 早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

Vector fields in $\mathcal{G}^1(M)$ and Axiom A
($\mathcal{G}^1(M)$ のベクトル場と公理 A)

申 請 者

豊 柴 博 義

Hiroyoshi Toyoshiba

1999 年 12 月

力学系における重要なテーマの一つに、1960年代にS.SmaleとJ.Palisにより出された次の予想の解決がある。

安定性予想　n 次元閉多様体 M 上の微分同相写像 f（またはベクトル場 X）が、構造安定であるための必要十分条件は、f（または X）が Axiom A かつ、強横断性条件をみたす事であり、Ω-安定であるための必要十分条件は、Axiom A かつ no-cycle 条件をみたす事である。

この問題の十分条件つまり、Axiom A かつ強横断性条件をみたせば構造安定であること及び、Axiom A かつ no-cycle 条件をみたせば Ω-安定であることは、1970年代に、J.Robin、C.Robinson らによって C^1-級微分同相写像及び C^1-級ベクトル場の場合に完全に解決された。一方、必要条件は、1982年に、R.Mañé がある条件のもとで C^1-級微分同相写像の場合に、構造安定ならば、Axiom A かつ強横断性条件をみたすことを示し、1986年に C^1-級微分同相写像の場合を完全に解決した。同年 J.Palis は C^1-級微分同相写像の場合には Ω-安定にまで拡張できることを証明した。1992年、S.Hayashi はより一般的な条件のもとで、つまり Ω-安定な C^1-級微分同相写像を含む $\mathcal{F}^1(M)$ に属する写像は、Axiom A 及び no-cycle 条件を満たす事を示した。これで、C^1-級微分同相写像については、安定な写像の特徴付けは完結した。続いて、S.Hayashi は、1997年に Connecting Lemma を証明し、それを用いて Ω-安定な C^1-級ベクトル場の場合にも、Axiom A が成り立つ事を示した。ここで、微分同相写像の場合と同じように $\mathcal{F}^1(M)$ に相当する C^1-級ベクトル場の集合 $\mathcal{G}^1(M)$ への拡張が期待されるが、J.Guchenheimer の $\mathcal{G}^1(M)$ に属するが、Axiom A を満たさない例があるため、ベクトル場の場合には、次が考えられる。

問題　$\mathcal{G}^1(M)$ で特異点を持たなければ、Axiom A かつ no-cycle 条件を満たす。

第１章では、$\mathcal{G}^1(M)$ の特異点を持たないベクトル場の集合において、Axiom A を満たすベクトル場の集合が、稠密な開集合を含むことを示した。第２章では、$\mathcal{G}^1(M)$ で特異点を持たないベクトル場の持つ特別な性質を示し、その性質を使って、ベクトル場の場合の安定性予想における必要条件の新しい証明を与えた。第３章では、第２章で示した性質を使って、未解決であった S.Liao の予想 "Kupka-Smale の内点に属するベクトル場は、Axiom A かつ no-cycle 条件をみたす。" を証明した。第４章では、３次元の場合に S.Liao が解決していた $\mathcal{G}^1(M)$ で特異点を持たなければ、Axiom A かつ no-cycle 条件を満たすという定理のより一般的な、Mañé の理論と方法による、別証明を与えた。

第１章　M を n 次元閉多様体とし、$C^1(M)$ を M 上の C^1-級ベクトル場の集合とする。$\mathcal{G}^1(M)$ は $C^1(M)$ の部分集合で、$X \in \mathcal{G}^1(M)$ とは、X はある近傍 $U \subset C^1(M)$ をもち、任意の U の元 Y に対して、Y の閉軌道及び特異点はすべて

双曲的であるということである。$\mathcal{G}^1(M)$ の特異点を持たないベクトル場の集合を $\tilde{\mathcal{G}}^1(M)$ と表す。ベクトル場 X が Axiom A を満たす事を示すためには、１．X の周期点集合の閉包は X の非遊走集合と一致している　２．X の非遊走集合は、双曲的集合であるが言えればよい。この２つを示すうえで問題となるのが、基本集合 Λ の連続性である。写像 $\Gamma : Y \to \Lambda(Y)$ が下に半連続な性質をもつことから、residual な部分集合においては、連続であること、さらに基本集合は、連続ならば位相的性質を保つ事を、従来の基本集合の安定多様体の次元に関する帰納法に取り入れることにより、上の問題を考えるうえで一つの手がかりになり、安定性予想の必要条件を解決するうえでも重要な次の定理を証明した。

