

**EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN, DESDE LA PERSPECTIVA
HISTÓRICO-CULTURAL: UN CAMINO.**

JUAN ANTONIO LÓPEZ GUERRA

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

CAUCASIA

2013

**EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN, DESDE LA PERSPECTIVA
HISTÓRICO-CULTURAL: UN CAMINO...**

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN

JUAN ANTONIO LÓPEZ GUERRA

ASESORA:

MARIA DENIS VANEGAS VASCO

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

CAUCASIA

2013

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN

TESIS DE MAESTRÍA

EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN, DESDE LA PERSPECTIVA
HISTÓRICO-CULTURAL: UN CAMINO.

Juan Antonio López Guerra

Asesora: María Denis Vanegas Vasco

Nota de aceptación

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Caucasia-Antioquia

2013

AGRADECIMIENTOS

A Dios por las experiencias que me constituyen.

A la profesora Mg. María Denis Vanegas Vasco, con quien durante estos últimos años compartí conocimientos en los momentos de formación, como orientadora y consejera.

A mi familia: María Victoria, María Camila, Juan Camilo, Dubis, Juan Segundo, Don Regino, Doña Teresa, Doña Victoria, Regino Jr., Ilian, Ernesto, Alba, Gilma, Delia, Mamá Cata, Nohemí, Érica, José David y Juan José; que siempre me brindaron amor y apoyo incondicional.

A las profesoras y profesor Mg. Luz Adriana Cadavid, Mg. Claudia Quintero, Dr. Gilberto Obando, por las valiosas contribuciones teóricas hechas durante la cualificación.

A los amigos del MES, por todos los momentos compartidos durante este tiempo en el grupo.

A los niños y niñas protagonistas y a sus padres, sin ellos esta investigación no existiría.

A la institución educativa divino niño y en su representación a la rectora Hna. Martha Lucía Jiménez, por su apoyo a procesos investigativos.

A la facultad de educación de la Universidad de Antioquia, por la oportunidad de realizar esta maestría desde la región Bajo Cauca.

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi linda compañera,
María Victoria Duran Sibaja, con amor,
Admiración y gratificación por su comprensión,
cariño y apoyo durante este tiempo.

RESUMEN

En esta investigación se analiza el proceso de aprendizaje del concepto de fracción en seis estudiantes de cuarto grado de básica primaria de una institución educativa ubicada en el municipio de Caucasia-Antioquia, desde la perspectiva histórico-cultural. La perspectiva histórico-cultural da la posibilidad de comprender, desde autores como Caraña (1984), Davidov (1982), Lima & Moisés (1998), entre otros, la fracción como un movimiento conceptual que relaciona no sólo aspectos de la medición, sino además, lo que hay detrás de ésta: el movimiento de la noción matemática de magnitud en relación con la naturaleza esencial del número natural y de la geometría básica, como resultado de pensamiento y lenguaje en la actividad histórico-cultural de la humanidad. Además, la perspectiva histórico-cultural y, en particular, la teoría de la actividad de Leontiev (1983) retomada para la educación matemática por Davidov (1988), Radford (2004, 2011), y GEPAPe (2010), ofrece unos fundamentos teóricos que permitieron, por un lado, llevar al aula de clase el conocimiento referido a la fracción (a partir de Actividades Orientadoras de Enseñanza de GEPAPe, 2010) apuntando a la formación de mejores ciudadanos y, por otro lado, percibir, interpretar y comprender la forma en que los estudiantes, protagonistas de la investigación, se aproximaron progresivamente al desarrollo histórico-cultural del movimiento conceptual de la *fracción*. En ese sentido, esta investigación se propone como un camino que ayuda a fundamentar la práctica pedagógica sobre la enseñanza y el aprendizaje de este tema. El procedimiento metodológico utilizado en esta investigación fue la metodología cualitativa con enfoque crítico-dialéctico y un abordaje de investigación participante. Los datos que se analizaron son producto de las elaboraciones colectivas, de socializaciones y de las discusiones en el aula de clase, al desarrollar las Actividades Orientadoras de Enseñanza planteadas. Los resultados obtenidos en este camino recorrido, permiten entender cómo las diversas aproximaciones, las reflexiones realizadas desde las subjetividades y las apropiaciones hechas por los estudiantes protagonistas de la investigación, en permanente interacción con *otros*, les permitió expresar el movimiento conceptual de la fracción y hacer un aprendizaje del mismo. Teniendo en cuenta, la realidad que les pertenece y de la que hacen parte.

Palabras claves: Magnitud, medida, fracción, perspectiva histórico-cultural, teoría de la actividad, actividades orientadoras de enseñanza.

ABSTRACT

This research analyzes the process of learning the concept of fractions in fourth grade six students from elementary school to an educational institution located in the municipality of Caucasia-Antioquia, from cultural-historical perspective. The cultural-historical perspective makes it possible to understand, from authors like Caraña (1984), Davidov (1982), Lima and Moses (1998) among others, the fraction as a movement that relates not only conceptual aspects of measurement, but also, what's behind it: the movement of the mathematical notion of magnitude relative to the essential nature of natural numbers and basic geometry, as a result of thought and language in the historical and cultural activity of mankind. In addition, the cultural-historical perspective and in particular the theory of activity Leontiev (1983) for mathematics education retaken by Davidov (1988), Radford (2004, 2011), and GEPAPe (2010), provides a theoretical foundation that allowed one hand, lead to classroom knowledge refers to the fraction (from Guiding Teaching Activities GEPAPe, 2010) pointing to the formation of better citizens and, on the other hand, perceive, interpret and understand how students, research players, gradually approached the historical and cultural development of the conceptual movement of the fraction. In that sense, this research is proposed as a way to help inform pedagogical practice of teaching and learning this subject. The methodological approach used in this research was the qualitative methodology with critical-dialectical approach and a participatory research approach. The data are analyzed by the working collective product of socialization and discussions in the classroom, to develop Guiding Teaching Activities raised. The results obtained in this journey, allow us to understand how the various approaches, the reflections from the subjectivities and appropriations made by students in the research, in constant interaction with others, enabled them to express the conceptual movement of the fraction and make learning it. Given the reality that belongs to them and they are part.

Keywords: Magnitude, measure, fraction, historical-cultural perspective, activity theory, teaching guidance activities.

CONTENIDO

PANORÁMICA DEL CAMINO.....	1
LA NECESIDAD DEL CAMINO.....	7
Configuración de algunas investigaciones y su relación con el objeto de fracción de esta investigación.....	9
PREPARANDO EL TERRENO.....	23
LA RUTA DEL CAMINO.....	36
Sobre la producción y registro de los datos.....	38
Sobre los participantes.....	39
Sobre el trabajo de campo.....	40
Sobre las Actividades Orientadoras de Enseñanza (AOE).....	44
Momento de exploración: hacia el objeto-motivo.....	47
Las etapas de este camino.....	56
Sobre el Análisis de los Datos.....	90
TODO SE RELACIONA.....	91
LA RELACIÓN ENTRE EL NÚMERO Y LA FORMA.....	124
FRACCIÓN: MOVIMIENTO QUE EXPRESA COMPARACIONES DE MAGNITUDES CONTINUAS.....	151
LLEGANDO A LA MAQUETA DE LA ESCUELA QUE SOÑAMOS.....	189
DESPUÉS DEL RECORRIDO.....	204
REFERENCIAS.....	208

LISTADO DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. María Paula, ideograma: lo que hacemos en familia, mayo 2012	49
Ilustración 2. Acudiente, ideograma: lo que hacemos en familia, mayo de 2012	50
Ilustración 3. Profesora, ideograma: lo que hacemos en familia, mayo 2012	50
Ilustración 4. Institución Educativa Divino Niño - sede Caracoli. Espacio a reconstruir. Mayo 2012	51
Ilustración 5. Catalina. "Mis gustos y necesidades" mayo 2012	53
Ilustración 6. Dayana. Cartelera, "Mis gustos y necesidades" mayo 2012	54
Ilustración 7. Steven. Cartelera, "Mis gustos y necesidades" mayo 2012	55
Ilustración 8. Catalina. ¿Qué y con qué contaban los seres humanos?, julio de 2012	61
Ilustración 9. Catalina, Actividad cómo contar grandes cantidades, julio de 2012	65
Ilustración 10. Transcripción canción "mi escuela"	69
Ilustración 11. Software libre Google earth, Cauca (Antioquia - Colombia)	72
Ilustración 12. ¿Cómo contar la tierra? Angie, Agosto de 2012	72
Ilustración 13. Daniel, Actividad: Midiendo las alturas con los señores invitados. Oct. De 2012	84
Ilustración 14. Angie. Actividad: la maqueta de la escuela. Oct. De 2012	86
Ilustración 15. Catalina. Actividad: La maqueta de la escuela. Oct. De 2012	87
Ilustración 16. Dayana y Jonathan. Actividad: La maqueta de la escuela que soñamos. Oct. de 2012	88
Ilustración 17. Oscar. Maqueta de la escuela que soñamos. Oct. De 2012	89
Ilustración 18. Carrusel, Conozcamos nuestra institución. Julio de 2012	93
Ilustración 19. Angie, respuesta: primera pregunta del carrusel, julio de 2012	93
Ilustración 20. Jonathan, respuestas: primera pregunta del carrusel, julio 2012	93
Ilustración 21. Oscar, respuestas de las preguntas de la primera escena del carrusel, Julio de 2012	94
Ilustración 22. Tercera escena del carrusel, julio de 2012	98
Ilustración 23. Carrusel, escena 4. Julio de 2012	101
Ilustración 24. Daniel, Descripción de nuestra escuela, Julio de 2012	104
Ilustración 25. Jonathan, Descripción de nuestra escuela, Julio de 2012	105
Ilustración 26. Dayana, Descripción de nuestra escuela, Julio de 2012	106
Ilustración 27. Oscar, Descripción de nuestra escuela, Julio de 2012	107

Ilustración 28. Catalina, Viaje imaginario hacia el pasado. Julio 16 de 2012.	108
Ilustración 29. Oscar, Viaje imaginario hacia el pasado. Julio de 2012	109
.Ilustración 30. Angie, Viaje imaginario hacia el pasado. Julio 16 de 2012.	109
Ilustración 31. Dayana, Reflexiones sobre el pasado, después de ver el documental. Julio 2012.	110
Ilustración 32. . Jonathan, Reflexiones sobre el pasado, después de ver el documental, julio de 2012.	110
Ilustración 33. Jonathan, Cómo vivían los seres humanos en el pasado. Julio de 2012	111
Ilustración 34. Oscar, Cómo vivían los seres humanos en el pasado. 16 Julio de 2012	111
Ilustración 35. Jonathan, Reflexión sobre el quehacer de las personas primitivas, después de ver el documental. Julio de 2012	113
Ilustración 36. Oscar, ¿Qué y con qué contaban los seres humanos de ese tiempo?, julio de 2012	114
Ilustración 37. Angie, ¿Qué y con qué contaban los seres humanos de ese tiempo? julio de 2012	115
Ilustración 38. Jonathan, socialización: ¿qué objetos son fáciles de contar en la naturaleza? julio de 2012	118
Ilustración 39. Daniel, socialización: los seres humanos primitivos ¿Cómo contarían grandes cantidades de objetos? julio de 2012	120
Ilustración 40. Oscar, Socialización: ¿cómo contarían, los seres humanos primitivos, grandes cantidades utilizando algunas piedras nada más?, julio de 2012	120
Ilustración 41. Catalina, Socialización: ¿cómo contarían, los seres humanos primitivos, grandes cantidades utilizando algunas piedras nada más?, julio de 2012	121
Ilustración 42. Jonathan, Socialización: ¿cómo contarían, los seres humanos primitivos, grandes cantidades utilizando algunas piedras nada más?, julio de 2012	121
Ilustración 43. Angie, Socialización: ¿cómo contarían, los seres humanos primitivos, grandes cantidades utilizando algunas piedras nada más?, julio de 2012	121
Ilustración 44. Angie y Catalina, ¿De qué está hecha nuestra escuela? agosto de 2012	126
Ilustración 45. Angie, ¿cuánto de cada material creen que se necesito para construir la escuela? agosto de 2012	127
Ilustración 46. Catalina y Angie, Utensilios para contar el agua, Agosto de 2012	130
Ilustración 47. Angie. Creación e identificación de las unidades (artificiales), 27 de julio de 2012	131
Ilustración 48. Interacción con Google Earth, las fotos 3, 4, 5 y 6 son pantallazos, agosto de 2012	135
Ilustración 49. Interacción con Google Earth. Pantallazos, Agosto de 2012	137
Ilustración 50. Software libre Google Earth, Caucasia (Antioquia - Colombia) agosto de 2012	140
Ilustración 51. ¿Cómo podemos repartir un terreno para construir una casa, por ejemplo?, agosto de 2012	141

Ilustración 52. Oscar, ¿Cómo contar un terreno? agosto de 2012	142
Ilustración 53. Angie, ¿cómo se cuenta un terreno? agosto de 2012	143
Ilustración 54. Caucasia inundada, Abril de 2011. Ubicación de la Institución educativa divino niño. Recuperado el 22 de Julio de 2011 en: http://www.caucasiaantioquia.gov.co/nuestromunicipio.shtml?apc=mIxx-1-&m=g	148
Ilustración 55. Angie, ¿cuál era su porción de tierra? agosto, 2012	148
Ilustración 56. Dayana, dibujo de la forma y lados de la escuela. Septiembre de 2012	152
Ilustración 57. Angie, ¿Cómo podemos saber cuánto mide el borde del terreno? septiembre de 2012	153
Ilustración 58. Daniel, ¿Cómo podemos saber cuánto mide el borde del terreno?, sept. 2012	154
Ilustración 59. Angie, registro escrito, ¿como los bordes del terreno sin utilizar el metro? sept. De 2012	155
Ilustración 60. Daniel, registro escrito, ¿como los bordes del terreno sin utilizar el metro? sept. De 2012	155
Ilustración 61. Oscar, registro escrito, ¿como los bordes del terreno sin utilizar el metro? sept. De 2012	155
Ilustración 62. Dayana, registro escrito, ¿como los bordes del terreno sin utilizar el metro? sept. De 2012	152
Ilustración 63. Dayana, registro escrito, escogencia de la unidad de medida, sept. De 2012	157
Ilustración 64. Daniel, registro escrito, escogencia de la unidad de medida, sept. De 2012	157
Ilustración 65. Angie, registro escrito, conclusión sobre lo que debemos hacer, sept. 2012	158
Ilustración 66. Daniel, descripción de las propuestas de los equipos para la elección del patrón de medida. Sept. 2012	159
Ilustración 67. Daniel, descripción de la elección del patrón de medida. Sept. 2012	160
Ilustración 68. Jonathan, reflexión, ¿con que medimos?, sept. De 2012	162
Ilustración 69. Daniel, ¿Cómo expresar lo que medimos? sept. 2012	163
Ilustración 70. Daniel, expresión del resultado de la medición del borde del terreno, 2012	164
Ilustración 71. Daniel, registro escrito, medida del borde de la escuela. sept. de 2012	166
Ilustración 72. Jonathan, registro escrito, medida del borde de la escuela, sept. De 2012	166
Ilustración 73. Catalina, registro escrito, ¿con qué medimos? sept. De 2012	167
Ilustración 74. Oscar. Registro escrito ¿cómo dividir el palo de escoba en partes iguales?, sept. 2012	169
Ilustración 75. Dayana, Registro escrito, ¿cómo dividir el palo de escoba en partes iguales? sept. De 2012	169

Ilustración 76. Angie, Registro escrito, ¿cómo dividir el palo de escoba en partes iguales? sept. De 2012	169
Ilustración 77. Catalina, registro escrito, ¿cómo dividir el palo de escoba en partes iguales? sept. De 2012	171
Ilustración 78. Catalina, registro escrito del resultado de medir la longitud menor que el palo de escoba. sept.2012	171
Ilustración 79. Dayana propuesta para dividir el palo. sept. 2012	172
Ilustración 80. Daniel, propuesta para dividir el palo en muchas partes. sept. de 2012	173
Ilustración 81. Equipo: Chicas súper poderosas. Fotografías: Propuesta de división del palo de escoba, sept. 2012	173
Ilustración 82. Daniel, descripción de lo realizado para dividir el palo en muchas parte, sept. 2012	173
Ilustración 83. Daniel, ¿Cómo debemos expresar las medidas de las cantidades que sobraron? , sept. 2012	175
Ilustración 84. Catalina, ¿Cómo debemos expresar las medidas de las cantidades que sobraron?, sept. 2012	175
Ilustración 85. Angie, ¿Cómo debemos expresar las medidas de las cantidades que sobraron? , sept. 2012	175
Ilustración 86. Dayana, ¿Cómo debemos expresar las medidas de las cantidades que sobraron? , sept. 2012	175
Ilustración 87. Jonathan, ¿Cómo debemos expresar las medidas de las cantidades que sobraron? , sept. 2012	175
Ilustración 88. Oscar, forma de expresar la medida, cuando la magnitud es menor que la unidad, sept. 2012	176
Ilustración 89 Daniel, escogimiento de la unidad para medir superficie, sept. De 2012	182
Ilustración 90. Equipos de Catalina y Angie, construyendo el patrón, sept. 2012	184
Ilustración 91. Angie, registro escrito del área de las superficies de la escuela. Oct. De 2012	185
Ilustración 92. Jonathan, plano de la escuela. oct. De 2012	187
Ilustración 93. Angie, midiendo alturas con nuestros visitantes. Oct. De 2012	198
Ilustración 94. Angie, construyendo la maqueta de la escuela. Oct. De 2012	200
Ilustración 95. Daniel, la maqueta de la escuela. Oct. De 2012	201
Ilustración 96. Oscar y Dayana, la maqueta de la escuela que sueño. Oct. 2012	201
Ilustración 97. Jonathan, Apreciación del trabajo realizado. Oct. De 2012	203

LISTADO DE TABLAS

Tabla 1. Actividad 1 del momento de exploración: Lo que hacemos en familia.	48
Tabla 2. Actividad 2 del momento de exploración: Mis gustos y necesidades	52
Tabla 3. Actividad. Conozcamos nuestra institución	58
Tabla 4. Actividad. De nuestra escuela hacia el pasado de los números	60
Tabla 5. Actividad. El pasado de los números naturales	63
Tabla 6. Actividad. ¿De qué está hecha nuestra escuela? ¿La queremos así?	67
Tabla 7. Actividad. Mi escuela y su ubicación geográfica	70
Tabla 8. Actividad: el plano: ¿con qué podemos medir nuestra escuela?	74
Tabla 9. Actividad, el plano de nuestra escuela: el borde.	77
Tabla 10. Actividad, El plano de nuestra escuela: las dependencias. La superficie	80
Tabla 11. Actividad: dialogando con constructores.	84
Tabla 12. Actividad: la maqueta de la escuela.	86
Tabla 13. Actividad: la maqueta de la escuela que soñamos, Oct. de 2012	88
Tabla 14. Resultados de la medición del borde del terreno. Sept. 2012	161

PANORÁMICA DEL CAMINO

El aprendizaje de los números racionales ha sido objeto de estudio para múltiples investigadores que pretenden realizar contribuciones para la enseñanza y el aprendizaje de dicho concepto.

Esta investigación se ubica en ese campo y pretende contribuir a esta discusión, analizando el proceso de aprendizaje del concepto de fracción, en estudiantes de un grupo de grado cuarto de básica primaria de una institución ubicada en el municipio de Caucasia-Antioquia, desde fundamentos teóricos de la perspectiva histórico-cultural, y en particular, de la teoría de la actividad propuesta por Leontiev (1983) y retomada para la educación matemática por Davidov (1988), GEPAPe¹ (2010), Radford (2004, 2011), entre otros².

Se escogió la perspectiva histórico-cultural como fundamento teórico para esta investigación, por la forma en que son asumidos elementos y conceptos claves, tales como: el discurso y la palabra, la mediación y el aprendizaje, el concepto de actividad, el de trabajo, entre otros, que dan sustento al objeto fracción como un movimiento conceptual. La palabra representa “la forma ideal de la cristalización de la experiencia social, de la praxis social de la humanidad” (Leontiev, 1983, retomado por Moretti, 2007, p.14). En ese sentido, se comparte con González Rey (2005) cuando afirma que:

El enfoque histórico-cultural tiene como uno de sus aspectos esenciales la comprensión de la unidad dialéctica entre individuo y sociedad, unidad entendida como sistema completo de donde uno de los aspectos está contenido en otro y viceversa, en un proceso dual que atraviesa permanentemente las formas actuales de organización, tanto de lo social como lo individual (González Rey, 2005 p.188)

La mediación según Moretti (2007), es entendida en la perspectiva histórico-cultural, como el

¹ Grupo de Estudio sobre Investigación y Actividades Educativas (GEPAPe.), es un grupo de investigación de la universidad de Sao Pablo, Brasil, coordinado por Manoel Oriosvaldo de Moura. Este grupo tiene un libro llamado: *A Atividade Pedagógica Na Teoria Histórico-Cultural*, el cual es referenciado en esta investigación.

² Textos en portugués e inglés cuyas traducciones se hicieron para efectos de este trabajo.

elemento fundamental en la constitución del ser humano, una vez que le permite a este que aprenda y se apropie de la producción histórica, social y cultural de la humanidad al “hacer” sobre la realidad, de forma mediada por instrumentos y signos (entre ellos el lenguaje) producidos culturalmente. Esa mediación, “es una mediación integral de un sujeto que piensa y se coloca activamente delante de la experiencia” (Moretti, 2007 p.15).

En concordancia con lo anterior, el concepto de aprendizaje desde la perspectiva histórico-cultural es entendido conforme lo presenta Vygotski (2002, p. 115), “se presupone una naturaleza social específica y un proceso a través del cual los sujetos penetran en la vida intelectual de aquellos que lo rodean”. Es en la relación del sujeto con el medio físico y social, mediado por instrumentos y signos, donde se procesa su desarrollo cognitivo en un sentido recíproco de transformarse y transformar la naturaleza.

Los otros elementos encontrados en la perspectiva histórico-cultural y específicamente desde la teoría de la actividad de Leontiev, son los conceptos de trabajo y actividad. Trabajo se asume, según Moretti (2007), como un mediador necesario, con carácter ontológico, que permite constituir al sujeto en términos de una “educación humanizadora”. Consecuentemente, en esta investigación, además de darle prioridad al conocimiento matemático, le apuntamos a una formación del sujeto priorizando espacios de diálogo, donde el trabajo de los y las estudiantes sirviera como mediación necesaria para aprender, de esta forma, se valorará y se concebirá como un ser social e histórico transformador de su propio entorno.

Por su parte la actividad conforme lo propuso Leontiev y es retomada por GEPAPe (2010), permite subsidiar teóricamente la formación y el proceso de aprendizaje, en este caso, de este camino de la fracción. En un primer momento, se hace una exposición reflexiva de las necesidades que tenemos algunos docentes de la región para enseñar las fracciones. A medida

que se profundiza en este tema, se percibe que detrás de las fracciones hay otros conceptos, no sólo el de la medición (como lo suponía y se refleja en otras investigaciones, que también se examinarán), sino también, los elementos básicos de la geometría y, el movimiento del concepto matemático de grandeza³ y el de magnitud relacionado con las cantidades continuas y el número natural. Juntos, reúnen la “esencia” (en términos de Davidov, 1988) y; aprovechando la producción histórica de conocimientos que hicieron los seres humanos del concepto de fracción, es decir, su génesis, permiten comprenderlo mejor, según Davidov (1982), Caraña (1984) y Lima & Moisés (1998), como base fundamental del número racional.

Se entiende el concepto de actividad, dentro de los referentes teóricos que nos fundamentan, como un conjunto de acciones objetivas, transformadoras y productivas, en la práctica del sujeto. Para el trabajo en el aula de clase, desde estos mismos referentes, se encontraron las Actividades Orientadoras de Enseñanza, (propuestas en la misma línea de la teoría de la actividad de Leontiev por la GEPAPe, 2010); las cuales, son concebidas como el recurso metodológico y caracterizadas por ser una secuencia de actividades dialécticamente interconectadas. Estas actividades permitieron percibir e interpretar la forma en que los estudiantes, protagonistas de la investigación, se aproximaron progresivamente al proceso histórico-cultural del concepto de fracción.

En coherencia con los presupuestos teóricos que se asumieron, esta investigación está enmarcada bajo una investigación cualitativa con un abordaje de una investigación participante y un enfoque crítico-dialéctico. Se escoge la investigación participante desde Cano (1997) porque, como docente e investigador, tengo la posibilidad de interactuar, planear y ejecutar (con los miembros

³ La palabra grandeza es usada por algunos autores como sinónimo de magnitud. Para efectos de este trabajo, se deja en algunos casos, debido a que a juicio particular, posee un significado más amplio que el de magnitud. Más adelante la retomaremos desde algunos autores.

de la institución educativa) las acciones que corresponden y se relacionan con el desarrollo de la investigación y; el enfoque crítico-dialéctico desde Sánchez (1998) porque, tiene un “interés transformador” de las situaciones o fenómenos estudiados. En esa vía, este trabajo pone en consideración, una manera para aprender el concepto de fracción y un análisis de este proceso desde unos referentes teóricos propios de la perspectiva histórico-cultural; como un *camino* que permite reconocer otros aspectos, además de los cognoscitivos, en el aprendizaje de este tema.

El respectivo análisis lo realizamos desde diferentes momentos, emergiendo así, cuatro categorías que nos permitieron analizar el proceso de aprendizaje del concepto de *fracción*. La primera categoría, respecto al movimiento de la grandeza y el proceso de contar, llamada: —Todo se relaciona; la segunda, respecto a la relación que se establece entre algunos aspectos geométricos y la aritmética, llamada —la relación entre la forma y el número; la tercera, respecto al proceso de la medición y la fracción llamada: fracción: movimiento que expresa comparaciones de magnitudes continuas; y, la cuarta, respecto a la fracción y la terminación de la construcción de la maqueta de la escuela que soñamos, llamada: —llegando a la maqueta de la escuela que soñamos

Esta investigación está organizada de la siguiente forma:

El primer capítulo se destina a “LA NECESIDAD DEL CAMINO”. En él, se muestra por qué se escoge el conocimiento matemático referido al concepto de fracción. El montaje de este capítulo refleja preocupaciones propias y de algunos docentes de nuestro entorno en cuanto a cómo se viene dando la enseñanza y el aprendizaje de la fracción. En la búsqueda de solucionar estas preocupaciones, nos encontramos que los trabajos investigativos al respecto, abordan la fracción como un proceso proveniente de la medición o a partir de la solución de unas ecuaciones especiales en el campo de los números enteros. Pero, profundizando un poco la búsqueda, se notaron algunas otras cosas... que justifican este camino.

En el segundo capítulo titulado “PREPARANDO EL TERRENO”, se disponen y acondicionan los vínculos del movimiento conceptual de la fracción que se propone trabajar en este camino, comentando los aspectos histórico-culturales de dicho concepto y la posibilidad de una intervención pedagógica conscientemente orientada para el desarrollo de los sujetos que aprenden.

Todo camino debe tener un rumbo que orienta y proporciona la dirección a seguir. En consecuencia, en el tercer capítulo se describe “LA RUTA” seguida en este camino. Este apartado, se refiere al diseño metodológico que se utilizó. Aquí, se explica la visión epistemológica que soporta el diseño de las actividades realizadas para la investigación, las cuales estuvieron a la luz de la *Teoría de la Actividad*, y fueron implementadas en el aula, desde las *actividades orientadoras de enseñanza* (GEPAPe, 2010). Así, se explican las actividades que desarrollaron los estudiantes protagonistas de la investigación -en términos de las etapas que componen este camino, los instrumentos para la producción y análisis de datos, así como las categorías emergentes.

El cuarto capítulo se llamó — “TODO SE RELACIONA”. El cual es, además, el nombre de la primera categoría emergente. En él se desarrolló la tesis referente a que los estudiantes reflexionaron, mediante las actividades orientadoras de enseñanza realizadas, sobre el sentido práctico de la noción matemática de grandeza, el origen del número natural y la relación entre ambos. Reflexiones hechas por los y las estudiantes, a partir de condiciones propias y sociales, en fenómenos naturales e histórico-culturales.

El quinto capítulo presentado, es el correspondiente a la segunda categoría, —“LA RELACIÓN ENTRE EL NÚMERO Y LA FORMA”. Éste, busca mostrar el análisis de la forma como los

estudiantes protagonistas, a través de un proceso de mediación instrumental, percibieron la necesidad de crear unidades de medida artificiales para la cuantificación de aspectos continuos y, la relación entre algunos aspectos de geometría y aritmética.

El sexto capítulo también lleva el nombre de la categoría que contiene: —FRACCIÓN: MOVIMIENTO QUE EXPRESA COMPARACIONES DE MAGNITUDES CONTINUAS. En él se analiza el concepto de fracción a partir de acciones de medir aspectos continuos de las magnitudes de cara a la construcción del plano de la maqueta

El séptimo capítulo lleva el nombre de la última categoría denominada: — LLEGANDO A LA MAQUETA DE LA ESCUELA QUE SOÑAMOS. En este capítulo, analizamos la forma como los estudiantes protagonistas, a través de un diálogo con acudientes y la construcción de la maqueta de la escuela que soñamos, aprendieron el objeto *fracción*, a partir de las reflexiones y apropiaciones que se pudieron notar en diferentes momentos de las actividades desarrolladas.

Finalmente, se presenta un apartado llamado “DESPUÉS DEL RECORRIDO”. El cual es el último paso que se dio en la realización del trabajo de investigación: las conclusiones. En este capítulo, se dan a conocer los hallazgos a los que llegamos sobre el proceso de aprendizaje del concepto de *fracción*, respondiendo, así, a la pregunta que nos formulamos para dar inicio a este proceso investigativo.

LA NECESIDAD DEL CAMINO

En este capítulo se manifiesta una reflexión que parte de los intereses y preocupaciones propias y de algunos docentes en cuanto a cómo se viene dando el proceso de enseñanza y aprendizaje de la fracción en nuestro entorno. Esta reflexión motiva la justificación y el argumento de una problemática, desde el rastreo de algunas investigaciones, que llevó al planteamiento del objetivo, la selección del objeto y la pregunta de investigación.

El interés en el tema de los números racionales, es debido a que se encuentra estratégicamente ubicado en el currículo de nuestra institución puesto que se pone en práctica en el estudio posterior del álgebra y otras temáticas y porque es un tema que entrelaza todo lo estudiado en matemáticas y otras disciplinas como la física, la química, la biología, etc.

Además, porque durante los nueve años actuando como docente de matemáticas para niños y adolescentes en escuelas públicas, he notado que los estudiantes, habitualmente, presentan dificultades al resolver problemas y dominar procedimientos de cálculo con fracciones. De igual forma, mediante observaciones registradas en mi diario de campo, me he dado cuenta que la mayoría de los docentes de matemáticas de básica primaria (de nuestro municipio), por seguir un currículo rutinario (Monteiro y Méndez, 2011) tal vez impuesto por políticas educativas globalizantes que no tienen en cuenta la historia, las necesidades, tradiciones y la cultura donde los niños y niñas se desenvuelven, tendemos a impartir clases expositivas con ejemplos y ejercicios, donde los niños adquieren conceptos matemáticos de una manera individual.

Otro dato de nuestra experiencia, ocurre en la participación en mesas de trabajo institucionales de matemáticas, aquí los docentes nos reunimos a compartir saberes y experiencias pedagógicas. En esas discusiones, se ha planteado muchas veces que la enseñanza del concepto de fracción, lo

seguimos presentando de una manera estática (como dos números aislados) y superficial (traemos al aula una torta, un pan, una manzana etc. y las partimos en X partes iguales, o desiguales en muchos casos, y luego pasamos a realizar operaciones). Es más, en ocasiones los docentes iniciamos su proceso de enseñanza comentando situaciones donde se refleja el uso de las fracciones: -comprar $\frac{1}{2}$ libra de., tomarse $\frac{1}{4}$ litro de., traer $\frac{1}{3}$ de. son algunas frases que sirven de apoyo a éste proceso para llevar a un uso real las fracciones. Aún así, esto se queda en un mero enunciado sin trascendencia, debido a que el niño en la vida diaria usa la fracción, pero a la hora de resolver problemas relativos a las fracciones en el aula, surgen algunas dificultades.

En esa vía, es como si se restringiera (el proceso de enseñanza y aprendizaje) a las técnicas de cálculo y a la implementación de juegos y materiales que privilegian la aplicación de la fracción. Cuando lo integramos con otras actividades, refiriéndonos a las experiencias cotidianas con fracciones, lo que realizamos los docentes es tratar solamente la operacionalidad.

En investigaciones como la de Catalani (2002) también es notable que esa cuestión del conocimiento matemático y el énfasis dado a los aspectos lógico formales del tema de las fracciones, ocasione una enseñanza que por lo general prioriza en la operacionalidad del concepto. En consecuencia, los docentes para enseñar fracciones, comúnmente, recurrimos a modelos como el siguiente (Catalani, 2002, p. 27):

- Representación del concepto en su expresión simbólica - utilización de juegos, tortas, frases para que los recuerden, etc.
- Demostración del funcionamiento del concepto - la técnica operatoria.
- Aplicación del concepto - los modelos de problemas resueltos por el profesor.
- Reproducción de la técnica y de la aplicación - el alumno recibe la lista de ejercicios y problemas para reproducir lo aprendido.

Nuestra experiencia pedagógica de las fracciones señala que en las prácticas escolares se evidencia que el proceso de enseñanza y aprendizaje, por su afán de priorizar la operacionalidad, escasamente explora y tiene en cuenta las condiciones históricas, sociales, culturales, económicas y políticas de la comunidad en la que nos movemos los docentes y los estudiantes. Y en efecto, el aprendizaje de las fracciones por parte de los estudiantes se vuelve técnico, remitido a entrenarse en algoritmos y, aunque manipulen materiales y juegos, no permiten que participen con sus propias *experiencias* personales para elaborar sus procedimientos y desarrollar conceptos matemáticos en una interacción entre el hacer y el pensar de forma crítica y creativa. Inquietados por esto nos colocamos en la tarea de buscar algunas respuestas.

Configuración de algunas investigaciones y su relación con el objeto (el aprendizaje de la fracción) de esta investigación.

Unido a esos intereses se encuentra el hecho de que las investigaciones que hemos consultado, excepto la de Catalani (2002), tomaron como bases de sus estudios, teorías cognitivistas para analizar la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. Esto quiere decir, que estudian y/o analizan los diferentes procedimientos, objetos y estrategias que utilizan los niños y las niñas al resolver problemas sobre las fracciones. Esto a su vez, incide de manera poderosa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este tema puesto que al realizar observaciones detalladas de los procesos de resolución de problemas, buscan regularidades en sus conductas de resolución e intentan caracterizar dichas regularidades con suficiente precisión y detalle, con el fin de que los estudiantes puedan tomar esas caracterizaciones como guías para la resolución de los problemas. En consecuencia, conllevan a construir modelos de comprensión que posibilitan a los maestros enfocar su enseñanza como si fuera una estructura accesible a todas las personas y a preparar mejor sus clases. Pero, generalmente aparecen brechas entre la enseñanza formal y la

comprensión del movimiento del concepto de la fracción, en contextos fuera de la escuela. A continuación se referencian algunas investigaciones de este tipo.

La gran mayoría de investigadores que usan referencias cognitivistas para estudiar el proceso de enseñanza y aprendizaje sobre la temática del número racional, se amparan en teorías como la teoría de los campos conceptuales (TCC) de Vergnaud (1.990) y la semiótica de Duval (1993, 1999).

La teoría de los campos conceptuales (TCC) en términos del mismo autor Vergnaud (1.990):

Se trata de una teoría psicológica del concepto, o mejor dicho, de la conceptualización de lo real; permite localizar y estudiar las filiaciones y las rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual. Esta teoría permite igualmente analizar la relación entre conceptos en tanto que conocimientos explícitos y los invariantes operatorios implícitos en las conductas del sujeto en situación; la teoría explicita también las relaciones entre significados y significantes. (Vergnaud 1.990, p.2)

Esta teoría (TCC) ha servido de marco teórico para muchas investigaciones que pretenden comprender y explicar el proceso de aprendizaje de conceptos en Matemáticas. Por ejemplo, De León y Fuenlabrada (1996), analizaron “los procedimientos que utilizan los niños de primaria para resolver situaciones problemáticas que comprometen el significado de cociente de las fracciones”. Motivados porque en la enseñanza se prioriza el significado de la unidad así como en las reglas de cálculo, dejando de lado la variedad de situaciones que están ligadas con el significado de las fracciones. Abordaron este análisis desde los enfoques de la psicología genética y la teoría de los campos conceptuales. Estos investigadores, específicamente se centraron en identificar y clasificar las dificultades, errores y aciertos de los estudiantes al resolver problemas de reparto. Para realizar el análisis recurrieron a conceptos de invariantes operatorios, procedimientos, cálculos, predicciones y significantes que los estudiantes manifiestan en acciones como repartir, comparar y unir dos unidades fraccionarias, en un espacio de tres tipos de

problemas: de reparto, de selección de un pedazo resultado de una repartición y, de comparación de repartos.

