REVISTA EMA
2001, VOL. 6, Nº 3, 290-307

REFLEXIONES DIDÁCTICAS DESDE Y PARA EL AULA

IDENTIFICAR FUNCIONES POLINÓMICAS: UNA TAREA NO SIEMPRE REALIZABLE

ALEXANDER VILLA

Este escrito intenta responder algunos de los interrogantes planteados en el artículo "¿Cómo identificar funciones polinómicas?", presentado en el número 1 del volumen 6 de esta revista; en él se formulan tres preguntas referentes al reconocimiento de funciones mediante algunas de sus representaciones, tarea que no siempre es realizable como se intentará mostrar en este artículo. Se desarrollará entonces una mirada a la identificación de una función a través de su representación gráfica y de su tabla.

IDENTIFICACIÓN DE UNA FUNCIÓN POLINÓMICA A TRAVÉS DE SU GRÁFICA

En la mayoría de los textos escolares de matemáticas la función es presentada como una correspondencia en la cual a cada uno de los elementos del conjunto de partida se le asigna un único elemento del conjunto de llegada. Esta asignación en ocasiones se hace a través de una fórmula o expresión simbólica que implica tomar un número, operarlo, y obtener un resultado; este proceso permite asociar la función a la idea de una 'máquina' a la cual se le introduce un elemento, ella lo transforma, y produce un único elemento. Ahora bien, con el objetivo de poder comunicar más fácilmente la idea de función y de identificar muchas de sus propiedades, se hace imprescindible buscar diferentes formas de representarla; así, habitualmente se utilizan las representaciones simbólicas, gráficas y tabulares, y ocasionalmente se utilizan algoritmos computacionales para representarla.

Al abordar escolarmente el tema de las funciones se busca integrarlas al estudio de algunos lugares geométricos propios de la geometría analítica; particularmente, las funciones afines se estudian en relación con las rectas, las funciones cuadráticas se estudian en relación con las parábolas. Sin embargo, las curvas generadas como representación de funciones polinómicas de grado mayor que dos no se asocian a lugares geométricos específicos, pues parecen no corresponderse con alguno de éstos. Con este tratamiento se persigue también integrar diversas representaciones de las funciones. En el contexto de este panorama integrador es válido preguntarnos si la percepción de una gráfica trazada sobre un plano cartesiano permite identificar la función, o, si esta percepción favorece el reconocimiento del tipo de función que representa.

Para comenzar a dar una respuesta a las cuestiones anteriores analicemos las siguientes gráficas generadas con un software de graficación:

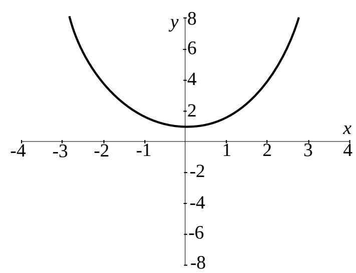

Figura Nº 1.

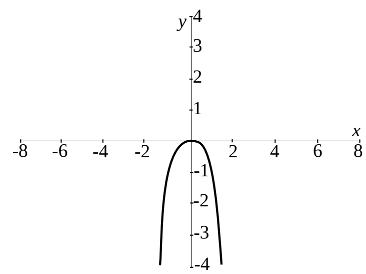

Figura Nº 2.

Estas curvas, pueden asociarse ligeramente a funciones cuadráticas ya que a simple vista presentan características análogas a las de las parábolas (v.g., crecen monótonamente en un intervalo infinito y en el otro decrecen monótonamente, parecen ser simétricas respecto a un eje vertical, tienen un máximo o mínimo absoluto). Haciendo uso del software de graficación de funciones, se puede comprobar que a pesar de realizar diversas variaciones —en cuanto a la escala, o al dominio y rango de la ventana de visualización— la gráfica no evidencia cambios que pudieran descartar dicha hipótesis; sin embargo, aun considerando estos resultados no se puede afirmar que las gráficas correspondan a parábolas, y que en consecuencia las expresiones simbólicas que definen las funciones contengan polinomios de segundo grado. En efecto, al remitirse a las expresiones que las describen, y que permitieron trazarlas, se encuentra que la Figura Nº 1 representa la función f expresada por $f(x) = cosh(x)$ y la Figura Nº 2 la función g expresada por $g(x) = -x^4$; de lo cual se sigue que ninguna de las dos funciones es cuadrática ni tiene como gráfica una parábola.

