早稲田大学大学院教育学研究科紀要　別冊　18号―2　2011年３月

児童の加法的可換性の理解に関する文献展望

王　　　暁　曦

1. 目　　的

本稿の目的は，主に就学前の幼児から小学校低学年の児童を対象とする加法的特性をめぐる欧米の研究を展望することによって，幼児・児童の加法的特性の発達と理解及び応用における研究の今後の課題を明らかにすることである。第2節では，代表的な可換性の発達レベルについて述べる。第3節では，可換性の理解に対する影響要因について述べる。第4節では，可換性とその他の加法的特性との関連性に関する研究について述べる。第5節では，これらの研究の問題点と今後の課題を考察する。

幼児がどのように数を認識しているかという問いは精神発達の基本問題の1つと言えよう。1970年代より，認知心理学的な観点から数に関する研究が盛んに行われるようになり，児童の数概念の発達が，解明されつつある。例えば，Groen & Parkman（1972）によって始まった心的たし算（mental arithmetic）の研究では，Gelman & Gallistel（1978）によって，子どもの計数における5つの原理が明らかにされた。これらの研究に加え様々な研究から，数の理解の多様な側面が示唆されており，数に関するさまざまな領域は，子どもの日常生活でのさまざまな体験から獲得されることが分かってきたのである。つまり数概念は学校教育によって始めて獲得されるものではなく，日常生活の中での経験を通して獲得されるのである。

2. 可換性の発達レベル理論

Ginsburg（1977）の研究以来，子どもの加法可換性理解に関して数多くの研究が発表されている。加法の可換性とは，加数の順番を交換してもその和が変わらない，という原理である。すなわち，a ＋ b ― ＝ b ＋ a と表せる。ここでは，可換性の発達レベルに関する二つの代表的な研究を展望する。

2.1 Resnick の可換性の発達レベル理論

子どもの数に対する理解は具体的思考から抽象的思考へと発達していると指摘している Resnick（1992）は，特定領域における数学的な発達には，性質の異なる4つのタイプの算数思考が含まれていると提唱した。すなわち，原初の量概念としての算数（Mathematics of Protoquantities），量としての算数（Mathematics of Quantities），数としての算数（Mathematics of Numbers），演算子としての算数（Mathematics of Operators）である。

レベル１：原初の量概念としての算数　このレベルでは，子どもは特定の“分離量”（numerosity）と関わりなく，具体物について判断することができる。その際，質的推理は，答えの方向性を予測するのに対して，量的な推理は，正確な答えを決定する。この方法を用いて，ある集合にものを加えるという働きは，その集合のサイズが増えることであり，ある集合からものを取り除くという働きは，その集合のサイズが減少することであると，子どもは認識するのである。

レベル２：量としての算数　このレベルでは，子どもは，特定的でかつ意味のある文脈に関係のある数について判断することができる。例えば，彼らはクッキー3つにクッキー2つを加えるとクッキーは5つになるということを予測，判断できる。逆に，5つのクッキーから，加えられた2つのクッキーを取り除くと，元の3つのクッキーになるということも認識できる。

レベル３：数字としての算数　このレベルでは，子どもは，抽象的な数について判断することができる。例えば，具体的な指示物がなくても，3と2の加法に関して論理的な結論を得ることができる。あるいは，個別の計算，または記憶からの検索がなくても，彼らは3 + 2 − 2の結果は3になることを認識することができる。つまり，2を引くことで足した2を取り消すと理解している可能性がある。

レベル４：演算子としての算数　このレベルでは，子どもは，一般的な算数原理を構成する。彼らは，抽象的な概念上の実体として，数字を用いた演算ができる。例えば，子どもは，どんな数でも加えた後にその数を引くことによって式の結果は元に戻る，といった一般的な逆数原理（general inverse principle）を認識することができる。

これら4つのレベルに対応して，加法の可換性に対する理解にも4つの段階があると指摘されている（表1）。加法の可換性の根源は，原初的量レベルまで遡り，部分―全体スキーマのような加法概念に対する一般的理解にも由来する。

原初的量概念レベル（Protoquantitative）：このレベルの子どもたちは，全体の量は2つあるいは2つ以上に分けられること，部分は全体を作るために再合成できること，最初の量（original amount）を再構成するには，部分の順番はあまり重要ではないことを知っている。