Para la temática de las fracciones De León y Fuenlabrada (1996) tomaron como referencia las teorías de Kieren (1980, 1983) de ahí que sustenten que una expresión a/b puede tomar varios significados, entre ellos el de cociente. El cual, es importante para estos autores puesto que propician en los niños habilidad para dividir y cuantificar la fracción resultante de un reparto. De esta manera, exponen como conclusión que el significado de las fracciones resulta de la interacción de los niños con situaciones problemáticas, con sus esquemas de conocimiento y con los sistemas de significantes o signos.

Siguiendo los mismos referentes, Ruiz (2005) hizo un Estudio de “Estrategias de Solución y una Propuesta para la Enseñanza de Razón y Proporción.” En esta investigación la autora trata de reconocer las estrategias empleadas por los alumnos, al resolver problemas de razón y proporción simple y directa, y con base en ello diseña y aplica una propuesta de enseñanza de los tópicos señalados. Retoma el enfoque de Vergnaud (1990) sustentado en el marco del reconocimiento de las “estructuras multiplicativas” como campo conceptual; el isomorfismo de medidas (parte de la TCC) como estructura multiplicativa que consiste en una proporción directa simple entre dos medidas - espacios; el empleo de la tabla para mostrar las cuatro cantidades que se ponen en relación en los problemas correspondientes a estas estructuras y; dos procedimientos para encontrar el cuarto valor: operador escalar y operador función. Además, validó los resultados a través de un proceso de triangulación que subyace del estudio de casos (desde las representaciones, las relaciones, y los procedimientos de los estudiantes) y; realizó su análisis teniendo en cuenta el concepto de fracción como razón y proporción, la articulación de la comprensión del problema y, la elección del procedimiento adecuado para su resolución.

Por otro lado, utilizando como marco de referencia la teoría semiótica de Duval (1993, 1999), Sancheza (2010) realiza una investigación titulada “Las Representaciones en el Conjunto de los Números Racionales: Estudio de Caso para Grado Quinto de Primaria”. Para desarrollar la investigación, esta autora se planteó responder ¿Qué tipo de representaciones semióticas utilizan los estudiantes de grado 5° en la comprensión del concepto de número Racional? Para eso, se apoyó en autores como D’Amore (2009) y Fandiño (2009) de donde retomó, en primer lugar, que los números racionales surgen como necesidad de ampliación del campo numérico de los números enteros (los números enteros no dan solución a la ecuación $bx = a$, donde b es distinto de cero, cuando a no es múltiplo de b) y en segundo lugar, diversos registros semióticos de representación en los números racionales (lenguaje común, lenguaje aritmético, lenguaje algebraico, lenguaje figural y esquemas pictográficos).

De la pesquisa de Sancheza (2010) también considero importante mencionar el recorrido que hace por los estándares curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN) de donde establece que el estudio de número racional tiene sus inicios en tercero de primaria, momento en el que se deben describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes. Para esto, la autora deja entrever que lo más factible es iniciar el estudio de los fraccionarios con la noción parte-todo como la propone Obando (1999) y Fandiño (2009). Por su parte, para grado cuarto y quinto, retomando los estándares, enuncia que el estudiante debe interpretar las fracciones en diferentes contextos tales como situaciones de medición, razón y proporción y; analizar y explicar las distintas representaciones de un mismo número (naturales, fracciones, decimales, porcentajes). Así mismo, el estudiante de 4° o 5° debe utilizar la notación decimal para expresar las fracciones en diferentes contextos y debe utilizar cierto tipo de herramientas tales como operaciones aditivas, multiplicativas y el algoritmo de la división. Sancheza (2010) expresa que

en el proceso de enseñanza en la primaria, no se diferencia los racionales de los fraccionarios, y sus isomorfismos en las representaciones, lo cual genera dificultades en el proceso de aprendizaje de este objeto matemático. De ahí, que esta autora justifique en parte su trabajo, pues, se preocupa por presentar curricularmente las representaciones de un número racional.

En esta misma perspectiva de enfoques cognitivistas podemos ubicar la investigación de Meza & Barrios (2010), quienes ejecutan una propuesta didáctica para enseñar fracciones, sosteniendo que el “juego” en el plano de lo pedagógico y lo didáctico es importante para desarrollar habilidades en los estudiantes, las cuales les permitan redescubrir las estructuras matemáticas que subyacen en éste. Estos autores, retoman el uso del juego con las regletas de Cuasinare para trabajar el conocimiento del concepto de fracción en su forma verbal y simbólica (específica y abstracta), y el aprendizaje sobre la suma de fracciones. A propósito, para referirse al concepto de número fraccionario establecen que:

La comprensión de la división de la unidad, es decir, pasar del concepto de número natural al concepto de número fraccionario se necesita haber abarcado un trabajo sobre la unidad, su partición en partes congruentes tomando el status de número (teniendo en cuenta unidades fraccionarias: %, $1/3$, %, $1/5$,...) sin perder la noción de la unidad, así como una extensión de significados en el concepto del número fraccionario en cualquier situación dada, es decir saberlo contextualizar. (Meza & Barrios, 2010. p. 3)

Seguidamente, Meza y Barrios para darle sustento a la idea anterior, instauran que:

El paso que se da del número Natural al número Racional implica la comprensión de procesos de medición y partición de una unidad en el marco de situaciones en donde la unidad de medida no esté contenida un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o en las que se hace necesario expresar una magnitud en relación con otras magnitudes como por ejemplo relacionar fracciones, números mixtos y números decimales. (Meza & Barrios, 2010. P. 3)

Meza & Barrios (2010), desarrollan sus análisis apoyado en teorías de Kieren (1993) quien presenta un modelo recursivo para la comprensión de las matemáticas. Este modelo de comprensión es un proceso dinámico, en forma de espiral que conlleva a involucrarse en sí mismo

para crecer y extenderse. Dicho modelo está integrado por ocho niveles incrustados de conocimiento o acciones eficientes, los cuales son: hacer primitivo, hacer imagen, tener imagen, notar propiedad, formalizar, observar, estructurar e inventar. Meza & Barrios (2010), abordan los tres primeros y concluyen mostrando que usar juegos y materiales manipulables en el proceso permite que los estudiantes superen dificultades relacionadas con la puesta en práctica de operaciones entre fracciones.

Hasta esta parte, se han mostrado algunas investigaciones que tienen en cuenta elementos cognitivos en sus marcos teóricos, éstas entienden la comprensión como "proceso mental" y los problemas como proceso de aprendizaje y como forma de salir de dificultades. De ahí, que comprender el concepto de fracción y número racional, desde estas investigaciones, implica entender la información del enunciado del problema y las posibles relaciones allí presentes, para lo cual el estudiante se puede valer de dibujos, gráficas o diagramas, lo mismo que de preguntas.

Ahora, en este recorrido por las investigaciones consultadas, se logró percibir dos perspectivas de la historia del concepto de número racional: como un suceso que subyace de la necesidad de la ampliación del campo numérico de los números enteros y, desde el contexto específico de la medida. En la primera, Kieren (1983), Gallardo y otros (2008), Sancheza (2010), Fandiño (2009), entre otros, respaldan que los números enteros no dan solución a la ecuación $bx = a$, donde b es distinto de cero, cuando a no es múltiplo de b . Según esta historia, el estudio de los números enteros debió darse a partir de situaciones que involucren las medidas relativas, y el cambio de medidas, en contextos dentro de los cuales se dan las bases fenomenológicas de éstos. El estudio de los números racionales, en esa vía, contribuyó a la construcción de los sentidos y significados relativos a la medida, fracciones, razones, proporciones, porcentajes, y campo de cocientes.

En la segunda perspectiva, Obando (2003) muestra una mirada histórico-epistemológica de este concepto, de donde se pueden destacar los siguientes hechos fundamentales:

Las dicotomías "continuo-discreto", "unidad aritmética-unidad geométrica" y "número-magnitud", que se muestran como factores epistemológicos claves en el proceso de construcción histórico del concepto de número racional, deben ser firmemente conceptualizadas si se quiere que las fracciones de unidad sean aceptadas como números.

Las prácticas sociales de la medición son una fuente importante para avanzar en el proceso de conceptualización de las fracciones de unidad como números. (Obando, 2003. P.161)

De lo anterior, se puede observar que el surgimiento de las fracciones está dado desde el contexto de la medida; en tanto que las fracciones tienen en los procesos de medición un elemento importante para su conceptualización. En la voz de Obando y otros (2006):

La medida fraccional. Ésta aparece cuando se desea medir una determinada magnitud en la cual la unidad no está contenida un número entero de veces en la magnitud que se quiere medir. Para obtener la medida exacta se deben utilizar los submúltiplos, y el resultado obtenido es la relación cuantitativa entre la magnitud medida y la unidad de medida utilizada. (Obando y otros, 2006. P.72)

Esta consideración, es clave en la mayoría de los argumentos de las investigaciones consultadas sobre las fracciones, porque se piensa que la medición es lo que produce el origen de las fracciones y es el puente de entrada a los racionales. Además, porque muchos de estos estudios⁴ han arrojado que para superar las dificultades de aprendizaje en este tema se debe abordar las diferentes representaciones y usos de los mismos. Estos planteamientos, son parte de la explicación que fundamenta la orientación de los estándares (del MEN, 2006) al establecer el inicio del estudio de las fracciones, con la descripción de situaciones de medición y, pasando luego, al uso de las fracciones desde las diferentes representaciones de la fracción: parte-todo, cociente, medida, entre otras. Esta investigación pretende ir más allá del estudio de la fracción

⁴ Ver por ejemplo, León & Fuenlabrada (1996), Vallejo & Tamayo (2008), Gallardo y otros (2008), Sancheza (2010), Mesa & Barrios (2010) entre otros.

partiendo solamente de la medición; porque nos hemos encontrado que detrás de la medición hay otras ideas fundamentales referidas a conceptos básicos de la geometría y al concepto matemático de grandeza en relación con las magnitudes continuas. Esto implica, ver la fracción como un movimiento conceptual, con un sentido amplio de su significado, que le permite al aprendiz comprenderla mejor.

Se han considerado, hasta este momento, algunas investigaciones especiales, que realizan sus estudios desde unas teorías específicas y tienen una mirada particular del concepto de fracción. Ahora, entre las investigaciones rastreadas desde la perspectiva histórico-cultural encontramos la de Catalani (2002), titulada: “la interrelación forma-contenido en el desarrollo conceptual de la fracción”. Esta autora, describe y analiza, desde una mirada cualitativa de carácter intervencionista, el desarrollo conceptual de las fracciones (en un sentido amplio de su significado), que tienen los estudiantes desde la dialéctica forma y contenido. Resalta, además, la utilización de actividades que problematizan el conocimiento; el diálogo para fomentar discusiones con el propósito de elaborar conceptos sobre las fracciones y; la importancia de tener en cuenta para ello, las concepciones que el estudiante trae al aula de clases. Esta investigadora concluye que el movimiento Forma-contenido permitió ver como los y las alumnas elaboran conceptualmente formas de pensar relacionadas con el movimiento de las acciones de medir aspectos discretos y continuos (contenido) y de las síntesis numéricas (forma). Con ello, se ratifican conceptualizaciones como la de tomar la medición como un aspecto fundamental en la historia y desarrollo de los números racionales y, como producto de la necesidad de medir acciones prácticas (de la vida real) que implican la cuantificación de objetos, elementos o fenómenos que involucran cambios, y en ese sentido, se comparte esta postura.

Relacionando todas las investigaciones anteriores con lo que pretendemos hacer, es pertinente

decir que proponemos el mismo contexto de aprendizaje de la fracción. Pero, inscribiendo este trabajo en el plano de las investigaciones que, como la de Catalani (2002), toman las elaboraciones sobre la racionalidad a/b como resultado de pensamiento y lenguaje en la actividad social e histórica de la humanidad. Ahora, para llevar este conocimiento al aula de clase y analizar el proceso de aprendizaje, que es el objetivo de esta investigación, se tiene en cuenta la perspectiva histórico-cultural, especialmente la teoría de la actividad de Leontiev en la voz de Davidov (1982), la GEPAPe (2010) y Radford (2008, 2011) entre otros, que consideran en primer lugar, que un sujeto comprende un determinado conocimiento matemático cuando lo produce en dialéctica con su cultura e historia y lo usa en diferentes prácticas sociales, y en segundo lugar, que no tiene sentido pensar la actividad matemática en el contexto único de la persona (particularidades cognitivas) sin ubicar esta persona en un contexto amplio de influencias históricas, sociales y culturales que explican parte de sus acciones.

Desde la perspectiva histórico-cultural, la historia es ilustrativa y no cronológica; no se trata de establecer leyes que pre-determinan la evolución del concepto, ni tampoco caer en historicismo, sino, tomar aspectos fundamentales de la historia para desarrollar el aprendizaje. En palabras de Duarte (1987) retomado por Catalani, (2002).

La historia se mueve a través de... A menudo, los avances y retrocesos, desvíos... por pasos meramente accidentales. Para conocer el proceso de desarrollo de un conocimiento o un aspecto particular de la realidad es necesario conocer la esencia de la evolución histórica. Esto significa que la selección de la secundaria es lo primario. Esta distinción es importante porque demuestra el error del historicismo, a la espera de conocer la realidad el hecho de saber la historia de la realidad, no hacer la distinción entre la historia y el proceso. (Duarte, 1987. Retomado por Catalani, 2002, p.67).

Desde el enfoque dinámico histórico-cultural se argumenta que el conocimiento de la historia del concepto se torna fundamental para identificar las conexiones importantes del concepto de fracción. Por esta razón, según la GEPAPe (2010), el enfoque indirecto en la enseñanza de la

historia, genera un movimiento que puede revelar el proceso de creación y desarrollo del concepto, comprendiendo las prácticas sociales y los conocimientos en el mismo movimiento.

La reconstrucción de la dinámica del concepto de fracción que se presenta en el capítulo siguiente -PREPARANDO EL TERRENO- de este camino, es la síntesis de los principales aspectos de la evolución histórica del concepto de fracción y la lógica numérica, basada en los estudios de autores como Caraña (1984) Aleksandrov, Kolmogorov & Laurentiev (1976), Davidov (1982), Lima & Moisés (1998) entre otros.

Para todos estos autores, el conocimiento surgió como parte de la vida cotidiana de hombres y mujeres y de esta forma, los orígenes primitivos de la matemática relacionados con los conceptos de número, grandeza y medida, se pueden encontrar en los inicios de la raza humana.

Al examinar el desarrollo del concepto de fracción con base en los autores mencionados, estamos buscando desde el punto de vista de la lógica dialéctica, las conexiones en los juicios y conceptos sobre la formación de la fracción que, además de permitir la organización de Actividades Orientadoras de Enseñanza, constituyan elementos para analizar la forma de aprender de los estudiantes.

La GEPAPe (2010) entiende que la perspectiva histórico-cultural identifica la unidad entre la cultura y el estudio histórico del objeto y por tanto constituye una premisa para la comprensión del proceso de movimiento del pensamiento teórico. En esta identidad se tiene que evidenciar el proceso de cambio del objeto, sus etapas de desarrollo y surgimiento, mientras la cultura, refleja los grandes períodos de la historia, actúa como la liberación de los incidentes históricos que la transforman.

Para comprender el movimiento del pensamiento teórico de los y las estudiantes, es necesario organizar la enseñanza con las actividades adecuadas. Davidov (1982) propone: partir de las tesis generales de área del saber y no de los casos particulares, buscando la célula de los conceptos, su génesis y esencia, lo que se consigue por medio de la operación de construir y transformar un objeto mentalmente. Pues, para Davidov (1982) el método que permite que se reproduzcan teóricamente las formas de representación y contemplación sensorial, lo concreto real, es el método de ascensión de lo abstracto a lo concreto. Conforme sus palabras: “es necesario mostrar francamente a los estudiantes la esencia abstracta de las matemáticas, inculcarles la facultad de hacer abstracciones y de aprovechar su fuerza teórica” (Davidov, 1982, p.157). De ese modo, las abstracciones se alcanzan por medio del desarrollo del objeto y permiten expresar la esencia del objeto concreto. Ya lo concreto es el resultado mental de la asociación de las abstracciones y el objeto se presenta en unidad con el todo -como la esencia. Así, no se entiende un concepto como una abstracción; pues en él, lo concreto se ha generado con base en la asociación de abstracciones.

La perspectiva histórico-cultural plantea estudiar lo histórico del objeto y su correlación con la cultura y las necesidades de los estudiantes. Este camino se refiere a los principales vínculos establecidos entre el movimiento del pensamiento y el objeto estudiado, revelando las diferentes formas de movimiento de pensamiento en el proceso de llevar el pensamiento al objeto. En otras palabras, en el proceso de acercamiento al objeto se establecen ciertos enlaces -Conexiones de las maneras de pensar- que se reflejan en los resultados del objeto de conocimiento. Debido a que cada forma de pensamiento constituye el sentido del movimiento de la realidad objetiva -el aprendizaje, y en ella se refleja el resultado de los conocimientos -la apropiación.

Siendo el objetivo de esta investigación -analizar el aprendizaje del concepto de fracción en estudiantes de cuarto grado de básica primaria, desde la perspectiva histórico-cultural, tenemos entonces que autores como Caraña (1984) Aleksandrov, Kolmogorov & Laurentiev (1976), Davidov (1982), Lima & Moisés (1998), brindan un concepto de número racional maduro y desarrollado ajustado a los fines de dicha perspectiva. Armado con una esencia primigenia, que explora la historia de su desarrollo, creando no sólo la premisa indispensable para una comprensión más profunda de su esencia, sino también la posibilidad de cómo aprender este concepto.

Por este motivo, nuestro punto de partida es el establecimiento del desarrollo creativo de su base conceptual -el concepto de fracción, diferentemente del abordaje hecho en las primeras investigaciones presentadas en esta disertación, en las cuales el foco recae sobre el establecimiento de las relaciones lógico-formales, propias del concepto de racionalidad, que envuelve, la idea de cociente, parte-todo, razón, operador multiplicativo y probabilidad, porcentaje, entre otras representaciones.

Nuestro propósito no se aplica a la adquisición del concepto de número racional puesto que hemos asumido que la fracción constituye su base fundamental. Apoyados en la perspectiva histórico-cultural y específicamente en la teoría de la actividad de Leontiev, destacamos, a partir de los argumentos de la GEPAPe (2010), que el aprendizaje de un concepto ocurre cuando participamos de los movimientos de la creación de éste, en una actividad que incorpora la práctica y el pensar conceptual, en sus dimensiones sociológicas y lógicas. En otras palabras, cuando el sujeto se apropie de la producción histórica y social de la humanidad al “hacer” en la realidad de forma mediada por instrumentos y signos (entre ellos el lenguaje) producidos culturalmente.

El concepto de aprendizaje desde la perspectiva histórico-cultural es un movimiento que se da en la relación del sujeto con el medio físico y social, mediado por instrumentos y signos, donde se procesa su desarrollo cognitivo en un sentido recíproco de transformarse y transformar la naturaleza.

Este movimiento en el desarrollo cognitivo o psíquico, se realiza, según Vygotski (2001), por un proceso de internalización, donde las relaciones intrapsíquicas, producto de actividades individuales se constituyen con base en las relaciones interpsíquicas, producto de actividades colectivas. En ese movimiento de lo social a lo individual, se da la apropiación de conceptos y significaciones. De esa forma, el aprendizaje no ocurre espontáneamente y apenas tornándose por base las condiciones biológicas del sujeto, porque es mediado culturalmente y es reflejado en la reproducción de la apropiación de conceptos que hace el sujeto.

El concepto de apropiación, dentro de las referencias teóricas que se está abordando, es entendido como el proceso por medio del cual el sujeto “reproduce en si las formas histórico-sociales de la actividad” (Davidov, 1988 p.11), participando de su realización colectiva, de una forma socialmente significativa. En ese sentido, GEPAPe (2010) propone tres componentes (tareas de estudio, acciones de estudio, y acciones de autoevaluación y regulación) que, trabajados de forma integrada, y mediados por la acción del profesor, permiten que el estudiante se apropie de conceptos históricamente construidos, de forma sistematizada e intencional, y se desarrolle intelectualmente conforme al “pensamiento teórico”.

En consecuencia de todo lo anterior, se plantea la pregunta de investigación: ¿cómo analizar el proceso de aprendizaje del concepto de fracción, en estudiantes de un grado cuarto de básica, desde la perspectiva histórico-cultural? Donde los y las estudiantes y, las Actividades

Orientadoras de Enseñanza (AOE) propuestas por la GEPAPe (2010), amparadas en la teoría de la actividad desde los fundamentos de la perspectiva histórico-cultural, son los protagonistas de este camino para transformar la realidad de los procesos de aprendizaje del concepto de fracción. Pues, ver las matemáticas desde la óptica histórico-cultural brinda la posibilidad de analizar, además de las estrategias y procedimientos, los aspectos de la historia, la cultura, del diálogo, y del bagaje que los niños y niñas traen al aula y; comprender que de esta manera la educación se da en un sentido humano, para que los estudiantes sean mejores ciudadanos.

PREPARANDO EL TERRENO

En este apartado se disponen y acondicionan los vínculos del movimiento conceptual de la fracción que se propone en este camino, comentando los aspectos histórico-culturales que fundamentan dicho concepto y dan la posibilidad de una intervención pedagógica conscientemente orientada para el desarrollo de los sujetos que aprenden.

A partir de los estudios históricos y arqueológicos de Childen (1966) retomado por Catalani (2002) vemos que el hombre es la última gran especie al parecer que su sobrevivencia y multiplicación en la prehistoria se debe al perfeccionamiento de lo que este autor llama “equipamiento artificial transferible.”

Durante millones de años los seres humanos actuaron y reaccionaron en el mundo exterior ajustándose y ajustándolo a sus necesidades. Sin disponer de ninguna clase de equipamiento, solamente de herramientas corporales tales como: garras, dientes, pelos, entre otros, para el equipamiento del cuerpo, típicos de la época prehistórica. Con el pasar del tiempo, el ser humano los fue sustituyendo por instrumentos no corporales que fabrica, usa y emplea según su necesidad.

Este equipamiento “extracorpóreo”, también considerado por la GEPAPe (2010) como un material inicialmente constituido de piedra para cavar, para cortar armas para la caza y ropas para abrigarse, creado por el ser humano en un proceso largo de experiencia y aprendizaje compuesto de tentativas, errores, impresiones recibidas y recuerdos, pudo ser adecuado gracias al trabajo⁵ que realizaban las personas.

⁵ El trabajo desde la perspectiva histórico-cultural es tomado como mediación para alcanzar un fin propio de humanización.

El aprendizaje de tales experiencias y el trabajo, según GEPAPe (2010), hace que el ser se torne humano, gracias a la evolución de las técnicas de trabajo que va empleando, estas técnicas rudimentarias desarrollan la complejidad y la constitución de la base de todo el desarrollo de un sistema de comunicación dotado de significados convencionales -el lenguaje del grupo social. El lenguaje es considerado el vehículo de transmisión de las ideas que se traducen como instrumentos y armas que pueden con éxito, controlar y transformar la naturaleza exterior, como también de la sociedad representadas por sus creencias, supersticiones, fidelidades, e ideas artísticas.

El desarrollo de estos equipamientos extracorpóreos coincide con los cambios de la economía de la sociedad humana. De una comunidad de economía estrictamente colectora, cuyos modos de vida no difieren de otro animal cualquiera y donde se hace uso apenas de los equipamientos corpóreos para la obtención de alimentos y abrigo, para una economía productora donde se hace necesario el uso de utensilios, herramientas y armas fabricadas para la sobrevivencia del grupo, incluyendo el cultivo de plantas y la creación de animales domésticos.

En ese periodo de la historia, la matemática surge no como conocimiento aislado, sino como parte de la creación de instrumentos necesarios para la vida cotidiana de las sociedades. Sus orígenes primitivos ciertamente están relacionados con las necesidades de contar, de crear formas geométricas y de medir, encontradas en los principios de la sociedad. Con escenarios demarcados por los valles del río Nilo, este periodo es caracterizado por la producción de excedentes a las necesidades de la aldea, exigiendo innovación científica y modificaciones sociales y económicas.

Ese proceso largo y gradual de desarrollo de la sociedad también es escenario para el desarrollo del concepto de número. De acuerdo con Caraña (1984, p.4) “la idea de número natural no es un producto puro del pensamiento, independiente de la experiencia; los hombres no adquirieron

primero los números para después contar; por el contrario, los números fueron surgiendo lentamente por la práctica diaria del conteo”. Las nociones primitivas de números deben haber surgido de las experiencias compuestas de tentativas, errores, impresiones recibidas, recuerdos y pensamientos. De esas precesiones de semejanzas y diferencias surgen las ciencias y las matemáticas. Así, “las propias diferencias parecen indicar semejanzas, pues el contraste entre un lobo y muchos, entre un carnero y un rebaño, entre un árbol y un bosque, sugieren que un lobo, un carnero y un árbol tienen algo en común -su unicidad” (Boyer, 1974, Retomado por Catalani, 2002 p. 74)

La precesión de esa gran propiedad abstracta de lo que nosotros llamamos número, fue un primer paso dado por la sociedad para el concepto numérico que gradualmente se desarrolla creciendo la contribución de diferentes pueblos. Davidov (1982) apunta que los seres humanos primero desarrollaron la noción de grandeza, que relacionada con la “necesidad”, permitió crear la naturaleza esencial del número natural. Los pueblos antiguos, por sus necesidades sociales empezaron a utilizar el número natural de forma diferente, cuando precisaron, más rigurosamente, gracias a la noción matemática de grandeza, los elementos de la naturaleza que no identificaban fácilmente, porque no estaban organizados de forma separada.

GEPAPe (2010) al parafrasear a Davidov (1982), explica que la grandeza es definida por tres diferentes relaciones simbólicas: $a=b$, $a<b$ y $a>b$. De esa forma, los seres humanos podían directamente comparar objetos, animales, alimentos, etc.

Esclareciendo como fue desarrollado este lenguaje de las grandezas, Catalani (2002) retomando a Hogben (1970), apunta que en la prehistoria, los órganos sensoriales eran capaces de percibir especies distintas a grandes distancias, pero eran incapaces de identificar esa distancia cuando se

trataba de tamaños diferentes. Así, cuando los ojos no fueran más suficientemente aptos para realizar tal tarea se hizo necesario construir nuevos órganos sensoriales-extracorpóreos- que los sustituyeran. En ese caso, la capacidad humana de invención creó la unidad de medida que transpuesta para los instrumentos de medición se tornan en un extracorpóreo.

Para Lima & Moisés (1998) todas las personas tenemos un sentido de grandeza y éste permite saber distinguir si un objeto es mayor o menor que otro cuando la diferencia es considerable.

- Cada ser u objeto de la naturaleza es compuesto por múltiples cualidades;
- Al lidiar con los movimientos de la naturaleza el hombre siente la necesidad de controlar una cierta cualidad que es común a varios seres u objetos;
- Esta cualidad se presenta siempre en una cantidad que varía;
- A cada variación cuantitativa corresponde una magnitud. (Lima & Moisés, 1998 p.14)

De esta manera, la magnitud según Lima & Moisés (1998), se refiere al movimiento cuantitativo de un cierto atributo que es común a los diferentes elementos de la naturaleza.

Con aportes de Caraña (1984), abrimos un paréntesis para expresar que, se considera cualidad al conjunto de relaciones posibles entre los seres/objetos/fenómenos que son tomadas por los sujetos en observación del contenido esos seres/objetos/fenómenos. Enfatizamos aquí la advertencia de este autor de que no se puede considerar cualidad de un ser u objeto como si ella existiera en él, las cualidades son relaciones orientadas por la multiplicidad de interpretaciones que se pueden hacer del mismo ser/objeto/fenómeno. Al hacer esta advertencia este autor, presenta, para ejemplificar como las cualidades son relaciones orientadas, así: “[...] Una hoja tiene, para el árbol, la cualidad de ser un órgano de respiración; para el gusano de seda, un medio de nutrición; para el hombre, podrá ser verde, servir como un medio económico, etc.” (Caraña 1984, p.107). Por esta razón, es importante esclarecer que al considerar cualidades debemos pensar en el contexto en el que se sitúa o destaca esa cualidad.

En resumen, cuando no se tiene una idea de pensamiento numérico, la grandeza se da en términos de una variación de la intensidad de una cualidad común a varios objetos lo cual puede evocar una relación de tipo $a=b$, $a>b$, o $a<b$.

Cuando no tenemos todavía una idea de pensamiento numérico para lidiar con las cantidades no organizadas en unidades naturales, utilizamos nuestras sensaciones, nuestras percepciones que nos son dadas por nuestros cinco sentidos. Estamos practicando nuestro sentido de grandeza. (Lima & Moisés, 1998 p.17)

Cuando se traduce la variación en números y tiene que ver con la cuantificación de aspectos continuos (no separados naturalmente por ej. El agua, la tierra, etc.) de los objetos o elementos de la naturaleza, estamos hablando de magnitud. En otras palabras, cuando hay una relación entre lo numérico y los atributos que son comunes a los objetos.

Cuando la diferencia entre los objetos no es considerable, según Lima & Moisés (1998), el sentido de grandeza de las personas puede fallar al tratar de distinguir cual es el mayor o menor. Para solucionar este problema, se evalúan situaciones en que los ojos no son suficiente para tal tarea, colocándose el problema de la necesidad de la creación de una unidad de medida que futuramente se tornaría instrumento -extracorpóreo- de medición en la expresión del resultado de la comparación de magnitudes en el proceso de medición, permitiendo que se redimensionará el contexto de utilización de números naturales. Por ello, en este trabajo, para el reconocimiento de la noción matemática de la grandeza, destacada por Davidov (1982), nos remite a la práctica del “sentido” en términos de la variación de intensidad (de tipo $a=b$, $a>b$, o $a<b$) de cualidades comunes a varios objetos, mientras que la magnitud, se entiende como la variación cuantitativa con respecto a un atributo que tiene propiedades físicas que pueden medirse como la altura, la longitud, la superficie, etc. Ambas, grandeza y magnitud, constituyen para esta investigación, elementos importantes en la elaboración del concepto de fracción.

Al colocar ahora la atención en el número que se obtiene como resultado del movimiento de magnitudes, notaremos que cuando se relaciona con aspectos geométricos, dan origen a procesos de medición, y aquí a su vez, se torna limitado para dar los resultados de ciertas mediciones.

En concordancia con lo anterior, la utilización del número natural en la prehistoria permitió a los seres humanos, la distinción de dos contextos de utilización de los números naturales. En el primero, el número natural fue usado con el fin de contar, considerando cada elemento del conteo, equivalente a cualquier otro. En este caso, en el conteo de un rebaño de ovejas, presumimos que cada oveja constituye cualitativamente la misma especie de individuo que se visualiza y están separados por una capa que refleja su unicidad. En el segundo contexto, de modo enteramente diferente, se observa que el número natural permitió expresar el conteo de un objeto que no presenta separaciones naturalmente -aspecto continuo, cuando es usado en la expresión del resultado de la comparación de una unidad de medida con la magnitud a ser medida.

En esta investigación, en el proceso de aprender el concepto de fracción, los y las estudiantes harán un recorrido por estos dos contextos del número natural con el objeto de expresar, las variaciones tanto de intensidad como cuantitativas, de la comparación entre la unidad de medida y la cantidad magnitud, cuando la primera cubre un número entero de veces la segunda, de modo que, permita el restablecimiento de la relación biunívoca, para la relación del conjunto de los números naturales con las unidades de medida contenidas en la magnitud a ser cuantificada.

Siguiendo el proceso histórico de la humanidad, la invención de herramientas, el descubrimiento de métodos de cultivo, la colecta del mismo, la reproducción de animales y las bebidas habían generado la necesidad, en la mayoría de las sociedades de Europa, África y Asia menor, de crear

todo un servicio de vasos, cántaros, cuerpos y recipientes que pasaron a ser usados para el consumo. Hay indicios de conocimientos de química en la fabricación de cerámica, de la física en la fijación de unos elementos con otros. Pero sobre todo, de geometría con la producción de formas y figuras cada vez más perfectas, que se convertirían en instrumentos geométricos, los cuales al relacionarlos con los números darían paso a procesos de medición.

Cuando consideramos en el contexto de medición, que la unidad de medida cabe un número entero de veces en la magnitud a ser cuantificada, la forma numérica conocida -número natural- puede ser utilizada para cuantificar ese aspecto continuo, una vez que la experiencia humana, creativamente transforma el aspecto continuo a la semejanza de un aspecto discreto. De este modo, para el establecimiento de la correspondencia biunívoca se exige la superación del problema referente a como traducir numéricamente la variación cuantitativa de cualidades comunes.

La medición de determinada cualidad se establece en el momento en el que se quiere conocer el tamaño, esto es, diferenciarla de otra en cuanto a sus grados de intensidad. En este sentido, el término cantidad es utilizado para representar la medida de la magnitud.

Por eso, al pensar en el desarrollo conceptual de la medida como base para la fracción, no podemos ignorar en el desarrollo de las actividades con los alumnos, el trabajo sobre la noción de grandeza y de magnitud. Saber si una cualidad es mayor, menor, más o menos que otra y, encima de todo, sobre la posibilidad de medir y traducir en números esa variación de cantidad constituye un juicio importante, para proporcionar el movimiento del pensamiento en cuanto a lo que es necesario para medir una variación de cantidad. Al reflexionar sobre situaciones prácticas, se pretende que los y las estudiantes identifiquen cualidades comunes a los objetos tales como: peso,

altura, velocidad entre otras, y piensen sobre su cuantificación. En estas actividades, conocimientos de geometría y aritmética, se unen para pensar en realizar el trabajo sobre la noción grandeza y magnitud.

En este caso Caraña (1984) nuevamente nos ofrece apoyo cuando nos presenta la conveniente escogencia de la unidad como elemento que posibilita la obtención, por adición o simple conteo, de la medida de determinada cualidad-estado. “La medición se hace comparando cada estado con aquello que se toma como unidad” (Caraña, 1984, p.109). En ese sentido, acontece que en las situaciones de medición de la vida cotidiana, se encuentran, en la mayoría de las veces, magnitudes de aspecto continuo que no contienen un número entero de veces la unidad de medida, haciendo surgir otra conexión importante -la necesidad de fraccionar la unidad de medida.

Retomando los registros históricos y arqueológicos, se torna evidente que la nueva organización económica, delineada por el surgimiento y desarrollo de la escritura, mostraron que tanto la idea de fracción como su notación, surgen exactamente en los grandes valles alrededor del Nilo con el desarrollo de culturas más avanzadas en la edad de bronce.

La fecundidad de las invenciones y descubrimientos de esos pueblos de las primeras civilizaciones, por las necesidades que su nueva economía productora colocaba, resultaron acciones de medición que posiblemente eran exigidas en actividades tales como: la construcción de su casa, del cercado de los animales y el almacenamiento de alimentos, la fabricación de armas, instrumentos para el transporte, la agricultura, la metalurgia, las vestimentas y cerámicas, entre otras.

El hecho de saber que los egipcios desarrollaban el arte de medir alrededor del río Nilo, en función de las inundaciones periódicas, favorece el proceso de esta investigación, en cuanto se usaban herramientas numéricas diferentes del número natural. Para nuestro caso (en Caucasia), también se da este fenómeno de las inundaciones, razón por la cual se recrearon situaciones como ésta en las Actividades Orientadoras de Enseñanza.

Según la GEPAPe (2010), desde la perspectiva histórico-cultural el desarrollo de la dimensión práctica de esta creación numérica puede facilitar al aprendiz, en nuestro caso de la fracción, experiencias más significativas desde el punto de vista de la formación del lenguaje y el pensamiento, al hacer conexiones entre las magnitudes, los elementos básicos de la geometría, y las medidas.