定理 1.1.1　$\tilde{\mathcal{G}}^1(M)$ において、Axiom A を満たすベクトル場は稠密な開集合を含む。

第２章　第１章の結果をさらに進めるために、$\mathcal{G}^1(M)$ で特異点を持たないベクトル場の集合について調べる必要がある。そこで Mañé により考えだされた集合で、安定性予想の解決に非常に重要な役割を担った点集合 $\Sigma(X)$ に注目した。この点集合の新しい性質の発見により、上の定理と合わせて、安定性予想の必要条件の新しい証明を与える事ができる。

定理 2.1.1　ベクトル場 X は、$\mathcal{G}^1(M)$ に属し、特異点を持たないとする。この時、任意の点 $x \in \Sigma(X)$ に対して、x の軌道 $orbit(x)$ の閉包と X の周期点の集合 $per(X)$ の閉包との交わりは空でない。

さらにこの定理を使うことによって、次の定理を得ることが出来る。

定理 2.1.2　ベクトル場 X は $\mathcal{G}^1(M)$ に属し、特異点を持たないとする。ここで、全ての $0 \le i < j \le n$ にたいして $\overline{per_i(x)} \cap \overline{per_j(X)} = \emptyset$ ならば、$\overline{per(X)}$ は、双曲的集合である。

この定理により、ベクトル場 X が Ω-安定ならば、Axiom A を満たす事が証明できる。これには、S.Hayashi の Connecting Lemma が重要な役割を果す。この Lemma により、ベクトル場 X が特異点をもっても、それは、X の非遊走集合からは、孤立していることが示される。つまり、上の定理 2.1.2 の状況と同じだと考えてよい。定理 1.1.1 とあわせれば、X は Ω-安定であるから、X の非遊走集合と周期軌道の集合の閉包とは、一致してることがいえる。よって、次が証明される。

定理 2.1.3　(Ω-Stability Congecture for flow)　ベクトル場 X が Ω-安定ならば、X は、Axiom A をみたす。

定理 2.1.1 により、X が $\mathcal{G}^1(M)$ の元ならば、新しい性質を持つことがわかった。この性質の発見により、$\overline{per(X)}$ の双曲性を証明するうえで、基本集合の連続性は言えなくても定理 2.1.2 の条件さえ言えれば、双曲性の証明ができることがわかった。

第 3 章　この章では、Liao の予想を解決した。ベクトル場 X が Kupka-Smale であるとは、X の特異点や周期軌道はすべて双曲的であり、それらの安定多様体と不安定多様体とは、交わったとすれば、全て横断的であるという事である。この定義から、X が Kupka-Smale の内点ならば、$\mathcal{G}^1(M)$ に含まれることがわかる。一方、もし X が Ω-安定ならば、それは Kupka-Smale ベクトル場の内点集合に含まれる。つまり、最終目標である最初に挙げた問題を解決する上での、ひとつの手がかりとなる。

定理 3.1.1(Liao's Conjecture)　ベクトル場 X が Kupka-Smale ベクトル場の内点ならば、X は Axiom A かつ no-cycle 条件をみたす。

この定理 3.1.1 の証明には、次の補題が本質的な役割を持っている。

補題 3.2.1　ベクトル場 X が Kupka-Smale ベクトル場の内点ならば、任意の $x \in \Sigma(X)$ の点に対して、x の軌道 $orbit(x)$ の閉包は、双曲的集合である。

この第 3 章の結果から、Axiom A かつ no-cycle 条件をみたすベクトル場の集合は、Kupka-Smale の内点集合と一致している事がわかる。最終的に問題を解決するためには、条件として次の 2 つが考えられる。つまり X が $\mathcal{G}^1(M)$ で特異点を持たない事に加えて、X の周りのすべてのベクトル場について周期軌道の安定多様体と不安定多様体とは横断的にしか交わらないという事、もしくは基本集合の連続性があるという事、この 2 つのどちらかが示せればよい。

第 4 章　この章では、先の章で証明した $\mathcal{G}^1(M)$ の性質を使うことによって、Liao の定理の別証明を与えた。つまり、3 次元多様体上では、X が $\mathcal{G}^1(M)$ で特異点を持たなければ、Axiom A かつ no-cycle 条件をみたすということを解決した。彼は、Obstruction set という概念を用いて証明しているが、一般的によく知られた方法ではない。そこで私は、一般的でよく知られた Mañé の概念と方法を用いて証明した。

定理 4.1.1 $X \in \mathcal{G}^1(M^3)$ で特異点を持たないとする。この時、X は Axiom A かつ no-cycle 条件をみたす。ここで、M^3 は 3 次元閉多様体を表わすものとする。