, D. Ruelle, and F. Takens, Occurrence of Strange Axiom A Attractors Near Quasiperiodic Flows on T^m ($m = 3$ or more), *Commun. math. Phys.* **64**, 35 (1978).
- [79] T. Nishikawa and K. Kaneko, Fractalization of a torus as a strange nonchaotic attractor, **54**, 6114 (1996).
- [80] Ch. Nöldeke and H. Seifert, Different types of intermittent chaos in Josephson junctions. Manifestation in the I-V characteristics, *Phys. Lett.* **109A**, 401 (1985).
- [81] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems Second editon* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [82] A. Pikovsky and U. Feudel, Characterizing Strange Nonchaotic Attractors, *Chaos* **5**, 253 (1995).
- [83] A. Pikovsky and U. Feudel, Comment on “ Strange nonchaotic attractors in autonomous and periodically driven systems”, *Phys. Rev. E* **56**, 7320 (1997).

- [84] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: a universal concept in non-linear sciences* (Cambridge University Press, 2001).
- [85] Y. Pomeau and P. Manneville, Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems, *Commun. Math. Phys.* **74**, 189 (1980).
- [86] Y. Pomeau, J. C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart, and C. Vidal, Intermittent behaviour in the Belousov-Zhabotinsky reaction, *J. Phys. (France) Lett.* **42**, L271 (1981).
- [87] A. Prasad, V. Mehra, and R. Ramaswamy, Intermittency Route to Strange Nonchaotic Attractors, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4127 (1997).
- [88] A. Prasad, R. Ramaswamy, I. I. Satija, and N. Shah, Collision and Symmetry Breaking in the Transition to Strange Nonchaotic Attractors, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4530 (1999).
- [89] A. Prasad, B. Biswal, and R. Ramaswamy, Strange Nonchaotic Attractors in driven excitable systems, *Phys. Rev. E* **68**, 037201, (2003).
- [90] A. M. Rockett and P. Szusz, *Continued Fractions* (World Scientific, 1992).
- [91] F. J. Romeiras and E. Ott, Strange nonchaotic attractors of the damped pendulum with quasiperiodic forcing, *Phys. Rev. A* **35**, 4404 (1987).
- [92] F. J. Romeiras, A. Bondeson, E. Ott, T. M. Antonsen Jr., and C. Grebogi, Quasiperiodically forced dynamical systems with strange nonchaotic attractors, *Physica D* **26**, 277 (1987).
- [93] F. J. Romeiras, A. Bondeson, E. Ott, T. M. Antonsen Jr., and C. Grebogi, Quasiperiodic forcing and the observability of strange nonchaotic attractors, *Phys. Scr.* **40**, 442 (1989).
- [94] K. F. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika*, **2**, 1 (1955).
- [95] D. Ruelle and F. Takens, On the Nature of Turbulence, *Commun. Math. Phys.* **20**, 167 (1971).
- [96] D. Ruelle, *Chaotic evolution and strange attractors* (Cambridge University Press, 1989).
- [97] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D. I. Abarbanel, *Phys. Rev. E* **51**, 980 (1996).
- [98] M. Schell, S. Fraser, and R. Kapral, Diffusive dynamics in systems with translational symmetry: A one-dimensional-map model, *Phys. Rev. A* **26**, 504 (1982).

- [99] H. G. Schuster and W. Just, *Deterministic Chaos*, Fourth, Revised and Enlarged Edition, VCH, Weinheim, (2005).
- [100] H. Seifert, Intermittent chaos in Josephson junctions represented by stroboscopic maps, *Phys. Lett.* **98A**, 213 (1983)
- [101] 関本 謙, *ゆらぎのエネルギー論*, 岩波書店 (2004).
- [102] J. W. Shuai and D. M. Durand, Strange Nonchaotic Attractors in High-Dimensional Neural System, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **13**, 251 (2003).
- [103] T. U. Singh, A. Nandi, and R. Ramaswamy, Scenarios for generalized synchronization with chaotic driving, *Phys. Rev. E* **78**, 025205(R) (2008).
- [104] O. Sosnovtseva, U. Feudel, J. Kurths, and A. Pikovsky, Multiband strange nonchaotic attractors in quasiperiodically forced systems, *Phys. Lett. A* **218**, 255 (1996).
- [105] J. Stark, U. Feudel, P. A. Glendinning, and A. Pikovsky, Rotation numbers for quasiperiodically forced monotone circle maps, *Dynamical Systems* **17**, 1 (2002).
- [106] W.C. Stewart, Current-Voltage Characteristics of Josephson Junctions, *Appl. Phys. Lett.* **12**, 277 (1968).
- [107] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications in Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1994).
- [108] K. Thamilmaran, D. V. Senthilkumar, A. Venkatesan, and M. Lakshmanan, Experimental realization of strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced electronic circuit, *Phys. Rev. E* **74**, 036205 (2006).
- [109] A. Vasylenko and O. Feely, Nonlinear dynamics of first-order DPLL with frequency-modulated input, *Circuits and Systems*, 2001. ISCAS 2001. The 2001 IEEE International Symposium on, **2**, 775 (2001).
- [110] A. Venkatesan, K. Murali and M. Lakshmanan, Birth of strange nonchaotic attractors through type III intermittency, *Phys. Lett. A* **259**, 246 (1999).
- [111] A. Venkatesan, M. Lakshmanan, A. Prasad and R. Ramaswamy, Intermittency transitions to strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically driven Duffing oscillator, *Phys. Rev. E* **61**, 3641 (2000).