Aleksandrov, Kolmogorov & Laurentiev (1976), reconocen que el proceso de medición tiene origen en la interrelación entre la geometría y la aritmética. De hecho, para medir una magnitud sea ella uní, bi o tridimensional precisamos aplicarles una cierta unidad de medida calculando cuantas veces es posible repetir la operación de sobreponer la unidad de medida a la magnitud. O sea, que la medición de cualquier magnitud relaciona el cálculo de la cantidad de veces que se aplica una unidad de medida con una operación de identificación de medida al ser aplicada, pues ella debe presentar características semejantes a la magnitud en cuestión. Se requiere la aritmética, en el cálculo de la cantidad de veces que se aplica la unidad de medida a la magnitud y, la geometría en la identificación de la unidad de medida de la misma especie de la magnitud.

Todo ese énfasis en la medición como producto de la relación aritmética/geometría, permitió el desarrollo de las fracciones como lenguaje numérico usado para expresar el resultado de esa medición, puesto que los números naturales no son suficientes para explicar, con mayor

exactitud, este resultado. Entonces, como lo señala Caraba (1984), podemos considerar que surge un nuevo dilema: la expresión numérica de la medición. Este autor expone este dilema de la siguiente forma:

Estamos de cara a un dilema. Con dos opciones:

O renunciamos a explicar numéricamente la medición del segmento AB con la unidad CD, lo que, además de molestias, genera nuevamente cuestiones - podemos expresar la medida en relación a la nueva unidad y no en relación a la antigua, ¿será porque aquella trae algún privilegio especial? ¿Cuál? ¿Por qué?

O deseamos poder expresar la medida por número -principio de extensión - y entonces tenemos que reconocer que el instrumento numérico hasta aquí conocido -el conjunto de los números enteros positivos es insuficiente para ello y hay que completarlo, perfeccionarlo en ese sentido. ¿Cómo?

(...) si queremos resolver la dificultad, debemos crear un nuevo caos numérico de modo que se reduzca esa imposibilidad. (Caraba, 1984, p. 34)

Dada la dificultad de utilizar el conocimiento numérico, limitado al conteo de objetos de la naturaleza, se hace necesario ampliar el campo numérico, creando uno nuevo -los racionales. este último permite registrar del resultado de la medición de magnitudes que no contienen un número entero de veces la unidad de medida.

De este modo, las ideas que dieron origen a la fracción no nacen como fruto de un pensamiento puro e intelectualizado o de una entidad separada, al contrario, ella surge de la experiencia y de la relación con el objeto concreto, de la realización de operaciones de medir y contar, que son comunes de todos los días. De hecho, Aleksandrov et al. (1976) expresan que fue así que surgieron realmente las fracciones, de la división y comparación de las magnitudes continuas; en otras palabras, de las mediciones, y aclara que las fracciones no surgieron, ni podrán surgir, de la división de números enteros. Porque tiene sentido hablar de un bombillo, cuatro pelotas, etc. Pero no, hablar de dos tercios de un bombillo, de cuatro quintos de una pelota -porque tomada por separada no serviría para jugar- pues, para ello se necesitaría una pelota entera.

En síntesis, la idea presentada hasta aquí permite asegurar que el concepto de fracción se origina en la interrelación entre el movimiento de la grandeza, la medición de las magnitudes y el representar numéricamente el resultado de esta medida. Esta relación está escrita en las diversas necesidades e intereses de contar puestas en diferentes periodos históricos y en la sociedad actual.

Ese entendimiento, encuentra coherencia con la posición de Caraña (1984), al plantear que nuevos problemas sociales envuelven la creación de nuevos conjuntos numéricos. Según este autor, esos movimientos se apoyan en las soluciones que las sociedades antiguas adoptaron para resolver sus problemas. Problemas que surgieron de las necesidades de la vida diaria y que provocaron el desarrollo del conocimiento de las comunidades.

Como dice Caraña (1984), el problema de la medición envuelve desde la dueña de casa en las actividades culinarias, hasta un ingeniero en un proyecto de construcción. De alguna forma y en las más variadas circunstancias de profesiones nos encontramos con la necesidad de medir. Este autor, expresa que medir consiste en “comparar dos magnitudes de la misma especie -dos anchos, dos pesos, dos volúmenes, etc.” (Caraña 1984, p.29). Esta comparación nos remitirá al problema de determinar cuántas veces cabe un ancho en otro, vemos que este pensamiento se afina con el establecimiento de la correlación entre geometría y aritmética de Aleksandrov et al. (1976) en la medición de una grandeza.

Entre tanto Caraña (1984) apunta que esto no es todo, si no que se establece en un término común de comparación para todas las magnitudes de la misma especie, por complicaciones en las operaciones de intercambio. Él denomina este término común como unidad de medida.

Entendemos que el establecimiento de escogencia de la unidad de medida común favorece todas las formas de comunicación de resultado de la medición -cuantas veces cabe- atribuyendo un significado común a este.

De acuerdo con Hogben (1970) y Caraña (1984), fueron las costumbres sociales y, principalmente, el comercio el que impuso formas y dimensiones más o menos constantes a las unidades de medida. Las dificultades encontradas en el intercambio entre diferentes grupos establecieron unidades de medidas comunes. Estos autores ilustran, de forma evidente, como la necesidad de patronizar en la medición, resulta de las relaciones sociales: “a medida que el comercio se extendió por los alrededores comerciales sumerianos, la aceptación de un patrón común con que se pudiera comparar vasijas con varias capacidades, se fue tornando en una necesidad social” (Hogben 1970, retomado por Catalani, 2002 p.81)

Las situaciones de intercambio, también hoy, son las responsables de los acuerdos por los que se utilizan unidades de medida comunes. En ese sentido, en las AOE (tercera etapa) desarrolladas con las y los estudiantes surgió la necesidad de patronizar la unidad de medida. Al principio, al medir el borde del terreno de la escuela hicieron un recorrido con aquellas que históricamente fueron utilizadas, relacionadas con el cuerpo, tales como: cuartas, pasos, pies; luego, ellos escogieron aleatoriamente sus unidades de medida. En el momento de socializar los resultados, percibían que no era tan evidente, porque variaban de un estudiante a otro. Esto indujo a la percepción de que la utilización de diferentes unidades de medida impedía la rápida interpretación del resultado de la medida. La opción fue escoger una única unidad “pasos”, mas también, ésta presentó el problema inherente a los diversos tamaños de pasos utilizados en esta medición. Tuvieron, por tanto, que buscar una unidad de medida que garantizara un patrón único de medición.

Esta escogencia de las unidades estaba relacionada con: la naturaleza de las mediciones, el reconocimiento de las magnitudes a ser medida y el requisito de que la unidad fuera de la misma naturaleza que la magnitud a ser medida.

La acción de medir puede parecer una tarea simple, a primera vista, pero como asegura Caraña (1984), envuelve otras dificultades: la observación de una cualidad común a los objetos; el trabajo que se propone al evaluar cualidades comunes de los objetos, de forma que permitan su cuantificación (practicar la magnitud) y; la identificación y comparación de magnitudes de la misma especie.

El desarrollo del concepto de fracción presentado, tiene su fuente conceptual en la medida; ésta, a su vez, se desenvuelve apuntando a la cuantificación de aspectos continuos de los objetos, a partir de reconocimiento aspectos discretos. De esta manera, se entiende que esta fuente conceptual constituye las conexiones internas del concepto de fracción y por ese motivo organizamos actividades orientadoras de enseñanza que contemplan que el alumno aprendiz, en primer lugar, elabore juicios o definiciones del concepto de fracción; y en segundo lugar, pueda distinguir y fijar propiedades e indicios del objeto y del fenómeno material, permitiendo la formación de abstracciones.

Así, para el proceso de conocimiento de la fracción partimos de la contemplación viva de actividades que envuelven la formulación de juicios más generales sobre la unidad, la magnitud y los procesos de medición. Abordaremos las características de esa conexión/conocimiento general y lo pertinente al diseño metodológico (dispuesto en las AOE) en el capítulo siguiente denominado “LA RUTA”.

LA RUTA

Todo camino debe tener un rumbo u orientación que se debe tomar para llegar a un destino, en nuestro caso, al aprendizaje del movimiento conceptual de la fracción. Este capítulo se convierte en esa ruta que permitirá responder la pregunta de investigación trazada en este trabajo.

Teniendo en cuenta que se pretendía indagar por el proceso de aprendizaje del concepto de número racional, fue necesario interpretar una realidad particular. Realidad que, como lo afirman Denzin, Guba & Lincoln (1994), está constituida por factores sociales, económicos y políticos; realidad que transforma al sujeto que le pertenece, y que, a su vez, es transformada por éste. Para esta interpretación de la realidad, se recogieron las discusiones colectivas y los materiales escritos por los y las estudiantes protagonistas, analizándolos a la luz de unas teorías que se escogieron como fundamentación. En consecuencia, la investigación se realizó a la luz del paradigma cualitativo desde una investigación participante y bajo un enfoque crítico-dialéctico.

Para argumentar lo anterior cabe decir primero, que esta investigación se llevó a cabo en un grado 4° de básica primaria perteneciente a la Institución Educativa Divino Niño, ubicada en el sur del municipio de Cauca⁶ Antioquia. Este grado está conformado por 35 estudiantes (21 niñas y 14 niños), sus edades oscilan entre 9 y 11 años y pertenecen a los estratos socio económicos 1 y 2. De este grado soy docente de matemáticas. Lo cual quiere decir, que me desenvolveré como profesor e investigador. De ahí que, este trabajo estará enmarcado, en primer lugar, bajo una investigación cualitativa con un abordaje de una investigación participante (IP). El objetivo de la IP, desde Cano (1997) busca:

⁶ Cauca es una localidad ubicada a orillas del río Cauca, 286 kilómetros al norte de Medellín y por su territorio pasa la Troncal de Occidente que une a Medellín con la Costa Atlántica. Pocos kilómetros más al norte se encuentra el límite departamental con Córdoba (Ver mapa No.1).

Reconocer, analizar y sistematizar el conocimiento de índole popular a fin de facilitar la participación real de los grupos involucrados en la planeación y ejecución de las acciones que corresponden y se relacionan con el desarrollo. (Cano, 1997, p. 86)

En este sentido, la planeación de las actividades sobre el movimiento conceptual de la fracción y las técnicas de recolección de información, estuvieron bajo consentimiento y participación de todo el grupo involucrado (estudiantes, padres de familia, docente-investigador y asesora). Lo cual, permitió la descripción, la interpretación y el estudio de este grupo que comparte el mismo entorno. En este sentido, los datos no hablarán por sí mismos, pues, son inseparables del proceso de construcción teórica en el cual adquiere legitimidad.

En concordancia con lo anterior, se propuso, desde el mismo paradigma cualitativo, el enfoque crítico-dialéctico. Éste, según Sánchez (1998), cuestiona la visión estática de la realidad, debido a que esa visión esconde el carácter conflictivo, dinámico e histórico de la realidad y tiene un “interés transformador” de las situaciones o fenómenos estudiados.

Además, Sánchez (1998) también plantea que:

[...] el hombre es considerado, en la mayoría de las investigaciones identificadas como crítico-dialéctica como un ser social, es decir, individuo inserto en el conjunto de las relaciones sociales. [...] A pesar de ser histórica y socialmente determinado también es capaz de tomar conciencia de su papel histórico, de educarse por medio de las acciones políticas y de liberarse a través de la práctica revolucionaria. (Sánchez, 1998, p. 95)

En esa vía, nuestro sueño es aportar a la transformación en la forma de enseñar y aprender la fracción, a través de la perspectiva histórico-cultural donde hay espacio de diálogo y valoración de los sujetos participantes, como seres sociales e históricos creadores y transformadores de su propio conocimiento matemático.

De esta manera, a partir de motivos escogidos en reciprocidad con los intereses y necesidades (de los protagonistas), se desarrolló, tomando como referente la teoría de la actividad (de Leontiev 1983, retomada por la GEPAPe, 2010; Davidov, 1988 y Radford 2008, 2012), un conjunto de

actividades orientadoras de enseñanza que permitieron poner en marcha el concepto de número racional. Dichas actividades las ejecutaron los estudiantes durante 45 días en sesiones de 4 horas semanales, repartidas en dos días.

Sobre la producción y registro de los datos.

Desde la perspectiva histórico-cultural, los datos se consideran no como algo estático, listo para recogerse, sino como algo que debe producirse conjuntamente, con los sujetos de la investigación. En ese sentido, en los encuentros en el aula de clase se utilizaron los siguientes instrumentos para producir y recopilar los datos:

- Videgrabaciones, de la mayoría de las sesiones de clase.
 - Tanto investigador como estudiantes llevaron diarios de campo para realizar anotaciones.
- Registros de las producciones escritas de los participantes.

Inicialmente se propusieron unas actividades de exploración con los y las estudiantes, sus padres de familia y algunos docentes de la institución. A los y las estudiantes se les pidió primero que en subgrupos realizaran dramatizaciones acerca de los quehaceres de ellos y sus familias en un día “normal” y luego, se les propuso que plasmaran, mediante un ideograma sus gustos y necesidades.; A los padres de familia y compañeros docentes (que también son profesores de estos niños y niñas) por su parte, se les sugirió realizar ideogramas y escritos en los cuales expresaron ideas relacionadas con el quehacer de ellos y de las demás personas de nuestro entorno, con su visión del futuro, el cambio y las transformaciones como seres humanos. Posteriormente, en concordancia con los datos que arrojaron los análisis de estas actividades, se diseñaron y ejecutaron las AOE donde se abordó el movimiento conceptual de la fracción desde cuatro momentos o etapas (más adelante se retoman).

Sobre los participantes.

Aunque las actividades fueron ejecutadas por todos los estudiantes del grupo, escogimos 6 estudiantes, de los cuales nos interesa observar, interpretar, comprender y analizar las interrelaciones que se tejen, en el aula de clase, con el conocimiento matemático (referido al movimiento conceptual de la fracción) al desarrollar situaciones intencionadas que evocan unas motivaciones, intereses y necesidades. Cabe decir, que aunque se obtuvo el consentimiento firmado de los niños, sus padres y directivas de la institución para desarrollar esta investigación, los nombres utilizados fueron cambiados siguiendo los parámetros de la resolución 8430 del 1993 Por la cual se establecen las normas científicas, técnicas y administrativas para la investigación en Colombia.

ANGIE, OSCAR, CATALINA, JONATHAN, DANIEL y DAYANA, son estudiantes que fueron elegidos por su interés manifestado desde antes de iniciar el trabajo de campo y por su disposición y motivación para realizar las actividades durante el proyecto. Algunos de ellos, se destacaban por indagar y participar constantemente en clase, otros, en cambio, expresaban tener dificultad en la comprensión del área de matemáticas. Estos niños y niñas viven, como ya se ha mencionado, en el municipio de Caucasia, el cual nace según Pimienta (2007), del proceso de configuración de la identidad local basado en lo heterogéneo y en lo diverso debido a su posición geográfica estratégica, pues, permite la comunicación directa con el centro y la costa atlántica del País, en términos de Pimienta (2007):

Esta localidad es una frontera intercultural entre Antioquia y la Costa Atlántica que vivió un acelerado proceso de crecimiento económico y demográfico durante todo el siglo XX, en el que recibió flujos migratorios provenientes de otros municipios de la región, de las sabanas de la costa Atlántica, del interior del departamento y de otros departamentos, lo que marcó la configuración de su diversidad cultural y, permitió su constitución en una ciudad intermedia, considerada la "Capital del Bajo Cauca", centro urbano, comercial y de servicios más importantes de su región y del Alto San Jorge. (Pimienta 2007. P. 65)

De ese modo, en las representaciones sociales sobre la identidad hay una diferenciación de los elementos heredadores de cada grupo: de la cultura costeña -la alegría, lo extrovertidos y; de los paisas (personas que viven hacia el centro del país) lo emprendedores y echados para adelante. Es a partir de estas etiquetas culturales que el caucasiano se autodefine y señala como portador de una identidad propia, basada en la diversidad que recorre la historia de su pueblo.

Caucasia es hoy una ciudad en crecimiento pues la proporción de población nativa se está incrementando, por los hijos de los llegados en los 50, 60 y 70, jóvenes que tienen un mayor arraigo y pertenencia a lo caucasiano, que construyen lo propio y se piensan como portadores de una identidad nueva y valiosa. De ahí, que los límites de esta localidad se han estado extendiendo durante los últimos cinco años, sus habitantes se esmeran cada vez más por obtener una vivienda propia.

Sobre el trabajo de campo

Dada la naturaleza existente en cuanto a los espacios histórico, social y cultural de las relaciones humanas de nuestro ambiente y en función de la identidad del papel de profesor e investigador, al sugerir una estrategia metodológica para el trabajo (de campo) en el aula de clase, se diseñaron un conjunto de *Actividades Orientadoras de Enseñanza* (GEPAPe, 2010) las cuales, se fundamentan teóricamente desde *la teoría de la actividad* de Leontiev (1983).

En este apartado se hace necesario considerar, teóricamente, primero, a la *teoría de la actividad* de Leontiev (a partir de las voces y contribuciones de Davidov, 1988; GEPAPe, 2010 y Radford, 2004, 2011) como el suelo de este *camino* que soporta el trabajo de campo y, segundo, a las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* como la composición o mezcla que estabiliza ese suelo y refleja las actividades que se desarrollaron con los estudiantes.

Davidov (1988), referenciando a Leontiev, expresa que la actividad es una secuencia de acciones mediatizadas a través de las cuales los sujetos se relacionan con otras personas u objetos para adquirir aprendizajes, en su afán de satisfacer una necesidad. De ahí, que la actividad no pueda verse sólo como una reunión de un grupo de personas que piensan o interactúan en torno a una tarea. De hecho, el mismo Leontiev, retomado por Davidov (1988), sustentó que la actividad es:

Una secuencia dialécticamente interconectada de acciones mediatizadas a través de las cuales los individuos se relacionan no solamente con el mundo de los objetos sino también con otros individuos, adquiriendo, en el curso de ese proceso, la experiencia humana. (Davidov, 1988 p.16)

En esa vía, la actividad encarna una relación entre el saber, el pensamiento y la cultura y, responde a un proceso social cuyo propósito es alcanzar un objetivo con significados culturales y conceptuales, obedeciendo a unos intereses que se imponen al sujeto en su relación con el medio donde vive. Esa relación, dada de forma también mediada, permite un proceso de apropiaciones, para que el individuo se torne humano a lo largo de su vida en sociedad.

La teoría de la actividad posee un elemento fundamental: la necesidad. La cual, es importante porque es considerada como el motor que impulsa el aprendizaje de un conocimiento. Davidov (1988) expresó que la actividad desde Leontiev la constituye, la necesidad, las tareas, acciones, motivos, objetos y operaciones. Pero, realiza un aporte significativo a la teoría de la actividad, introduciendo un nuevo elemento: el deseo. El cual es tenido en cuenta en este trabajo porque impulsa, al igual que la necesidad, los motivos para un objeto.

Según GEPAPe (2010), los elementos constitutivos que presupone el concepto de actividad de Leontiev, está compuesto por dos características centrales, la de orientación y la de ejecución. En la orientación, la actividad comprende las necesidades, los motivos, el objeto y las tareas; en la ejecución, la actividad es constituida por las acciones y sus operaciones. En términos de eso, la

GEPAPe, (2010) entiende que la actividad teórica interna y la actividad práctica externa de los sujetos mantienen la misma estructura general; la actividad interna “se origina a través de la teoría práctica externa, no separada de ella, más conserva una relación fundamental y bilateral con la misma” (Leontiev, 2001, retomado por la GEPAPe, 2010, p.23). En ese sentido teórico, la actividad es entendida como “aquellos procesos que, realizando las relaciones del hombre con el mundo, satisfacen una necesidad especial correspondiente a él” (Leontiev, 2001, retomado por la GEPAPe, 2010, p.23). De esta manera, se puede ver, que la actividad tiene como característica el motivo por el cual el sujeto se dispone a “hacer”, a partir de una necesidad.

La primera condición de toda actividad es una necesidad. Todavía en sí, la necesidad no puede determinar la orientación concreta de una actividad, pues es apenas en el objeto de la actividad que ella encuentra su determinación [...] Una vez que la necesidad encuentra a su determinación en el objeto (se "objetiva" en él), el mencionado objeto se torna motivo de la actividad, de aquello que lo estimula. (Leontiev, 1978, retomado por la GEPAPe, 2010, p.23)

Para comprender mejor la relación entre actividad, acción, objeto y motivo se debe retomar lo que nos presenta el propio Leontiev (retomado por la GEPAPe, 2010), y en su misma línea, lo que nos dice Radford (2008, 2011) por separado, así:

Si no se genera el objeto de la acción, por sí mismo, se hace necesario que la acción surja y se realice, para que el objeto aparezca en la relación con el motivo de la actividad en que entra esa acción. Esa acción es reflejada por el sujeto de una forma perfectamente determinada: sobre la forma de conciencia del objeto de la acción en cuanto al fin. Así, el objeto de la acción no es después de todo su fin inmediato concientizado. (Leontiev, 1978, retomado por la GEPAPe, 2010, p.23).

El objeto orienta y estimula la actividad. Es por ello que, para Radford (2004), Leontiev insistía en que “no puede haber actividad sin un motivo”. El motivo no es algo que se presenta al individuo directamente. Y el objeto (por ejemplo, el aprendizaje de la fracción) se presenta, de entrada, cargado con una significación cultural porque el objeto lleva encapsulado en sí mismo un valor, científico, estético, etc. ofreciendo así una vía de desarrollo posible. En ese sentido,

Radford (2011) propone que la relación entre los objetos y los motivos debe ser dual, como una dialogía objeto-motivo, (así se tomará en este trabajo) donde el objeto sea el detonante del motivo y a su vez el motivo sea el detonante del objeto, y ambos, movilicen la acción, sus significados sociales y los sentidos personales atribuidos por los sujetos. Este objeto-motivo desde Radford (2011), nace de los intereses, emociones y necesidades de los y las estudiantes y permite establecer una relación con significados culturales que mediatizan (junto a los instrumentos, artefactos, signos, el lenguaje, etc.) la actividad en el plano de la mediación semiótica cultural.

La naturaleza sensorial concreta de la actividad sympractical (es decir, la práctica conjunta) no sólo es la fuente de la naturaleza concreta de reflexiones internas de la actividad, de la conciencia, sino también el origen de la naturaleza concreta de las necesidades, emociones y sentimientos. (Radford 2011. P.4)

En concordancia con todo lo anterior, la naturaleza de la teoría de la actividad admite ver la actividad como el conjunto de acciones objetivas, transformadoras y productivas, en la práctica del sujeto y; percibir la dinámica de sus elementos significa comprenderla como un sistema, un sistema que está permanente dándole sentido al conocimiento que va apropiando el sujeto.

En esta investigación, el objetivo de la actividad es analizar el proceso de aprendizaje del concepto de fracción en los y las estudiantes del grado cuarto de básica primaria (...), aquí la actividad cumple dos funciones, desde los fundamentos epistemológicos y desde lo metodológico para poder indagar cómo es el proceso de aprendizaje de los y las estudiantes. Aunque los niños pueden aprender de otras formas acerca de las fracciones y los racionales, el objetivo de la actividad (desde los planteamientos esbozados aquí) se focaliza de otro modo, que permite considerar el conocimiento en sus múltiples dimensiones, como producto de la actividad humana, donde cada concepto está encarnado en el proceso socio-histórico de su producción y trae implicaciones para una educación humanizadora que admite analizar las acciones de los estudiantes, en un nivel comprensivo, lo cual implica estudiar el origen, los motivos que

impulsan esas acciones, sus significados sociales y los sentidos personales atribuidos por los sujetos.

En suma, la actividad en esta investigación es una secuencia de acciones mediatizadas a través de las cuales los sujetos se relacionan con el otro y con lo otro para adquirir aprendizajes, en su afán de satisfacer una necesidad especial, dirigida por un objeto-motivo (en términos de Radford, 2011) que a su vez moviliza acciones. En otras palabras, pensamos el trabajo del maestro enfocado a la propuesta de actividades creadoras —o potencializadoras de sentidos—, desde acciones deseos, emociones, operaciones y tareas que estén impulsadas por un objeto-motivo (desde Radford, 2011) que sea importante para los estudiantes, el maestro y el conocimiento matemático. Para encontrar el objeto-motivo, se realizó un momento de exploración que permitió, con la ayuda de los padres de familia y algunos integrantes de nuestra comunidad, el reconocimiento y la canalización de los deseos (en términos de Davidov, 1988), las necesidades y proyectos de los y las estudiantes participantes en esta investigación.

Sobre las actividades orientadoras de enseñanza (AOE).

Las Actividades Orientadoras de Enseñanza (GEPAPe, 2010) son situaciones propiciadoras de desarrollo y aprendizaje que proponen pensar, crear y ejecutar los episodios en el aula de clase procurando interacciones que posibiliten aprender el conocimiento matemático socialmente construido, desde los elementos que constituyen la ***Teoría de la Actividad de Leontiev***.

En el sentido de GEPAPe (2010) las AOE implican un proceso generador de la apropiación de los conocimientos teóricos que explican la realidad en movimiento conforme sus personajes y relaciones, se van constituyendo en forma dialéctica en la relación entre lo ideal y lo real y como proceso de acción y reflexión. En esa vía, la actividad es orientadora, en el sentido que es

constituida en la interrelación profesor y estudiante y está relacionada con la reflexión del profesor que, durante todo el proceso, siente necesidad de reorganizar sus acciones por medio de la continua evaluación que realiza sobre la coincidencia o no entre los resultados logrados por sus acciones y los objetivos propuestos (GEPAPe 2010, p.101).

Toda AOE es una actividad para que el estudiante aprenda y para que el profesor enseñe de una manera dialéctica. El aprendizaje es asumido desde esta perspectiva, como un proceso donde interactúa el sujeto con el mundo físico y social, mediado por instrumentos y signos (entre ellos el lenguaje), y se procesa en su desarrollo cognitivo por medio del proceso de internalización (Vygotski 2002 retomado por GEPAPe, 2010, p.83). En ese movimiento de lo social a lo individual y viceversa es que se da la apropiación de las significaciones y conceptos.

La enseñanza por su parte, es una actividad constituida como una práctica pedagógica que permite la transformación de la realidad escolar por medio de la transformación de los sujetos, profesores y estudiantes (GEPAPe 2010, p.89). La enseñanza debe ocurrir de una forma sistemática, intencional y organizada, donde el profesor está aprendiendo constantemente de la realidad y a la vez desarrollando acciones que promuevan el aprendizaje de conocimientos teóricos por parte de sus estudiantes.

El rol del docente se complementa al considerarlo creador de sentido, su herramienta principal es la palabra y, también lo es, el mundo natural con sus actores y las relaciones que se tejen entre ellos. De esta forma, para el docente la actividad tiene un sentido que es desencadenador de un objeto-motivo. Así, desde las *AOE*, el papel del maestro se dirige a la búsqueda y creación de motivos, necesidades y deseos que orienten los encuentros en el salón de clase.

En concordancia con lo anterior, Moura (2001) llama AOE a la actividad que se estructura de modo que permita a los sujetos interrelacionarse, mediados por un contenido negociado de significados, con el objetivo de solucionar colectivamente una acción (p.156).

Con respecto a la estructura de AOE, la GEPAPe (2010), siguiendo los planteamientos de la teoría de la actividad de Leontiev, presenta una estructura que sintetiza sus componentes, en relación entre la actividad de enseñanza y la actividad de aprendizaje. Estos componentes son: el objetivo, el cual debe ser el enseñar por parte del docente y el aprender por parte del estudiante; los motivos, los cuales permiten que el maestro organice su enseñanza y que el estudiante se apropie de los contenidos teóricos; las acciones, sobre las cuales los profesores definen cómo trabajar los conocimientos teóricos y los estudiantes resuelven los problemas de aprendizaje y, por último, las operaciones, lo cual permite que el docente utilice recursos metodológicos que mediatizan la enseñanza y el aprendizaje de los y las estudiantes.

De esta manera, en esta investigación el objeto-motivo (en el sentido de Radford, 2011) lo vamos a identificar en un primer momento de exploración. Por su parte, la estructura de las AOE en este trabajo, contarán con los siguientes elementos: en primer lugar, con una **intencionalidad**, en términos del objetivo a desarrollar en ese proceso de aprendizaje del concepto de número racional; en segundo lugar, unas **acciones** que los estudiantes deben llevar a cabo (individualmente, discutiendo en pequeños grupos y debatiendo a nivel general en la clase). Estas acciones podrán ser representadas en consultas, tareas, observaciones, talleres, problemas, elaboración de afiches, mapas entre otras; en tercer lugar, **la necesidad** particular de cada actividad para el proceso que se esté desarrollando y, en cuarto lugar, como un elemento agregado, proponemos completar la estructura de la AOE con **-la finalidad**, la cual hace

referencia a la meta que queremos lograr. Estos cuatro aspectos deben ir hilados coherentemente con el objeto-motivo.

Momento de exploración: hacia el objeto-motivo

En este momento dedicado a la exploración se pretendió conocer más a nuestros estudiantes y padres de familia. Como compartimos en una comunidad particular, vimos la necesidad de reconocer lo que hacen extracurricularmente, cuáles son sus gustos, proyectos, necesidades, entre otras cosas que fueran importantes para tenerlas en cuenta en el proceso de enseñanza y el aprendizaje de la fracción. Para desarrollar esto, propusimos dos actividades. En la primera, tratamos de identificar una práctica social que fuera acorde con lo que la mayoría de los estudiantes realizan en su diario vivir, una práctica que tuviera que ver con lo que ellos comúnmente hacen, observan, sienten en sus casas, una práctica social motivante, que surja de la necesidad y que como dicen Miguel & Miorin (2005) produzca conocimiento y sea el puente que aproxime la dinámica de las relaciones y el conocimiento en el aula de clases. En la segunda, identificamos los gustos, deseos, sueños y proyectos de los estudiantes. Todo con el principal propósito de encontrar el objeto-motivo para desarrollar el movimiento conceptual de la fracción. La primera actividad titulada “lo *que hacemos en familia*” estuvo dirigida a los estudiantes de 4°B, sus padres o acudientes y a los docentes más cercanos (de la misma institución).

A los estudiantes les planteamos representar, en subgrupos, lo que hacen en familia en un día común (normal), mediante obras de teatro, dibujos e ideogramas. Aquí, nos preocupamos por observar las elaboraciones que corresponden a elementos de las relaciones de los estudiantes con sus prácticas sociales cotidianas, considerando el principio de que los alumnos interactúan y perciben el mundo de forma propia. Por ello, el objetivo fue identificar convergencias entre las prácticas sociales que realizan los estudiantes con sus respectivas familias.

Los padres de familia y docentes, por su parte, representaron en ideogramas la pregunta: ¿A qué se dedican las personas (sus niños, otros adultos y usted) de este municipio? Con el objeto de percibir las actividades más comunes que las personas de nuestro entorno realizan. La tabla 1 muestra en síntesis, lo que se planeó desarrollar con los y las estudiantes, los padres de familia y otros docentes (de otras áreas) de estos estudiantes.

Tabla 1. Actividad 1 del momento de exploración: Lo que hacemos en familia.

LO QUE HACEMOS EN FAMILIA.		
Estudiantes	Padres de familia	Profesores
<p>Intencionalidad:</p> <ul style="list-style-type: none"> -Conocer lo que los niños realizan con sus familias cuando no están en la escuela. -Percibir, qué hacen habitualmente los niños (as) en familia con sus padres. -Conocer sobre la historia de la vida de los sujetos participantes en la investigación. 	<p>Intencionalidad:</p> <ul style="list-style-type: none"> -Conocer las actividades a las que se dedican los padres de familia. -Percibir, de forma personal, qué hacen habitualmente los acudientes, en familia con los niños. -Conocer sobre historia de la vida de los sujetos participantes en la investigación. 	<p>Intencionalidad:</p> <ul style="list-style-type: none"> -Percibir las actividades más comunes que las personas de nuestro entorno realizan. -Conocer sobre historia de la vida de los sujetos participantes en la investigación.
<p>Acción:</p> <ul style="list-style-type: none"> -En subgrupos representen a su familia en un día normal, mediante una obra de Teatro. -En un ideograma plasmar lo que hacemos en familia. -Compartir con toda la clase 	<p>Acción:</p> <ul style="list-style-type: none"> -En un ideograma expresar: A qué se dedican las personas de este municipio? (A qué me dedico yo) -Que hacemos en familia con los niños (as). -Compartir algunos ideogramas. 	<p>Acción:</p> <ul style="list-style-type: none"> -En un ideograma expresar: Qué actividades realizan las personas de este municipio. -Compartir algunos ideogramas.

algunos ideogramas.		
<p>Necesidad:</p> <p>-Conocer las prácticas sociales y demás aspectos que han realizado históricamente y que realizan los niños (as) en familia.</p>	<p>Necesidad:</p> <p>-Conocer las prácticas y demás aspectos que han realizado históricamente y que realizan los acudientes y los niños (as) en familia.</p>	<p>Necesidad:</p> <p>-Conocer a que se dedican las personas (acudientes) de nuestra institución.</p>
<p>Finalidad:</p> <p>- Encontrar el objeto-motivo de las actividades orientadoras de enseñanza.</p>	<p>Finalidad:</p> <p>-Establecer la(s) práctica(s) social(es) con la(s) que los participantes de esta investigación se identifican y le encuentran sentido y significado.</p>	<p>Finalidad:</p> <p>- Establecer la(s) práctica(s) social(es) con la(s) que los participantes de esta investigación se identifican y le encuentran sentido y significado.</p>

A continuación, se muestran e ideograma realizado por María Paula.

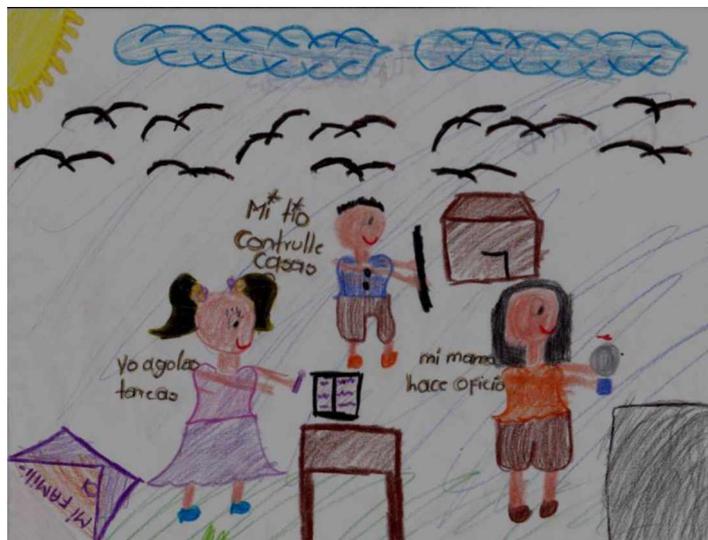


Ilustración 1. María Paula, ideograma: lo que hacemos en familia, mayo 2012

Se presentan también, los ideogramas realizados por una acudiente y una profesora.



Ilustración 2. Acudiente, ideograma: lo que hacemos en familia, mayo de 2012

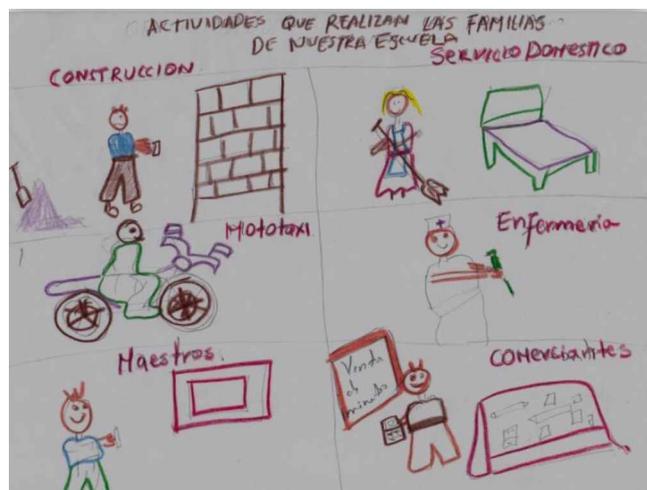


Ilustración 3. Profesora, ideograma: lo que hacemos en familia, mayo 2012

Tanto en el ideograma como en las socializaciones, los estudiantes muestran que en sus núcleos familiares tienen por lo menos, un familiar, de sexo masculino, el cual se dedica al trabajo concerniente a la albañilería u oficios relacionados con la construcción de viviendas y otras obras civiles. Además, los estudiantes dan cuenta que en los momentos de reunión familiar, no faltan conversaciones relacionadas con el trabajo de estas personas. De hecho, los estudiantes mostraron que se encuentran familiarizados con palabras como: revocar, enchapar, cementar, embaldosar, entechar, y otras más relacionadas con herramientas como: el palustre, la plomada, el cincel, la pala, el adobe, entre otras, que permite ir tejiendo la constitución de una conciencia individual y social en torno a la construcciones u obras civiles.