量レベル（Quantitative）：このレベルの子どもは，量を判断する場面では，数唱スキルを適用し，部分－全体スキーマで量を表す。

表１　Resnickの可換性の発達レベル（1992）

可換性の発達レベル	例
原初的量概念レベル（数以前）	りんご+オレンジ=オレンジ+りんご
量レベル（具体物における特定の数）	りんご3つ+りんご5つ=りんご5つ+りんご3つ
数字レベル（抽象物における特定の数）	3 + 5 = 5 + 3
演算子レベル（一般化された算数原理）	A + B = B + A

数字レベル（Numerical）：具体的な指示物が必要ではなくなり，子どもは，数と数の間の可換性に関する知識を体系化することができる。

演算子レベル（Operator）：このレベルの子どもは特定の数だけでなく，より一般的な数の関係にまで注意を切りかえることができる。このレベルの子どもは，可換性を加法の一般的な特性として理解している。

Resnick（1992）は，学校で教わった計算方略，または日常生活で身につけた計算方略を獲得していない幼児でさえ，原初的量概念レベルにおける可換性を理解していると主張している。

2.2 その他の可換性の発達レベル

幼児の可換性を調査する際には，主に物語問題が使われている。物語問題の提示法には，2つのパターンがある。それは，Change-add-to 問題と Part-part-whole 問題である。Weaver（1982）によると，Change-add-to 問題は，単項演算（unary operation），Part-part-whole 問題は，二項演算（binary operation）に関する問題である。単項演算とは，被作用子が1つだけあるような演算である。（例えば，A さんはあめを3つ持っています。お母さんは A さんにあめを2つあげました。A さんはあめをいくつ持っていますか）。二項演算とは，2つの要素から3番目の要素をもたらす演算である。（例えば，B さんはりんごを3つとみかんを2つ持っています。B さんは果物を全部いくつ持っていますか。）

従来の早期加法概念では，二項演算より，単項演算のほうが早く発達するとされている（Brush, 1978; Gelman&Gallistel, 1978）。しかし Resnick（1992）は，幼児の思考には，加法の一次元概念（加法とは必ず，最初の数にその後の数を足すものであるという概念）（unary conception of addition）と二次元概念（加法では，最初の数から計算する場合でもその後の数から計算する場合でも和が同じであるという概念）（binary conception of addition）が含まれるという仮説を立てている。さらに，原初の量概念レベルにおいて既に，子どもの加法の一次元概念と二次元概念は同時に存在しているという仮説を立てている。この Resnick（1992）の仮説から考えると，問題のタイプが違っても可換性に関する理解の差は生じないはずである。しかし，いくつもの研究結果から，子どもは，Change-add-to 問題よりも Part-part-whole 問題に対してより速く解答するという報告がなされている。そこで，Wilkins, Baroody, & Tiilikainen（2001）は，加法の一次元概念と二次元概念を結びつけて，加法の可換性の発達レベルを新たに提唱した（表2）。

レベル0では，子どもは加法の一次元概念しか持っていないため，2 + 4 と 4 + 2 は異なる計算として認識される。レベル1になると，加法の一次元概念の抑制は弱くなり，子どもはより速く計算するために，式の順番を無視するようになる。レベル2の子どもは，4 + 2 と 2 + 4 は順番が違っても，その結果は同じであることを認識している。レベル3の子どもは加法の二次元的な視点を獲得しており，それによって真の可換性を理解することができる。

表２　Wilkins 他による交換法則の発達レベル（Wilkins, Baroody, & Tiilikainen 2001）

交換法則の発達レベル		例
レベル 0	加法の一次元的概念＋交換法則と無関連	4 ＋ 2 は 4 より 2 個多い，2 ＋ 4 は 2 より 4 個多いとみなしている。そして，4 ＋ 2 と 2 ＋ 4 を別の計算として認識している。
レベル 1	加法の一次元的概念＋原初的交換法則	2 ＋ 4 は，2 より 4 個多いとみなしているが，計算の効率を良くするために，4 より 2 個多いことをあらわすものとして扱う。しかし，4 ＋ 2 と 2 ＋ 4 は同じ和となることを正確に認識できない。
レベル 2	加法の一次元的概念＋仮の交換法則	2 ＋ 4 は，2 より 4 個多いとみなしておりが，4 ＋ 2 と同じ和を持つが，4 ＋ 2 と持つ意味が異なると認識している。
レベル 3	加法の二次的概念＋真の交換法則	2 ＋ 4 と 4 ＋ 2 は，どちらも基数 2 と基数 4 を結合して，基数 6 を形成するとしてみなしている（2 ＋ 4 ＝ 4 ＋ 2 ＝ 6 と認識している。）