- [112] X. Wang, M. Zhan, C.-H. Lai, and Y.-C. Lai, Strange Nonchaotic Attractors in Random Dynamical Systems, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 074102 (2004).
- [113] A. T. Winfree, *The Geometry of Biological Time*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 2001).
- [114] A. Witt, U. Feudel, and A. Pikovsky, Birth of strange nonchaotic attractors due to interior crisis, *Physica D* **109**, 180 (1997).
- [115] T. Yalçinkaya and Y.-C. Lai, Blowout bifurcation routes to strange nonchaotic attractors, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5039 (1996).
- [116] T. Yang and K. Bilimgut, Experimental results of strange nonchaotic phenomenon in a second order quasiperiodically forced electronic circuit, *Phys. Lett. A* **236**, 494 (1997).
- [117] W. J. Yeh and Y. H. Kao, Intermittency in Josephson Junctions, *Appl. Phys. Lett.* **42**, 299 (1983).
- [118] 吉田勝俊, 佐藤啓二, 石村徹, 不規則外乱を受ける非線形振動系のカオスの挙動 (局所拡大率の確率分布), *日本機械学会論文集 (C編)* **64**, 4537 (1998).
- [119] 吉田勝俊, 佐藤啓二, 不規則外乱を受ける非線形振動子系のカオスの挙動 (スケーリング構造の評価), *日本機械学会論文集 (C編)* **65**, 1305 (1999).
- [120] 米沢富美子, *ブラウン運動*, 共立出版 (1986).
- [121] M. Yuri, On a Bernoulli Property for Multi-dimensional Mappings with Finite Range Structure, *TOKYO J. MATH.* **9**, 457 (1986).
- [122] I. Zapata, R. Bartussek, F. Sols, and P. Hänggi, Voltage Rectification by a SQUID Ratchet, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2292 (1996).
- [123] G. M. Zaslavsky. Chaos, Fractional Kinetics, and Anomalous Transport, *Phys. Rep.* **371**, 461 (2002).
- [124] C. Zhou and T. Chen, Robust communication via synchronization between nonchaotic strange attractors, *Europhys. Lett.* **38**, 261 (1997).

付録 A 周期的にキックされる回転子におけるストロボ写像の導出

次の方程式で記述される周期的にキックされる回転子は厳密なストロボ写像を導くことのできる例であり、多くの研究でモデル系として扱われている [Schuster and Just 2005 (p. 16)]

$$\dot{x} = v, \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{v} = -\gamma\dot{v} + F(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - Tn). \quad (\text{A.2})$$

ここで γ は摩擦係数、 T はデルタキックの周期である。この系は $(x_n, v_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [x(nT - \varepsilon), v(nT - \varepsilon)]$ を変数とする二次元写像へ容易に変換できる。デルタキックが働く瞬間には位置 x は変化できないと考え、式 (A.2) は離散変数 x_n を使って 1 階 1 変数の非斉次方程式に書き換えられる

$$\dot{v} = -\gamma\dot{v} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(x_n)\delta(t - Tn).$$

この方程式を $nT - \varepsilon < t < (n+1)T - \varepsilon$ で積分すると

$$\begin{aligned} v(t) &= v_n e^{-\gamma(t-nT)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(x_n) \int_{nT-\varepsilon}^t dt' e^{\gamma(t'-t)} \delta(t' - nT), \\ &= e^{-\gamma(t-nT)} [v_n + F(x_n)]. \end{aligned}$$

ここで得た $v(t)$ を用いて式 (A.1) も積分すると、次の二次元ストロボ写像を得る

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= e^{-\gamma T} [v_n + F(x_n)], \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma} [v_n + F(x_n)]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

または

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= e^{-\gamma T} [v_n + F(x_n)], \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{e^{\gamma T} - 1}{\gamma} v_{n+1}. \end{aligned}$$

$T \rightarrow \infty$ として得られる過減衰極限では、二次元写像 (A.3) は次の一次元写像になる

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\gamma} F(x_n). \quad (\text{A.4})$$

$F(x)$ が 2π 周期関数であれば, x_n を区間 $[0, 2\pi)$ で定義された位相と考えることができ, このとき写像 (A.4) は円写像の一般形と考えられる. 特に, $\frac{1}{\gamma}F(x_n) = 2\pi\Omega + A \sin(x_n)$ と置けばアーノルドの円写像を得る.