Así mismo, en las socializaciones de los padres y docentes se pudo evidenciar como el trabajo al que se dedican la mayoría de las personas está relacionado con las construcciones de obras civiles. Esto obedece a que nuestro municipio está en crecimiento y por ende este sector ofrece la

mayor fuente de empleo. Para no irnos tan lejos, en nuestra propia escuela (sede Caracolí) estamos a la víspera de un proyecto para reconstruirla en unas partes y hacer remodelaciones en otras. Tal vez en esa línea, se explique que los estudiantes estén preguntando constantemente ¿Qué van hacer aquí, profe? ¿Cómo y quién y cuándo la construirán? Etc. La siguiente ilustración muestra parte de la escuela que van a reconstruir.



Ilustración 4. Institución Educativa Divino Niño - sede Caracolí. Espacio a reconstruir. Mayo 2012

Según los mismos padres de familia, ellos han aprendido empíricamente a trabajar en la construcción, y la experiencia aquí, es importante. Pues, si no tiene o posee poca experiencia será ayudante y a medida que vaya aprendiendo a manejar la cantidad de material que se necesita para construir algo y hacer las cosas pulidas y bonitas por ejemplo, podrá ser considerado maestro u oficial de construcción y por consiguiente recibir una mejor remuneración económica.

Lo que ocurre con estos padres de familia en nuestro ambiente, es un claro ejemplo de interacción con los instrumentos (materiales y humanos) y de un proceso de aprendizaje con el otro y lo otro de un conocimiento concreto, en este caso, relacionado con la forma de ganarse la vida: el trabajo. En esa dirección, se concuerda con la GEPAPe, (2010), cuando expresan que el trabajo es la actividad humana por excelencia pues, el hombre ha tejido relaciones que le permiten desde

lo individual y lo colectivo tornarse humano. Desde el trabajo que implica la lucha por sobrevivir, hasta el trabajo que involucra diversas necesidades que el hombre ha ido creando, se abren posibilidades para que entre a plenitud, la actividad material y, con ella, la constitución de una conciencia individual y social, que necesita apropiarse del conocimiento construido históricamente.

Por lo anterior, en las socializaciones de los estudiantes de 4°B, de sus padres y sus maestros más cercanos, se destaca que históricamente los sujetos de nuestro municipio heredan, como forma de ganarse la vida, el desempeñarse en oficios que tienen que ver con las construcciones de obras civiles. Por lo tanto, podemos decir a su vez, que el trabajo con estas personas nos proporcionó el reconocimiento de que la familia en nuestra cultura es portadora de este legado producto de un pasado, que posibilita construir el presente e incidir en el futuro.

La segunda actividad de este momento de exploración se tituló ***“mis gustos y necesidades”***, y fue dirigida a los estudiantes de 4° B con el objetivo de Identificar los gustos, deseos, sueños y proyectos de esos sujetos que son el corazón de esta investigación. Aquí, se les planteó a los niños y niñas, plasmar en una cartelera lo que les gustaría ser y hacer en la vida y lo que necesitaría para lograrlo. La tabla 2 muestra, en síntesis, lo que se desarrolló.

Tabla 2. Actividad 2 del momento de exploración: Mis gustos y necesidades

MIS GUSTOS Y NECESIDADES			
Intencionalidad	Acción	Necesidad	Finalidad
-Conocer algunos aspectos sobre los gustos, deseos, sueños y proyectos de los sujetos participantes en la	- En una cartelera representar y/o escribir, sus sueños, lo que les gustaría ser y hacer en la vida, lo que necesitan	-Percibir cuales son los gustos, deseos y sueños de los sujetos y cómo los pueden	-Constituir desde proyectos de vida de los niños y niñas, un camino para comprender lo que se quiere hacer.

investigación.

-Canalizar las necesidades, sentimientos y emociones en un objeto-motivo que nos aproxime al conocimiento matemático referido a la fracción.

para lograrlo y cómo lo pueden lograr.

- Compartir con toda la clase los sueños a través de las carteleras.

interpretar y plasmar significativamente por medio de una representación gráfica.

-Utilizar los gustos, deseos, sueños, proyectos, necesidades de los niños y niñas para el desarrollo de las actividades. -Encontrar el objeto-motivo de las actividades orientadoras de enseñanza.

A continuación, se presenta la cartelera de Catalina.



Ilustración 5. Catalina. "Mis gustos y necesidades" mayo 2012

Después de escuchar las exposiciones de los estudiantes se puede decir que, al igual que todo adulto, los niños y niñas, tienen la característica de ser sujetos inacabados; portadores de un pasado, un presente y ante todo, de un futuro que sueñan y les posibilita el construir nuevos caminos. En ese sentido, los gustos de los niños y niñas son diferentes: ser doctor(a), veterinario (a) policía, futbolista, profesor(a), cantante, ingeniero, arquitecta, acordeonero, enfermera, es lo

que les gustaría ser y, como se ve hay un sentido de influencia por “superar” a sus padres. Pues, ninguno dijo que quería ser albañil o maestro de construcción, sino ingeniero (a) y arquitecto (a) para el caso de algunos, como Catalina.

Ahora, los y las estudiantes, al complementar su respuesta acerca de cómo y qué necesitan para alcanzar este sueño, todos coincidieron en decir que “estudiando”. Pues, a todos les parece de suma importancia estudiar, ir a la escuela, porque además de aprender comparten con sus compañeritos.

A continuación, destacamos dos representaciones: la de Steven y la de Dayana.

Dayana, en la socialización con el grupo, explicó que sueña con ser una veterinaria porque le gusta cuidar animales. En su casa tiene un gatico y lo



Ilustración 6. Dayana. Cartelera, Mis gustos y necesidades mayo 2012

quiere mucho. Además, mencionó que necesita estudiar bastante, ser una buena estudiante y obtener buenas notas para pasar a una universidad.

A partir de esta actividad, se puede decir que a diferencia de los animales, somos capaces de mirarnos en un futuro, de ubicar nuestra vida y la de otros en un porvenir y de igual manera, tomamos elementos del presente y del pasado para visualizarnos en un después, tal como lo plantea Davidov (1988):

[...] La previsión es precisamente tal visión de la posibilidad. Las acciones reales del sujeto que posee psiquis realizan lo que puede ser creado en la realidad misma. El sujeto organiza sus acciones en dependencia de lo que pueda ocurrir en el futuro ¡en el futuro que aún no existe! Aquí la finalidad como imagen de futuro, como imagen de lo que debe ser, determina el presente, define la acción real y el estado del sujeto. (Davidov 1988, p. 33)

Steven por su parte, en la socialización dijo que sueña con ser un gran acordeonero y destacó que para poder lograrlo debe practicar mucho y ser un buen estudiante en la escuela porque quiere saber muchas cosas para “no dejarse estafar.”

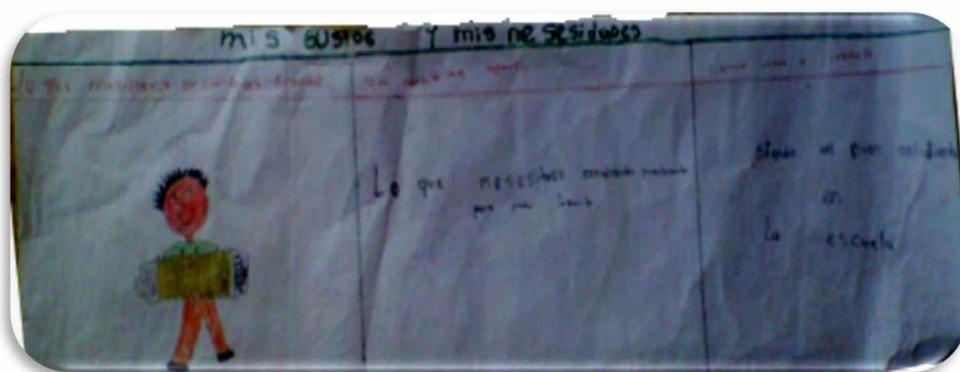


Ilustración 7. Steven. Cartelera, "Mis gustos y necesidades" mayo 2012

Steven, dentro de su explicación, también mencionó que ya sabe tocar el acordeón y que su papá lo ha llevado a presentarse en muchos festivales vallenatos; inclusive este año participó en Valledupar. En esos viajes, dijo Steven, que ha conocido muchas cosas, entre ellas otras escuelas que son muy bonitas:

Profe en Valledupar hay escuelas más bonitas que esta ¿Cuándo nos van arreglar la escuela?
(Steven, 26 de mayo 2012 "Mis gustos y necesidades")

Como docente, esta pregunta se la trasladamos al coordinador y él respondió:

Niños y niñas, la semana pasada tuvimos una visita por parte de funcionarios de la Secretaría de Educación Departamental y nos dijeron que en ese espacio ya no van a construir salones, como se tenía previsto, sino una placa polideportiva, una cancha. Debido a que no contamos con

espacios destinados para actividades lúdicas y deportivas para ustedes los estudiantes. (Coord. Rafael Esquivel, 26 de mayo 2012)

Esta pregunta y respuesta del coordinador suscitó mucha alegría entre los (as) demás niños (as) y al mismo tiempo otras dudas, entre ellas: “¿Cómo, Cuándo y quién la va a hacer?”. A lo que el coordinador dijo que no tenía esa información, pero que cuando le llegue la compartirá con todos.

En esta instancia, se nos ocurrió que, aunque no nos hayan tenido en cuenta para decidir qué hacer en nuestro pequeño pero acogedor espacio escolar, vamos a idealizar e imaginar cómo queremos que sea nuestra escuela. Pues, mientras deciden bien qué van a hacer a ciencia cierta, de pronto alcancemos a dar nuestra opinión al respecto.

Así, teniendo en cuenta una práctica social alrededor de las construcciones civiles en las que los estudiantes y sus familias están inmersos; la necesidad compartida de los niños y niñas de estudiar para poder lograr lo que les gustaría ser en la vida y; una escuela que está a punto de reconstruirse físicamente, aunque aún no se sabe cómo, pero que queremos imaginarla. Proponemos aprender el movimiento conceptual de la fracción con la motivación de ir construyendo *la maqueta de la escuela que soñamos*.

Las etapas de este camino.

Una vez obtenido el objeto-motivo -construir la maqueta de la escuela que soñamos, se presentarán, a continuación, cuatro etapas que marcan la dirección de este camino; las cuales, son las AOE para aprender en el conocimiento matemático referido al movimiento conceptual de la fracción, desde Autores como Alexandrov (1976), Caraya (1984), Davidov (1982) y Lima & Moisés (1998).

Como se mencionó en el capítulo *-“preparando el terreno”*, Alexandrov et al. (1976) sustentan que las fracciones implican un proceso que lleva consigo parte de la historia de la matemática, por lo tanto, debe ser concebido de una forma más completa, como un proceso de abstracción que proviene de la relación con lo concreto, con las necesidades y actividades de la vida diaria.

Para aprender el movimiento conceptual de la fracción, Davidov (1982) y Lima & Moisés (1998) esbozan que el niño o la niña deben relacionarse primero, con la noción matemática de grandeza y luego con la naturaleza esencial del número, y de la geometría. En segunda instancia, siguiendo el proceso lógico-histórico de una producción humana, para autores como Caraya (1984) y Aleksandrov et al. (1976) los y las estudiantes, en la construcción de un aprendizaje del concepto de fracción, deben sentir la necesidad de estudiar la relación dada entre aritmética/geométrica que es lo que finalmente permite expresar las mediciones que generan la necesidad, fraccionar la unidad de medida para poder expresar la cantidad de magnitud en partes de la unidad.

En ese sentido, las cuatro etapas de este camino, que siguen a continuación, contienen las conexiones del movimiento conceptual de la fracción y las AOE que se pensaron para buscar que los estudiantes aprendan dicho concepto.

Primera etapa.

Esta primera etapa reúne tres AOE que colocan en cuestión los límites del número natural desde su propia naturaleza, para identificar como los números están relacionados con objetos concretos y abstractos que provienen de las necesidades de la vida diaria y de la familiarización con la noción de la grandeza (Entendiéndola desde los planteamientos de Lima y Moisés (1998) como la variación de la cantidad de una cualidad común a varios cuerpos). Para ello, los estudiantes implementaron acciones para distinguir algunas relaciones generales y sólo después de eso es que

ellos trataron de encontrar varias características particulares de la relación. En otras palabras, las AOE buscaron reproducir el concepto de número mediante el revelamiento y desencadenamiento de situaciones y condiciones necesarias para el surgimiento de la esencia del número natural. Lo cual, es lo primero que debe hacer el aprendiz de la fracción. A continuación, presentamos las tres AOE que conforma este primer momento.

La primera actividad de este primer momento, la titulamos “Conozcamos nuestra institución”. En ella, propusimos hacer un paseo-carrusel que permitiera conocer las tres sedes que conforman nuestra institución y al mismo tiempo familiarizarnos con la noción de grandeza y su límite al reconocer variaciones de cualidades que pueden ser contadas. Los elementos que la conforman están relacionados en la siguiente tabla y taller:

Tabla 3. Actividad. Conozcamos nuestra institución

Conozcamos nuestra institución			
Intencionalidad	Acción	Necesidad	Finalidad
-Identificar la variación de intensidad de cualidades comunes al observar objetos en distintas situaciones.	-Realizar un paseo-carrusel (por las tres sedes de la institución) conformado por siete estaciones, en ellas, se observarán algunas escenas y se solucionarán preguntas en equipos de trabajo, para comparar la intensidad de las cualidades.	-Identificar la insuficiencia de la capacidad de valoración visual de las comparaciones; y crear una solución mediante la utilización de la unidad de medida de la misma especie.	-Que los estudiantes practiquen la concepción de grandeza.

El aprendizaje del concepto de fracción, desde la perspectiva histórico-cultural: un camino..



INSTITUCIÓN EDUCATIVA DIVINO NIÑO - SEDE CARACOLÍ
PROFESOR: JUAN LÓPEZ GUERRA
Conozcamos nuestra institución



Vamos de paseo por las tres sedes que conforman nuestra institución. Observa las escenas que mostrará el docente y luego resuelve los interrogantes, desde los equipos de trabajo.

Primera escena: Salimos a la puerta de la escuela y observamos una moto y una bicicleta ¿En qué se llegará primero a la iglesia Divino Niño? ¿Por qué? ¿Esta cualidad varía? ¿Se puede cuantificar esta cualidad?

Segunda escena: En el camino hacia San José. Comparemos el parque de diversiones y la cancha de fútbol ¿Qué se hace en éstos lugares? ¿Quiénes frecuentan éstos lugares? ¿La cantidad de personas varía según éstos lugares? ¿Cómo se puede saber y por qué?

Tercera escena: En la sede San José. Observemos los diferentes tableros y recuadros, ¿Para qué sirven? ¿En cuál(es) se puede(n) escribir o fijar mayor cantidad de letras o números del mismo tamaño? ¿Por qué?

Cuarta escena: En el camino hacia la sede divino niño, observamos la iglesia y respondemos: ¿Qué es más pequeña la iglesia o una casa, por qué? ¿En cuál sitio hace más calor, por qué?

Quinta escena: En la tienda escolar de la sede divino niño, mientras disfrutamos de un refresco, le pedimos a la señora encargada que nos muestre una ponchera con agua, una gaseosa y una maltiz. ¿Cuál es la cualidad común a todas las sustancias contenidas en los empaques? ¿En qué recipiente hay más líquido, por qué? ¿Se puede decir que entre más alto el recipiente, le cabe más líquido? (explica)

Sexta escena: Comparemos ahora pupitres ¿cómo son? ¿Para qué sirven? ¿Una persona gorda se puede sentar en cualquiera? ¿Por qué? ¿Qué cualidad se debe tener en cuenta para que una persona se siente? ¿Esa cualidad varía? ¿Se puede cuantificar esa cualidad?

Séptima escena: De regreso a nuestra sede. ¿Cuál sede es mayor?

Con el coordinador indagemos sobre: ¿En qué sede se alberga mayor cantidad de estudiantes? ¿Qué actividades desarrollamos? Y otros aspectos históricos relevantes de nuestra institución.

Comparte tus respuestas con toda la clase.

La segunda actividad la titulamos “De nuestra escuela hacia el pasado de los números” es un momento que permite describir nuestra escuela y a partir de allí, emprender el viaje por el proceso histórico de contar y de cuantificar. Sus elementos constitutivos son:

Tabla 4. Actividad. De nuestra escuela hacia el pasado de los números

De nuestra escuela hacia el pasado de los números			
Intencionalidad	Acción	Necesidad	Finalidad
<p>-Describir y representar cómo es nuestra escuela.</p> <p>-Destacar algunos aspectos importantes sobre la historia de la escolarización desde el origen de la enumeración en la vida de los seres humanos. Para luego identificar el conjunto que cuenta y el conjunto contado.</p>	<p>- Como parte de esta actividad los estudiantes deberán realizar un taller que posee dos momentos: en el primero dibujarán y describirán la escuela y a partir de allí; en el segundo, realizarán un viaje imaginario al pasado donde identificarán como era el proceso de escolarización, prestando especial atención al origen y proceso de contar. Ver ilustración 8. (Para ayudar a la reflexión veremos un documental?)</p> <p>- Compartir con toda la clase las reflexiones.</p>	<p>-Observar a plenitud nuestra escuela.</p> <p>-Conocer algunos aspectos importantes de la historia de los seres humanos y de su proceso de escolarización.</p> <p>-Conocer sobre las formas primitivas de contar y de percibir procesos de correspondencia biunívoca (relación uno a uno)</p>	<p>- Permitir que los estudiantes reflexionen sobre el asunto histórico y social de la escolarización especialmente el del origen y proceso de contar.</p>

⁷ "Erase una vez el hombre. El Hombre De Neanderthal Ep2-2, 2-3". Consultado en <http://www.youtube.com/watch?v=TVA1V3Dfqls>, el 15 de mayo de 2012.



Ilustración 8. Catalina. ¿Qué y con qué contaban los seres humanos?, julio de 2012

El aprendizaje del concepto de fracción, desde la perspectiva histórico-cultural: un camino.



INSTITUCION EDUCATIVA DIVINO NINO - SEDE CARACOLI
PROFESOR: JUAN LÓPEZ GUERRA
De nuestra escuela hacia el pasado de los números.



Reflexionemos con el equipo de trabajo, sobre las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo es el lugar donde estudiamos? (te puedes ayudar con dibujos o fotos)
2. Hagamos un viaje al pasado e imaginemos como serían las escuelas si no existiera el cemento con que se realiza el adobe (ladrillo), las láminas para hacer el techo, los Instrumentos para sacar o cortar madera, ni ninguno de los avances tecnológicos actuales como la electricidad, el computador, el televisor etc. ¿dónde y cómo estudiaban los seres humanos de ese tiempo? (dibuja)
3. ¿A qué se dedicaban las personas de ese tiempo? Para ayudarte un poco viendo el documental "Erase una vez el hombre El Hombre De Neanderthal Epí-í, 2-3"
4. ¿Comovivían, qué cosas fueron cambiando, qué tenían que contar y cómo contaban las personas en la época De Neanderthal?
5. Dividamos una hoja de papel y mediante dibujos representemos ¿Qué contaban los seres humanos de ese tiempo? Al otro lado de la hoja, dibuja ¿con qué contaban los seres humanos de ese tiempo?

Qué contaban los seres humanos (objetos contados)	Con qué contaban los seres humanos (objetos que cuentan)

Comparte tus trabajos con toda la clase

La tercera actividad de este primer momento la titulamos “El pasado de los números naturales”, es una continuación de la actividad anterior y nace por la necesidad de reconocer algunas abstracciones alrededor de la constitución de un sistema de numeración. Sus elementos básicos son:

Tabla 5. Actividad. El pasado de los números naturales

El pasado de los números naturales			
Intencionalidad	Acción	Necesidad	Finalidad
<p>-Identificar los objetos de la naturaleza que están dados en unidades naturales (fácil de contar) y los que no.</p> <p>-Determinar por qué se originó un sistema de numeración.</p>	<p>-Responder unas preguntas que orientarán a los estudiantes hacia el reconocimiento de la naturaleza que está dada en unidades y, la naturaleza que está dada sin unidades naturales. Además, cómo se llegó a generar un sistema de numeración a partir de las agrupaciones que hacían los seres humanos al contar.</p> <p>- Compartir con toda la clase las respuestas.</p>	<p>-Conocer las abstracciones matemáticas por las que pasaron los seres humanos para llegar al concepto de número natural.</p>	<p>-Que los estudiantes clasifiquen los materiales de la escuela en los que se pueden contar y los que no se pueden contar. y</p> <p>- Comprendan de dónde y por qué surge un sistema de numeración.</p>

El aprendizaje del concepto de fracción, desde la perspectiva histórico-cultural: un camino.



INSTITUCIÓN EDUCATIVA DIVINO NIÑO - SEDE CARACOLÍ
PROFESOR: JUAN LÓPEZ GUERRA
El pasado de los números naturales



Reflexionemos desde los equipos de trabajo, sobre las siguientes preguntas:

1. Toma la hoja de papel donde dibujaron lo contado e identifica objetos que están dados en unidades de la naturaleza, es decir, puedan ser fácil de identificar. Dibuja otros objetos que son fáciles de contar en la naturaleza.

2. Los seres humanos primitivos, ¿qué utilizarían para contar las jirafas de la siguiente imagen?



3. ¿Qué sucede si las personas primitivas intentan contar las ovejas de la siguiente imagen con tan solo algunas piedras? ¿cómo lo harían? (explica)



4. ¿Todo lo que existía en la naturaleza lo podían contar los seres primitivos? ¿por qué? (menciona ejemplos)

Comparte con toda la clase tus elaboraciones.

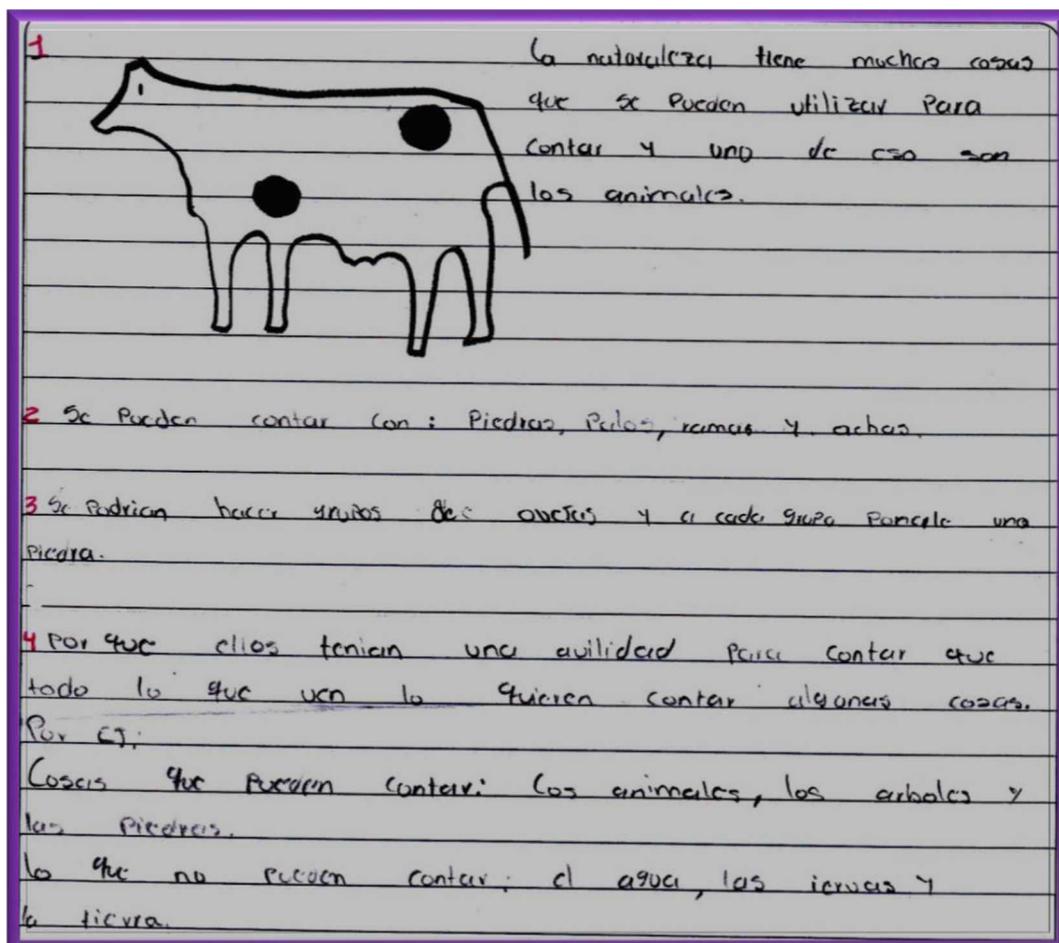


Ilustración 9. Catalina, Actividad cómo contar grandes cantidades, julio de 2012

Segunda etapa.

Para Alexandrov (1976) la geometría, al igual que los números naturales, proviene de la actividad práctica de los seres humanos en los tiempos prehistóricos, específicamente su origen se debió a que los seres humanos para satisfacer sus necesidades se dedicaban a manufacturar objetos cada vez más regulares en su forma. “Los seres humanos primero dieron forma a sus materiales y solo más tarde reconocieron la forma como algo que se imprime a la materia y que puede, por

consiguiente, ser considerada en si misma haciendo abstracción de aquella” (Alexandrov et al. 1976, p.38).

A los griegos son atribuidos los primeros procesos de abstracción geométrica sobre todo al tratar de cuantificar y/o medir la naturaleza que viene sin unidades como la tierra, hacer esta cuantificación de una de las porciones de tierra, se vuelve preponderante porque el rio Nilo inundaba sus espacios y borraba los limites o fronteras y necesitaban darle solución a este problema. Es por ello que el rectángulo y otras formas por ejemplo, nacen para hacer más visibles las porciones de tierra.

De esta manera, en el segundo momento evidenciaremos dos AOE que permiten reconocer que la geometría surge por la necesidad de hacer objetos y formas para resolver problemas de la vida cotidiana relacionados con la cuantificación o la medición de los elementos de la naturaleza que vienen sin unidades como el agua y la tierra. En otras palabras, dejan percibir el uso de unos elementos básicos de geometría que subyacen con la creación de las unidades “artificiales”.

La primera actividad de este momento la titulamos “¿De qué está hecha nuestra escuela? ¿La queremos así?”. Sus elementos son:

Tabla 6. Actividad. ¿De qué está hecha nuestra escuela? ¿La queremos así?

¿De qué está hecha nuestra escuela? ¿La queremos así?			
Intencionalidad	Acción	Necesidad	Finalidad
<p>-Destacar que nuestra escuela es bonita porque no solo se enseñan conocimientos, sino a ser personas más humanas y mejores ciudadanos, para luego generar una discusión en torno al uso de valores y sentido de pertenencia, como aspectos importantes de la vida de los seres humanos.</p> <p>-identificar unidades artificiales que se utilizaron para construir nuestra escuela.</p>	<p>- Escuchar la canción "Mi escuela" ⁸ de Manuel Bonilla y Cantarla</p> <p>-Intercambiar opiniones con el grupo acerca del sentido de la canción.</p> <p>-En un segundo momento: describir los materiales con que está hecha nuestra escuela</p> <p>-Identificar unidades artificiales.</p>	<p>-Hacer una elaboración profunda sobre la importancia del uso de los valores y el sentido de pertenencia para con nuestra escuela.</p> <p>-observar algunos elementos geométricos que sirven para identificar unidades artificiales.</p>	<p>-Que cada estudiante fortalezca los vínculos de sentido de pertenencia hacia nuestra escuela.</p> <p>-Que los estudiantes distingan cuáles elementos vienen dados en unidades naturales y cuáles no y, cómo los seres humanos, desde la geometría, hemos construido unidades artificiales para poder contar los elementos de la naturaleza que vienen dados sin unidades.</p>

⁸ Canción: "Mi escuela" de Manuel Bonilla. Edita: iglesia adventista. Consultado el 15 de abril de 2012 en: <http://www.youtube.com/watch?v=pXL-E8BbzMw&feature=related>

El aprendizaje del concepto de fracción, desde la perspectiva histórico-cultural: un camino..



INSTITUCIÓN EDUCATIVA DIVINO NIÑO - SEDE CARACOLÍ
PROFESOR: JUAN LÓPEZ GUERRA

¿De qué está hecha nuestra escuela? ¿La queremos así?



1. Escuchemos la canción: “Mi escuela”⁹ de Manuel Bonilla. Luego, la Cantamos e Intercambiamos opiniones con el grupo acerca del sentido de la canción.

Comparte tus reflexiones con toda la clase.

2. Observemos detenidamente nuestra escuela y luego resolvamos, individualmente, las siguientes preguntas. (Puedes ayudarte con dibujos)
 - a. ¿Cuáles son los materiales que se usaron para construir nuestra escuela? (dibuja) ¿Se pueden contar esos materiales? ¿Cuánto de cada uno crees que usaron?
 - b. Pensemos y resolvamos: ¿Cuál es el líquido que más usamos en la escuela? ¿Qué sabes acerca de ese líquido (de dónde viene, cómo es, para qué se utiliza)? ¿Qué objetos o cuerpos geométricos han creado los seres humanos para medir el agua? ¿Estos objetos son unidades artificiales, por qué?

Comparte tus elaboraciones con toda la clase.

> Tarea en casa

Consulta a tus padres o familiares acerca de cuánto de cada elemento se necesita para el proceso de elaboración de materiales como el adobe o ladrillo.

Comparte tus elaboraciones con toda la clase

⁹ Canción: "Mi escuela" de Manuel Bonilla. Edita: iglesia adventista. Consultado el 15 de abril de 2012 en: <http://www.youtube.com/watch?v=pXL-E8BbzMw&feature=related>

Mi escuela.

Ya aprendí a leer y a escribir

Ya aprendí a leer y a escribir

Ya sé sumar alegría y placer

Ya sé sumar alegría y placer

Se disminuir tristezas y multiplicar la paz

Se disminuir tristeza y multiplicar la paz

Pues lo más importante que yo aprendí

Pues lo más importante que yo aprendí

Fue dividir el amor

Fue dividir el amor

En la escuela hay algo más

Mis profesores me enseñan a bien

Que solamente leer y escribir

Abren mi mente para el saber

Pues siempre existen personas

Y algunas veces me corrigen también

Que se interesan por mí

Porque quieren mí bien, por mí bien

Mis profesores me enseñan a bien

Yo ya entendí ya aprendí algo más

Abren mi mente para el saber

Que hay que brindar amor y protección

Y algunas veces me corrigen también

Y cotejar mi vida guiándome de Jesús

Porque quieren mí bien, por mí bien

Para qué para siempre, andar muy seguro

Bajo su dirección, Bajo su dirección, Bajo su dirección

Manuel Bonilla

Ilustración 10. Transcripción canción "mi escuela"

Como segunda actividad de este segundo momento propusimos “Mi escuela y su ubicación geográfica”. En ella, planteamos interactuar con el software Google Earth y resolver un taller que permite comprender como se da el proceso de la creación de algunas unidades artificiales por parte de los seres humanos. Los elementos de esta actividad son:

Tabla 7. Actividad. Mi escuela y su ubicación geográfica

Mi escuela y su ubicación geográfica			
Intencionalidad	Acción	Necesidad	Finalidad
<p>-Reconocer la ubicación geográfica de la escuela.</p> <p>-Reconocer que la tierra no está organizada en unidades naturales, por lo tanto, necesitamos crear una unidad artificial para que pueda ser medida.</p>	<p>- Explorar, en la sala de sistemas, el Google Earth</p> <p>-Mirar la posición geográfica de nuestra escuela en el Google Earth.</p> <p>-Resolver un taller y compartir sus experiencias.</p>	<p>-Identificar la ubicación geográfica de nuestra escuela.</p> <p>-Crear una unidad artificial para organizar la tierra en unidades y luego cuantificarla.</p>	<p>-Que los estudiantes usen herramientas tecnológicas (Google Earth) para ubicar geográficamente un sitio en particular.</p> <p>-Que los estudiantes reconozcan las unidades artificiales para cuantificar el agua y la tierra</p> <p>-Que los estudiantes reconozcan que la geometría surge por la necesidad de hacer objetos y formas para resolver problemas de la vida cotidiana relacionados con la medición de la tierra</p>

El aprendizaje del concepto de fracción, desde la perspectiva histórico-cultural: un camino..

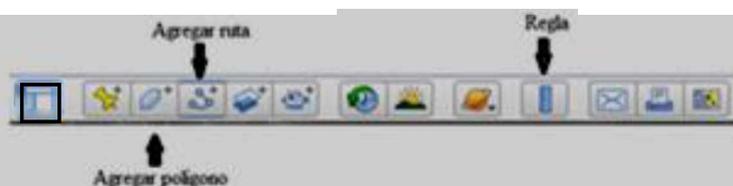


INSTITUCIÓN EDUCATIVA DIVINO NIÑO - SEDE CARACOLÍ
PROFESOR: JUAN LÓPEZ GUERRA
Mi escuela y su ubicación geográfica



En la sala de cómputo. Interactuemos con la herramienta tecnológica "Google Earth" y sigamos las siguientes instrucciones.

1. Explora, busca y mira sitios de todo el planeta. Usa los controles de navegación y el mouse para mirar partes del planeta tierra. (Escucha las indicaciones del profesor para hacerlo).
2. Interactúa con algunos botones de la barra de herramientas. "agregar polígono", "agregar ruta", "regla". (los que se muestran en la siguiente ilustración)



3. Aprendamos a buscar lugares. para ello escribamos, en el cuadro de dialogo del panel buscar, las palabras *Caucasia, Antioquia, Colombia*. Luego haciendo doble clic, consigue una vista donde alcances a observar todo el municipio. Reconoce algunos sitios conocidos como el puente "Carlos Ileras Restrepo", el aeropuerto, la carretera troncal, el rio Cauca y la posible ubicación de nuestra escuela.
4. Marquemos lugares. Para esto debemos hacer clic en el botón de marcas de posición en la barra de herramientas.  y arrastrarlo hasta el sitio donde consideres que está ubicada nuestra escuela. Luego, le damos el nombre de: I.E. Divino Niño - Sede Caracolí y, contestamos las siguientes preguntas:
 - a. ¿Los seres humanos como hemos dividido o repartido la tierra?
 - b. ¿Cómo se cuenta una cantidad de tierra?
 - c. Si a una persona pierde o se le olvida su porción del terreno (por inundación por ejemplo) ¿Qué haríamos para saber cuál era su porción de tierra
 - d. ¿Qué forma tiene el lote donde está construida nuestra escuela? ¿ésta forma tiene un ancho y un largo?
 - e. ¿Qué figura geométrica usaron para dividir el lote donde está construida la escuela?