3. 可換性の理解に対する影響要因

Resnick（1992）は，和を計算するためのインフォーマルな方略を獲得する前の幼児も原初的量概念レベルでは可換性の知識を持っているということを示唆している。しかし，量レベルでは，計算の流暢さがこの知識の構造にどのような役割を果たしているのか，という点を明確に述べていなかった。そのため，児童の可換性に対する理解は計算経験や課題効果，加数の大きさの効果，問題提示法などによって影響されるのかという点について，多数の研究が行われてきた。

3.1 計算経験

Baroody & Gannon（1984）は，5 歳 4 ヶ月から 6 歳 9 ヶ月の子ども 36 名を対象に，可換性と加法経験との間の関連性の調査を行った。その調査の課題は，可換性の課題と加法の計算課題で構成されている。可換性の課題は，前後に提示された 2 つの式の結果を比較させる課題と，計算式が書かれたカードを提示し，計算をさせる。その後，加数を交換した式をもう一度提示する計算課題とで構成されている。その結果，counting-all beginning with the first addend 方略（以下略称 CAF）や counting-on beginning with the first addend 方略（以下略称 COF）といった能率の悪い方略を使用する生徒より，counting -all beginning with the larger addend（以下略称 CAL）や counting-on from the larger addend（以下略称 COL）方略のような，数唱に基づいた上級な加法方略を使用する生徒のほうが，可換性を理解しているという示唆をしている。

また，Baroody（1987）の調査では，精神年齢 5 歳から 6 歳の知的障害児 34 名が，訓練なしグループ（足し算の訓練を受けたことがない），最小限訓練グループ（家庭では指導を受けたが，学校では個別指導を受けたことがない），適度の訓練グループ（2 年間足し算の指導を受けたが，そのほかの算数指導は受けたことがない），定期訓練グループ（頻繁に訓練を受けたことがある）という 4 つの

グループに分けられた。加法の可換性を理解させるための訓練は，以下のように行われた。手続きとして，まず5 + 2 = 7が書かれた紙を対象児に提示する。クッキー5枚とクッキー2枚を合わせると，クッキーは7枚になりましたというせりふをいう。その後，その紙を下げて，2 + 5 = __が書かれた紙を提示する。クッキー2枚とクッキー5枚を合わせると，クッキーは7枚になりますか。それとも，違う枚数のクッキーになりますかという質問をする。その結果，知的障害児の場合でさえ，計算の訓練が少ない生徒より，適量の計算訓練介入経験のある生徒のほうが，計算の近道として可換性を利用しているということが示唆された。そのほか，Baroody, Berent, & Packman（1982）は，小学校一年生を対象に調査を行った結果から，数唱に基づいた上級的な加法方略を使用する生徒のほうが，能率の悪い方略を使用する生徒より，可換性を理解していると主張している。

それと同様に，Canobi, Reeve, & Pattison（2002）は，6歳児を対象に，加法の原理の理解と計算能力との関連性について調査を行った。加数が2つの可換性課題，合成性課題，加数が3つの可換性課題，合成性課題と結合性課題が行われた。加法の原理の理解課題では，赤い箱に16個の赤いボール，青い箱の中に3個の青いボール，緑いの箱に4個の緑のボールが入っている。赤い箱の中のボールの数は子どもに明示しない。可換性の課題では，例えば，赤い箱のボールを1つの皿に移し，青い箱の3個のボールをもう1つの皿に移した場合と，逆の順番でボールを移した場合とを比較させる。合成性課題では，赤い箱のボールと青い箱の3個のボールを同時に1つの皿に移す場合と同じ順番で別々の皿に移す場合とを比較させる。結合性課題では，赤い箱のボールと青い箱のボールを順に1つの皿に移し，その後，緑の箱のボールを別の皿に移す場合と，赤い箱のボールを1つの皿に移し，さらに，緑の箱のボールと青い箱のボールを別の皿に順に移す場合とを比較させる。計算課題では，子どもが用いた計算方略と計算の順番を調べるため，加法の計算式を提示し，計算させる。その結果，CAL, COLといった上級的な計算方略を用いる被験児は，そうでない被験児より，可換性の判断課題の正答率が高かった。以上のことから，進歩的な計算方略を使う子どもの方が可換性を理解している傾向があるという結論を支持していることが指摘された。