Estos ejemplos nos permiten afirmar que **no siempre es posible** reconocer una función cuadrática utilizando como única herramienta la percepción visual, y nos hacen suponer que esta afirmación es válida para las funciones polinómicas en general. Sin embargo, advertimos que existe la posibilidad de reconocer una función cuadrática a partir de su gráfica, al contemplar algunas suposiciones y utilizar herramientas geométricas, como lo plantea Vicenç Font en el número anterior de esta revista.

Ante este hecho nos preguntamos: ¿para las funciones no cuadráticas qué información o herramienta es necesaria para poder identificar el tipo de función que describe una gráfica? Esta pregunta es relativamente equivalente a la segunda pregunta planteada en el artículo que motivó este escrito, es decir: *¿Cómo determinar qué función descrita por un polinomio de grado mayor o igual a tres, está representada por una determinada gráfica?*

Para dar respuesta a esta pregunta decidimos hacer uso de los aportes que hace el cálculo diferencial al proceso de graficación y a la caracterización de la forma y el comportamiento de la gráfica de una función en el plano. Bajo esta óptica analizamos cómo sería la gráfica de una función f descrita por un polinomio de grado tres $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Derivando la función f y utilizando los criterios de la primera y segunda derivada, tuvimos que considerar tres casos originados al analizar los valores algebraicos de la expresión $b^2 - 3ac$, que es precisamente el discriminante de la expresión resultante al igualar la primera derivada a cero para determinar la existencia y número de máximos o mínimos.

i) Cuando $b^2 - 3ac < 0$ la gráfica de f presenta las siguientes características dependiendo del valor algebraico de a:

$a > 0$	$a < 0$
Es creciente en todo su dominio.	Es decreciente en todo su dominio.
En $(-\infty, k)$ es cóncava hacia abajo.	En $(-\infty, k)$ es cóncava hacia arriba.
En (k, ∞) es cóncava hacia arriba.	En (k, ∞) es cóncava hacia abajo.
$(k, f(k))$ es el punto de inflexión.	$(k, f(k))$ es punto de inflexión.
donde $k = -\dfrac{b}{3a}$	

En este caso, la función f no tiene máximos ni mínimos. Veamos un ejemplo en el que $f(x) = 4x^3 + x^2 + 5x - 2$.

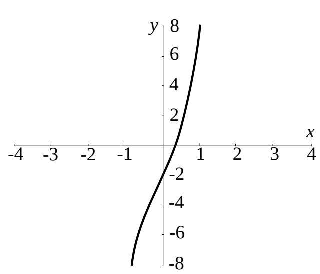

Figura Nº 3.

ii) Si $b^2 - 3ac = 0$ entonces tenemos que la gráfica de f presenta las siguientes características dependiendo del valor algebraico de a:

$a > 0$	$a < 0$
Es creciente en todo su dominio.	Es decreciente en todo su dominio.
En $(-\infty, k)$ es cóncava hacia abajo.	En $(-\infty, k)$ es cóncava hacia arriba.
En (k, ∞) es cóncava hacia arriba.	En (k, ∞) es cóncava hacia abajo.
$(k, f(k))$ es punto de inflexión.	$(k, f(k))$ es punto de inflexión.
donde $k = -\frac{b}{3a}$	

En este caso, la función f tampoco tiene máximos ni mínimos. Veamos un ejemplo en el que $f(x) = x^3 + 1$.

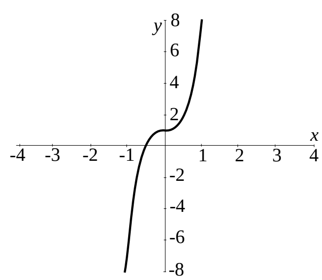

Figura Nº 4.

iii) Cuando $b^2 - 3ac > 0$ la gráfica de f presenta las siguientes características dependiendo del valor algebraico de a:

$a > 0$	$a < 0$
Es creciente en $(-\infty, x_1)$ y en (x_2, ∞).	Es decreciente en $(-\infty, x_1)$ y en (x_2, ∞).
Es decreciente en (x_1, x_2).	Es creciente en (x_1, x_2).
En $(-\infty, k)$ es cóncava hacia abajo.	En $(-\infty, k)$ es cóncava hacia arriba.
En (k, ∞) es cóncava hacia arriba.	En (k, ∞) es cóncava hacia abajo.
$(k, f(k))$ es punto de inflexión.	$(k, f(k))$ es punto de inflexión.
donde x_1 y x_2 son las raíces del polinomio que describe la segunda derivada y $k = -\frac{b}{3a}$	

En este caso, la función f tiene un máximo y un mínimo local. Veamos un ejemplo en el que $f(x) = -x^3 + 5x^2 + 2x + 1$.