付録 B 無理数の有理数近似

任意の無理数 ω は以下のように連分数に展開できる [Rockett and Szusz 1992]

$$\begin{aligned} \omega &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_n + \frac{1}{\theta_{n+1}}}}}]} = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_n, \theta_{n+1}], \\ &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\ddots}}}} = [q_0; q_1, q_2, \dots]. \end{aligned} \tag{B.1}$$

ここで $q_0 \in \mathbb{Z}$, $q_k \in \mathbb{N}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) は部分商, $\theta_n (> 1)$ は n 次の完全商と呼ばれる. $[\theta]$ を θ を超えない最大の整数とすると, 両者は $q_k = [\theta_n]$ の関係を満たす. 有理数の連分数表示が有限個の部分商 q_k で構成できるのに対し, 無理数の場合は無限個の部分商を必要とする. k 次の有理数近似 ω_k は $\theta_{k+1} = 0$ とするところで得られる

$$\omega_k = \frac{P_k}{Q_k} = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_k].$$

ここで有理数近似の分子 P_k , 分母 Q_k は次の再帰式を満たす

$$\begin{aligned} P_i &= q_i P_{i-1} + P_{i-2}, \quad P_{-2} = 0, \quad P_{-1} = 1, \\ Q_i &= q_i Q_{i-1} + Q_{i-2}, \quad Q_{-2} = 1, \quad Q_{-1} = 0. \end{aligned} \tag{B.2}$$

近似の精度に関して次式が成立する [付録 C の式 (C.3) 参照]

$$\frac{1}{(Q_{k+1} + Q_k)Q_k} < |\omega - \omega_k| < \frac{1}{Q_k^2}.$$

より荒い推定であるが, この不等式と式 (B.2) から次式のように推定できる

$$\frac{1}{(q_{k+1} + 2)Q_k^2} < |\omega - \omega_k| < \frac{1}{q_{k+1}Q_k^2}.$$

式 (B.2) から分母列 $\{Q_k\}$ は単調増加なので, 次数 k が上がるほど近似の精度が良くなることが分かる. 有理数近似 ω_k は $k \rightarrow \infty$ の極限で ω に収束する. すなわち $\omega = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k$. さらに, 部分

商列 q_k が大きい値を取り続けるほど数列 Q_k は急速に増加し，それに伴い近似精度も急速に良くなることがわかる．もっとも近似精度が上がらないのが， $q_k = 1 (\forall k \geq 1)$ の場合，すなわち黄金比 ω の場合である

$$\omega = [0; 1, 1, 1, \dots] = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

このため黄金比はしばしば「最良の無理数」と呼ばれる．黄金比 ω はフィボナッチ数 F_k により $\omega_k = F_{k-1}/F_k$ と近似される．フィボナッチ数は再帰関係式 $F_0 = 1, F_1 = 1$ 及び $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ を満たす．黄金比はその数論的構造より生まれる性質から力学系理論において重要な役割を果たしている．

付録C 式 (5.12) の導出

連分数の理論では次の基本公式 (1), (2) が知られている [Rockett and Szusz 1992]:

(1) 近似分数の分子 P_i ・分母 Q_i は次式を満たす

$$P_{i+1}Q_i - P_iQ_{i+1} = (-1)^i \quad (i \geq -2). \quad (\text{C.1})$$

(2) 任意の無理数 k は一般に次のように書ける

$$k = \frac{\theta_{i+1}P_i + P_{i-1}}{\theta_{i+1}Q_i + Q_{i-1}} \quad (i \geq -1). \quad (\text{C.2})$$

既に述べた式 (5.11), (C.1) 且つ (C.2) から無理数 k とその i 次の近似分数との差は

$$k - \frac{P_i}{Q_i} = \frac{(-1)^i}{(\theta_{i+1}Q_i + Q_{i-1})Q_i}. \quad (\text{C.3})$$

書き換えると

$$|kQ_i - P_i| = \frac{1}{\theta_{i+1}Q_i + Q_{i-1}}.$$

数列 $\{Q_i\}$ が i に対して単調増加することと, $\theta_i > 1$ を用いると

$$|kQ_i - P_i| < |kQ_1 - P_1| = \frac{1}{\theta_2Q_1 + Q_0} = \frac{1}{\theta_2q_1 + 1} < \frac{1}{2}.$$

この不等式 $|kQ_i - P_i| < 1/2$ は数 kQ_i に最も近い整数が P_i であることを意味している. この結果, ε_n の定義 [式 (5.4)] から $\varepsilon_{Q_i} = |kQ_i - P_i|$ が成立する.