一方で，量レベルにおける可換性の理解は，計算経験から独立しているという見解も存在している。まずGanetsou & Cowan（1995）は，Resnick（1992）の量レベルでの可換性の知識は，子どもの計算経験からは独立して発達するという仮説を立てた。幼稚園児を対象に，具体物を用いた課題（以下略称具体物課題），数詞を用いた課題（以下略称数詞課題），数を明示しない課題（以下略称抽象的課題）という3タイプの可換性に関する判断課題を提出した。例えば，“13 + 2 = 2 + 13”を問う課題で例示すれば，具体物課題は，1つの箱にまず13個のボールを入れ，次に2個のボールを加えたものと，もう1つの箱に逆の順序でボールを入れたものとを比較させる。数詞課題では，“13 + 2”と“2 + 13”という2つの式の和を計算させ，大きさを比較させる。抽象的課題では，箱の中のボールの数を明示しないで，2つの箱に，A, Bをこの順番で加えたものと，B, Aという順番で加えたものとを比較させた。3タイプの可換性課題を分析した結果，具体物と抽象的課題で成功しても，数詞課題を誤答していた被験児が存在していた。以上のことから，可換性の理解は計算経験から独立して発達してい

るという主張がなされている。

また，Sophian, Harley, & Martin（1995）は，もし子どもが課題の解答を数唱で判断しているのなら，個数が見えない問題よりも，個数が見える問題の正解率は高いという仮説を立てた。そして，3 歳児と 5 歳児を対象に，子どもを，箱に入ったおもちゃの数を隠す群と隠さない群の 2 群に分けて，加法の可換性に関する判断課題を提示した。課題では，魚または小鳥のおもちゃが 4 個入った短い箱，あるいは 7 個入った長い箱，ばらしたおもちゃを使用する。例えば，“4 + 2 = 2 + 4”を問う課題で例示すれば，1 つの人形の前に，魚が 4 個入った箱を 1 つとばらした鳥のおもちゃ 2 個を提示し，もう 1 つの人形の前に，ばらした魚 2 個と鳥 4 個が入った箱 1 つを提示する。その後，2 人の人形が持っている動物のおもちゃの数を比較させる。おもちゃの数を隠す群の場合には，おもちゃが入った箱を紙で隠してから提示する。おもちゃの数を隠さない群の場合には，おもちゃが入った箱を隠さずに提示する。隠す群と隠さない群の判断を分析した結果，2 群の正答率の間には有意な差が見られなかった。以上のことから，可換性を理解するうえで，具体的な数値を提示する必要性はないという結論が出された。

3.2　課題効果

Resnick（1992）による可換性の発達レベル理論によると，可換性に対する理解は，具体物から抽象物へと発達する。そのため，子どもは原初的量概念の推理から量的推理，数的推理，演算子的推理を通して，可換性の課題を理解するということが示唆されている。以下では，調査時に使われている具体物と抽象物が，子どもの可換性の理解に影響するかどうかを調べた研究を展望する。

3.1 で展望した Cowan & Renton（1996）の調査は，調査 1 では，抽象的課題，具体的課題，数詞課題の 3 タイプの加法の可換性課題を行った。その結果，具体物課題の正解者は 38 名，抽象物課題の正解者は 44 名，符号課題の正解者は 46 名であった。調査 2 では，5 歳児 24 名を対象に，抽象的課題と具体物課題が行われた。その結果，両課題とも正解した児童は 8 名，具体物課題のみ正解した児童は 5 名，抽象的課題のみ正解した児童は 5 名であった。以上の結果から，児童が可換性の課題に解答する際，具体物の課題であっても抽象物の課題であっても，子どもの判断は影響されないという結論が導かれた。