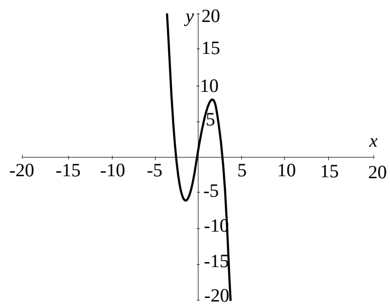

Figura Nº 5.

Como es posible observar, para las funciones descritas por polinomios de grado tres tenemos curvas con ciertas regularidades, como por ejemplo, sus concavidades; pero cuando se habla de crecimientos se encuentra que en algunos casos son siempre monótonas crecientes o monótonas decrecientes, mientras que en otros alternan crecimientos y decrecimientos. Pero este comportamiento no es exclusivo de las funciones cúbicas; basta construir las gráficas de funciones descritas por polinomios sencillos (v.g., $g(x) = -x^5 + x$, o, $h(x) = -x^9 + x$) para observar que presentan un comportamiento similar al mostrado en la Figura Nº 5. De lo anterior se puede concluir que a pesar de la identificación de algunas regularidades en las gráficas de las funciones **no es posible** identificar el tipo de función polinómica a partir de la gráfica.

Al intentar desarrollar un proceso análogo —al usado inmediatamente antes— para determinar el comportamiento gráfico para las funciones descritas por polinomios de grado mayor o igual a cuatro, advertimos que existe aun mayor dificultad para descubrir algún tipo de regularidades en sus gráficas. En la Figura Nº 6, a simple vista se observa que las gráficas de las funciones f, g y h, descritas por las expresiones $f(x) = x^4$, $g(x) = 5x^4 + 15x^3 + 3x - 5$ y $h(x) = -x^4 + 15x^2 + x + 3$, presentan comportamientos no muy regulares.

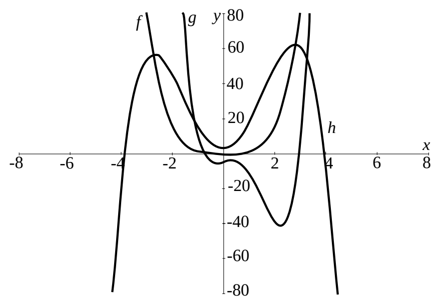

Figura Nº 6.

IDENTIFICACIÓN DE UNA FUNCIÓN POLINÓMICA A TRAVÉS DE SU TABLA

Analicemos ahora la representación tabular y de paso intentemos dar respuesta a la pregunta número tres planteada por el autor del artículo que motiva esta respuesta: *¿El tipo de comportamiento de las diferencias de las imágenes de una función polinómica puede ser utilizado para reconocer el tipo de función, aun si las diferencias de valores de las preimágenes no es constante?*

Inicialmente supongamos que se tiene una función polinómica de grado tres descrita por la ecuación $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, y sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro valores reales diferentes para los cuales se va a evaluar la función. Observemos cómo es el comportamiento de los *cocientes de las primeras diferencias*:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a\left(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2\right) + b(x_2 + x_1) + c$$

$$n = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = a\left(x_3^2 + x_3x_2 + x_2^2\right) + b(x_3 + x_2) + c$$

$$p = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} = a\left(x_4^2 + x_4x_3 + x_3^2\right) + b(x_4 + x_3) + c$$

Ahora calculemos los *cocientes de las segundas diferencias*:

$$m' = \frac{n - m}{x_3 - x_1} = a(x_3 + x_2 + x_1) + b$$

$$n' = \frac{p - n}{x_4 - x_2} = a\,(x_4 + x_3 + x_2) + b$$

Y ahora el del *cociente de las terceras diferencias*:

$$\frac{n' - m'}{x_4 - x_1} = a$$

Lo anterior muestra que para una función polinómica de grado tres el *cociente de terceras diferencias* es una constante. Ahora bien, es posible realizar un proceso análogo para demostrar que los *cocientes de diferencias* de funciones polinómicas de grados cuatro, cinco, etc., se hacen constantes respectivamente en los cocientes de las cuartas, quintas, etc., diferencias.