付録D 定理2の証明

定理2はラグランジェにより初めて証明された。以下で述べる証明はラグランジェの証明を少し改良したものである [Rockett and Szusz 1992].

次式を考える

$$kn - m = \alpha(kQ_{i+1} - P_{i+1}) + \beta(kQ_i - P_i).$$

この式を k の係数と定数項に分けると二つの方程式が得られる:

$$n = \alpha Q_{i+1} + \beta Q_i, \quad m = \alpha P_{i+1} + \beta P_i. \quad (\text{D.1})$$

行列 $\begin{pmatrix} Q_{i+1} & Q_i \\ P_{i+1} & P_i \end{pmatrix}$ の行列式は式 (C.1) で与えられるので, 式 (D.1) は $(-1)^i \alpha = mQ_i - nP_i$, $(-1)^i \beta = nP_{i+1} - mQ_{i+1}$ のように変換できる。これにより α と β は整数でなければならない。また α, β はゼロではない。なぜなら, 定理の前提より m/n は $P_i/Q_i, P_{i+1}/Q_{i+1}$ のいずれとも異なるからである。さらに, $n \leq Q_{i+1}$ より, 式 (D.1) が成立するためには, α, β が逆符号でなければならない。ここで式 (C.3) から, $kQ_{i+1} - P_{i+1}$ と $kQ_i - P_i$ も逆符号であることから, 次式が成立する

$$|kn - m| = |\alpha(kQ_{i+1} - P_{i+1})| + |\beta(kQ_i - P_i)| > |kQ_i - P_i|.$$

最後に式 (5.12) から $|kQ_i - P_i| > |kQ_{i+1} - P_{i+1}|$ である。 □

付録E 不等式 $\frac{T_n(\varepsilon_n)}{d\varepsilon_n} < 0$ の証明

式 (5.6) で定義された滞在時間 $T_n(\varepsilon_n)$ を n を省略して $T(k, \varepsilon)$ と書く

$$T(k, \varepsilon) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{1 - \frac{1}{2} \cos(2\pi y) - \frac{1}{2} \cos(2\pi(\varepsilon + ky))} \quad \text{ここで } (k, \varepsilon) \in (0, 1) \times (0, 1/2).$$

$T(k, \varepsilon)$ を ε で微分すると

$$\frac{dT(k, \varepsilon)}{d\varepsilon} = -4\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(y) dy \quad \text{ここで } f(y) = \frac{\sin(2\pi(\varepsilon + ky))}{(2 - \cos(2\pi y) - \cos(2\pi(\varepsilon + ky)))^2}.$$

この微分の符号を知るため、パラメータを4つの領域に分割して考える:

領域 1 $\frac{k}{2} < \varepsilon < \frac{1-k}{2}$:

$$f(y) > 0 \quad \text{ここで } -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}.$$

よって, $\frac{dT}{d\varepsilon} < 0$.

領域 2 $\varepsilon \leq \min[\frac{k}{2}, \frac{1-k}{2}]$:

$$\begin{aligned} \frac{dT(k, \varepsilon)}{d\varepsilon} &= -4\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{\varepsilon}{k}} f(y) dy - 4\pi \int_{-\frac{\varepsilon}{k}}^{\frac{1}{2}} f(y) dy, \\ &= -4\pi \int_0^{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{k}} f_1(z) dz - 4\pi \int_0^{\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{k}} f_2(z) dz, \\ &= -4\pi \int_0^{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{k}} (f_1(z) + f_2(z)) dz - 4\pi \int_{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{k}}^{\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{k}} f_2(z) dz. \end{aligned}$$

積分区間内では $f_1(z) = -\frac{\sin(2\pi kz)}{(2 - \cos(2\pi(z + \frac{\varepsilon}{k})) - \cos(2\pi kz))^2} < 0$, 且つ $f_2(z) = \frac{\sin(2\pi kz)}{(2 - \cos(2\pi(z - \frac{\varepsilon}{k})) - \cos(2\pi kz))^2} > 0$ が成り立つ. さらに,

$$f_1(z) + f_2(z) = \frac{4 \sin(2\pi z) \sin(2\pi kz) \sin(2\pi \frac{\varepsilon}{k}) (2 - \cos(2\pi kz) - \cos(2\pi z) \cos(2\pi \frac{\varepsilon}{k}))}{(2 - \cos(2\pi(z + \frac{\varepsilon}{k})) - \cos(2\pi kz))^2 (2 - \cos(2\pi(z - \frac{\varepsilon}{k})) - \cos(2\pi kz))^2} > 0.$$

従って, $\frac{dT}{d\varepsilon} < 0$.

