SPATIAL GRAPHS BOUNDING INTERIOR DISJOINT SURFACES

(内部が交わらない曲面を張る空間グラフについて)

＜論文概要書＞

October 2005

Curriculum Area Sciences Major
Graduate School of Education
Waseda Univercity

Reiko Shinjo

序文

Spatial graph に関する問題の 1 つとして, graph の standard embedding を決定する, という問題があげられる. Planar graph に対しては plane graph を standard embedding とみなすのが自然であると考えられるが, 一般の graph に関しては未だ様々なアプローチが試みられている.

Graph の standard embedding に関する研究の一環として K. Kobayashi は, graph の locally unknotted spatial embedding という概念を導入した. f を graph G の spatial embedding としたとき, $H_1(G;\mathbb{Z})$ のある basis をなす G の cycle の集合で, その cycle の集合に対応する $f(G)$ 内の knot 全てに, 互いに内部の交わらない disk を張ることができるものが存在するとき, f は locally unknotted であるという. T. Endo-T. Otsuki は locally unknotted spatial embedding に関する次の命題を与えた.

命題 A. 任意の graph は locally unknotted spatial embedding を持つ.

一般に $H_1(G;\mathbb{Z})$ の rank, すなわち graph G の first Betti number $\beta(G)$, が G の spatial embedding に含まれる knot が張ることのできる, 互いに内部が交わらない disk の枚数の上限でないことはすぐにわかる. よって次の問題 A を考えることは自然である.

問題 A. Graph G の spatial embedding に含まれる, G の cycle の集合に対応する knot に張ることができる, 互いに内部の交わらない disk の枚数の上限は何枚か.

さらに,

問題 B. 上限を実現する spatial embedding はどのような性質を持つか.

という問題も考えられる. これらの問題は disk を一般の compact, connected かつ orientable である surface へと拡張して考えることもできる.

第 1 章では問題 A について考察する. はじめに, 与えられた graph の spatial embedding に含まれる knot に張ることができる, 互いに内部が交わらない compact, connected かつ orientable である surface の枚数を上から評価する式を与える. そして任意の graph が, その評価式で与えられた上界を, disk を張ることによって実現できる spatial embedding を持つことを示す.

第 2 章では, 問題 B に関して考察する. 含まれる cycle の数が, 張ることのできる surface の枚数の上限と一致する graph に対し, boundary link の拡張となる, graph の boundary spatial embedding を定義する. 第 2 節では boundary spatial embedding を持つ graph の特徴付けをする. 第 3 節では graph の boundary spatial embedding の幾何的な性質として, spatial graph の local move との関係について考察する. 実

際は boundary link と local move に関する既知の結果を, graph の boundary spatial embedding へと拡張した定理 2.1.5 を示す.

第 3 章では linking number と Simon invariant を用いた spatial graph の spatial graph-homology 分類を与える定理 3.1.3 を示す. Spatial-graph-homologus とは K. Taniyama により定義された spatial graph の同値関係である. T. Motohashi-Taniyama により, 与えられた graph の spatial embedding f と g が homologous であることと f と g が有限回の delta move と ambient isotopy で移りあうことは同値である, ということが示されている.

また定理 3.1.3 を応用して, minimally different spatial embedding に関する定理を 1 つ与える.

第 1 章

はじめに graph G の spatial embedding $f : G \to S^3$ に対し, $f(G)$ の a collection of m-spanning surfaces を定義する. Spatial graph に含まれる m 個の knot の集合を考えたとき, それらの knot 全てに同時に張ることができる, 互いに内部が交わらない m 枚の compact, connected かつ orientable な surface の集合のことを $f(G)$ の a collection of m-spanning surfaces と呼ぶ. 特に各 surface を全て disk で取れるときに $f(G)$ の a collection of m-spanning disks と呼ぶ. 定義より, G の locally unknotted spatial embedding は, a collection of $\beta(G)$-spanning disks を持つことがわかる. しかし一般に, $\beta(G)$ は spanning surface の枚数 m の上限ではない. このことは, 例えば theta graph の trivial embedding が a collection of 3-spaning disks を持つことからすぐに分かる.

m の上限を定めるため, 定理 1.1.1 で任意の graph に対し supanning surface の枚数 m の上からの評価式を与える.

定理 1.1.1. G を $\beta(G) = g$ である graph, $G = \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{l} K_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i\right)$ を各 i に対し $\beta(B_i) \geq 2$, $\beta(K_i) = 1$, $\beta(P_i) = 0$ となる G の block decomposition とする. ただし $\bigcup_{i=1}^{0} B_i$, $\bigcup_{i=1}^{0} K_i$ and $\bigcup_{i=1}^{0} P_i$ は $\emptyset$ とみなす. もし spatial embedding $f : G \to S^3$ に対し, $f(G)$ の a collection of m-spanning surfaces が存在するならば $m \leq 3g - 3k - 2l$ である.

第 2 節の目的は, 上記の定理 1.1.1 で与えた m の上界 $3g - 3k - 2l$ が, m の上限であることを主張する次の補題を示すことである.