Comparte tus respuestas con toda la clase

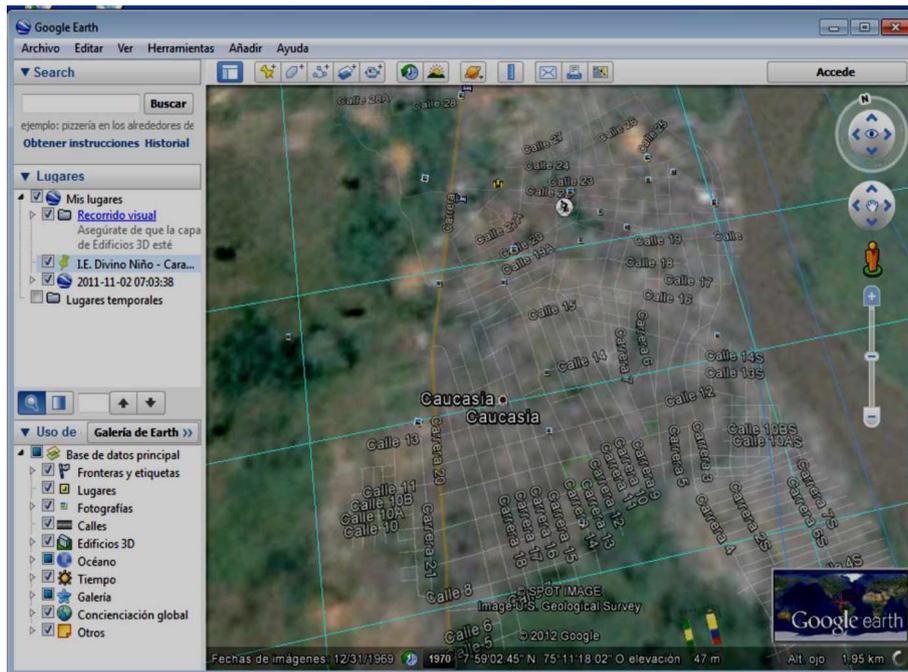


Ilustración 11. Software libre Google earth, Cauca (Antioquia - Colombia)

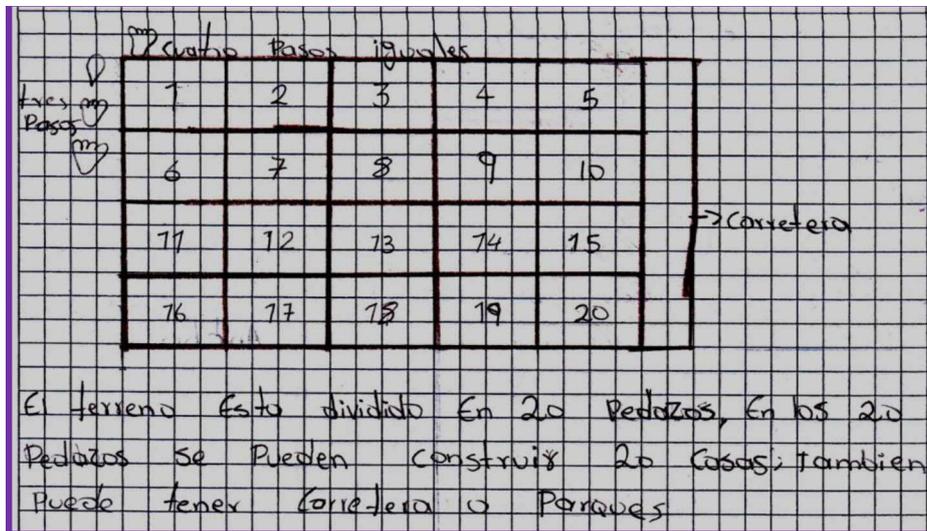


Ilustración 12. ¿Cómo cuantificar la tierra? Angie, Agosto de 2012

Tercera etapa

Hasta este momento, hemos considerado la aritmética y la geometría por separado. La interrelación entre ellas, según Caraya (1984) y Alexandrov (1976), entre otros, son las raíces donde han crecido las matemáticas. Desde el mismo momento en que nacen (la aritmética y la geometría), su influencia se hace sentir en procesos de medición. Para medir la longitud de un objeto, dice Alexandrov et al. (1976), se le aplica a este una cierta unidad de longitud y se calcula cuantas veces es posible repetir esa operación; el primer paso (la aplicación) es de carácter geométrico y el segundo paso (el cálculo) es de tipo aritmético.

Para Lima & Moisés (1998) los seres humanos primitivos realizaban mediciones con partes de su cuerpo como las manos, los brazos, los pies etc. Pero en este proceso, fueron apareciendo problemas cada vez más complejos, que la humanidad fue superando paulatinamente. Primero fue el problema de la búsqueda de una unidad artificial (patrón); luego, cómo medir cantidades menores que la unidad de medida; y a su vez cómo representar estas cantidades. Problemas fundamentales, porque producen la necesidad de la creación de la fracción.

Caraya (1984) expresa que medir y contar son las operaciones que más se realizan en la vida diaria. Pues, cualquiera que sea la profesión existe la necesidad de medir. La medición consiste en comparar dos magnitudes de la misma especie. Lo que en palabras de Lima & Moisés (1998) es la acción por la cual el ser humano, utilizando unidades artificiales, hace el conteo de cantidades no organizadas en unidades no naturales (como la tierra). Así, en este tercer momento ideamos tres AOE con el propósito de que las y los niños siguieran aprendiendo del proceso de la medición de longitudes y áreas y que sintieran la necesidad de explorar un nuevo campo numérico, a través de la elaboración del plano de la escuela.

La primera AOE la titulamos “El plano: ¿con qué podemos medir nuestra escuela?”. En esta actividad, mediante la solución de un taller, dibujamos el terreno de nuestra escuela para reconocer sus lados y forma. Además, respondemos la pregunta: ¿con qué lo podemos medir? Realizando las respectivas mediciones del borde de la escuela. Los elementos que conforman esta actividad son:

Tabla 8. Actividad: el plano: ¿con qué podemos medir nuestra escuela?

El plano: ¿con qué podemos medir nuestra escuela?			
Intencionalidad	Acción	Necesidad	Finalidad
Dibujar el terreno de la escuela y realizar mediciones del borde utilizando las partes del cuerpo humano como unidades de medida (no convencionales).	Los estudiantes deben solucionar un taller desde sus equipos de trabajo.	Buscar algunos instrumentos de medida para medir el borde de la escuela para luego empezar a dibujar el plano de la misma.	Que todos los estudiantes se apropien del proceso de medición y reconozcan la necesidad que nos llevó a él.

El aprendizaje del concepto de fracción, desde la perspectiva histórico-cultural: un camino..



INSTITUCION EDUCATIVA DIVINO NINO - SEDE CARACOLI
PROFESOR: JUAN LÓPEZ GUERRA

El plano: ¿con qué podemos medir nuestra escuela?



En los equipos de trabajo, solucionemos individualmente, el siguiente cuestionario. Recuerda que dibujar un plano es como tomar una radiografía del lugar, en este caso de nuestra escuela.

1. Dibujemos en una hoja el terreno donde está construida nuestra escuela.
2. Este terreno tiene unos bordes o límites. ¿Cuáles son?
3. ¿Cómo podemos saber cuánto mide?
4. ¿Cómo podemos medir los bordes del terreno, sin utilizar el metro?
5. Cada equipo debe escoger una unidad de medida y con ella cada estudiante debe medir el borde de la escuela. Los resultados los fijamos en la siguiente tabla.

Nombre del estudiante	Medida total del borde del terreno.

6. Comparte los datos con los demás compañeros ¿son iguales?, ¿son diferentes?, ¿Por qué?
7. ¿Cuál fue la mayor dificultad que se presentó en esta actividad?
8. ¿Quién tubo la razón de haber realizado la medición más correcta?
9. ¿Cómo llegamos a un acuerdo?
10. ¿Qué pasaría si midiéramos con las cuartas, y con pies?
11. Escuchemos la siguiente historia y luego respondamos la pregunta:



Hace muchísimo tiempo en una tierra lejana llamada Egipto, los habitantes discutían frecuentemente debido a que las unidades que tomaban para medir eran diferentes porque algunos tenían la palma de la mano y los pies más grandes que otros y esto generaba el caos.



El faraón de los egipcios decidió que las personas debían usar el largo de su antebrazo que va desde el codo hasta la punta del dedo meñique, para medir la tierra.



A esta unidad de medida el faraón la llamó cúbito. Y sirvió para que las personas la utilizaran para medir sus terrenos. De esta manera, se dieron los primeros pasos para solucionar los problemas de las personas, para medir sus terrenos.



Cúbito

^ ¿Qué conclusiones podemos sacar con relación a las unidades de medida que debemos escoger para realizar mediciones?

La segunda actividad de este tercer momento es una continuación de la anterior. Por lo tanto, la denominamos “Delimitando el plano de nuestra escuela”. En esta actividad, creamos, en común acuerdo, una unidad patrón con la que debemos medir el borde de la escuela; Llegamos a los problemas que dan origen a un nuevo campo numérico; y por último, creamos un modelo de escala para tenerlo en cuenta en el plano que estamos elaborando. Los elementos que componen esta actividad son:

Tabla 9. Actividad, delimitando el plano de nuestra escuela.

Delimitando el plano de nuestra escuela			
Intencionalidad	Acción	Necesidad	Finalidad
<p>Crear una unidad de medida patrón y con ella realizar la medición del borde de la escuela. Generar un debate a partir de problemas que permiten pensar en un nuevo campo numérico. Y llevar las mediciones (del borde) al plano mediante un modelo a escala.</p>	<p>Responder un cuestionario y realizar debates colectivos frente a la generación de un nuevo campo numérico.</p>	<p>Llegar al problema crucial para originar un nuevo campo numérico: ¿Cómo medir, con la misma unidad de medida, la parte de un terreno que es menor que la unidad?</p> <p>Hacer el plano de nuestra escuela.</p>	<p>Que los estudiantes, después de medir el borde del terreno de nuestra escuela con una unidad escogida por todo el grupo, piensen y den solución a cómo medir las partes menores que esa unidad escogida y cómo expresar dichas cantidades</p>

El aprendizaje del concepto de fracción, desde la perspectiva histórico-cultural: un camino..



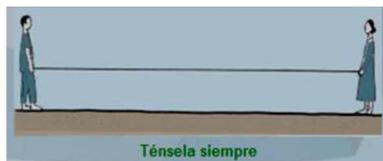
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DIVINO NIÑO - SEDE CARACOLÍ
PROFESOR: JUAN LÓPEZ GUERRA
Delimitando el plano de nuestra escuela



Solucionemos el siguiente taller en los equipos de trabajo.

1. En consenso con toda la clase, escojamos una unidad de medida artificial que nos sirva para medir, a todos, el perímetro de nuestra escuela, démosle un nombre y hagamos la medición de las siguientes dos maneras:
 - a) Utilizando una cuerda larga.

Recomendaciones:



S Coloquemos la cuerda por todo el borde del terreno de la escuela que vamos a medir

S Luego, en la cuerda sobreponemos la unidad de medida escogida por todos y contamos cuantas veces caben sobre la cuerda.



S Respondamos las siguientes preguntas individualmente:

- ¿Con qué medimos?
- ¿Cómo expresamos lo que medimos y para qué?
- ¿Qué podemos hacer para medir la cantidad de terreno menor que la unidad ?
- ¿Cómo debemos expresar las cantidades menores que la unidad _____ ?

- b) Ahora midamos directamente sólo con la unidad de medida artificial escogida por todos. Escribamos los resultados en la siguiente tabla.

Lado a medir de nuestra escuela	Medida con _____
Ancho N°1 (frente)	
Ancho N° 2 (parte posterior)	
Largo N° 1 (entrando a la derecha)	
Largo N° 1 (entrando a la izquierda)	

^ Respondamos las siguientes preguntas en los equipos de trabajo:

- ¿Con qué medimos?
- ¿Qué podemos hacer para medir la cantidad de terreno que sobró en cada lado? (sin crear nuevas unidades de medida)
- ¿Cómo debemos expresar las medidas de las cantidades que sobraron?

Realicemos un debate en el equipo de trabajo donde se concluya una respuesta a los problemas anteriores. Luego, hagamos un debate entre los equipos de trabajo y, por último una sistematización de un acuerdo colectivo.

2. Con el propósito de llevar el resultado de la medición a la cartulina, donde se hará el plano de la escuela, y utilizando unidades más pequeñas (palillitos de dientes). realiza un dibujo con una escala¹⁰ de 1 a 4 del borde del terreno de la escuela. La escala de 1 a 4 significa que el largo de un palillito en la cartulina equivale al largo de cuatro palos de escoba -colocados juntos, en el borde del terreno. (la manera de representar las escalas es 1 : 4 y se lee 1 es a cuatro)

¹⁰ La escala se define como la relación de proporcionalidad que existe entre una distancia medida en el terreno y su correspondiente medida en el mapa o en la cartulina, para nuestro caso.

La tercera actividad de este tercer momento es la etapa final de la elaboración del plano y la hemos denominado “el plano de nuestra escuela: las dependencias”. En esta actividad, creamos, en común acuerdo, una unidad patrón con la que debemos medir la superficie de cada dependencia de la escuela, llegando a los problemas sobre el cómo medir y expresar las unidades menores que la unidad de medida; por último, creamos un modelo a escala para tenerlo en cuenta en el plano que estábamos elaborando. Los elementos que componen esta actividad son:

Tabla 10. Actividad, El plano de nuestra escuela: las dependencias. La superficie

El plano de nuestra escuela: las dependencias.			
Intencionalidad	Acción	Necesidad	Finalidad
<p>Crear una unidad de medida patrón y con ella realizar la medición de las dependencias de la escuela. Generar un debate con los problemas que permiten pensar en un nuevo campo numérico. Y llevar las mediciones (de la superficie) al plano mediante un modelo a escala.</p>	<p>Responder un cuestionario y realizar debates colectivos frente a la generación de un nuevo campo numérico.</p>	<p>Hacer el plano de nuestra escuela.</p> <p>Pensar en los problemas sobre el cómo contar y expresar las unidades menores que la unidad de medida, que son cruciales para originar un nuevo campo numérico.</p>	<p>Que los estudiantes, después de medir la superficie de las dependencias de nuestra escuela con una unidad escogida por todo el grupo, piensen y den solución a cómo medir las partes menores que esa unidad escogida.</p> <p>Crear un modelo a escala para la superficie del terreno de la escuela y terminar el plano.</p>

El aprendizaje del concepto de fracción, desde la perspectiva histórico-cultural: un camino..



INSTITUCIÓN EDUCATIVA DIVINO NIÑO - SEDE CARACOLÍ
PROFESOR: JUAN LÓPEZ GUERRA
El plano de nuestra escuela: las dependencias



Dibujemos en nuestro plano las dependencias (salones, baños, sala de profesores, tienda escolar, restaurante escolar, y demás espacios como la zona donde se va a reconstruir) para hacer esto es necesario realizar lo siguiente:

1. Con las palmas de las manos toca la superficie que corresponde al piso de nuestra aula de clase y luego toca en la cartulina la superficie que se destinará para ella.
2. ¿Con cuál de los objetos de abajo podríamos medir de una forma fácil, la superficie del piso del aula de clase? Explica.



Objeto 1. Cuerda



Objeto 2. Hoja de periódico

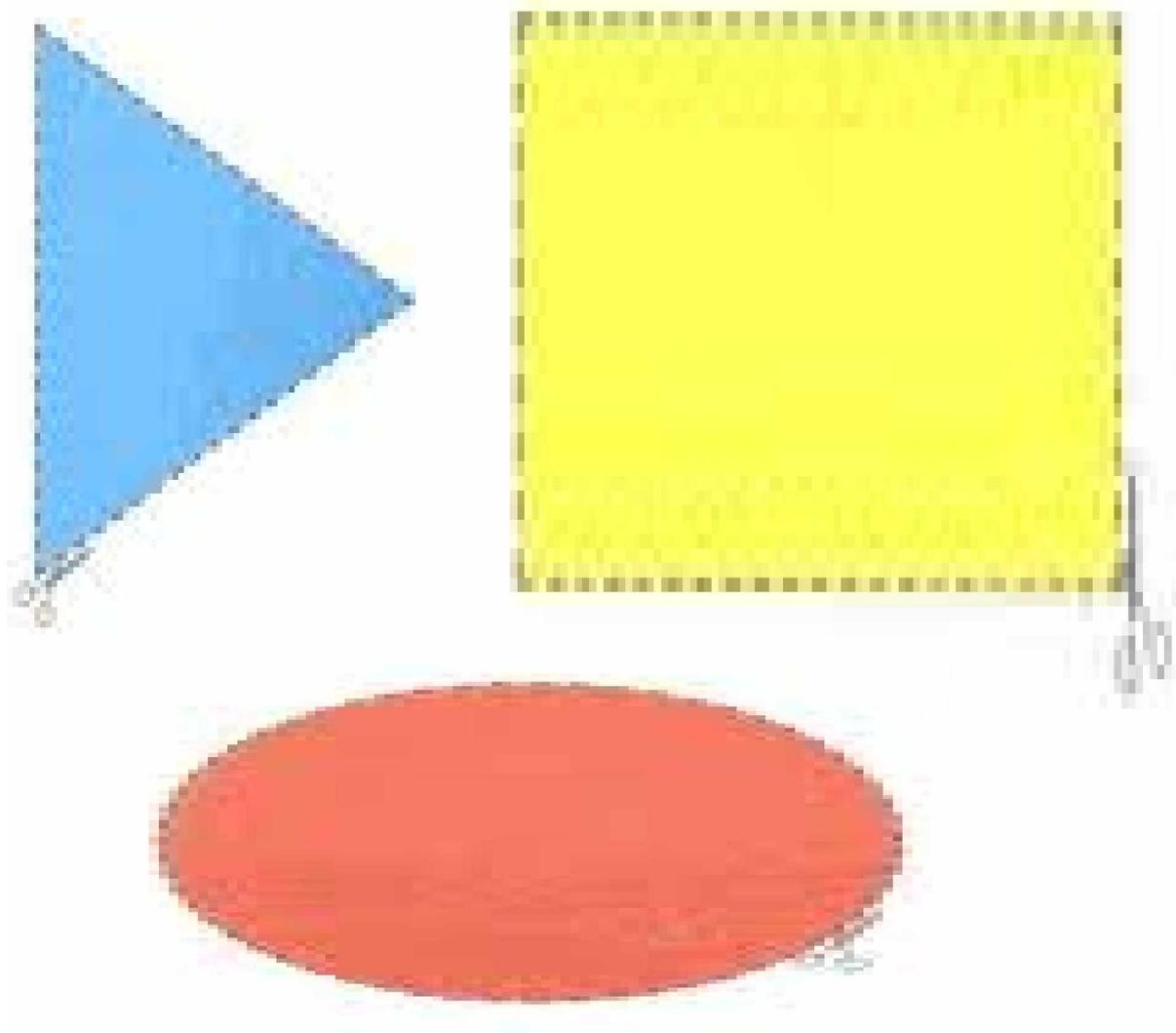


Objeto 3. Ladrillo

3. ¿Qué otros objetos o figuras te servirán para medir la superficie que corresponde al piso del aula de clase?
4. En consenso con toda la clase, escogamos una unidad de medida artificial que nos sirva para medir, a todos, la superficie del piso de nuestra aula de clase, démosle un nombre y hagamos la medición.
5. Si quedó alguna cantidad del piso menor que la unidad escogida ¿Qué debemos hacer para medir estas partes del piso? ¿cómo podemos expresar las medidas de esas partes del piso que sobraron?
6. Hagamos un debate en el interior del equipo de trabajo donde se concluya una respuesta a los problemas del punto anterior. Luego, hagamos un debate entre los equipos de trabajo y, por último una sistematización de un acuerdo colectivo.

Trabajo individual

7. Ahora, lleva las medidas de la superficie de las dependencias de la escuela a la cartulina donde harás el plano de la escuela, para esto debemos construir un modelo a escala así:
 - a. Escoge la figura que consideres más apropiada para medir la superficie de la cartulina y recórtala.



- b. Realiza un dibujo con una escala de 1 a 16 de la superficie del piso del aula de clase. La escala de 1 a 16 significa que la superficie del cuadrado amarillo, en la cartulina equivale a la superficie de cuatro cuadrados de palo de escoba, por cada lado del cuadrado.
8. Ahora, en los equipos de trabajo hagamos el proceso anterior con las demás dependencias.

Comparte tu trabajo con toda la clase.

Cuarta etapa

El contenido que se ha observado al explorar el aspecto histórico-cultural del movimiento conceptual de la fracción comprende desde Davidov (1982), Lima & Moisés (1998), Aleksandrov et al. (1976) y Caraya (1984) a la historia y naturaleza de este concepto. Como lo vimos en capítulos anteriores, ellos, exponen que el movimiento conceptual de la fracción está relacionado con ideas fundamentales como el movimiento de las cantidades continuas y las grandezas; los elementos básicos de la geometría y la medición. Estas ideas, según estos autores, contienen las conexiones internas del concepto y se convierten en un ciclo básico a seguir para el aprendizaje de este tema.

En esta cuarta etapa del camino se pretende que los y las estudiantes manifiesten juicios sobre las conexiones internas del movimiento conceptual de la fracción a través de la terminación de la maqueta.

La primera AOE se tituló “dialogando con constructores” aquí realizamos un diálogo espontáneo (con dos acudientes expertos en construcciones) sobre la historia de la medición, las construcciones civiles y la maqueta que estamos elaborando. El propósito de este diálogo fue en primer lugar, que los y las estudiantes, reconocieran, a partir de otras voces, algunos aspectos relacionados con el movimiento conceptual de la fracción; en segundo lugar, que los y las estudiantes mostraran conocimientos matemáticos que aprendieron hasta esta parte y; en tercer lugar, que los invitados nos ofrecieran directrices para seguir construyendo la maqueta de la escuela que soñamos. Los elementos que la constituyen son:

Tabla 11. Actividad: dialogando con constructores.

Dialogando con constructores

Intencionalidad	Acciones	Necesidad	Finalidad
En primer lugar, que los y las estudiantes, reconocieran, a partir de otras voces, algunos aspectos relacionados con el movimiento conceptual de la fracción; en segundo lugar, que los y las estudiantes mostraran conocimientos matemáticos que aprendieron hasta esta parte en relación a la construcción del plano de la maqueta y; en tercer lugar, que los invitados nos ofrecieran directrices para seguir construyendo la maqueta de la escuela que soñamos.	Dialogar con personas conozcan construcciones civiles sobre proyecto y construcción de la maqueta.	Investigar los pasos a seguir en la construcción de la maqueta de la escuela que soñamos.	Crear un espacio de diálogo donde se hable sobre lo aprendido hasta ahora -del movimiento conceptual de las fracciones en relación al plano y la maqueta de la escuela.

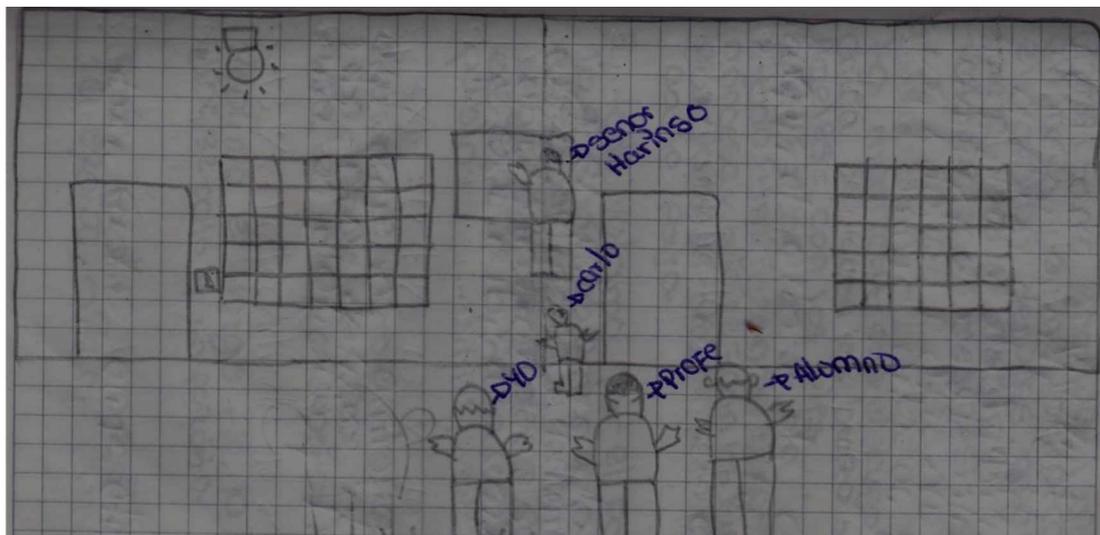


Ilustración 13. Daniel, Actividad: Midiendo las alturas con los señores invitados. Oct. De 2012

El aprendizaje del concepto de fracción, desde la perspectiva histórico-cultural: un camino..



INSTITUCIÓN EDUCATIVA DIVINO NIÑO - SEDE CARACOLÍ
PROFESOR: JUAN LÓPEZ GUERRA
Dialogando con constructores



Invitemos a dos acudientes que sepan de construcciones civiles (uno que sepa desde lo empírico y otro desde lo científico) y realicemos un diálogo espontáneo con ellos donde se toquen temas como:

- > ¿Cómo se construían las casas o las escuelas antes y cómo se construyen ahora?
- > ¿Todo se puede contar? ¿cómo cuantificar el agua y la tierra?
- > ¿Qué y cómo median, antes y ahora?
- > Comenta sobre las unidades de medida: cómo son, cuáles usamos, cuáles escogimos.
- > ¿Cuáles instrumentos de medición utilizaban antes y cuáles ahora? Cuáles escogimos para medir y para realizar el modelo a escala en la construcción de nuestro plano de la escuela.
- > ¿Cómo surgió la fracción?
- > ¿Cómo podemos seguir elaborando la maqueta (paredes, techo, puertas, ventanas etc.)? (pregunta para los invitados)
- > Les pedimos a nuestros visitantes que nos ayuden a realizar las mediciones (con nuestras unidades de medida) de paredes, puertas, ventanas y balcones de cada bloque, para terminar la maqueta de nuestra escuela (Anota y dibuja).

La maqueta de la escuela que soñamos parte de la construcción de la maqueta real y luego, en los espacios de la escuela que están por remodelar o construir, plantear lo que soñamos que nos construyan ahí. La segunda AOE de esta cuarta etapa del camino del aprendizaje del movimiento conceptual de fracción, es llamada: “la maqueta de nuestra escuela” y se propone terminar la construcción de la primera parte mencionada -la maqueta de la escuela, con la ayuda de los padres de familia. Aquí los estudiantes deben construir el modelo a escala de las mediciones de las alturas y anchuras de paredes, puertas y ventanas que se hicieron en la AOE anterior. A continuación se presentan sus elementos.

Tabla 12. Actividad: la maqueta de la escuela.

La maqueta de nuestra escuela			
Intencionalidad	Acción	Necesidad	Finalidad
Realizar en modelo a escala de la escuela, teniendo en cuenta las alturas y anchos de las puertas, ventanas y paredes.	Con ayuda de los acudientes, construir la maqueta de la escuela.	Terminar de hacer el modelo a escala y levantar sobre el plano que se tiene la maqueta de la escuela.	Que los y las estudiantes compartan con sus padres, construyendo la maqueta de la escuela.



Ilustración 14. Angie. Actividad: la maqueta de la escuela. Oct. De 2012

El aprendizaje del concepto de fracción, desde la perspectiva histórico-cultural: un camino..



INSTITUCIÓN EDUCATIVA DIVINO NIÑO - SEDE CARACOLÍ
PROFESOR: JUAN LÓPEZ GUERRA
La maqueta de nuestra escuela



Responde las siguientes preguntas en compañía de tu acudiente.

1. Si ya tenemos las medidas de las paredes, puertas, ventanas, balcones etc. ¿Cómo podemos trasladar esas medidas para terminar la maqueta?
2. ¿Qué se debe hacer para trasladar las cantidades menores que la unidad de medida a la maqueta?
3. Termina de construir la maqueta de nuestra escuela.



Ilustración 15. Catalina. Actividad: La maqueta de la escuela. Oct. De 2012

La tercera AOE de esta cuarta etapa del aprendizaje del movimiento conceptual de la fracción se denominó: “la maqueta de la escuela que soñamos”. En ella, se propuso a los y las estudiantes construir en su maqueta, lo que se sueña que a la escuela le construyan. En esta parte, ellos imaginaron lo que querían que le construyeran a la escuela y con la ayuda de sus acudientes, lo reflejaron en la maqueta, teniendo en cuenta el modelo a escala implementado.

Tabla 13. Actividad: la maqueta de la escuela que soñamos, Oct de 2012

La maqueta de la escuela que soñamos			
Intencionalidad	Acción	Necesidad	Finalidad
Conocer el deseo personal sobre el cómo se imaginan la escuela los y las estudiantes	Construir, con la ayuda de los acudientes, la maqueta de la escuela que cada estudiante sueña tener.	Conocer la escuela que se sueñan los y las estudiantes, así como las justificaciones de ello.	Que los estudiantes construyan la maqueta de la escuela que se sueñan.



Ilustración 16. Dayana y Jonathan. Actividad: La maqueta de la escuela que soñamos. Oct. de 2012

El aprendizaje del concepto de fracción, desde la perspectiva histórico-cultural: un camino.



INSTITUCIÓN EDUCATIVA DIVINO NIÑO - SEDE CARACOLÍ
PROFESOR: JUAN LÓPEZ GUERRA

La maqueta de la escuela que soñamos.



Utiliza lo aprendido hasta este punto y ponlo en práctica para construir en el espacio de la maqueta, lo que queremos que nuestra escuela tenga.

Escribe las respectivas mediciones de las diferentes dependencias en la maqueta y escribe el modelo a escala usado.



Ilustración 17. Oscar. Maqueta de la escuela que soñamos. Oct. De 2012

Sobre el análisis de los datos.

Los datos se analizaron desde algunas acciones en las clases, asociados a las actividades orientadoras de enseñanza (AOE) propuestas en el aula y efectuando una triangulación entre los datos producidos, las notas de campo del investigador y la teoría que sustenta la investigación (la perspectiva histórico-cultural en ella, la teoría de la actividad). En este análisis tuvimos presente interpretar las interrelaciones que se tejen en el aula de clase, entre los sujetos participantes y entre ellos con el conocimiento matemático, al solucionar situaciones simuladoras de los cuestionamientos esenciales por los que tuvo que pasar la humanidad para llegar a la concepción de fracción.

De los cuatro momentos que referenciamos en nuestro recorrido metodológico (LA RUTA), emergieron cuatro categorías. La primera categoría fue respecto al trabajo práctico de la grandeza y la pregunta ¿todo se puede contar?, llamada —Todo se relaciona; la segunda, respecto a la relación entre aritmética/geometría y ¿cómo cuantificar aspectos continuos como el agua y la tierra?, llamada —La Relación entre el número y la forma; la tercera, respecto a la medición y la fracción y ¿Qué podemos hacer para medir la cantidad de terreno menor que la unidad de medida?, ¿Cómo debemos expresar numéricamente las cantidades menores que la unidad de medida?, llamada —Fracción: movimiento que expresa comparaciones de magnitudes continuas; y la cuarta: es sobre la terminación de la construcción de la maqueta y una mirada retrospectiva de lo trabajado, llamada —Llegando a la maqueta de la escuela que soñamos. En nombre de la primera categoría se dio de acuerdo a una expresión textual de un estudiante protagonista, la cual se considera como representativa de la tesis de esta categoría. Las demás, las consideró el investigador.

TUDO SE RELACIONA...

(...) *Todo se relaciona (...) los números con las cosas que hay en la vida.*

(Oscar)

El conocimiento surgió como parte de la vida cotidiana de los seres humanos, de esta forma, los orígenes primitivos de las matemáticas relacionados con los conceptos de grandeza, número, geometría y medida, se pueden encontrar en los inicios de la raza humana.

En concordancia con lo anterior, la perspectiva histórico-cultural plantea estudiar lo histórico del objeto y su correlación con la cultura y las necesidades de los estudiantes, revelando las diferentes formas de movimiento de pensamiento en el proceso de aprendizaje.

Esta primera etapa de análisis de este camino para aprender el movimiento conceptual de la fracción, tiene el propósito de dar a conocer cómo se dio el proceso de aprendizaje de la noción de número natural por parte de los protagonistas. En ese sentido, veremos tres AOE que colocan en cuestión los límites del número natural desde su propia naturaleza -desde la familiarización con la noción matemática de grandeza, pasando por la identificación de cómo los números están relacionados con objetos concretos y abstractos que provienen de las necesidades de la vida diaria -hasta llegar al reconocimiento del movimiento y control de las unidades continuas, teniendo como base las ideas de Davidov (1982), Caraya (1984) y Lima & Moisés (1998).

Los números naturales no son un producto puro del pensamiento, independiente de la experiencia; los hombres no adquieren primero los números para después contar; pues, los números naturales se fueron formando lentamente por la práctica diaria del conteo. (Caraya 1984, p.4).

Es de anotar que durante todo el trabajo de campo, identificamos la comparación en términos de

la relación entre objetos de la naturaleza. Pero, cobró mucha relevancia en las tres AOE desarrolladas en esta etapa, lo cual nos llevó a considerarlo como una categoría fundamental y

emergente. Por lo tanto, esta categoría, que hemos llamado — ¡todo se relaciona! de acuerdo con una expresión hecha por uno de los protagonistas de la investigación, la hemos considerado esencial en nuestro análisis.

Davidov (1982) y Caraya (1984) dicen que es preciso, inicialmente, crear en los estudiantes una concepción circunstanciada y válida del número, donde se encuentra oculto el concepto de grandeza, de esta manera, se proporciona un concepto genuino-científico, procedente de un proceso lógico-histórico, de una génesis y una naturaleza que permite desarrollar un proceso de abstracción, que a su vez proviene de una producción humana.

En esta línea, la primera actividad orientadora de enseñanza por la que fue elegida esta categoría fue **“Conozcamos nuestra institución ”**, en esta actividad realizamos un paseo-carrusel por las tres sedes de la institución. Salimos de nuestra sede Caracolí hacia la sede San José y posteriormente llegamos a la sede Divino niño, pretendiendo conocerla mejor y empezar a pensar en la conquista de nuestro objeto-motivo -la construcción de la maqueta de la escuela que soñamos. El objetivo de esta salida era el de reflexionar sobre la variación de intensidad de cualidades comunes de varios objetos en distintas situaciones y fenómenos.

La forma de desarrollar esta actividad fue mediante escenas, cada escena corresponde a una parada en el recorrido del carrusel. Allí, se permitió reflexionar sobre algunos cuestionamientos relacionados con aspectos cotidianos, que por lo general los vemos a diario pero no nos detenemos a observar (en el sentido de Bajtín, 1978).



Ilustración 18. Carrusel, Conozcamos nuestra institución.
Julio de 2012

La primera escena fue en la puerta (saliendo) de nuestra sede Caracolí. Allí, se les pidió a las y los estudiantes observar una moto y una bicicleta y luego responder: ¿En qué se llegará primero a la iglesia Divino Niño? ¿Cuál cualidad permite que en la moto lleguemos más rápido? ¿Esta cualidad varía? ¿Se puede cuantificar esta cualidad? A continuación, se muestran algunos aspectos de las reflexiones de Angie, Jonathan y Oscar, con respecto a esta escena.

1. Se llegara primero en la moto, por que la moto tiene más velocidad que la bicicleta, cambia la velocidad, que una es más rápida que la otra.

Ilustración 19. Angie, respuesta: primera pregunta del carrusel, julio de 2012

primera escena
 se llega primero en la moto por que se le puede cambiar la velocidad y a la bicicleta no se le puede intercambiar.

Ilustración 20. Jonathan, respuestas: primera pregunta del carrusel, julio 2012

En la moto, porque uno decide en que velocidad, si varia porque puede ir rapido o lento. Si va rapido, o lento.

Ilustración 21. Oscar, respuestas de las preguntas de la primera escena del carrusel, Julio de 2012

Angie, Jonathan y Oscar coincidieron en expresar, que en una moto se llega más rápido que en una bicicleta a la iglesia, debido a la velocidad que puede tomar la moto. Estos estudiantes pudieron identificar aquí la velocidad, la cual tiene implícita una variación (lento o rápido) permitiéndoles reconocer cuál vehículo (moto - bicicleta) se desplaza con mayor velocidad. Esta,

es posible percibirla como una variación de intensidad, más no cantidad, de una misma cualidad (la velocidad en este caso). Desde los planteamientos de Davidov (1982) esto es, grandeza.

Davidov (1982) sustentan que el movimiento de intensidad de la cualidad obedece a la grandeza y esta a su vez puede darse en términos de una variación de la intensidad de una cualidad común a varios objetos, lo cual, puede evocar una relación de tipo $a=b$, $a>b$, o $a<b$. En Angie, podemos ver esto cuando expresa que la moto tiene más velocidad que la bicicleta, y en Oscar cuando se refiere a la variación que puede tener la moto (lento o rápido).