そのほか，Bermejo & Rodriguez（1993）は，5 歳から 8 歳の児童を対象に，量レベル課題と数的レベル課題を行った。量レベル課題では，数字と円形の組み合わせ（例，18 + ○○○○と○○○○ + 18）を用いた。数レベル課題では，1 とほかの数字の組み合わせ（1 + 16 と 16 + 1），和が 10 までの組み合わせ（3 + 6 と 6 + 3），和が 10 以上の組み合わせ（8 + 11 と 11 + 8）の 3 タイプの下位課題を用いた。その結果，量レベルと数レベル課題間では有意な差が見られなかった。

以上の 2 つの研究から，可換性の理解は，具体物から抽象物へと発達する（Resnick, 1992）という課題効果は発見することができなかった。

3.3　加数の大きさの効果

Resnick（1992）は，演算子レベルに到達すれば，可換性を一般的な原理として理解しているため，加数の大きさの影響は受けにくくなるが，演算子レベルに達する以前は，加法の可換性を理解する際に，加数の大きさの影響を受けやすいと主張している。

それに対して，Baroody（1982, 1987）は，子どもが可換性を理解する際に，加数の大きさに影響されないと主張している。Baroody（1982）は，5歳児に行った可換性の実験の結果から，子どもは，少なくとも，和が20までの集合に対しては，加数の大きさに関係なく，可換性を理解し，課題を判断しているという示唆をしている。また，Baroody（1987）の知的障害児に対する実験結果からは，加数の大きさは可換性の判断に影響しないという示唆があった。そのほか，可換性の理解に関する計算形式の調査結果からも，加数の大きさの効果は見られないということが明らかにされている（Tiilikainen, Baroody, & Wilkins, 1997）。

3.4 「問題タイプ」による影響

幼児の可換性を調査する際には，物語問題が主に使われている。その物語問題のタイプには，2つのパターンがある。Change-add-to 問題と Part-part-whole 問題である。Weaver（1982）によると，Change-add-to 問題とは，単項演算（unary operation），すなわち被作用子が1つだけあるような演算を行う問題である。たとえば，Aさんはおはじきを4個持っています。BさんはAさんにおはじきを2個あげます。今Aさんはおはじきをいくつ持っていますかという問題である。Part-part-whole 問題とは，二項演算（binary operation），すなわち2つの要素から3番目の要素をもたらす演算を行う問題である。たとえば，Aさんは左手におはじきを4個持っています。右手にはおはじきを2個持っています。おはじきを彼は全部でいくつ持っていますか，という問題である。

Wilkins 他（2001）は，5歳児と6歳児を対象にして，可換性の理解における問題提示文による影響を明らかにするための調査を行った。その結果，両方の問題に正解した被験児は31名，どちらかの問題に正解した被験児は10名（part-part-whole 正解は9名，change-add-to 正解は1名），両方の問題で不正解だった被験児は12名であった。以上のことから，加法の可換性を完全に理解していない子どもの場合には，part-part-whole 問題より，change-add-to 問題で失敗することが多いことが明らかになった。つまり，可換性の理解する際に，「問題のタイプ」による影響が見られたといえるだろう。

4．可換性とその他の加法的特性との関連性

可換性と同様に，結合性も合成性も加法の基本的原理である。結合性とは，分解された部分を異なる順番で再結合しても結果は同じである，という原理である。すなわち $(a+b)+c=a+(b+c)$ と表せる。合成性とは，大きな集合は個々の小さな集合で構成される，という原理である。すなわち，$(a+b+c)=a+b+c$ と表せる。そして，これらの原理を探ることによって，子どもはよりいっ

そう部分－全体に関する知識を理解できるようになる。Resnick（1992）は，可換性と結合性を理解する際に，子どもは二つの原理を区別していないと主張している。これに対して，Canobi, Reeve, & Pattison（1998, 2002）は，幼児にとっては，可換性のほうが理解しやすいと主張している。