Es natural entonces pensar en utilizar el proceso recíproco para identificar, según el comportamiento de los *cocientes de diferencias*, el tipo de función polinómica. Pero, ¿será válido dicho proceso? Para ello analicemos la siguiente tabla de valores:

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
f(x)	4	1	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$

Al aplicar el proceso anteriormente descrito encontramos que los *cocientes de las segundas diferencias* se hacen constantes, veamos:

Cocientes de las primeras diferencias:

$$m = \frac{4 - 1}{-3 - (-2)} = \frac{3}{-1} = -3 \qquad n = \frac{1 - 0}{-2 - (-1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$p = \frac{0 - 1/4}{-1 - (-1/2)} = \frac{1}{2} \qquad q = \frac{1/4 - 1}{(-1/2) - 0} = \frac{3}{2}$$

$$r = \frac{1 - 9/4}{0 - 1/2} = \frac{5}{2}$$

Cocientes de las segundas diferencias:

$$m' = \frac{-3 - (-1)}{-3 - (-1)} = 1 \qquad n' = \frac{-1 - 1/2}{-2 - (-1/2)} = 1$$

$$p' = \frac{1/2 - 3/2}{-1 - 0} = 1 \qquad q' = \frac{3/2 - 5/2}{-1/2 - 1/2} = 1$$

Como los *cocientes de las segundas diferencias* son constantes se podría inferir que la función que describe esta tabla es una función cuadrática; en efecto, $f(x) = x^2 + 2x + 1$ tiene un comportamiento como el descrito en la tabla. Pero grande es la sorpresa cuando encontramos una función polinómica g de orden ocho que también pasa por estos puntos; su expresión simbólica es:

$$g(x) = -\frac{4x^8 + 12x^7 - 21x^6 - 63x^5 + 21x^4 + 63x^3 - 124744x^2 - 249492x - 124740}{124740}$$

De hecho existen infinitas funciones polinómicas que contienen los puntos descritos en la tabla, algunas de las cuales pueden ser halladas mediante la interpolación[1] de los datos de la dicha tabla. Una de estas funciones es h descrita por la expresión:

$$h(x) = -\frac{138748}{10^{11}}x^9 - \frac{1109984}{10^{11}}x^8 - \frac{1352793}{10^{11}}x^7 + \frac{5827416}{10^{11}}x^6 + \frac{10197978}{10^{11}}x^5$$
$$-\frac{5827416}{10^{11}}x^4 - \frac{10787657}{10^{11}}x^3 + \frac{100001109984}{10^{11}}x + \frac{200002081220}{10^{11}}x + 1$$

Como puede observarse en la Figura Nº 7, las gráficas de las funciones f, g y h coinciden en los puntos cuyas coordenadas están registradas en la tabla.

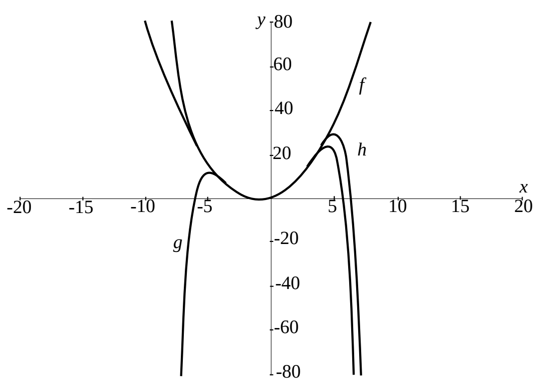

Figura Nº 7.

A pesar de existir infinitas funciones que satisfacen una misma tabla, **sí es posible** reconocer a través de una tabla una función polinómica, siempre y cuando *se tenga la seguridad de que en efecto es una función polinómica* y

1. El término *interpolación* se refiere al procedimiento matemático que permite encontrar funciones que se aproximen a otras de las cuales conocemos un conjunto de datos.

que *el número de datos*[2] *sea superior en una unidad al grado del polinomio que describe la función*. La anterior aserción se sustenta en el análisis numérico a través de la afirmación (Kidcaid y Cheney, 1994, p. 286):

> *Si* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *son números reales distintos, entonces para valores arbitrarios* $y_0, y_1, \ldots, y_n$ *existe un único polinomio* $p(x)$ *de a lo sumo grado* n *de manera que* $p_n(x_i) = y_i \quad (0 \le i \le n)$.

Al atender a las dos condiciones resaltadas en el anterior párrafo, se puede concluir que para reconocer el tipo de función polinómica no basta con examinar el tipo de comportamiento de las imágenes de una función; también hay que garantizar lo relativo a la cantidad de datos.

REFERENCIAS

Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. *Revista EMA, 6* (2), 180-200.

Kidcaid, D. y Cheney, W. (1994). *Análisis numérico, las matemáticas del mundo científico.* Menlo Park, CA: Addison-Wesley.

Alexander Villa
Grupo "Didáctica de las Matemáticas y Física"
Universidad de Antioquia
Tel.: 210 5735
Medellín, Colombia
E-mail: javo@epm.net.co

2. Se llama *número de datos* al cardinal del conjunto de pares ordenados que contiene una tabla.