領域 3 $\varepsilon \geq \max[\frac{k}{2}, \frac{1-k}{2}]$:

$$\begin{aligned} \frac{dT(k, \varepsilon)}{d\varepsilon} &= -4\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1/2-\varepsilon}{k}} f(y)dy - 4\pi \int_{\frac{1/2-\varepsilon}{k}}^{\frac{1}{2}} f(y)dy, \\ &= -4\pi \int_0^{\frac{1}{2} + \frac{1/2-\varepsilon}{k}} f_3(z)dz - 4\pi \int_0^{\frac{1}{2} - \frac{1/2-\varepsilon}{k}} f_4(z)dz, \\ &= -4\pi \int_0^{\frac{1}{2} - \frac{1/2-\varepsilon}{k}} (f_3(z) + f_4(z))dz - 4\pi \int_{\frac{1}{2} - \frac{1/2-\varepsilon}{k}}^{\frac{1}{2}} f_3(z)dz. \end{aligned}$$

積分区間内では $f_3(z) = \frac{\sin(2\pi kz)}{(2 - \cos(2\pi(z - \frac{1/2-\varepsilon}{k}))) + \cos(2\pi kz))^2} > 0$, 且つ $f_4(z) = -\frac{\sin(2\pi kz)}{(2 - \cos(2\pi(z + \frac{1/2-\varepsilon}{k}))) + \cos(2\pi kz))^2} < 0$ が成り立つ. さらに,

$$f_3(z) + f_4(z) = \frac{4 \sin(2\pi z) \sin(2\pi kz) \sin(2\pi \frac{1/2-\varepsilon}{k}) (2 - \cos(2\pi kz) - \cos(2\pi z) \cos(2\pi \frac{1/2-\varepsilon}{k}))}{(2 - \cos(2\pi(z - \frac{1/2-\varepsilon}{k}))) + \cos(2\pi kz))^2 (2 - \cos(2\pi(z + \frac{1/2-\varepsilon}{k}))) + \cos(2\pi kz))^2} > 0. \quad (\text{E.1})$$

従って, $\frac{dT}{d\varepsilon} < 0$.

領域 4 $\frac{1-k}{2} < \varepsilon < \frac{k}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{dT(k, \varepsilon)}{d\varepsilon} &= -4\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{\varepsilon}{k}} f(y)dy - 4\pi \int_{-\frac{\varepsilon}{k}}^{\frac{1/2-\varepsilon}{k}} f(y)dy - 4\pi \int_{\frac{1/2-\varepsilon}{k}}^{\frac{1}{2}} f(y)dy, \\ &= -4\pi \int_0^{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{k}} (f_1(z) + f_2(z))dz - 4\pi \int_0^{\frac{1}{2} - \frac{1/2-\varepsilon}{k}} (f_3(z) + f_4(z))dz - 4\pi \int_{\frac{1}{2} - \frac{2\varepsilon}{k}}^{\frac{1-\varepsilon}{k} - \frac{1}{2}} f(y)dy. \end{aligned}$$

領域 2, 3 で証明されたように第一項, 第二項は負である. また, 区間 $[\frac{1}{2} - \frac{2\varepsilon}{k}, \frac{1-\varepsilon}{k} - \frac{1}{2}]$ で $f(y) > 0$ であるから, 最終項も負である. よって, $\frac{dT}{d\varepsilon} < 0$.

以上より, 全ての ε に対し不等式 $\frac{dT}{d\varepsilon} < 0$ は示された. □

付録F 式 (5.14) の証明

十分大きな Q_i に対して, 不等式 (5.14) は次の不等式とほぼ等価である

$$\frac{1}{Q_i} \sum_{j=1}^{Q_i} T_j \gtrsim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T_j \gtrsim \frac{1}{Q_{i+1}-1} \sum_{j=1}^{Q_{i+1}-1} T_j \quad (n = Q_i, Q_i + 1, \dots, Q_{i+1} - 1). \quad (\text{F.1})$$

左側の不等式の証明

左側の不等式を変換して得られる次の不等式を示す

$$\frac{1}{Q_i} \sum_{j=1}^{Q_i} T_j \gtrsim \frac{1}{n - Q_i} \sum_{j=Q_i+1}^n T_j \quad (n = Q_i + 1, \dots, Q_{i+1} - 1). \quad (\text{F.2})$$

パラメータ $\{\varepsilon_j\}_{j=Q_i+1}^n$ が区間 $[\varepsilon^{\min}, \varepsilon^{\max}]$ に一様に分布していると仮定する. ここで, $\varepsilon^{\min} (> \varepsilon_{Q_i})$ と ε^{\max} はそれぞれパラメータ列 ε_j ($j = Q_i + 1, \dots, n$) の最少値と最大値である. 式 (F.2) の右辺の算術平均は, 式 (5.10) で定義される密度関数 $P(T)$ を使ったアンサンブル平均で置き換えられる

$$\frac{1}{n - Q_i} \sum_{j=Q_i+1}^n T_j = \int_{T^{\min}}^{T^{\max}} TP(T) dT < \int_{T^{\min}}^{T_{Q_i}} TP(T) dT, \quad (\text{F.3})$$