まず Canobi 他（1998）は，小学校 1 年生と 2 年生を対象にして，数レベルにおける可換性の理解と結合性の理解との比較研究を行った。この研究では計算課題と判断課題が行われていた。被験児が課題を解決する際に用いている方略とその理由が分析された。その結果，子どもは段階的に加法の原理を理解しているという指摘がなされた。その段階とは，可換性と結合性をいずれも理解していない段階，可換性のみ理解している段階，可換性と結合性の両方を理解している段階である。

そのほか，3.1 で展望した Canobi 他（2002）の調査では，5 歳児と 6 歳児を対象にして，具体物を用いて，可換性，結合性，合成性という加法的原理の判断課題を行った。被験児に，2 人の登場人物がもらったボールの数を比較させる。その後，判断の理由を問う。その結果，6 歳児の場合，可換性課題と結合性課題の正答率の間に有意な差は見られなかったが，5 歳児の場合，結合性課題よりも，可換性課題の正答率の方が有意に高かった。以上の結果から，Canobi 他（2002）は，幼い子どもにとっては，可換性よりも結合性のほうが理解しにくいと指摘している。また，正答者の判断理由のタイプは，加える順番が異なっても結果は同じであることを言及した理由よりも，もらったものが同じタイプのもの（赤，青，緑という 3 タイプのボール）から同じという理由が多かった。このことから，子どもは課題に解答する際に，異なる順番で置かれていたかという点よりも，同じグループのものが置かれていたかという点に注目する傾向がある，という結論が得られた。

5．加法の可換性に関するこれまでの研究の問題点と今後の課題

ここまで，2 節から 4 節において，児童の加法の可換性に対する理解に関する研究を概観してきた。これらの研究を総合的にとらえ直すと，これまでの研究には，以下に述べるようないくつかの問題点が残されている。

第一に，これらの研究は，数字や量で課題を提示しているが，量レベルではなく，結果的に，もっと低い段階の原初的量概念レベルを測ることになってしまった課題が多数存在している。Sophian 他（1995）は，おもちゃの数を隠す課題と隠さない課題との間に差が見られなかったため，子どもは可換性の課題を判断する際に，具体的な数値を提示する必要性はないと主張している。しかし，Sophian 他の課題では，箱の長さが異なっていたため，箱の中のおもちゃの量を無視して，二つの人形はいずれも「箱」と「おもちゃ」をもらっていたから，同じものをもらった，という「量」レベルではなく，「物」レベルで被験児は課題を判断していた可能性がある。そのため，Sophian 他の課題は，原初的量概念レベルの課題になったため，隠す課題と隠さない課題との間に結果の差が見られなくなってしまったのではないかと思われる。また，Canobi 他（2002）の研究では，量や数を対象としているものの，色違いの箱とボールを使用している。正判断をしている子どもの判断理由は加える順番が異なっても結果は同じであるという理由よりも，もらったものが同じタイプのものだから同じと

いう理由が多かったという点から，被験児は実験者の交換行為を無視して，同じ色の箱からボールをもらったから，すなわち，2つの人形の片方は「赤」と「青」のボールをもらって，片方は「青」と「赤」のボールをもらったから，というように，「同じ量」ではなく「同じ色」をもらったから，という理由から正判断を導いた可能性がある。この調査も，箱とボールの「色」に基づいて判断できるため，子どもにとっては原初的量概念レベルの課題になってしまった可能性がある。Baroody（1984）の幼稚園児に対する調査では，数字を使用しているが，被験児は，その数字を「数」として認識して課題の判断をしたのか，あるいは，数字を1種の図形として認識していたかによって，調査結果の解釈は左右されるだろう。被験児がもしその数字を図形として認識していたのならば，その課題は，数レベルではなく，原初的量概念レベルの課題になってしまうため，子どもの判断は過大評価されていた可能性がある。

第二に，これらの研究では，対象児が「同じ」と答えるだけで，「課題を理解している」という判断基準が用いられていた。Canobi（2002）以外の調査では，判断の理由は分析されていなかった。これまでの研究では，概念を理解しているかどうかを調べる際に，判断の理由を考慮していなかったことから，子どもの判断が過大評価されていた可能性がある。