Durante la socialización de esta primera escena Jonathan explicó que la moto llega primero porque se le puede meter cambio y además dijo:

Las motos llevan una cosita, donde uno ve a qué velocidad va. A 20, a 30, a 40, a 50...
(Jonathan, socialización primera escena del carrusel, julio de 2012)

Jonathan relaciona la velocidad con los números 20, 30, etc. En concordancia, con los planteamientos de Lima & Moisés (1998) y Caraña (1984), se percibe la segunda manera de expresar el movimiento de la cantidad de una magnitud -traducir la variación en números. Jonathan expresa la velocidad en términos de 20, 30, 40 y aunque no refiere la unidad de medida (k/h por ejemplo) si refleja la separación del aspecto continuo de la magnitud considerada (de la velocidad).

En este momento, como docente se intervino para decir que Jonathan tiene razón y que esa “cosita” a la que se refiere se llama tacómetro, éste es un dispositivo que indica la velocidad de una máquina en este caso de una moto. Además, se les preguntó a los y las estudiantes: ¿Quiénes han viajado en moto? A lo que todos respondieron levantando el brazo. Pero, Dayana nos compartió lo siguiente:

Mi papá es mototaxista, y él nos lleva a pasear los domingos en la moto.

(Dayana, socialización primera escena del carrusel, julio de 2012)

El mototaxismo en nuestro municipio es una fuente de empleo de muchas personas. Consiste en transportar a una persona en moto, por un valor que oscila entre 1500 y 2000 pesos. Por ello, como docente aquí le pregunté a Dayana cuándo una carrera puede valer 1500 o 2000 pesos. A lo que ella respondió:

Si es de Caracolí¹¹ al Camello vale dos mil pesos. Pero, si es de Caracolí a Pueblo nuevo, que es más cerca, vale mil quinientos pesos.

(Dayana, socialización primera escena del carrusel, julio de 2012)

Se nota que Dayana conoce un poco nuestro municipio y está informada de la variación que puede tener el valor de una carrera en mototaxi, según la distancia. Como acto seguido, se les interrogó: ¿A qué velocidad han Viajado? A lo que Daniel contesto:

Como a cien. A mí me gusta viajar a mucha velocidad.

(Daniel, socialización primera escena del carrusel, julio de 2012)

En este momento, Catalina toma la palabra para decir:

Si viajamos a mucha velocidad nos podemos matar. Debemos viajar a poquita velocidad.

(Catalina, socialización primera escena del carrusel, julio de 2012)

De las reflexiones de Dayana, Daniel y Catalina se pueden ver las dos características del movimiento de la cantidad en una grandeza anunciadas anteriormente. Además, un gusto por la velocidad en Daniel y, una reflexión muy responsable por parte de Catalina, que es complementada por el docente en este momento, cuando dijo: si se viaja en moto o en cualquier otro medio de transporte, como niños y niñas se le debe enseñar, a los adultos que conducen, que lo hagan respetando las señales de tránsito, que no hablen por celular mientras conducen y, no conducir borrachos o embriagados. Desde la perspectiva histórico-cultural de la educación

¹¹ Caracolí, el Camello, y Pueblo nuevo. Son nombres de barrios de nuestro municipio.

matemática, las reflexiones que se dan en esta primera escena, ponen en evidencia que el conocimiento matemático es una producción social y cultural de cada comunidad. En este sentido, “los individuos del grupo se (re)constituyen en su subjetividad en dialéctica con el colectivo” (Jaramillo 2011, P. 23).

La segunda escena de este carrusel se da, cuando se hace un pare en el camino hacia San José. Aquí, se pide a los y las estudiantes, después de observar y comparar un parque y un estadio de fútbol, contestar preguntas como: ¿Qué se hace en estos lugares? ¿Quiénes frecuentan estos lugares? ¿La cantidad de personas varía según estos lugares? ¿Cómo se puede saber y por qué? A lo que Daniel escribió:

En el parque se juega en los columpios y deslizaderos y debemos ir acompañados con la mamá o el papá y en la cancha juega futbol.

Todas las personas pueden frecuentar estos lugares, niños, adultos, ancianos.

A mí me parece que hay más personas los sábados y los domingos. Y en la cancha cabe más gente porque el parque es más estrecho y la cancha es más amplia.

(Daniel, socialización segunda escena del carrusel, julio de 2012)

De la respuesta de Daniel se puede ver que comprende la utilidad de estos lugares y los reconoce como lugares públicos, a los que puede acceder cualquier tipo de persona. Como docente resalté la importancia de ir acompañados y de no recibir nada de personas extrañas.

Daniel, ha notado que los fines de semana es cuando más se frecuentan estos lugares y, establece una relación entre lo estrecho o ancho de los lugares con la cantidad de personas que pueden caber en los mismos. Claramente, identifica la cancha como más amplia que el parque (en términos de superficie), razón que le motiva a decir que en ella caben más personas. De ahí, se puede decir que Daniel reconoce cualidades comunes (amplio y estrecho) de los objetos (parque y cancha) y su variación. Por lo tanto, hay un movimiento de las relaciones de intensidad puesto

en práctica por el “sentido de grandeza” de Daniel. Al respecto de este “sentido de grandeza” Lima & Moisés (1998) sustentan:

Cuando no tenemos todavía una idea de pensamiento numérico para lidiar con las cantidades no organizadas en unidades naturales, utilizamos nuestras sensaciones, nuestras percepciones que nos son dadas por nuestros cinco sentidos. Estamos practicando nuestro sentido de grandeza. (Lima & Moisés, 1998 p.17)

Para Lima & Moisés (1998) todas las personas tienen un sentido de grandeza y éste permite saber distinguir si un objeto es mayor que otro cuando la diferencia es considerable. Angie, Jonathan y Oscar lo dejaron ver, en la primera escena, cuando establecieron que una moto puede alcanzar mayor velocidad que una bicicleta. Dayana lo refleja al establecer que la distancia Caracolí-Camello es mayor que la distancia Caracolí-Pueblo Nuevo. Y Daniel, también lo manifiesta, en esta segunda escena, al percibir que la cancha es más amplia que el parque.

La tercera escena se dio en la tienda escolar de la sede San José, mientras disfrutamos un refresco, observamos una ponchera con agua, un jugo y una maltiz (ver ilustración 22). Luego, reflexionamos sobre: ¿Cuál es la cualidad común a todas las sustancias contenidas en los empaques? ¿En qué recipiente hay más líquido y por qué?



Ilustración 22. Tercera escena del carrusel, julio de 2012

Antes de contestar la primera pregunta Oscar, Dayana y Daniel se acercaron donde el profesor a preguntar ¿cómo así cualidad, profe? Cuestión que implicó cambiar la pregunta por parte del docente en términos de: ¿el agua, el jugo y la malta, qué son? Pero, esta vez fue Jonathan quien preguntó: ¿cómo así? No entendí. Para lo que nuevamente el profesor reformuló: ¿el agua, el jugo y la malta, en qué estado están? A lo que Oscar mencionó:

Aaahhh ya. En estado líquido.

(Oscar, socialización tercera escena del carrusel, julio de 2012)

El docente confirmó la respuesta de Oscar y enseguida Jonathan replicó:

O sea, que el líquido es una cualidad...

(Jonathan, socialización tercera escena del carrusel, julio de 2012)

El docente en este momento aprovechó para decir: -Claro, la cualidad es el estado líquido. Y

luego preguntar: entonces, ¿Qué es una cualidad? A lo que Jonathan dijo:

Es como lo que tienen las cosas.

(Jonathan, socialización tercera escena del carrusel, julio de 2012)

En la respuesta de Jonathan, se evidencia lo que autores como Caraya (1984) apuntan, respecto a que la cualidad es escogida a partir de varios seres u objetos y permite variación de la intensidad de la cantidad observada tornándose convenientemente, en una cualidad en términos de una comparación única como unidad. En ese sentido, el estado líquido es una cualidad común a las sustancias presentadas y varía en términos de intensidad o con relación a números (cuantitativa) de un recipiente a otro.

Ahora, con respecto a la segunda pregunta planteada en esta tercera escena o parada del carrusel (¿En qué recipiente hay más líquido y por qué?), Angie y Catalina expresaron:

Hay más líquido en el envase del jugo. Porque es más alto y cabe más jugo.

(Angie, socialización tercera escena del carrusel, julio de 2012)

**En la ponchera con agua hay más líquido. Debido a que la ponchera es más ancha y cabe más.
(Catalina, socialización tercera escena del carrusel, julio de 2012)**

La justificación de Angie, está basada en que entre más alto el recipiente le cabe más jugo. Mientras que para Catalina, entre más ancha cabe más. En suma, se evidencian algunas diferencias en cuanto a que una sustenta que cabe más líquido en el envase del jugo y la otra en la ponchera. Pero, lo que sí se ve claro para ellas, es que en la ponchera y el envase de jugo hay más líquido que en el envase de la maltiz, ven una diferencia notable. Al respecto Lima & Moisés (1998) sostienen que lo anterior se debe a que cuando la diferencia entre los objetos no es considerable, el sentido de grandeza de las personas puede fallar al tratar de distinguir cual es el mayor o menor. Solucionar este problema, según Caraya (1984), permite desarrollar la unidad de medida de la misma especie para compararla con las magnitudes presentadas, a fin de establecer una reflexión que interrelacione la geometría con la aritmética (proceso que analizaremos en la próxima categoría). Por eso, como docente se preguntó a los y las estudiantes: ¿cómo podemos saber dónde cabe más líquido, entonces? Después de unos minutos Oscar mencionó:

**Depende. Porque si echamos el jugo en la ponchera y queda espacio. Entonces, cabe más en la ponchera.
(Oscar, socialización tercera escena del carrusel, julio de 2012)**

De la respuesta de Oscar se percibe una solución que permite relacionar la cantidad de líquido del envase con la capacidad de la ponchera. En otras palabras, deja entrever una comparación entre la cualidad común -del estado líquido y aquello que se tomó como unidad -el envase. Oscar propuso una buena estrategia para identificar la variación de la magnitud (capacidad) de los recipientes. Más adelante, en la segunda y tercera categoría de análisis de este trabajo, veremos que estas elaboraciones se vuelven importantes para traducir las unidades naturales en

herramientas de su dominio, es decir, en el número natural; para separar el aspecto continuo, (del agua por ejemplo) en unidades de medida y; destacar procesos de medición por el resultado numérico de la comparación de la unidad de medida con la magnitud a ser cuantificada. En esa vía, y por todo lo que hemos analizado hasta este instante, es que Davidov (1982) expresa la importancia de trabajar previamente, esta parte concerniente a la grandeza. Pues, esta noción permitió, desde una lógica histórica, que los seres humanos generaran abstracciones para desarrollar nociones como: la de correspondencia biunívoca en la concepción de número natural; y la de comparación, que evoca procesos de medición y desarrollo del concepto de número racional. En ese sentido, en el desarrollo de este trabajo se mostrará, implícitamente, que la noción de grandeza ayuda a los y las estudiantes a comprender una concepción circunstanciada y válida del número racional.

En esta tercera escena, fue posible percibir que los y las estudiantes no establecieron relaciones entre la cantidad de agua del recipiente y, el alto y el ancho del mismo. Pero, aprendieron a establecer relaciones comparativas al realizar un movimiento con respecto al líquido, de un recipiente a otro, tal como lo mostró Oscar. Según Lima & Moisés (1998), esta situación de comparación exige algunos elementos específicos de medición para la definición de un grado de intensidad de las cualidades.

La cuarta escena de este carrusel, se da en una parada hacia la sede Divino niño. Aquí, se le pidió a los y las estudiantes que observaran la iglesia y respondieran: ¿Qué es más pequeña, la iglesia o una casa, por qué? ¿En cuál sitio hace más calor, por qué? En el gráfico siguiente presentamos algunos aspectos mostrados en las reflexiones de Dayana, Catalina y Angie con respecto a esta escena.

Dayana	Catalina	Angie
La iglesia es más grande.	En la iglesia cabe más gente	Casa pequeña.
Más personas.	Es más pequeña la casa a menos que sea un negocio o una empresa.	Iglesia grande. Más gente.
Ventiladores.		Casa más calor.
En casa hace más calor		Encerrada.

Ilustración 23. Carrusel, escena 4. Julio de 2012

Como se puede apreciar en la ilustración anterior, para las tres estudiantes la idea de que la iglesia es más grande, estuvo asociada a la cantidad de personas que caben en una y otra. Igualmente, Las tres expresaron que en la casa hace más calor. Dayana lo relaciona con la cantidad de ventiladores que hay en una iglesia. Catalina, por su parte, destaca que no sería así, si fuera una empresa. Y Angie atribuye el calor de las casas a lo encerradas que están en comparación de las iglesias que poseen puertas y ventanas grandes.

En términos de Davidov (1982), con la noción de grandeza los y las estudiantes pueden directamente comparar valores físicos. Así por ejemplo, notar que en una casa caben menos personas que en una iglesia, es un dato que además de ser arrojado por su observación y experiencia, implica analizar características numéricas. Según Davidov,

A través de su propia actividad objetiva, ellos reproducen la base de ese procedimiento: la específica operación determinista de la relación múltiple de magnitudes, consolidando su resultado con la ayuda de unidades verbales abstractas. (Davidov, 1982, p. 435)

La última escena de este carrusel se dio en la tercera sede de nuestra institución (Divino niño), allí después de conocerla, nos detuvimos (estudiantes y docente) a observar y a responder las siguientes preguntas: ¿cómo son los pupitres o sillas? ¿Para qué sirven? ¿Una persona gorda se puede sentar en cualquiera? ¿Por qué? ¿Qué cualidad se debe tener en cuenta para que una persona se siente? ¿Esa cualidad varía? ¿Cómo se puede cuantificar esa cualidad? A lo que Daniel, escribió:

En preescolar son más pequeños y en otros grupos son más grandes.

Ellos sirven para sentarnos y copiar.

Una persona gorda no se puede sentar en una silla de preescolar porque la puede partir. Pero, en una grande sí.

La cualidad se llama peso.

Esa cualidad si varía porque una persona puede pesar 100 y otra 150 y así.

Esa cualidad se puede contar con un peso de pesar.

(Daniel, socialización quinta escena del carrusel, julio de 2012)

De la respuesta de Daniel es evidente el reconocimiento de que las sillas que utilizan los niños de preescolar son diferentes (más pequeñas) que las que usan los demás niños. Esto según lo hemos venido diciendo en términos de Lima & Moisés (1998) y Caraña (1984), obedece a la comparación de la intensidad de cualidades, en otras palabras, en el establecimiento de un juicio de ser mayor o menor entre los objetos -pupitres/sillas. Además, se puede evidenciar el reconocimiento de una magnitud, relacionada con el poder sentarse o no en la silla, -el peso. La cual, expresa Daniel, puede variar, en términos del movimiento de la cantidad, en números 100 y 150 que aunque no se expresa la unidad de medida (por ej. kilogramos) se refiere a un peso, porque lo identifica como una herramienta “extracorpórea” que permite medirlo. La unidad de medida según Caraña (1984) ejerce la misma función de los sentidos, puesto que procura establecer una comparación, permitiendo la identificación de una relación (igual, mayor o menor que).

De esta manera, se puede concluir que en esta primera actividad, y de hecho en las demás actividades que siguen también, se pudo percibir que el proceso de aprendizaje del movimiento conceptual de la fracción por parte de los y las estudiantes protagonistas de esta investigación, se desarrolló en relación con el medio físico y social, mediado por instrumentos y signos (como el lenguaje) que se procesa por medio de lo que Vygotski (2001) llamó *proceso de internalización*. Desde la GEPAPe (2010) este proceso de aprendizaje se logra percibir en la apropiación de conceptos y significaciones. Para nuestro caso, esto se refleja en las reflexiones que los y las estudiantes hicieron, en este carrusel, sobre la variación cuantitativa de cualidades comunes, principalmente cuando comparan objetos en diferentes situaciones y avanzan articuladamente en la construcción del movimiento dinámico de la unidad de medida para la constitución de las fracciones.

Definir la unidad de medida puede ser una tarea fácil, pero envuelve el actuar con variaciones de magnitudes de la misma especie y exige elaboraciones de generalizaciones por la práctica del conteo. En esta primera actividad propuesta fue posible percibir que los y las estudiantes protagonistas elaboraron, de forma propia, juicios sobre la variación cuantitativa de cualidades, identificando diferencias entre las posibilidades de cuantificación de las cualidades reconocidas; la variación en algunas, la pudieron cuantificar como la velocidad, la distancia y el peso. Y en otras sólo notar el grado de intensidad, sin permitir un conteo, tales como el líquido.

De las discusiones con los y las estudiantes se observa que pudieron reconocer al aspecto cualitativo (cualidad) común que les permitió la diferenciación de la dimensión mediante formas de comparación que constituyen mediciones rudimentarias, por ahora sin establecer la relación biunívoca entre la unidad de medida y un conjunto numérico -el conjunto que cuenta. Por eso, la necesidad de abordar aquí la siguiente AOE.

La segunda actividad se llamó “*De nuestra escuela hacia el pasado de los números*”. Consistió en que los estudiantes describieran su escuela (esto ayudará a reconocerla mejor y a partir de allí, ir pensando en la construcción de la maqueta de la escuela que soñamos.). A partir de este reconocimiento de la escuela, se implementarán acciones que se constituirán en un viaje imaginario por el reconocimiento de la historia de los números, para distinguir las características fundamentales de las relaciones (reflejada en la correspondencia uno a uno) que se establecen por el desencadenamiento de las necesidades de la vida de los seres humanos.

Para realizar la descripción de nuestra escuela Daniel utilizó palabras, mientras que Dayana, Vanessa, Oscar y Jonathan representaciones gráficas. Daniel la describe así:

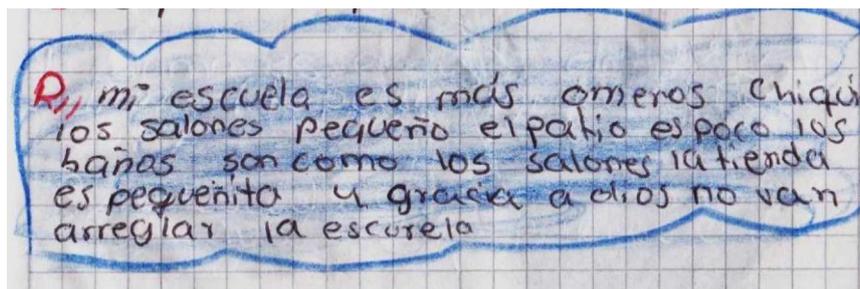


Ilustración 24. Daniel, Descripción de nuestra escuela, Julio de 2012

En esta descripción de Daniel se pueden observar al menos tres vicisitudes. La primera en la frase “mi escuela es más o menos chiquita” de donde se nota, además de un alto sentido de pertenencia al pronunciar: “mi escuela”, el nombramiento de una relación de intensidad. Pues, al expresar “más o menos chiquita” destaca una cualidad de tamaño que admite la variación de una cantidad no estrictamente numérica, pero sin un punto de comparación específico.

Lo segundo que deja entrever Daniel se evidencia en la expresión: “los salones pequeños, el patio es poco, los baños son como los salones la tienda es pequeña” donde da con seguridad el tamaño de cada espacio o lugar. Comprándolo con el tamaño de la escuela. En el sentido de

Lima & Moisés (1998), aparece un parámetro de relación que permite enunciar la grandeza de una cualidad (Tal como lo anunciamos en la actividad anterior).

Lo tercero que le resaltamos a Daniel lo contiene la frase “y gracias a Dios nos van arreglar la escuela” donde se ve un deseo por un asunto evidente y transformador en nuestra escuela.

Desde este primer instante, se empieza a vislumbrar la necesidad de los estudiantes de pensar el asunto del arreglo de su escuela y, que traen consigo (los estudiantes) unos saberes producto de sus prácticas sociales, históricas y culturales. De ahí, la importancia de haber considerado en nuestro marco teórico la perspectiva histórico-cultural, pues, nos permite tenerlos en cuenta para que en dialéctica con sus prácticas cotidianas, se permita aprender conocimientos matemáticos (sobre el concepto de fracción) y se apunte a formar mejores ciudadanos.

Por su parte Jonathan, Oscar y Dayana realizaron la descripción de nuestra escuela mediante representaciones. Jonathan usando regla, realizó un dibujo bidimensional en forma de casa con dos plantas conectadas por unas escaleras. En cada planta, Jonathan dibujó salones organizados en forma de rectángulos y en cada salón diseñó ventanas. El techo de la escuela que dibuja Jonathan, es en forma de triángulo. Tal como se muestra en la ilustración.



Ilustración 25. Jonathan, Descripción de nuestra escuela, Julio de 2012

Dayana realiza dos dibujos. En el primero, tiene una frase que dice: “por dentro” para indicar como es nuestra escuela internamente. En este dibujo, Dayana deja entrever algunos lugares como la entrada, el patio, la planta de salones del segundo piso y los baños en la parte izquierda del dibujo.

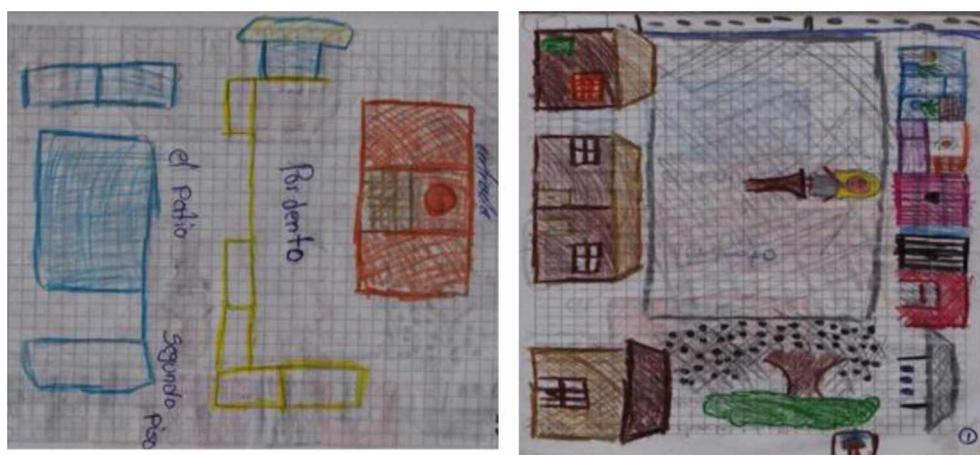


Ilustración 26. Dayana, Descripción de nuestra escuela, Julio de 2012

En el segundo diseño, se dibuja en el centro del patio y a su alrededor el árbol de naranja que se encuentra al lado del restaurante (ubicado en la parte inferior izquierda de la hoja), en la parte derecha del centro dibuja la reja de la entrada a la escuela (de color negro) y a su lado (hacia arriba) la tienda escolar y la sala de profesores. Al otro lado de la entrada (hacia abajo), unas escaleras, el cuarto de deportes y más a la parte inferior derecha una carpa provisional donde actualmente (a falta de un salón) se alberga un grupo de estudiantes. Así mismo, Dayana en la parte izquierda de su dibujo muestra los salones que se encuentran en la parte posterior de la escuela.

Oscar, para realizar la descripción de la escuela, plasma el siguiente dibujo dispuesto en forma horizontal. En él se puede observar la entrada de la escuela, unas escaleras, la carpa (salón

improvisado), el bloque de salones de dos plantas (margen inferior izquierda), las aulas de primera planta (en el centro de la parte izquierda del dibujo), y en la margen superior los baños tanto de los niños como de las niñas.

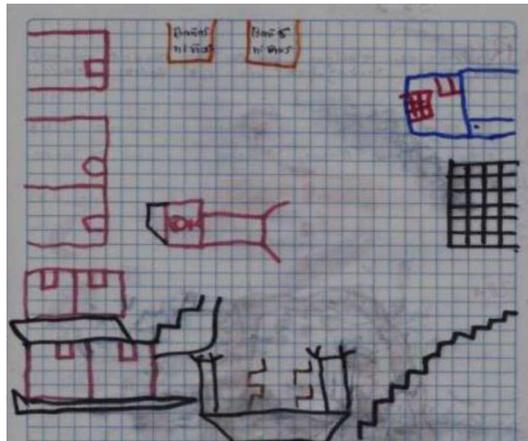


Ilustración 27. Oscar, Descripción de nuestra escuela, Julio de 2012

Las representaciones anteriores de Jonathan, Dayana y Oscar, en el sentido de Bajtín (1978), reflejan una actitud de lucha que ponen en pro de conseguir un producto estético; cuestión que ponen en práctica, cuando se colocan desde afuera, espacial y temporalmente, para dar sentido a la representación y describir nuestra escuela de una forma original.

Después de realizar la descripción de nuestra escuela iniciamos el viaje hacia el pasado. Para ello, caracterizando los elementos tecnológicos del entorno, imaginamos cómo sería nuestro entorno, si en éste no existiera ningún avance tecnológico.

En la producción de Catalina aparece una escena de cómo sería su vida en ese pasado. Catalina quiso expresarlo escribiendo: “si no hubiera electricidad nos quemaríamos del sol y nos moriríamos de calor” y, dibujando una cueva y una niña. Su producción la presentamos a continuación.

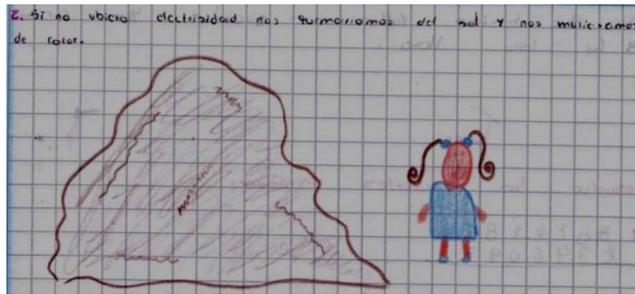


Ilustración 28. Catalina, Viaje imaginario hacia el pasado. Julio 16 de 2012.

Como se aprecia en la representación. Catalina es una niña que aunque se imagina en el pasado, no deja de verse bien organizada con moños, vestido y zapatos que combinen. Esto desde la mirada de Bajtín (1978) es situarse en una extraposición que le permite ver su vida desde una panorámica amplia y con sentido, que en este caso, se encuentra influenciada por las condiciones políticas y sociales del contexto. Pero, cobró para Catalina una fuerza especial desde su posición acerca de la concepción del pasado y el verse sin algo que para ella es hoy una necesidad: la electricidad. Claro que cuando se socializaron los trabajos el docente preguntó: ¿están de acuerdo con Catalina?, al respecto, fueron apareciendo alternativas de sustituir la electricidad. Jonathan por ejemplo, expresó que se podía reemplazar un ventilador con unas hojas que al moverlas generaran viento y Dayana dijo que con una fogata podían reemplazar la luz en la noche. En este sentido, estamos de acuerdo con Davidov (1988) cuando expresa que:

La imaginación faculta al individuo a ver como si fuera "inmediatamente" y de manera integral la cosa con los ojos de todas las otras personas sin ponerse en el lugar de cada una de ellas. (Davidov 1988, p.44).

En este mismo viaje imaginario, dos estudiantes: Oscar y Angie quisieron mostrar cómo estudiaban las personas. Oscar dibuja una persona al lado de una cueva. Esta persona la dibuja con moño de color amarillo y vestimenta que cubre el pecho y la cintura. Además, Oscar escribe: “de pronto estudiaban en cuevas escribían con piedras en tablas” La producción de Oscar la mostramos a continuación.



Ilustración 29. Oscar, Viaje imaginario hacia el pasado. Julio de 2012.

La idea de Oscar refleja, con la expresión “de pronto”, inseguridad al imaginar cómo estudiaban las personas por la transformación natural de ir sustituyendo parcialmente los objetos de su medio. En el sentido de Carasa (1984) puede denotar un aspecto del devenir. El devenir, como fluencia, movimiento continuo que genera cambios, pero no en el sentido de sustituir de golpe una cosa por otra, sino en el sentido de un movimiento natural. Que en la representación de Oscar, se logra ver al relacionar la idea del espacio escolar con una cueva y a los útiles escolares con piedras y tablas.

Angie, por su parte, imagina que las personas estudiaban debajo de los árboles, sin desligarse de la idea de escuela. En su representación, dibujó una maestra con estudiantes sentados en troncos.

La vida de cada ser humano es diferente; por tanto la manera de sentir y ver hacia el pasado depende de muchos factores que se relacionan entre sí y dependen de las circunstancias que rodean al sujeto. En este sentido, a diferencia de los animales, somos capaces de imaginar cómo serían las personas en un pasado. Pero, como

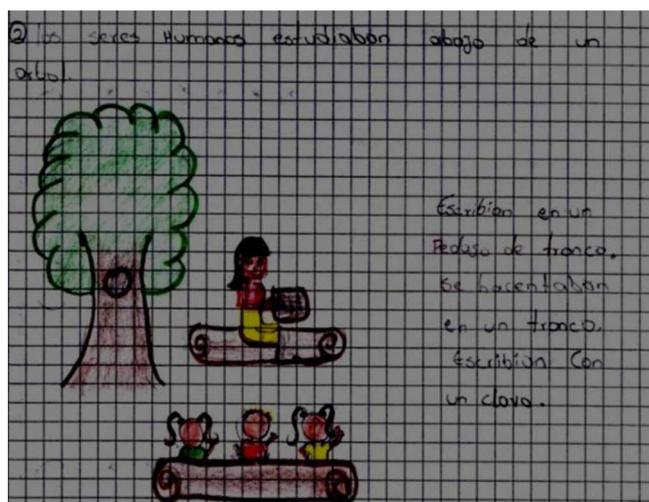


Ilustración 30. Angie, Viaje imaginario hacia el pasado. Julio 16 de 2012.

bien lo han mostrado Catalina, Oscar y Angie, tomando elementos del presente de nuestras vidas y la de otros y relacionándolas con las de las personas que pudieron haber vivido en el pasado.

En esta misma actividad vimos el documental “Erase una vez el hombre. El Hombre De Neanderthal Ep2-2, 2-3”¹² Considerándola necesaria para que los y las estudiantes relacionen la historia con el acontecer real y así poder permitir una reflexión acerca del quehacer general de las personas en ese tiempo, hasta caer en el análisis de las formas primitivas de contar.

Después de ver el video, Dayana expresó que los seres humanos del pasado se dedicaban a la agricultura y la caza de animales. Jonathan por su parte, representó la caza de animales y resaltó que con las pieles de los animales que casaban hacían sus trajes. A continuación mostramos las producciones de ambos.

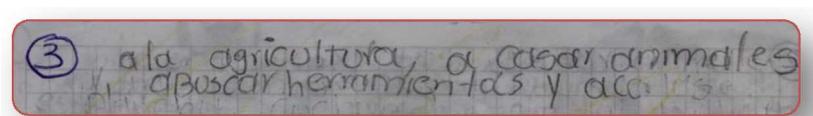


Ilustración 31. Dayana, Reflexiones sobre el pasado, después de ver el documental. Julio 2012.

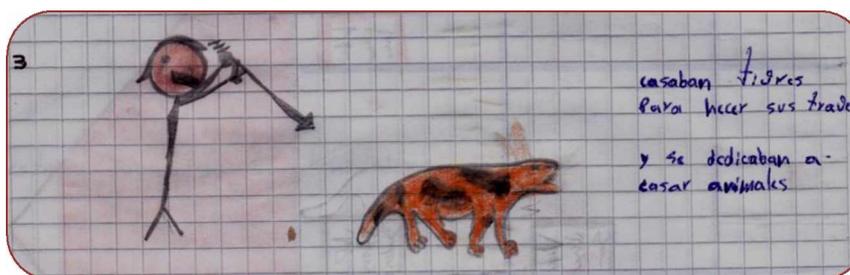


Ilustración 32.. Jonathan, Reflexiones sobre el pasado, después de ver el documental, julio de 2012.

¹² Consultado en <http://www.youtube.com/watch?v=TVA1V3Dfqls>, el 15 de mayo de 2012.

Cuando se les preguntó a los estudiantes - dónde vivían las personas del pasado - Jonathan y Oscar mostraron en sus representaciones que primero vivían en cuevas y luego en chozas construidas por ellos mismos.

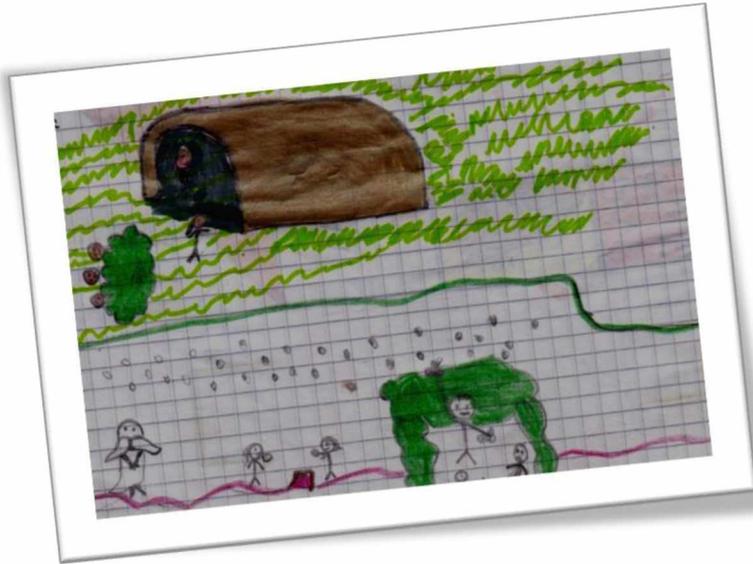


Ilustración 33. Jonathan, Cómo vivían los seres humanos en el pasado. Julio de 2012

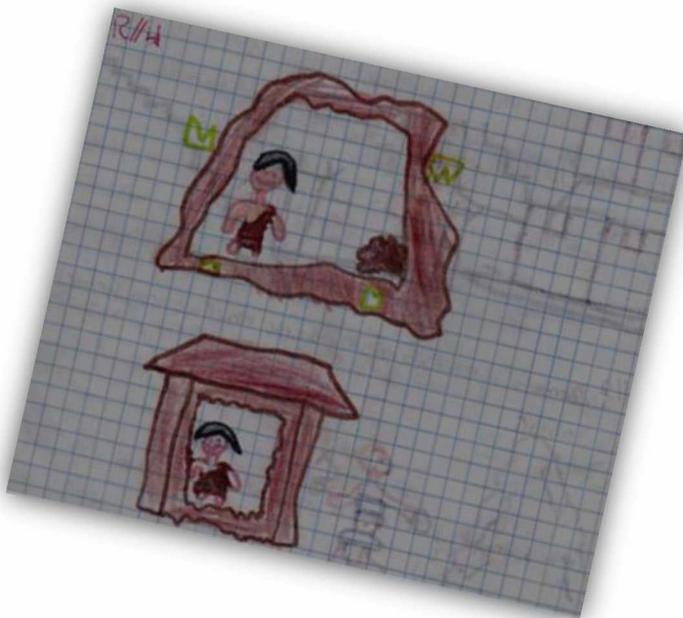


Ilustración 34. Oscar, Cómo vivían los seres humanos en el pasado. 16 Julio de 2012

En estas representaciones se nota como van apareciendo las plantas, animales, rios, etc. conforme se va alcanzando una idea de cómo era el pasado visualizado en el documental. Esto, nos llevó a pensar en la importancia del otro como todo lo que rodea al sujeto, para la constitución del ser mismo, Bajtín (1978 p. 24). Jonathan y Oscar después de ver el documental descubren, a través de ello, aspectos que no podían ver y les generan nuevas visiones sobre los seres humanos en el pasado. En ese sentido, se van proyectando como sujetos históricos cuyas ideas y maneras de interpretar sus realidades, van acorde a nuestros ambientes y a la lectura particular del mundo.

Para mostrar algunos otros quehaceres generales de las personas primitivas, Angie expresa:

Las personas vivían en la selva, y a medida que pasaba el tiempo, fueron cambiando la forma de alimentarse y vestirse, gracias a Dios la mejoraron y hoy no somos así.

(Angie, reflexión sobre el quehacer de las personas primitivas, después de ver el documental. Julio de 2012)

Angie, con su expresión, refleja en primer lugar, la existencia e importancia del cambio y del movimiento, desde condiciones individuales y sociales reales como lo son la de vestirse y alimentarse. En esta línea, compartimos con Caraña (1984) que todo deviene, todo fluye y todo cambia en el mundo. Angie, durante la socialización así lo dejó claro, al identificar que hoy en nuestro contexto no nos vestimos ni nos alimentamos así.