系 2 より $T^{\max} < T_{Q_i}$ であるから最後の不等式が成立する. 式 (F.3) の積分を迫行すると

$$\int_{T^{\min}}^{T_{Q_i}} TP(T) dT \simeq \frac{2}{\pi} \ln(Q_i + Q_{i-1}/\theta_{i+1}) + \frac{2}{\pi} \ln \theta_{i+1} + C_1(k). \quad (\text{F.4})$$

式 (F.4), (5.15) を式 (F.2) の左辺に適用すると

$$\frac{1}{Q_i} \sum_{j=1}^{Q_i} T_j - \int_{T^{\min}}^{T_{Q_i}} TP(T) dT \simeq \frac{(\theta_{i+1} - 2 \ln \theta_{i+1})Q_i + Q_{i-1}}{\pi Q_i} > 0.$$

最後の不等式には $\theta - 2 \ln \theta > 0$ を用いた. 従って左側の不等式 (F.2) が成立する.

右側の不等式の証明

式 (F.1) の中辺は次のように書ける

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T_j = \frac{1}{n} \left[\sum_{j=1}^{Q_{i+1}-1} T_j - \sum_{j=n+1}^{Q_{i+1}-1} T_j \right].$$

系 2 より，滞在時間の和 $\sum_{j=n+1}^{Q_{i+1}-1} T_j$ は T_{Q_i} より大きな項を含んでいないことを考慮すると，次のように見積もることができる

$$\sum_{j=n+1}^{Q_{i+1}-1} T_j \lesssim (Q_{i+1} - 1 - n) \int_{T^{\min}}^{T_{Q_i}} TP(T) dT.$$

ここで再びパラメータ列 $\{\varepsilon_j\}_{j=n+1}^{Q_{i+1}-1}$ が稠密一様であると仮定している．これから，

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T_j &\gtrsim \frac{1}{n} \left[(Q_{i+1} - 1) \int_{T^{\min}}^{T_{Q_i}} TP(T) dT - (Q_{i+1} - 1 - n) \int_{T^{\min}}^{T_{Q_i}} TP(T) dT \right] \\ &= \int_{T^{\min}}^{T_{Q_i}} TP(T) dT \simeq \frac{1}{Q_{i+1} - 1} \sum_{j=1}^{Q_{i+1}-1} T_j. \end{aligned}$$

従って，右側の不等式も成立する。

□

付録 G GOPY 写像の SNA の構造不安定性

4 章の冒頭で Grebogi らの先行研究に言及し，スキュープロダクト性を壊すような一般の摂動に対する SNA の構造不安定性を指摘した．以下に，論文 [Grebogi et al. 1984] の追試実験の結果を示す．写像 (1.8) に摂動 εx_n ($\varepsilon > 0$) を加えて SNA が維持されるかどうか調べる

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2\sigma(\tanh x_n) \cos(2\pi\theta_n), \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \omega + \varepsilon x_n \pmod{1}. \end{cases} \quad (\text{G.1})$$

図 G.1 は最大リヤプノフ指数の絶対値 $|\lambda_{\max}|$ の ε 依存性を示している．およそ $|\lambda_{\max}| \sim \varepsilon^{0.9223}$ のスケール則が成り立っており，どんな小さな ε に対しても最大リヤプノフ指数 λ_{\max} はノンゼロであると予想される．すなわち，GOPY 写像の SNA は摂動 εx_n によって破壊される．さらに，リヤプノフ指数の符号を見ると，摂動 ε の大きさによって安定周期点がカオスアトラクターのどちらかに変わっていることがわかる．

摂動によって周期点が発生する理由は次のように理解できる．準周期駆動されるスキュープロダクト写像にスキュープロダクト性を壊すような摂動 $\varepsilon g(x_n, \theta_n)$ が入る場合を考えよう．

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, \theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \omega + \varepsilon g(x_n, \theta_n) \pmod{1}. \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

一般性を失わずに $\varepsilon > 0$ ， $|g| \leq d$ (d は正の定数) と出来る．写像 (G.2) が q 周期点を持つ必要条件是，方程式

$$q\omega - p + \varepsilon \sum_{n=1}^q g(x_n, \theta_n) = 0 \quad (\text{G.3})$$

が解 (q, p) ($q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$) を持つことである．さらに，式 (G.3) が解を持つ必要条件是

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right| \leq \varepsilon d \quad (\text{G.4})$$