第三に，可換性の課題に解答する際に，計算が許されていた調査があった（Baroody & Gannon, 1984; Cowan & Renton, 1996; Baroody, 1987; Bermejo & Rodriguez, 1993）。加法の可換性は，部分―全体スキーマに基づいた一般的な原理である。特に量レベルでは，計算の手続きに頼らなくても，全体の量の増減がなければ，どんな順番で部分を組み合わせても，全体の量が不変であることを認識できる。しかし，計算してしまうと，その課題は，可換性を測る課題から，単なる計算問題へと変わってしまう。量レベルで課題を出題した際に，対象児の計算行為が許されると，子どもの可換性の理解は過大評価される可能性がある。

以上の問題点より，可換性の理解における今後の課題は，例えば，調査で使われる物の数を部分的に明記し，残りは容器に入れ，容器の中の数が同数であることは教示するが，その具体的な数は明記しない手続きで調査を行うこと，または，全体の量を明記した後に，一部分を隠す手続きをとることによって，計算の可能性を排除した状態で量レベルでの課題を設定し，子どもの可換性課題に対する理解を明らかにすること，子どもの判断の理由を分析すること，可換性とその他の加法的特性との関連性を量レベルで明らかにすること，これまでの研究では検討されていなかった可換性と数の保存課題との関連性を明らかにすることである。

文献

Baroody, A.J, Berent, R & Packman, D（1982）The use of mathematical structure by inner city children. Focus on Learning Problem in Mathematics, 4（2）, 5–13

Baroody, A.J, & Gannon, K.E.（1984）The Development of the Commutativity Principle and Economical Addition Strategies. Cognition and Instruction. 1（3）, 321–329

Baroody, A.J.（1987）Problem size and mentally retarded children’s judgment of commutativity.

American Journal of Mental Deficiency, 91(4), 439-442

Bermejo, V., & Rodriguez, P.(1993) Children’ s understanding of the commutative law of ddition. Learning and Instruction, 3(1), 55-72

Brush, Lorelei R. (1978) Preschool Children’s Knowledge of Addition and Subtraction. Journal for Research in Mathematics Education, 9,(1), 44-54.

Canobi, K.H., Reeve, R.A., Pattison, P.E.(1998) The role of conceptual understanding in children’s addition problem solving. developmental psychology, 34(5), 882-891

Canobi, K.H., Reeve, R.A., Pattison, P.E.(2002) Young children’s understanding of addition concepts. Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology, v22 n5 p513-32

Cowan, R., & Renton, M.(1996) Do they know what they are doing? Children’s use of economical addition strategies and knowledge of commutativity. Educational Psycholog, 16(4), 407-420

Ganetsou, E., & Cowan, R.(1995) The development of commutativity. Paper presented at the conference on Languange and Mathematical Thinking, London.

Gelman, R. & Gallistel, C.R(1978) The child understanding of number. Cambridge, M.A: Harvard University Press.

Ginsburg, H.P.(1977) Children’s arithmetic: The learning process.New York: Van Nostrand.

Groen, G.J. & Parkman, J.M.(1972) A chronometric analysis of simple addition. Psychological Review, 79(4), 329-343

Resnick, L.B(1992) From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R.a. Hattrup(Eds). Analysis of arithmetic of mathematics teaching. pp372-425.

Sophian, C., Harley, H., & Martin, C.S.M.(1995) Relational and representational aspects of early Number development. Cognition and Instruction, 13(2), 253-68

Tiilikainen, S., Baroody, A. J.., & Wilkins, J. L. M.(1997) The effects of problem size on children’s understanding of additive commutativity. In J. A. Dossey(Ed.), Proceedings of the nineteenth annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter. Normal: Illinois State Unibersity.

Weaver,J,F(1982) Interpretations of number operation and symbolic representations of addition and subtraction: In T,P.Carpenter,J.M.Moser,&T.A.Romberg(Eds), Addition and subtraction: A cognitive perspective. pp60-66 Hillsdale, NJ :Lawrence Erlbaum Assocites.

Wilkins, J.L..M..,Baroody,,A.J.& Tiilikainen,,S(2001) Kindergartners’ understanding of additive commutativity within the context of word problems. Journal of Experimental Child Psychology, 79(1) 23-36.