補題 1.1.4. G を $\beta(G) = g$ である graph, $G = \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{l} K_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i\right)$ を各 i に対し $\beta(B_i) \geq 2$, $\beta(K_i) = 1$, $\beta(P_i) = 0$ となる G の block decomposition,

γ_i を B_i の cycle とする. このとき G の spatial embedding $f : G \to S^3$ で a collection of $(3g-3k-2l)$-spanning disks $\{D_1, D_2, \ldots, D_{3g-3k-2l}\}$ で, G の cycle の集合 $\{f^{-1}(\partial D_1), f^{-1}(\partial D_2), \ldots, f^{-1}(\partial D_{3g-3k-2l})\}$ が各 γ_i と K_i を含んだ $H_1(G;\mathbb{Z})$ のある basis を表す cycle の集合を含むものを持つものが存在する.

補題 1.1.4 を示すために graph を block である場合に限定して, この補題より少し強い定理 1.1.2 を示す. 実際, 補題 1.1.4 は簡単な考察より定理 1.1.2 から従う.

また補題 1.1.4 は, 任意の graph が定理 1.1.1 で与えた上限を disk で実現する locally unknotted embedding を持つ, ということを主張するものである. よってこの補題は Endo-Otsuki の結果の自然な拡張になっている.

第 2 章

この章では boundary link の概念を spatial graph に拡張することを考える. Boundary link の拡張として, graph の boundary spatial embedding を定義し, その幾何的な性質について考察する. 全ての graph が boundary spatial embedding を持つとは限らないことは簡単な考察より従う. よって, はじめに boundary spatial embedding を持つ graph の特徴付けを行う. 次に boundary link に対して知られている幾何的な性質を, graph の boundary spatial embedding に拡張することを考える.

第 2 節では boundary spatial embedding を持つ graph の完全な特徴付けを与える定理 2.1.2 の証明を与える.

第 3 節では Shibuya, Cervantes-Fenn によって与えられた boundary link の self-sharp equivalence と self-pass equivalence による分類を, graph の boundary spatial embedding に拡張した次の定理の証明を与える.

定理 2.1.5. G を graph とする. このとき次が成り立つ.
(1) G のどの 2 つの boundary spatial embedding も self-sharp equivalent である.
(2) G の boundary spatial embedding f と g が self-pass equivalent であることの必要十分条件は, G の任意の cycle γ に対して $\mathrm{Arf}(f(\gamma)) = \mathrm{Arf}(g(\gamma))$ が成立することである. ただし $\mathrm{Arf}(\cdot)$ は Arf invariant を表すものとする.

さらに self-sharp move は self crossing change で実現できるので, 定理 2.1.5 の系として次を得る.

系 2.1.6. G を graph とする. G のどの boundary spatial embedding も trivial embedding に edge-homotopic である.

Edge-homotopy とは, J. Milnor の link-homotopy の一般化として Taniyama により導入された同値関係である．従って系 2.1.6 は, boundary link は trivial link に edge-homotopic であるという L. Cervantes-R. A. Fenn と D. Dimovski による結果の自然な拡張であることがわかる.

第 3 章

この章では Taniyama により定義された spatial-graph-homology による spatial graph の同値分類について考察する．Taniyama は spatial graph の spatial graph-homology 分類に関する次の命題を与えた.

命題 *C*. G を graph, $f, g : G \to R^3$ を G の spatial embedding とする．このとき f と g が spatial-graph-homologous である必要十分条件は $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ となることである．ただし $\mathcal{L}(\cdot)$ は Wu invariant を表すものとする.

Graph G の Wu invariant は, G が 2 つの circle の disjoint union に homeomorphic であるときは linking number に, K_5 または $K_{3,3}$ に homeomorphic であるときは Simon invariant に一致することが知られている．この 2 つの invariant は spatial graph の regular diagram から比較的簡単に求めることができる．この章の目的は Simon invariant と linking number を用いた spatial graph の spatial graph-homology 分類を与える次の定理を示すことである.

定理 3.1.3. G を graph, $f, g : G \to R^3$ を G の spatial embedding とする．このとき f と g が spatial-graph-homologous であるための必要十分条件は, 2 つの cycle の disjoint union に homeomorphic である G の任意の subgraph H に対し, その restriction map $f|_H$ と $g|_H$ の linking number が等しく，K_5 or $K_{3,3}$ に homeomorphic である G の任意の subgraph H に対し, その restriction map $f|_H$ と $g|_H$ の Simon invariant が一致するということである.

T. Soma-H. Sugai-A. Yasuhara は disk/band surface を用いて, linking number による planar graph の spatial graph-homology 分類を与えている．定理 3.1.3 は彼らの結果の自然な拡張になっていることがわかる.

また定理 3.1.3 の応用として, 次の定理を与える.

定理 3.1.6. G を 2 つの circle の disjoint union, K_5, $K_{3,3}$ のいずれとも homeomorphic でない graph とする．このとき G の任意の 2 つの minimally different embedding は spatial-graph-homologous である.