を満たす有理数 q/p が存在することである．

ω を $n(\geq 2)$ 次代数的無理数とすると次の Roth の定理が成立する [Roth 1955]¹．

定理 3 ω が代数的数ならば，全ての ε に対し定数 $c = c(\omega, \varepsilon)$ が存在して

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^{2+\varepsilon}}$$

¹Roth はこの論文で 1958 年にフィールズ賞を受賞している．

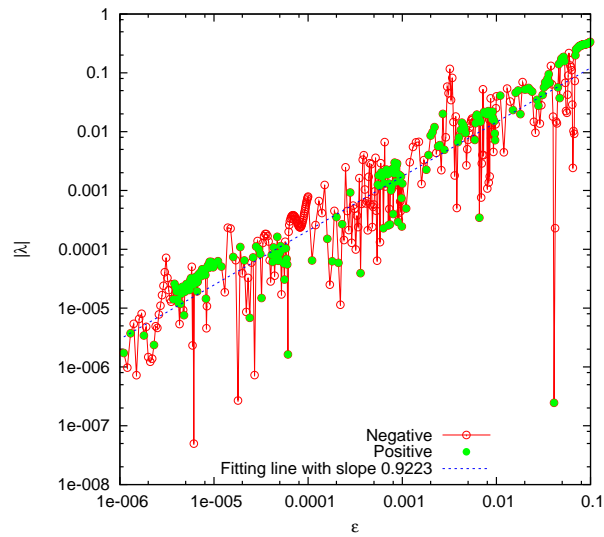


図 G.1: 非スキュープロダクト写像 (G.1) の最大リヤプノフ指数の絶対値 $|\lambda_{\max}|$ の ε 依存性. 赤丸は $\lambda_{\max} < 0$ の場合, 緑丸は $\lambda_{\max} > 0$ の場合を示している. ダッシュ線は最小二乗法によるフィッティング曲線で, $\varepsilon^{0.9223}$ のスケール則を表している.

が全ての規約有理数 p/q に対して成立する.

式 (G.4) と Roth の定理から, 摂動によって生じる周期点の周期 q の下限が次のように与えられる

$$q > \left(\frac{c}{\varepsilon d} \right)^{\frac{1}{2+\varepsilon}} \quad (\text{G.5})$$

すなわち, 摂動 ε が小さければ小さいほど, 生じる周期点は長周期でなければならない.

以上より, 最大リヤプノフ指数と周期長に関する ε に関するスケール則から, 十分小さな摂動によって生じるアトラクターは SNA と実験的には区別できないと予想される.

謝辞

早稲田大学教授 相澤洋二先生には、学部4年から8年間の長きに亘り多くの研究指導をして頂きました。そしてどんな時も温かく励ましサポートして頂きました。心から感謝いたします。

早稲田大学教授 栗原進先生，早稲田大学教授 山崎義弘先生，早稲田大学教授 高野光則先生，首都大学東京教授 首藤啓先生には博士論文について有益なコメントを頂きました。故田崎修一先生には卒修論などで度々御指導して頂きました。ここに感謝いたします。

早稲田大学メディアネットワークセンターでは、早稲田大学教授 瀧澤武信先生，早稲田大学教授 楠元範明先生を始め、多くの教職員の方々にお世話になりました。ここに感謝いたします。

大阪市立大学 特任講師 (元早稲田大学助手) 宮口智成博士にはプログラミングから統計物理に至る様々なことを御指導して頂きました。慶応大学 特別研究助教 (元早稲田大学助教) 秋元琢磨博士にはエルゴ・ド理論から論文執筆方法に及ぶ沢山の御指導をして頂きました。渡橋憲二博士，蓮見知弘博士からは公私において大変良い刺激を受けました。早稲田大学助手 新海創也君とは複雑系の諸問題や郡司理論について良く語りました。彼の研究姿勢が私にとっての鏡でありました。早稲田大学助手 原田順一君には友として支えられました。中川正基君，白石允梓君には研究室の計算機環境を構築・維持して頂きました。皆様に深くお礼申し上げます。

最後に、これまでずっと応援し続けてくれた家族に心から感謝します。

2011年2月

研究業績

論文

- (1) Takahito Mitsui and Yoji Aizawa, “Intermittency Route to Strange Nonchaotic Attractors in a Non-Skew Product Map”, *Phys. Rev. E* **81**, 046210 (2010).
- (2) Takahito Mitsui, “Nonchaotic Stagnant Motion in a Marginal Quasiperiodic Gradient System”, *Phys. Rev. E* **78**, 026206 (2008).
- (3) Takahito Mitsui, “Latent Instability in the Nonchaotic Stagnant Motion in Marginal Quasiperiodic Gradient System”, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **173**, 243 (2008).
- (4) Takahito Mitsui and Yoji Aizawa, “Geometrical Resonance in the Refractory-Activation Oscillator Model for the Crossbridge Formation in the Actomyosin System”, *Journal of Korean Physical Society* **50**, 272 (2007).
- (5) Y. Aizawa, T. Mitsui, and T. Kameda, “Refractory-Activation Oscillator Model for the Cross-Bridge Formation in the Acto-Myosin System - Two Cooperative Phenomena in the Hill’s Relation -”, *Nonlinear Phenomena in Complex Systems* **9**, 150 (2006).
- (6) Takahito Mitsui and Yoji Aizawa, “A Theoretical Model for Muscle Contraction based on Refractory-Activation Systems”, *Journal of Physics; Conference Series* **31**, 233 (2006).