En segunda instancia, Angie pone de manifiesto la comparación del tiempo pasado y el actual. De lo cual, se aprecia un apego especial a su cotidianidad, producto de un devenir real, que enmarca su concepción de vida como producto de su cosmogonía e historicidad.

Para terminar de mencionar las generalidades de las personas en el pasado, Jonathan deja ver en la siguiente producción, que los seres humanos de ese tiempo se empezaban a preocupar por contar los días y otras cosas como los animales, veamos:

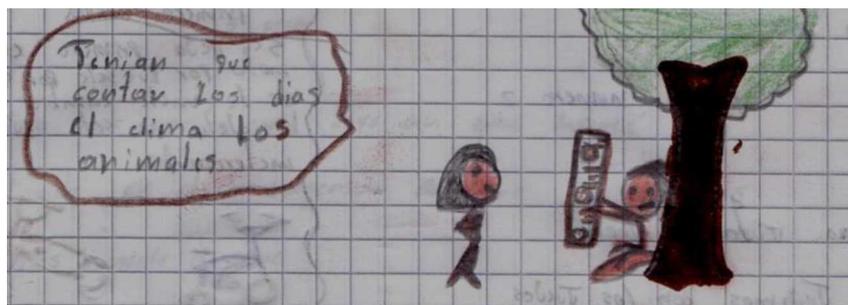


Ilustración 35. Jonathan, Reflexión sobre el quehacer de las personas primitivas, después de ver el documental. julio de 2012

Hasta este momento, podemos ver que el aprendizaje se da en términos de la apropiación de conceptos a la hora de reflexionar, discutir, imaginar y pensar en torno a cómo vivían las personas primitivas.

Ahora, cuando el profesor les preguntó: ¿Cómo contaban las personas de ese tiempo?, Oscar, Dayana y Catalina expresaron que utilizaban los dedos de las manos, piedritas, rayitas, trozos de madera, etc. Para contar las cosas que los rodeaban.

En este momento, los estudiantes pasaron a pensar en las formas de contar sin tener en cuenta los elementos tecnológicos de las formas numéricas actuales; se vislumbró el principio de correspondencia biunívoca. Pues, Dayana, Catalina y Oscar lograron describir el proceso de contar y se evidencia la correspondencia uno a uno en la forma de contar: objetos como animales, personas, frutas, viviendas, árboles etc. con objetos que cuentan como los dedos de la mano, piedras, rayitas en madera, etc. De este modo, se logra restablecer la abstracción que tienen de forma intrínseca los números como herramienta tecnológica, resultante de la interacción con diversas abstracciones histórico-culturales.

El recurso numérico recreado, hace corresponder uno a uno los objetos que se cuentan con los que se usaron para contar, haciendo una conexión más simple del concepto de número actual. Pero, más compleja por envolver la idea de correspondencia biunívoca, tan fundamental para la

concepción matemática de equivalencia que a su vez constituye el concepto de número, como enunciamos en la preparación del camino. Así, la forma tecnológica de número actual (símbolos) fue quitada para hacer más evidente su contenido: la idea de correspondencia y su relación uno a uno, que según Caraba (1984), nos facilita la comprensión de problemas relacionados con los irracionales, las funciones etc.

Maravillosa noción de correspondencia,... transportada al dominio de lo infinito, se transforma en un instrumento poderoso de clasificación, en el prodigioso escarpelo de la más extraordinaria anatomía del bisturí hecho por el hombre a anatomía de lo infinito. (Caraba, 1984. P. 92)

Ahora bien, aunque los estudiantes mencionados anteriormente realizan una primera relación entre los conjuntos de la correspondencia biunívoca: conjunto contado (conjunto de variación cuantitativa que se quiere controlar) y conjunto que cuenta (conjunto que se pone en correspondencia con el conjunto que se quiere controlar), he aquí la importancia de haber trabajado la noción de grandeza en las AOE anteriores. Como docente les pregunté, con el objeto de identificarlos mejor, ¿qué y con qué contaban las personas de ese tiempo? Estas fueron las respuestas de algunos estudiantes.

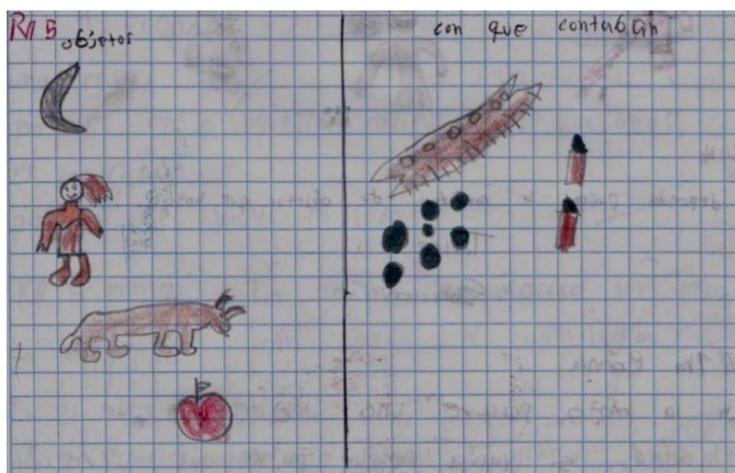


Ilustración 36. Oscar, ¿Qué y con qué contaban los seres humanos de ese tiempo?, julio de 2012

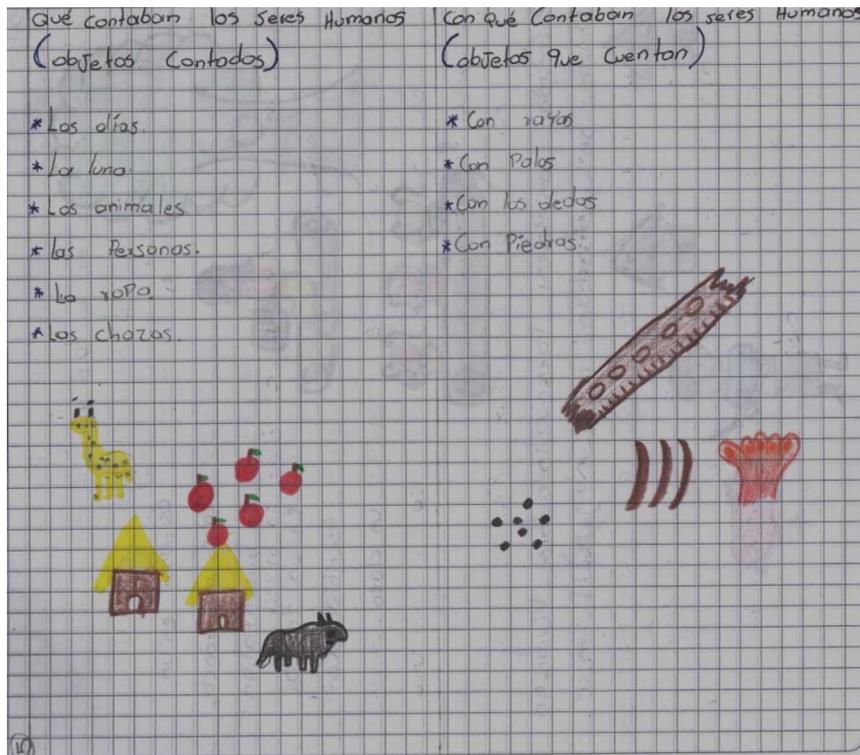


Ilustración 37. Angie, ¿Qué y con qué contaban los seres humanos de ese tiempo?
julio de 2012

En el momento de la socialización de sus representaciones, Angie expresó que contaban los días porque por cada día que vivían ponían una rayita en un trozo de madera y esto les ayudaba a prepararse para situaciones climáticas como el invierno. Además contaban los animales con los dedos, para que no se les perdieran. “Un animalito un dedito, otro animalito otro dedito y así profe” termina diciendo Angie. En este sentido, se nota como Angie asocia y relaciona el proceso de contar con las necesidades que van presentándose en la vida de las personas y, concordamos con Caraba (1984) cuando dice:

A medida que la vida social va aumentando de intensidad, esto es, que se tornan más desarrolladas las relaciones de los hombres de unos con los otros, el conteo se impone cada vez como una necesidad más importante y más urgente. (Caraba, 1984. P. 3)

La idea de correspondencia en esta situación, está dada cuando Angie hace corresponder sucesivamente cada día (limitado por la aparición de la luna) con una rayita en un trozo de madera y, cada animal con cada dedo de la mano. De este modo, según Caraña (1984 p.7), Angie se encuentra en la fase de hacer corresponder -una operación mental que según este autor realizamos constantemente y es una de las ideas básicas que va tomando importancia en el desarrollo de las matemáticas.

Colocar en correspondencia biunívoca el conjunto de lo que es contado (parte izquierda de las representaciones anteriores de Angie y Oscar) con lo que se utiliza para contarlo (parte derecha de las representaciones) exige que haya un antecedente, en el caso de Angie los días o animales y un consecuente, las rayitas en el tronco o los dedos de la mano. Empezar a relacionar un elemento del conjunto contado con uno del conjunto que cuenta, es lo que Caraña (1984, p.7) denominó como -ley de la correspondencia.

Usualmente no se cuestiona por qué los dedos, las piedras, las rayitas en trozos de madera, etc, pueden contar animales, días, personas, manzanas, plátanos, chozas, etc. tal vez porque las cualidades (aspecto discreto) de estos últimos constituyen la rigidez en la forma numérica y, constituirán en un futuro, un elemento básico en la transposición de la idea de “unidad de medida” hacia la creación de una nueva forma numérica (la fracción) y un nuevo concepto de número, los racionales.

En concordancia con lo anterior, autores como Alexandrov et al. (1976), Caraña (1984), Davidov (1982) y Lima & Moisés (1998), dejan entrever que los estudiantes deben pasar por la naturaleza esencial del número natural, de la geometría y, por la relación dada entre aritmética/geometría que es lo que finalmente permite expresar mediciones que generan la necesidad de fraccionar la

unidad de medida para poder expresar la magnitud con mayor exactitud en partes de la unidad. Así fue como surgieron las fracciones: de la división y comparación de las magnitudes continuas.

Hasta este momento, hemos considerado la importancia de reflexionar sobre las *relaciones* dentro del proceso de humanización, permitiendo la comprensión de los procesos de contar que se llevaron a cabo a través de la historia para reconocernos a nosotros mismos como seres particulares individuales, productos de factores sociales y culturales, capaces de reconocer correspondencias en las situaciones reales. Más adelante, nos vamos a encontrar con la expresión de Oscar, parte del título, pero antes terminemos de ostentar, lo que sucedió para que Oscar expresará esta frase tan contundente.

La tercera actividad se llamó *“El pasado de los números naturales ”*. Surge como complemento de las dos AOE anteriores y consistió en identificar los objetos de la naturaleza que están dados en unidades naturales; en determinar cómo se pudo originar nuestro sistema de numeración y; en reconocer qué objetos no se podían contar porque no estaban dados en unidades (representados con aspecto continuo). A partir de las necesidades a las que se fueron enfrentando los seres humanos en su proceso histórico y evolutivo de contar, consideramos necesario proponer esta actividad para posibilitar en los aprendices del movimiento conceptual de la fracción, la distensión de los contextos de utilización de los números naturales y el reconocimiento de procesos abstractos que permitieron a las personas llegar al concepto de número natural y por ende prever la relación con la geometría para originar procesos de medición que llevan a la fracción.

En el espacio de la socialización de las preguntas que orientaron esta actividad, Jonathan expresa y dibuja lo siguiente, cuando se le pidió identificar (aún en ese viaje imaginario) los objetos de la naturaleza que están dados en unidades naturales fácil de contar:

Fácilmente, los seres humanos eran capaces de contar los árboles, animales como el León, arbustos y hierba.



Ilustración 38. Jonathan, socialización: ¿qué objetos son fáciles de contar en la naturaleza? julio de 2012

En la afirmación de Jonathan identificamos que los tres primeros objetos los dibujó en unidades, lo cual les da un carácter de objetos organizados en unidades discretas. Pero el cuarto objeto al que se refirió Jonathan: “hierba”, lo dibujó de una forma continua, no naturalmente separado, por lo que, como docente, le pregunté a Jonathan: ¿la hierba o el pasto lo podían contar las personas primitivas? Jonathan se quedó pensando y después de unos segundos, no respondió. Entonces, se abrió el interrogante para el resto de los estudiantes y Daniel toma la palabra para expresar:

No. Porque es mucha y entonces ¿cómo la contarían? El grupo de nosotros puso acá (señalando los objetos que cuentan de la actividad anterior) que los seres humanos podían contar con hojitas. Con hojitas que se encontraban por ahí. Utilizarían las hojas y con eso lo contarían; o con piedras. Pero un pastizal es mucho y no se podría contar porque se envolarían.

(Daniel, socialización: ¿qué objetos son fáciles de contar en la naturaleza? julio de 2012)

Jonathan, después de la intervención de Daniel, volvió a retomar la pregunta del docente contestando:

Entonces, si es poquita hierba si se puede contar con piedritas pequeñitas.

(Jonathan, socialización: ¿qué objetos son fáciles de contar en la naturaleza? julio de 2012)

Daniel asintió la cabeza, y con un gesto de estar de acuerdo dijo: “así, sí”

En la primera intervención de Daniel (en esta socialización) se evidencia que es difícil contar una gran cantidad con hojitas o piedritas, lo cual quiere decir que el significado que da al numeral “hojita” está operacionalmente limitado en el conteo de grandes cantidades, sin cuestionar la característica discreta del conjunto contado.

Daniel y Jonathan con sus reflexiones dieron cuenta de los cambios que se pueden dar en el contenido numérico cuando se quiere contar objetos de la realidad. Además, dieron a conocer una relación entre la cantidad y la cualidad del objeto que cuenta, mostrando la importancia de ver el objeto contado como unidad naturalmente separada (discreta) para poder relacionarla con el objeto que cuenta. Pero, también arrojó un cuestionamiento muy significativo por parte de Daniel, “¿Cómo lo contarían?”, al referirse a la gran cantidad de hierba que él se imaginó en un principio. La cuestión que expresa Daniel, hace referencia a la siguiente pregunta que les propusimos: ¿cómo contar una gran cantidad de ovejas con tan sólo algunas piedritas?

Para dar respuesta a este interrogante, Daniel en su explicación manifiesta que para contar grandes cantidades, los seres humanos podían utilizar primero piedritas, sino les alcanzaban seguían con hojitas, sino seguían con los dedos de la mano, sino seguían con fruticas. A continuación se evidencia lo que Daniel dibujó y escribió:



Ilustración 39. Daniel, socialización: los seres humanos primitivos ¿Cómo contarían grandes cantidades de objetos? julio de 2012

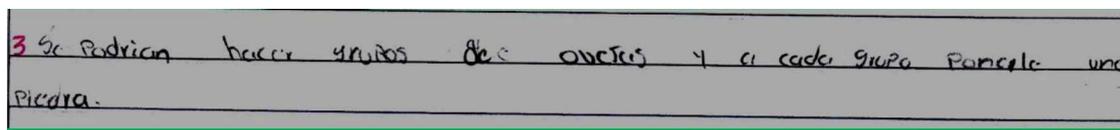
En la socialización de Daniel se percibe la dificultad que se encuentra en contar grandes cantidades. Pero a su vez una solución a esta necesidad utilizando diferentes formas asumidas por el conjunto que cuenta. Aunque Dayana, en este instante, expresó que contando con todo eso (refiriéndose a los objetos que propone utilizar Daniel) las personas se podían envolar. En concordancia, mi rol de docente me obligó, en este instante, a redireccionar y aclarar la pregunta en el sentido de: cómo contarían sólo utilizando unas cuantas piedritas nada más. A lo que después de un tiempo, Oscar nos compartió:



Ilustración 40. Oscar, Socialización: ¿cómo contarían, los seres humanos primitivos, grandes cantidades utilizando algunas piedras nada más?, julio de 2012

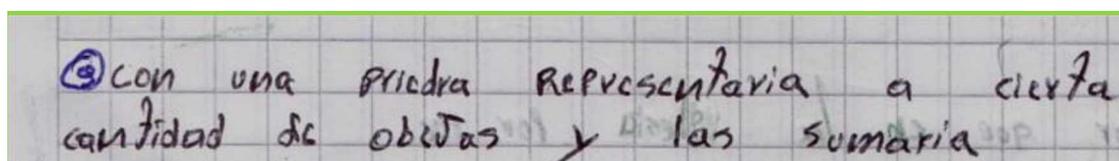
De la respuesta recursiva e ingeniosa de Oscar se evidencia una intuición a aumentar el número de elementos para contar, a través de la acción de partir las que tienen. Además, su contacto anticipado con dos palabras importantes relacionadas con el concepto de fracción en particular: “partir y mitad“. Palabras que sin lugar a dudas, habrá conocido en el marco de sus prácticas sociales y en la interacción con los otros (en el sentido de Bajtín, 1978) de su mismo contexto (más adelante las utilizaremos). La propuesta de Oscar, hace que sigan apareciendo más elementos, esta vez partidos por la mitad, que le permiten contar. Por eso, aclaré: y si tampoco se

podrían partir las piedras ¿qué?, ¿cómo contarían esas grandes cantidades de ovejas o de hierbas? A lo que Catalina, Jonathan y Angie propusieron:



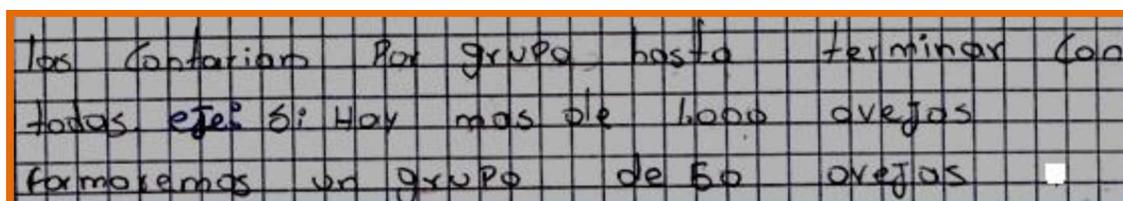
3 Se podrían hacer grupos de ovejas y a cada grupo ponerle una Piedra.

Ilustración 41. Catalina, Socialización: ¿cómo contarían, los seres humanos primitivos, grandes cantidades utilizando algunas piedras nada más?, julio de 2012



Con una piedra representaría a cierta cantidad de ovejas y las sumaría.

Ilustración 42. Jonathan, Socialización: ¿cómo contarían, los seres humanos primitivos, grandes cantidades utilizando algunas piedras nada más?, julio de 2012



los contarían por grupo hasta terminar con todas ellas. Si hay más de 1000 ovejas formaremos un grupo de 50 ovejas.

Ilustración 43. Angie, Socialización: ¿cómo contarían, los seres humanos primitivos, grandes cantidades utilizando algunas piedras nada más?, julio de 2012

Las afirmaciones de Catalina, Jonathan y Angie comunican la idea de contar en grupos las ovejas presentadas en la imagen, haciéndole corresponder a cada grupo una piedra. Jonathan al respecto, sugiere una manera aditiva de hacerlo. Mientras que Angie da un ejemplo de la cantidad de ovejas que tendrían los grupos, 50.

De esta manera, fue posible observar en las argumentaciones de estos estudiantes, la facilidad con que identificaron los objetos que vienen en unidades inmediatamente identificables -fáciles de contar (por su trabajo previo sobre la grandeza), los cambios atribuidos a la forma del numeral en

los objetos que cuentan, una vez que se retomó el tiempo en que contaba con piedras, y la reflexión frente al principio fundamental de la correspondencia biunívoca entre los objetos y los aspectos fundamentales que permiten esta correspondencia.

Este viaje imaginario por el pasado de los seres humanos finaliza con la pregunta sobre si todo lo que estaba a su alrededor lo podían contar los seres humanos. Al respecto, Daniel comparte con la clase lo siguiente:

Los seres humanos en el pasado podían contar todo lo que estaba a su alrededor. Por ejemplo, los árboles, los animales, las plantas, las frutas, todo.
(Daniel, Socialización: ¿Todo lo que existía en la naturaleza lo podían contar los seres primitivos?, julio de 2012)

Pero, Dayana toma la palabra para expresar que todo no. Por ejemplo, el agua no la podían contar. Veamos:

Los seres humanos en el pasado no podían contar elementos como el agua, las nubes, la tierra, el aire. Esas cosas no las contaban. Porque con piedras no se podía
(Dayana, Socialización: ¿Todo lo que existía en la naturaleza lo podían contar los seres primitivos?, julio de 2012)

En la socialización de Daniel hay una percepción de que en la naturaleza todo está dado en unidades separadas y discretas que pueden ser contadas. En cambio, en la elaboración de Dayana hay una reflexión frente a otros elementos de la naturaleza que se presentan en continuidad, que no se ven separados y, por lo tanto este es un factor limitante para el establecimiento de la correspondencia biunívoca entre: el agua y las piedras por ejemplo.

Como docente, en este punto final de esta tercera AOE, se quiso escudriñar sobre cómo la pasaron en ese viaje imaginario hacia el pasado, a lo que la mayoría respondieron que bien. Pero, Oscar contestó:

Yo muy bien. Aprendí que todo se relaciona profe, los números con las cosas que hay en la vida.

(Oscar, Socialización: ¿Cómo la pasaron en el viaje imaginario? julio de 2012)

Hasta este momento, ha sido evidente, en este camino hacia la fracción, que el proceso de contar subyace la necesidad de ir enfrentándose cada vez a problemas que desencadenan, en el sentido de la teoría de la actividad de Leontiev, el cúmulo de conocimientos matemáticos que desatan los estudiantes en los procesos de interacción, diálogo y puesta en común.

Así, plantear como se puede cuantificar el agua y la tierra fue nuestro referente a seguir en la siguiente categoría de análisis de este trabajo, porque en el sentido de autores como Lima & Moisés (1998) el trabajo con los números naturales en el mundo que no está organizado en unidades, se vuelve importante para que los niños comprendan el origen de las unidades artificiales que se usan para contar, medir y posteriormente fraccionar.

LA RELACIÓN ENTRE EL NÚMERO Y LA FORMA.

Para Alexandrov et al. (1976) la geometría, al igual que los números naturales, proviene de la actividad práctica de los seres humanos en los tiempos prehistóricos, específicamente su origen se debió a que los seres humanos para satisfacer sus necesidades se dedicaban a manufacturar objetos cada vez más regulares en su forma y a utilizar la tierra.

Los seres humanos primero dieron forma a sus materiales y solo más tarde reconocieron la forma como algo que se imprime a la materia y que puede, por consiguiente, ser considerada en sí misma, haciendo abstracción de aquella. (Alexandrov 1976, p.38)

En este segundo momento evidenciaremos dos AOE, que permiten reconocer que la geometría surge por la necesidad de hacer objetos y formas para resolver problemas de la vida cotidiana, relacionados con la cuantificación de los elementos de la naturaleza que vienen sin unidades, como el agua (planteada en la primera actividad) y la tierra (planteada en la segunda actividad).

En concordancia con lo anterior, se le da el nombre de ***“La relación entre la forma y el número”*** a esta categoría; pues, estas dos actividades dejarán percibir el uso de unos elementos básicos de geometría, que subyacen con la necesidad de la creación de las unidades artificiales, y cómo estas unidades artificiales, junto con el número, se convierten en herramientas e instrumentos (desde

Bartolini & Mariotti, 2006 y Moreno & Hegedus, 2008) que median el aprendizaje, de posteriores procesos de medición.

La primera actividad de este momento la titulamos ***“¿De qué está hecha nuestra escuela? ¿La queremos así?”*** (Permite detenerse en los materiales de construcción de la escuela y por ende, la maqueta de la escuela que soñamos). En esta actividad iniciamos escuchando y cantando la canción “mi escuela” de Manuel Bonilla. Luego, hicimos un debate de donde surgieron reflexiones como la siguiente:

Nuestra escuela es pequeña, y no tiene casi espacio para jugar. Pero, nos la van a arreglar y yo la quiero mucho. Quiero a mis profes y a mis compañeros. Porque como dice la canción aquí aprendemos a leer, a multiplicar y a hacer la paz

(Daniel, reflexión de la canción "mi escuela" agosto de 2012)

A mí la canción me pareció bonita porque todos debemos cuidar y querer nuestra escuela, porque los profes también nos quieren a nosotros, y si nos regañan es por algo.

(Dayana, reflexión de la canción "mi escuela" agosto de 2012)

De estas reflexiones, queda claro que aunque tenemos problemas con respecto al espacio físico, se hace evidente un gran sentido de pertenencia por parte de los estudiantes. Pues, a la gran mayoría les gusta estudiar aquí y el hecho de que la vayan a remodelar los motiva, y más aún sabiendo que desde lo que estamos haciendo en este proyecto, resultará una propuesta a cerca de qué y cómo queremos nuestra escuela, para que los entes encargados de esta remodelación, nos puedan tener en cuenta.

Después de compartir las reflexiones sobre el sentido de pertenencia por nuestra escuela, el trabajo de los estudiantes consistió en responder unas preguntas que los llevó a reflexionar sobre la unidad artificial. En la primera pregunta de estas, a los estudiantes se les indagó sobre los materiales que se usan para construir una escuela como la nuestra y la estimación de la cantidad de cada material empleado, a lo que Angie y Catalina dibujaron:

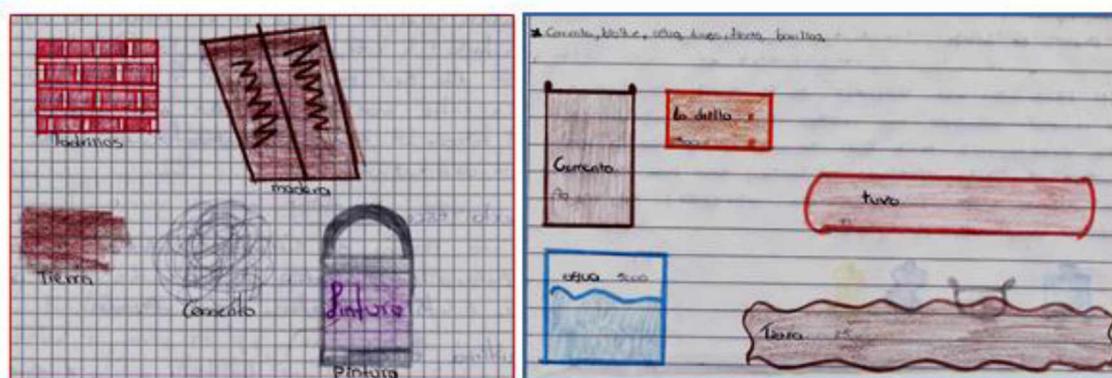
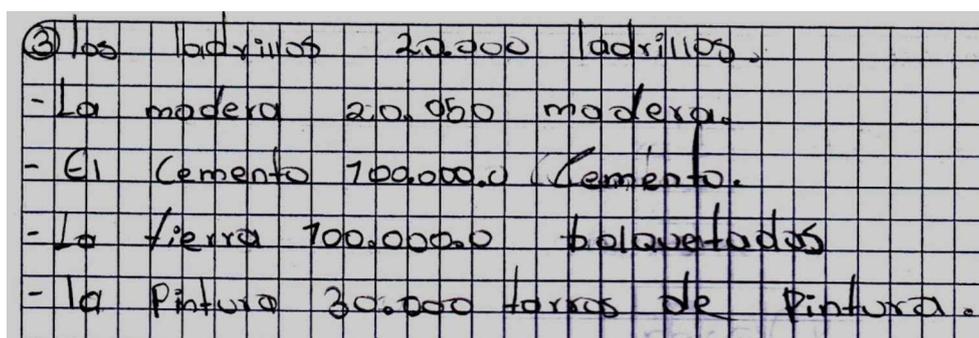


Ilustración 44. Angie y Catalina, ¿De qué está hecha nuestra escuela? agosto de 2012

De la elaboración de Angie y Catalina se observa la identificación del ladrillo, la varilla, el tubo, el cemento, la madera, la pintura, al agua y la tierra como elementos de construcción de nuestra escuela. Ahora, como docente les pregunté ¿cómo supieron sobre esos son los materiales? Angie no dudó en decir que ha visto en el barrio como construyen casas. Y Catalina dijo haberse dado cuenta, cuando le ha llevado el desayuno al papá, quien es maestro de obra. En ese sentido, se nota como este tipo de trabajo se convierte en una actividad donde concurre, en el sentido de la perspectiva histórico-cultural, la mediación del otro para traslapar un conocimiento, en este caso empírico, de generación en generación.

En este momento como docente les pedí pensar en: ¿cuáles materiales utilizaremos para construir la maqueta? De donde Oscar expresó que con su papá, lo van a hacer con unos ladrillitos pequeños comprados en la papelería. Angie, dijo que su mamá ya los había averiguado y costaban 3500 pesos la caja. De esto, se aprecia la motivación por parte de los niños y niñas para construir la maqueta. Aquí, se les propuso el cartón también, por su economía.

Ahora, cuando se les pidió que estimaran cuánto de cada material se necesitó para construir nuestra escuela. Esta fue la respuesta de Angie:



③ los ladrillos 20.000 ladrillos.
- La madera 20.050 madera.
- El Cemento 100.000.0 Cemento.
- La tierra 100.000.0 balquetadas
- la Pintura 30.000 litros de pintura.

Ilustración 45. Angie, ¿cuánto de cada material creen que se necesito para construir la escuela? agosto de 2012

A partir de la respuesta de Angie, se ahondó en cómo contó la madera y el cemento a lo que respondió que por tablas y por bultos. En ese sentido, se puede ver cómo estas unidades ya están organizadas en el mundo, para Angie. “Los números naturales, combinados con la ley del menor esfuerzo, propician el surgimiento de la ilusión de que toda la naturaleza está organizada en unidades naturales, y por tanto, puede ser contada con números naturales” (Lima & Moisés 1998, p20).

Catalina por su parte, comparte lo siguiente:

Algunos materiales si se pueden contar, otros no. Los ladrillos, yo creo que se usaron unos ciento cuarenta mil; de cemento como unos cinco mil bultos, porque deben ser menos; de tubo unos trescientos tubos. Pero, el agua no sé cuánto.

(Catalina, socialización: ¿cuánto de cada material creen que se necesitó para construir la escuela? agosto de 2012)

En la respuesta de Catalina, se puede notar, un acercamiento coherente (por tratar de correlacionar los ladrillos con el cemento), a la estimación de las cantidades de los materiales que fueron necesarias para la construcción de nuestra escuela. Además, surge una inquietud, que según la historia de las matemáticas fue un problema (referido al principio de este apartado) que se tuvieron que enfrentar los seres humanos y que dio bases para el fundamento de la geometría: Cómo cuantificar las cantidades que no se presentan en unidades naturales. De ahí, que como docente aprovechara esto para poder permitir la discusión en torno al agua. Veamos lo que Catalina escribió al respecto:

El líquido que más usamos en la escuela es el agua, que es muy importante para nosotros para poder sobrevivir. El agua viene debajo de la tierra, se filtra y llega a los tanques por medio de la motobomba. Es líquida, refrescante y limpia. Sirve para hidratarnos y debemos cuidarla
(Catalina, registro escrito, socialización sobre el agua, agosto de 2012)

A esta respuesta de Catalina, Angie, en una interpelación expresó que el agua también puede venir de las montañas, ríos o manantiales, porque el profesor de sociales así se los ha dicho. Al indagar más con Catalina sobre por qué pensaba que el agua venía debajo de la tierra. Ella sustentó que el señor celador le había explicado que el agua de la escuela era de un aljibe, pasaba a unos tanques elevados, por medio de una motobomba, y luego era distribuida a todas las llaves. Desde la perspectiva histórico-cultural, esto es un ejemplo de la importancia de la dialéctica que se entreteje entre los sujetos y el entorno para explicar “la producción y legitimación del conocimiento” (en términos de Jaramillo, 2011, p.19).

En el escrito anterior de Catalina también se logra ver una reflexión en torno al cuidado del agua. En este sentido, les pregunté a los estudiantes ¿por qué y cómo se debe cuidar el agua? Daniel y Jonathan dieron las siguientes respuestas:

Porque si la mal gastamos algún día se va acabar y entonces nos moriríamos de sed, las plantas se marchitarían y los demás animales también se morirían.

(Daniel, socialización ¿por qué y cómo se debe cuidar el agua? agosto de 2012)

Debemos cerrar la llave cuando nos cepillamos los dientes y cuando nos bañamos, para cuidarla.

(Jonathan, socialización ¿por qué y cómo se debe cuidar el agua? agosto de 2012)

De las respuestas de Daniel y Jonathan se pudo notar que relacionan el cuidado del agua, con la importancia para la vida de los seres vivos y, asocian el ahorro de ella, con cerrar la llave cuando no se necesite. Esto nos llevó a pensar en la relevancia que tiene para los estudiantes, el realizar actividades que cobren un sentido para ellos, en tanto que sea validado desde sus prácticas sociales.

El debate continuó, Oscar también participó en esta discusión diciendo lo siguiente:

**En mi casa como no hay regadera, nos bañamos con una coca¹³ al lado de la alberca.
(Oscar, socialización ¿por qué y cómo se debe cuidar el agua? agosto de 2012)**

En este sentido, se les preguntó a Oscar y a los demás estudiantes, sobre cómo, desde esa práctica diaria del baño, podrán ahorrar agua las personas que se bañan al lado de la alberca. A lo que Oscar respondió:

**Yo pienso que bañándonos con cinco o seis cocadas de agua o con un tanquecito mediano, ahorraremos agua. Dos para remojarse y tres o cuatro para quitarse el jabón.
(Oscar, socialización ¿por qué y cómo se debe cuidar el agua? agosto de 2012)**

De la respuesta de Oscar pudimos ver una fórmula para el ahorro de agua en la práctica diaria del baño, así como también, una manera de medir o cuantificar el agua. En efecto, para lo primero, se sintió que esta discusión apuntó a crear una conciencia sobre el uso del agua y, para lo segundo, la confirmación de un movimiento inspirado en tomar de una forma discreta al contenido continuo - del agua, indicando que puede ser posible intervenir el aspecto continuo de esta, con el fin de atender un problema relacionado con los límites de la forma numérica que enumera aspectos discretos -el número natural. Pero, que se soluciona con la utilización de una unidad artificial -la coca.

A partir de la respuesta de Oscar, Dayana lanza la siguiente aseveración:

**Entonces, ¿esa puede ser una manera de contar el agua? Con cocas...
(Dayana, socialización ¿por qué y cómo se debe cuidar el agua? agosto de 2012)**

Como profesor, después de confirmar la conclusión de Dayana, volví a preguntar: ¿cómo más o con qué más, se puede cuantificar el agua? Para lo que Daniel respondió:

**El agua se puede contar por gotas.
(Daniel, socialización, ¿cómo más se puede contar el agua? agosto de 2012)**

¹³ En Antioquia, este término se usa para designar un recipiente para sacar agua o guardar alimentos, por lo general, es de plástico.

De la respuesta de Daniel se puede confirmar un movimiento que inspira una forma discreta del contenido continuo - del agua. Indicando que puede ser posible intervenir en el aspecto continuo de ésta con el fin de atender los límites de la forma numérica que enumera aspectos discretos como el número natural. En ese sentido, escoger la unidad de medida puede parecer una tarea simple, más como asegura Caraña (1998) envuelve identificar magnitudes de la misma especie y exige para la práctica de contar, la elaboración de atributos comunes a los objetos.

Catalina y Angie, para responder a cómo se cuenta el agua, dibujaron:

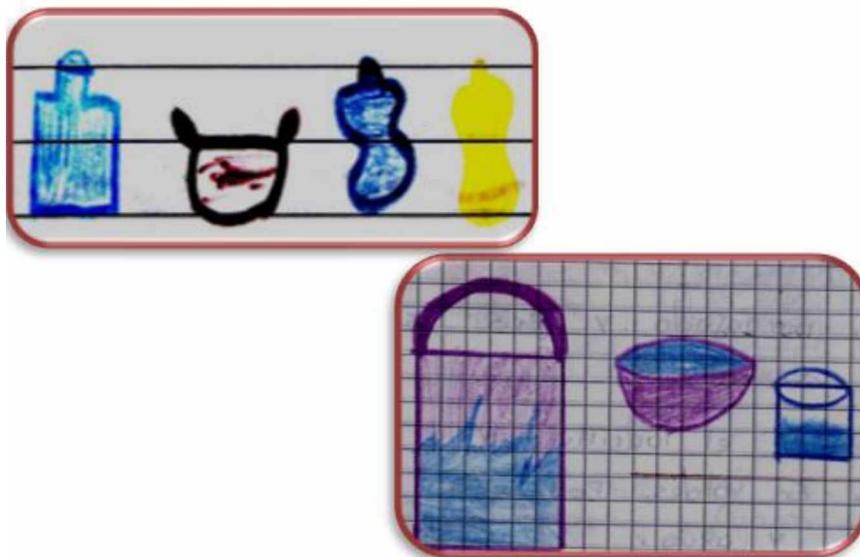


Ilustración 46. Catalina y Angie, Utensilios para contar el agua, Agosto de 2012

De las elaboraciones de Catalina y Angie se percibe que el agua se puede contar por medio de botellas, ollas, bolsa, tarros, baldes, coca o cualquier otro recipiente. Al respecto Jonathan también escribió lo siguiente:

El agua se mide con tarros y una ponchera etc.