国際会議

- (1) Takahito Mitsui, “ Subdiffusion due to Strange Nonchaotic Dynamics ”, The 13th Slovenia-Japan seminar on nonlinear science and Waseda AICS symposium on nonlinear and nonequilibrium phenomena in complex systems, November 4-6, 2010, Waseda University, Japan.
- (2) Takahito Mitsui, “ Subdiffusion related to strange nonchaotic attractors ”, Dynamic Days Asia Pacific 6 (DDAP6), July 12-14, 2010, UNSW, Australia.
- (3) Takahito Mitsui, “ Spectral analysis of the nonchaotic stagnant motion in a marginal quasiperiodic gradient system ”, Dynamics Days Asia Pacific 5 (DDAP5), September 9-12, 2008, Nara, JAPAN.
- (4) Takahito Mitsui, “ Nonchaotic Stagnant Motion in a Marginal Quasiperiodic Gradient Sys-

tem ”, 7th International Summer School/Conference, “ Let’s Face chaos through Nonlinear Dynamics ”, Center for Applied Mathematics and Theoretical Physics CAMTP, University of Maribor, Slovenia 29 June - 13 July 2008 .

(5) Takahito Mitsui and Yoji Aizawa, “ Quasi-periodic one-dimensional ordinary differential equation generating stagnant motion,” Nishinomiya-Yukawa International & Interdisciplinary Symposium 2007. What is life? The Next 100 Years of Yukawa’s Dream, October 15-20, 2007 CO-OP Inn Kyoto Conference Hall

(6) Takahito Mitsui, “ A mathematical model for the intermittent behaviors of animal locomotion ”, Waseda University The 5th 21st century COE symposium on Physics of Self-organization Systems, September 13-14, 2007, Waseda University .

(7) Takahito Mitsui and Yoji Aizawa, “ Geometrical Resonance in the Refractory-Activation Oscillator Model for the Crossbridge Formation in the Actomyosin System ”, Dynamics Days Asia Pacific 4 (DDAP4), The 4th International Conference on Nonlinear Science. Pohang, Korea, July 12-14, 2006 .

国内学会

(1) 三ツ井孝仁, “ 非カオスのストレンジアトラクターに起因する劣拡散 ”, 日本物理学会 秋季大会, 大阪府立大学, 2010年9月23日 9月26日.

(2) 三ツ井孝仁, 相澤洋二, “ ある自励的写像における非カオスのストレンジアトラクター ”, 熊本大学, 日本物理学会 秋季大会, 熊本大学, 2009年9月25日 9月28日.

(3) 三ツ井孝仁, 相澤洋二, “ Strange Nonchaotic Attractors in a Torus Map out of Skew-product Paradigm ”, 研究集会: Dynamics of complex systems 2009 - 複雑系解析における未解決問題への新しい挑戦 -, 2009年8月31日-9月2日, 北海道大学.

(4) 三ツ井孝仁, 相澤洋二, “ 決定論的慣性ラチェットにおける非カオスのストレンジアトラクター ”, 日本物理学会 第64回年次大会, 立教学院池袋キャンパス, 2009年3月27日 3月30日 .

(5) 三ツ井孝仁, “ 臨界的な準周期外力項を持つ常微分方程式の漸近挙動 ”, 日本物理学会 第63回年次大会, 近畿大学, 2008年3月22日 3月26日 .

(6) 三ツ井孝仁, “ 臨界的且つ準周期的な勾配系の漸近挙動 ”, 九州大学 産業技術数理研究センターワークショップ, 2008年3月6日 - 3月8日 .

(7) 三ツ井孝仁, “ 時間フラクタル性を持つ動物行動のモデル: 異なる要因が生み出す間欠性 ”, 日本物理学会 第62回年次大会, 北海道大学, 2007年9月21日 9月24日 .

(8) 三ツ井孝仁, “ Metabolism-Repair systems と計算についての考察 ”, 2006年度 第5回 COE ワークショップ, 早稲田大学, 2007年3月 .

(9) 三ツ井孝仁, 相澤洋二, “ 不応期を持つアクティブエレメント集合系におけるコヒーレンスの生成と複雑さ: 筋収縮現象の理解へ向けて ”, 日本物理学会 秋季大会, 青森大学, 2004年9月12日 9月15日.