(Jonathan, registro escrito, ¿cómo contar el agua? Agosto de 2012)

Con las respuestas de Catalina, Angie y Jonathan se ratifica lo que plantea Catalani (2002, p. 141) cuando afirma que un recipiente permite ver el agua en una forma discreta que admite medirla,

porque conduce a los estudiantes a establecer la correspondencia entre el número y la magnitud a ser medida. Por otro lado, en la respuesta de Jonathan aparece, por primera vez, la palabra medir en términos de comparar directamente algo que no está organizado en unidades naturales y que viene en forma continua -el agua. En ese sentido, Lima & Moisés (1998) sustentan que:

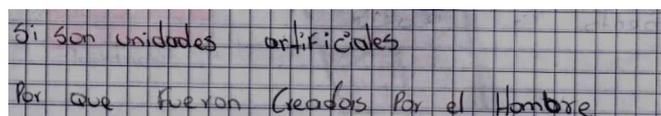
La comparación directa es la primera y más simple forma de medición que los seres humanos crearon y es basada en la manipulación de los objetos que van a ser combinados y en su superposición observada. (Lima & Moisés 1998, P. 53)

Esta idea de Lima & Moisés (1998), sobre la comparación directa, se refleja en Jonathan cuando combina dos elementos diferentes el tarro y el agua. De esto, también se puede interpretar que la medición ocurre aquí de manera rudimentaria, puesto que no se logra observar en la expresión de Jonathan el establecimiento de cómo hacer la medición.

Con relación a las botellas, ollas, bolsas, etc. historiadores como Alexandrov et al. (1976) dicen que éstas surgieron así:

La razón por la cual el hombre logró gradualmente concebir estas formas y figuras es la de que su observación de la naturaleza era activa, en el sentido de que para satisfacer sus necesidades prácticas, manufacturaban objetos cada vez más regulares en su forma. (Alexandrov et al. 1976, p. 38)

Ahora bien, como docente se les sugirió reflexionar sobre: ¿qué tipo de unidad pueden ser estos elementos? ¿Serán como las que vimos que utilizaba el hombre primitivo (en las actividades anteriores) para contar, como las piedritas, hojas, etc.? O ¿serán una unidad artificial, que obedece a una forma u objeto, que los seres humanos creamos para contar, o como lo expresó Jonathan para medir? A lo que Angie, contestó:



Si son unidades artificiales
Por que fueron creados por el hombre

Ilustración 47. Angie. Creación e identificación de las unidades (artificiales), 27 de julio de 2012

Angie en la socialización, relaciona los objetos artificiales como aquellos que han hecho las personas y los naturales como los que están en la naturaleza. Aunque parezca obvia, es importante esta reflexión para ir hilando las consideraciones, sobre las condiciones que se deben tener en cuenta para estar al tanto de por qué se utiliza una unidad artificial.

Cuando llegamos a este punto, de manera espontanea como docente pregunté a los niños: si una persona quiere saber cuánta agua hay en una alberca ¿Qué debe hacer? En esta parte queremos resaltar lo que Jonathan dijo:

**Con un balde, porque puede ser más rápido, porque es más grande.
(Jonathan, como cuantificar el agua que hay en una alberca, agosto de 2012)**

En ese instante, se pudo observar que Jonathan realizó una diferenciación entre objetos que a bien podían servirle para desarrollar el problema planteado. En el sentido de Lima & Moisés (1998) esto es usar una unidad artificial adecuada para medir una magnitud. Y en este sentido:

La creación de las unidades artificiales es cuando el ser humano crea mentalmente una unidad que utilizará para contar cantidades no organizadas en unidades naturales. (Lima & Moisés 1998, p.43)

De esta manera, podemos decir que la primera actividad sirvió como desencadenadora de reflexión (por parte de los estudiantes) sobre aspectos continuos y discretos de los objetos, considerando necesario deliberar sobre la dificultad de darle un sentido numérico a magnitudes continuas y explorar la creación de la unidad artificial con la cual podemos medir. Este proceso se vuelve fundamental para los sujetos que aprenden fracciones porque es lo que movilizará, posteriormente, la unidad de medida.

Antes de centrarnos en el análisis de la siguiente actividad, que también posibilitará la movilización de la unidad de medida, es necesario explicitar que desde la perspectiva

sociocultural de la educación matemática, el pensamiento, la construcción de sentidos y significados, la constitución de la conciencia y/o la producción y legitimación de conocimientos es mediatizada, según Vygotski (1995), Rabardel (1995, 1999), Moreno (2002), Moreno & Hegedus (2008, 2010), Radford (2006, 2008) y Jaramillo (2009, 2011) entre otros, a través de herramientas-artefactos-instrumentos.

En ocasiones herramientas-artefactos-instrumentos, son usados por autores de manera indistinta. Para efectos de este trabajo, no interesa centrarse en el establecimiento entre las diferencias, relaciones o en el proceso del paso de uno a otro. Pero, si se asume la idea de instrumento desde Moreno & Hegedus (2008, 2010) y Bartolini & Mariotti (2006) en el sentido de considerar los instrumentos como una construcción social que engloba a los artefactos, los signos y las acciones en el desarrollo de una determinada actividad. Así, herramienta y artefacto para este trabajo serán sinónimos y circunscriben al objeto material o simbólico. Mientras que el instrumento, es el que cumple la función de establecer la relación entre el o los sujetos, el signo y el artefacto de cara a una actividad. En palabras de Bartolini & Mariotti (2006), el instrumento como una construcción individual, tiene un carácter psicológico y está estrictamente relacionado con el contexto dentro del cual se origina y desarrolla.

Para Moreno & Hegedus (2008) la herramienta no cambia la estructura del objeto de la visión de quien la usa, mientras que el instrumento posibilita ver aspectos que no eran posibles de observar o ver con la herramienta, accediendo a conocimientos nuevos. Esto quiere decir, que los instrumentos se convierten en partes constitutivas y consustanciales del pensamiento. Los estudiantes aprenden con y a través de instrumentos.

En consecuencia de lo anterior, el papel mediador de esos instrumentos en la constitución de los objetos matemáticos es de suma importancia. Sobre todo cuando, en la esfera práctica, los seres humanos usan artefactos para alcanzar logros que de otra manera permanecerían fuera de su alcance, mientras que las actividades mentales son apoyadas y desarrolladas por medio de signos, que son los productos del proceso de internalización y que en la terminología Vygotskiana son llamados herramientas psicológicas (desde Bartolini & Mariotti 2008, p.7). En ese sentido, lo que le posibilita a los aprendices hacer de una herramienta un instrumento es el modo de uso de la misma; en nuestro caso, veremos a continuación como el software libre: Google Earth, actuó inicialmente como una herramienta, pero la manipulación, la interacción con el otro y la experimentación con los objetos que aparecen en pantalla por medio del modo de arrastre, acercamiento y alejamiento y búsqueda de sitios, fue lo que le posibilitó paulatinamente convertir dicha herramienta en instrumento.

De esta manera, la otra actividad que consideramos para el análisis de esta categoría, con los mismos estudiantes protagonistas fue: *“Mi escuela y su ubicación geográfica”*. Esta actividad envuelve la participación de todos, integrando, como ya se mencionó, los artefactos, los instrumentos, la interacción y el lenguaje. Con esta actividad se pretendió que los estudiantes reflexionaran sobre cómo organizar la tierra en unidades para ser contadas, pues, “una porción de tierra es un conjunto indefinido que no genera inmediatamente la percepción de una porción/unidad como acontece con un conjunto de ovejas” (Catalani 2002, p.165). De ese modo, se crea la necesidad de cuantificar la superficie. Hecho, que a su vez permite dar el siguiente paso en este camino hacia la fracción desde procesos de medición condicionados por el asunto de la comparación y la razón, tal como se dejará evidenciar en el análisis de la próxima categoría.

Por lo pronto, es necesario mencionar que esta actividad se desarrolló en dos momentos: uno individual, donde interactuaron con Google Earth y, otro grupal (por lo tanto las voces de los protagonistas pueden ser las voces del otro, en el sentido de Bajtín, 1978) donde resolvieron preguntas orientadoras de esta actividad. El lugar donde se desarrolló la actividad fue en la sala de sistemas de la Universidad de Antioquia - en el municipio de Caucasia - razón que despertó mucho interés y motivación por parte de los estudiantes y padres de familia.

En el momento individual de esta actividad se les explicó a los estudiantes como entrar y manipular controles de navegación tales como: el joystick de visualización, para mirar alrededor y desde una posición; el joystick de movimiento, para desplazarse hacia arriba o abajo, a la izquierda o a la derecha; el deslizador de acercamiento para acercar o alejar la imagen (el signo más para acercarla y el signo menos para alejarla); el anillo que hay alrededor del joystick de visualización y arrastrarlo para girar la vista. Del mismo modo, se les indicó a los estudiantes cómo buscar lugares y usar algunos botones de la barra de herramientas como: marcar lugares, agregar polígono, mostrar el historial de imágenes, entre otros.



Ilustración 48. Interacción con Google Earth, las fotos 3, 4, 5 y 6 son pantallazos, agosto de 2012

En este primer momento de esta actividad, se pudo evidenciar lo emocionados que estuvieron los estudiantes al ver desde otra perspectiva el planeta tierra, y como a través del entorno dinámico digital pudieron buscar y descubrir el mundo en tercera dimensión (3D), tal como lo vemos en la realidad. En concordancia con lo anterior, para los estudiantes fue importante explorar los diferentes joystick y herramientas del programa. Con ello, experimentaron la tensión y el juicio de descubrimiento que los condujo potencialmente a ver su realidad desde otros ángulos. Al respecto Jonathan dijo:

Profe... esto me parece muy chévere, porque podemos ver desde el cielo las casas y todo lo demás. Y uno se mete a ver. Y uno conoce más países.

(Jonathan, momento de interacción con el Google Earth. Agosto de 2012)

Así, como usuarios del Google Earth, los estudiantes tuvieron el apoyo de los andamios rigurosos y la captación satelital de imágenes y mapas para la observación de la infraestructura que es extremadamente difícil de reproducir en medios estáticos, como el brindado por el papel y el lápiz. En ese sentido, compartimos con Moreno & Hegedus (2008) cuando expresan:

Concebimos la herramienta de reflexión integrada en el entorno, como la apertura de una oportunidad para una nueva epistemología como noción de la prueba en sí misma que puede ser profundamente transformada, de nuevo, sustancialmente a través de un nuevo mediador.

(Moreno & Hegedus 2008, p.512)

En esa línea, interactuar con Google earth les permitió a los estudiantes realizar procesos de visualización sobre el planeta tierra, y les permitió unas “nuevas” formas de razonamiento, que no son posibles en un ambiente estático. Esto no implica, que el ambiente del lápiz y del papel deba ser eliminado en favor de la utilización de ambientes dinámicos digitales, sino que, nuevas formas de mediación permiten nuevas posibilidades de aprender.

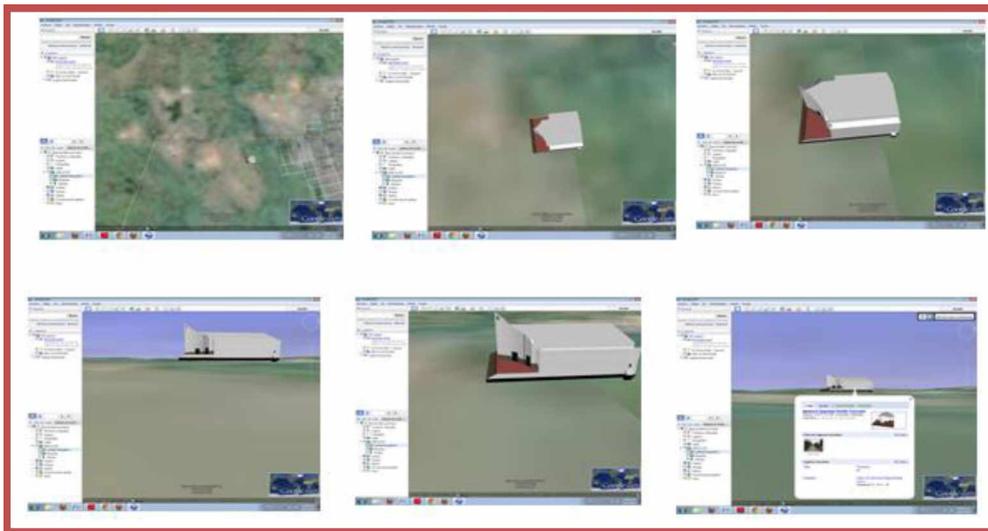


Ilustración 49. Interacción con Google earth. Pantallazos, Agosto de 2012

En el segundo momento de esta actividad se les pidió a los estudiantes explorar nuestro país y específicamente nuestro municipio, además, se les entregó unas preguntas que debían responder en equipos. La primera de ellas fue sobre ¿cómo está dividida o repartida la tierra? los equipos de Catalina, Jonathan y Angie, en la socialización, respondieron así:

En algunos lugares a unas personas les toca más tierra que a otras, porque algunas personas no tienen igual tierra que otras.

(Catalina, registro escrito, ¿cómo está dividida o repartida la tierra? agosto de 2012)

Los seres humanos hemos dividido la tierra con plata.

(Jonathan, registro escrito, ¿cómo está dividida o repartida la tierra? agosto de 2012)

Los seres humanos hemos dividido la tierra en países, municipios, pueblos y barrios. Algunos países son más grandes que otros.

(Angie, registro escrito, ¿cómo está dividida o repartida la tierra? agosto de 2012)

En la respuesta del equipo de Catalina se observa una reflexión encaminada a la inequidad social y económica que vive nuestro país. En la del equipo de Jonathan, hay una atribución al dinero para poder repartir la tierra. Si no se tiene dinero no hay tierra. Y, en respuesta del equipo de Angie hay una lectura de la posición geográfica del mundo, ofrecida por el Google earth y el

sentido de grandeza explicado en las actividades de la primera categoría. En términos generales, se puede apreciar la creación libre, por parte de los estudiantes, de sus respuestas y reflexiones sin la preocupación de expresarlas en un lenguaje formal matemático. Puesto que, en la pregunta no está expresado el concepto de medir ni tampoco el de la unidad de medida. Debido a que se trata de irlo construyendo, a partir de lo que el alumno tiene elaborado. En ese sentido, desde la teoría de la actividad de Leontiev, implica reconocer que el aprender, es un acto de intersubjetividad, de internalización, y por ende de mediación semiótica e instrumental.

En concordancia con las respuestas anteriores, como docente, se les preguntó sobre la opinión que les merecía el hecho de que algunas personas tuvieran más tierra que otras. Y esto fue lo que respondió el equipo de Catalina:

Algunas personas tienen más tierra que otras. No debería ser así, porque todos somos iguales y deberíamos tener lo mismo.

(Catalina, socialización, ¿cómo está dividida o repartida la tierra? agosto de 2012)

Desde la posición de ser niños, este grupo de estudiantes ve la igualdad como un derecho para todas las personas. Mientras tanto, el equipo de Angie ve el trabajo como posibilidad de adquirir bienes. Tal como se muestra en la siguiente interpelación:

Pero, si las personas trabajan pueden tener más que los otros.

(Angie, socialización, ¿cómo está dividida o repartida la tierra? agosto de 2012)

La perspectiva histórico-cultural en la voz de Miguel (2005) reconoce que la educación matemática debe tener un proceder ético. En concordancia con este autor, en este punto, la voz del docente se escuchó al pronunciar: si bien necesitamos cosas materiales para vivir, no debemos caer en el egoísmo, la envidia, la codicia, ni dejarse invadir por un deseo de tener y tener más, descuidando el bienestar ajeno. Así surgen las desigualdades sociales que son un gran mal para la

convivencia de los hombres y mujeres, porque generan resentimientos, guerras y dolor. Podemos ser personas que ganan más que otros o de las que tienen poco, pero, debemos pensar en el otro como un ser libre y semejante. Si tenemos mucho debemos compartir o crear fuentes de trabajo pagando sueldos justos y preocupándonos del bienestar de quienes trabajan, esas son buenas maneras de ser justos.

Después de la reflexión anterior, y con la intranquilidad de no haber apreciado el umbral de la finalidad de la primera pregunta, se vio la necesidad de replantearla. Esta es una bondad que ofrecen las actividades orientadoras de enseñanza (AOE) por estar constituidas por los elementos de la teoría de la actividad de Leontiev. Pues, parafraseando a GEPAPe (2010 p.101), una AOE es constituida en la interrelación profesor y estudiante y está relacionada con la reflexión del profesor que, durante todo el proceso, siente necesidad de reorganizar sus acciones por medio de la continua evaluación que realiza sobre la coincidencia o no entre los resultados logrados por sus acciones y los objetivos propuestos. Así, la pregunta se presentó en los siguientes términos: ¿cómo se cuantifica una cantidad de tierra? a lo que el equipo de Daniel contestó:

**La tierra la podemos contar con tarros, bultos, volquetadas o con una carretilla para llevar la tierra que se mezcla con cemento y agua, para hacer el piso.
(Daniel, ¿cómo se cuenta la tierra?, agosto de 2012)**

Esta mirada del equipo de Daniel hacia cómo cuantificar la tierra, deja ver un planteamiento cercano a lo aprendido en la actividad anterior sobre cómo cuantificar el agua, por ello, el equipo de Daniel ve la tierra en continuidad y propone unas unidades para poder cuantificarlas. Se aprecia en el sujeto que aprende fracción, la exploración de la imposibilidad de cuantificar aspectos continuos, a fin de articular el movimiento dinámico del concepto de unidad natural al

de unidad de medida - indicada por el grupo de estudiantes, hasta este momento, como la unidad artificial.

En este momento de la clase, por la acertada respuesta del grupo de Daniel y por el objetivo que se pretendía alcanzar con esta actividad, fue necesario explicar que a la cantidad de tierra que nos referíamos era a la de un determinado terreno o lote. Para ello, se les sugirió a los estudiantes ver nuevamente la ubicación de la escuela, el barrio y el municipio desde la panorámica que brinda el Google Earth (ver la siguiente ilustración). Luego, se les planteó a los estudiantes ¿cómo se cuantifica un terreno o lote?

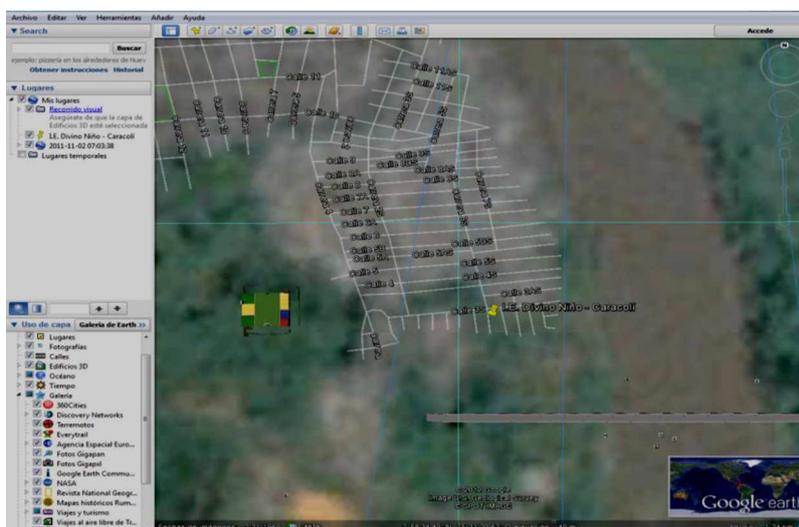


Ilustración 50. Software libre Google Earth, Cauca (Antioquia - Colombia) agosto de 2012

En esta nueva visualización, los estudiantes con gran emotividad, percibieron sitios representativos de nuestro municipio como el estadio de futbol, el puente sobre el rio cauca, el aeropuerto, el barrio y la casa donde viven, la ubicación de la iglesia y la escuela. De hecho, Dayana expresó:

Desde arriba se va viendo como las calles, y cuando se va acercando más, se ven las casas en forma como de cuadros.

(Dayana, opinión sobre el Google earth, agosto de 2012)

Tal vez sin saberlo, Dayana dio otra respuesta a la pregunta con que se abrió esta discusión (¿cómo está dividida o repartida la tierra?) porque ver las casas, desde arriba, en forma de figuras geométricas, específicamente como “cuadros”, es ver la forma -“cuadros”, desde Lima & Moisés (1998, p.47), como una unidad artificial adecuada que permite la cuantificación del aspecto continuo de la cualidad. De esta manera, se confirma lo importante que es el artefacto, en este caso el Google Earth, como mediador instrumental, para aprender.

En este instante, aprovechando lo que Dayana observó en el Google earth, como docente retomé nuevamente la pregunta en términos de: ¿Cómo podemos repartir un terreno para construir casas, por ejemplo? A lo que Angie escribió:

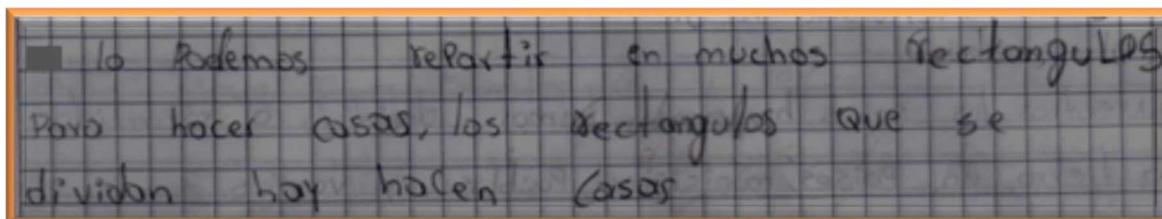


Ilustración 51. Angie, ¿Cómo podemos repartir un terreno para construir una casa, por ejemplo?, agosto de 2012

Hasta este momento, se puede entre ver como el artefacto usado en esta actividad se convierte en un instrumento que media la actividad matemática del alumno, a través de las refracciones y reflexiones que estos hacen de los registros de representación que constituyen en la cultura. Además, se puede evidenciar, gracias a la interacción con el software libre Google earth, que los estudiantes realizan procesos de internalización (en el sentido de Vygotski referenciado por Moreno y Hegedus, 2010) que les permite transformarse dialécticamente con el medio, así: Dayana desde arriba ve líneas y “cuadros” dispuestos en el municipio de Caucasia, posteriormente (con la manipulación) se da cuenta que son vías de tránsito y casas. La interacción con el software permitió a Dayana transformarlo y transformarse ella. La aparición de

la palabra, por parte de Dayana y posteriormente del profesor es un nuevo tipo de herramienta (simbólica) de mediación, que conlleva a que Angie observe nuevamente el software, lo manipule, interactúe con él y, pueda ver que esos “cuadros” que veía Dayana sean para ella rectángulos. Ahora, reconocer estos rectángulos implicó, para Angie, hacer visible el conocimiento que subyace a la estructura del software, puesto que pudo ver, de una manera organizada, una cantidad de tierra. En otras palabras, Angie vio los aspectos geométricos que conducen a un movimiento aritmético que permitió dividir superficies.

Volviendo a la segunda pregunta: ¿cómo se cuantifica un terreno o lote? el equipo de Oscar plantea contar el lote con pasos siguiendo una hilera, así:

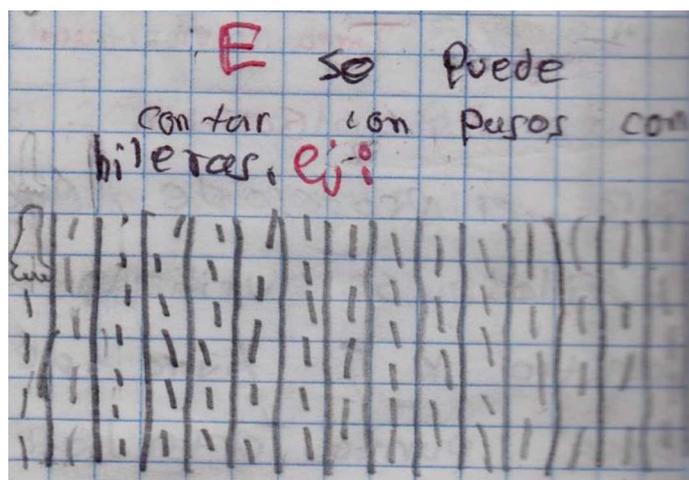


Ilustración 52. Oscar, ¿Cómo cuantificar un terreno? agosto de 2012

Durante la socialización anterior, se dio el siguiente diálogo entre Oscar y Jonathan:

Oscar: El terreno lo podemos contar con pasos

Jonathan: Pero, así no se contaría todo porque queda espacio entre un pie y otro

Oscar: Uuuhhhmmm, pero lo podemos hacer con los pies juntos. Así (muestra los pies), uno detrás de otro.

Jonathan: Pero, tendría que ser con los pies junticos y me parece muy difícil.

El equipo de Oscar plantea que con pasos (pie dispuesto de tras de otro con una distancia semejante a la que se deja al caminar) de una manera organizada se puede cuantificar el terreno. Jonathan la complementa al sugerir que teniendo los pies juntos para poder tapar (superponer) todo el terreno que se va a medir. Esta es una manera de realizar una comparación (entre el terreno y los pies) que desde Caraya (1984) y Lima & Moisés (1998) es muy importante para establecer procesos de medición. Lo que ocurrió en este diálogo entre Oscar y Jonathan, permite considerar, más adelante, que Oscar pudo aprender aquí a escoger la unidad de medida adecuada para medir longitud o superficie, porque comprendió que los “pasos” no le sirven para medir la superficie, en cambio los “pies” sí.

El equipo de Angie, por su parte, intervino para proponer lo siguiente:

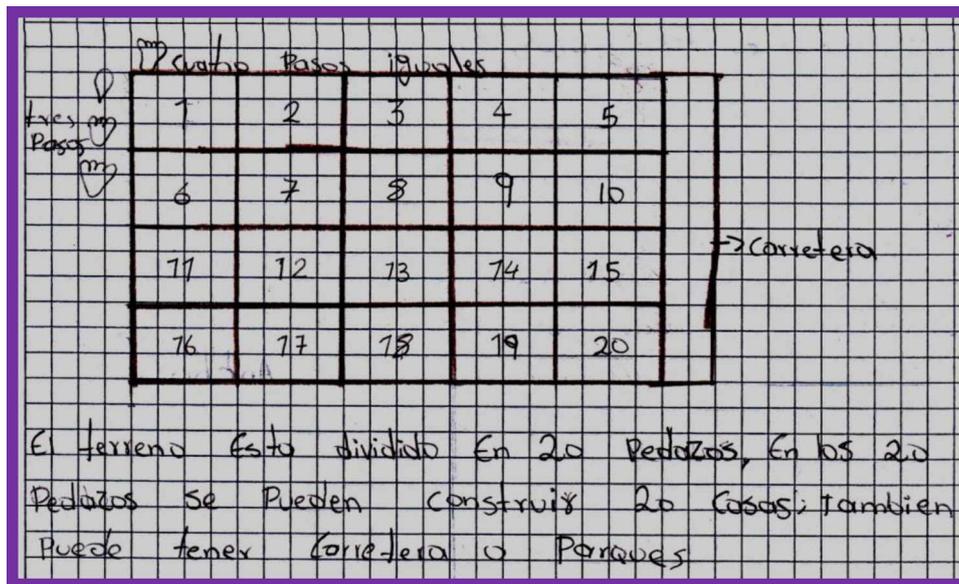


Ilustración 53. Angie, ¿cómo se cuantifica un terreno? agosto de 2012

En la respuesta del equipo de Angie se puede apreciar la división de un terreno por medio de “pedazos” con medidas de tres pasos de largo y cuatro pasos de ancho cada uno. Además, es identificable que la forma (el rectángulo en este caso) permite resolver el problema relacionado

con la “cuantificación” de los elementos de la naturaleza que vienen sin unidades como la tierra. En este sentido, se nota como Angie se apropió de unos elementos del Google earth y los puso a su disposición para solucionar un problema al que se tuvieron que enfrentar los seres humanos en los tiempos prehistóricos. Así lo exponen Lima & Moisés (1998):

Una de las primeras civilizaciones que comenzó a trabajar la tierra fue la egipcia... al lado del río Nilo...estas tierras eran propiedad del faraón. Para producir alimentos el faraón decidió distribuirlas entre las familias. (Lima & Moisés 1998, p. 36)

Así como en Oscar, en Angie también encontramos el movimiento de la creación de la unidad artificial. En este movimiento reside la transición del aspecto discreto, inherente al conteo de unidades naturalmente separadas unas de las otras y para el aspecto continuo, se da en el momento de la concepción de la unidad artificial.

La propuesta de Angie de dividir el terreno, se ve también en la concepción de Jonathan de la siguiente manera:

**Así me parece que se cuenta mejor la tierra porque así se mide todo, no queda espacio como con los pies.
(Jonathan, Socialización cómo se cuantifica la tierra, agosto de 2012)**

Jonathan compara los aportes de Angie y Oscar y da su opinión al respecto. De ahí, se puede entrever un aprendizaje, en este caso, construido desde los planteamientos de la perspectiva histórico-cultural, en interacción con el otro. Pues, para Jonathan es más eficiente la forma rectangular para garantizar la medición de todo el terreno en términos de superponerlo o compararlo.

Además de lo anterior, en los planteamientos de Angie, se pueden evidenciar las tres etapas consideradas por Caraña (1984), y referidas en “preparando el camino”, como esenciales en la medición. La primera, con la escogencia de la unidad de medida de la misma especie que la

magnitud a ser medida; visto, el equipo de Angie cuando usó “el rectángulo” para compararlo con la superficie del terreno también rectangular (ambos son superficies). La segunda etapa, con la comparación de estas unidades, esto es, con la verificación de cuantas veces caben los rectángulos en la superficie del terreno. Y la tercera etapa, con la representación del resultado mediante la expresión numérica, “20 pedazos”. Que permitió que Angie y su equipo llegaran a una solución.

La última pregunta de esta actividad tuvo que ver con otro problema, al que se tuvieron que enfrentar los seres humanos y dio lugar a aspectos significativos de la evolución de la matemática, específicamente de la geometría: en la dirección de Lima & Moisés (1998), los egipcios, después de que se borrarán las fronteras por una inundación del río Nilo, se enfrentaban al problema de cómo volver a repartir la tierra a las familias, de una manera equitativa. Aleksandrov et al. (1976) también toman este problema como uno de los que ayudó a los antiguos a constituir la geometría. Ellos, además, escriben:

No hay nada notable en el hecho de que esta ciencia al igual que las otras, hayan surgido de las necesidades prácticas del hombre. Todo conocimiento que surge de circunstancias imperfectas tiende por sí mismo a perfeccionarse. Surge de las impresiones de los sentidos, pero gradualmente se convierte en objeto de nuestra contemplación y finalmente entra en el reino del intelecto. (Aleksandrov et al. 1976, p. 39)

Nuestro municipio -Caucasia, también sufre el fenómeno de la inundación por estar ubicada al margen del río Cauca. De hecho, una de las sedes de la institución educativa y la gran mayoría de casas de las familias de los estudiantes se inundan (ver ilustración 54). En consecuencia, la siguiente pregunta consistió en identificar en el Google earth la zona que sufre la inundación y a

partir de allí pensar en: Si se borran las marcas de las divisiones de la parcela¹⁴ de una persona (por una inundación) ¿Qué haríamos para saber cuál era su porción de tierra?

Antes de abordar esta pregunta, cabe traer a colación unas reflexiones, hechas por parte de los estudiantes, relacionadas con el fenómeno de la inundación. Dayana por ejemplo, identificó en el software (Google Earth), la zona que se inunda en Caucasia y en ella ubicó, aproximadamente, su casa. Además, hizo la siguiente reflexión:

Cuando el río se crece nosotros sacamos en un carromula¹⁵, las cosas -el televisor, las camas, la nevera y las sillas. Y nos las llevamos para donde mi abuela que vive en pueblo nuevo. Mi papá y mi mamá van a la casa a cuidar lo que queda en la casa. La inundación es peligrosa porque hay personas que se han ahogado.

(Dayana, reflexiones sobre la inundación, agosto de 2012)

Daniel también comentó al respecto:

Cuando nos inundamos alzamos las cosas. Una vez se dañaron las colchonetas y se perdió ropa. La comida se hace entre toda la gente. Y para ir a la escuela salimos en una canoa. En la escuela me pongo los zapatos.

(Daniel, reflexiones sobre la inundación, agosto de 2012)

De estas dos reflexiones se ve como el fenómeno de la inundación, permite la transformación de la realidad y el movimiento de las personas en términos de su quehacer. Dayana y Daniel, reflejan en sus reflexiones que ya tienen, a partir de su experiencia, un plan a seguir en caso de inundación y poder superar la crisis que se produce en esos momentos. Aunque la inundación sea un momento trágico para todos en Caucasia, las personas se unen para ayudar y poder de alguna manera mitigar un poco la crisis de las personas afectadas.

¹⁴ La parcela es una porción de tierra pequeña. En el municipio de Caucasia es muy común encontrar familias viviendo en parcelas que están ubicadas en el sur, al margen del río Cauca.

¹⁵ En nuestro municipio de Caucasia se llama carromula a un sistema de tráiler (capaz de trasladar objetos grandes) arrastrado por un caballo. En otras ciudades de Colombia es conocido con el nombre de "zorra".

Como docente se intervino en este instante para indagar por qué nos inundamos. A esto, los estudiantes participaron mucho, demostrando su dominio de este tema. Se trae aquí la siguiente apreciación de Oscar:

Nos inundamos porque el río se crece porque tiene mucho palo y basura. Por eso, no debemos echar basuras al río.

(Oscar, ¿por qué nos inundamos? Agosto de 2012)

La comprensión de esta realidad a partir de las propias lecturas y experiencias de la comunidad permiten constatar precisamente que lo que se ha denominado genéricamente como “situación de emergencia invernal” no es algo casual, pasajero, ni apareció solamente a finales del año 2010, como su punto más alto, sino que reviste a nuestro municipio de Caucasia, constantemente. En esto, Oscar deja ver que tenemos mucha culpa por causarle daño al ambiente, al río Cauca. Pero, también nos enseña un camino, de cuidado y preservación del río. En ese sentido, como docente se respaldó la mirada de Oscar y se hizo un llamado a los estudiantes, frente a la compleja problemática que vivimos, en los siguientes términos: debemos hacer buen uso del alcantarillado público, lo que supone no botar residuos sólidos ni escombros a las calles o al río, sembrar árboles y sobre todo querer nuestro territorio. A continuación se muestra una fotografía publicada en la página web del municipio de Caucasia. En ella, se puede observar la ubicación de una sede de nuestra institución educativa.



Ilustración 54. Caucasia inundada, Abril de 2011. Ubicación de la Institución Educativa Divino Niño. Recuperado el 22 de Julio de 2011 en: <http://www.caucasia-antioquia.gov.co/nuestromunicipio.shtml?apc=mlxx-1-&m=g>

Con respecto al interrogante: si se borran las marcas de las divisiones de la parcela de una persona (por una inundación) ¿Qué haríamos para saber cuál era su porción de tierra? el equipo de Daniel escribió:

En unos días antes podía enterrar unos palos en las esquinas del solar. Así, sabría cual es la cantidad de tierra.

(Daniel, ¿cuál era su porción de tierra? agosto, 2012)

En la respuesta de Daniel se refleja una idea de anticipar el problema, proponiendo una solución preventiva marcando y delimitando el terreno. El cual, es tomado también como “solar” con forma de cuadrilátero, por la disposición de: “los palos en las esquinas”.

Por su parte, Angie desde su equipo escribió:

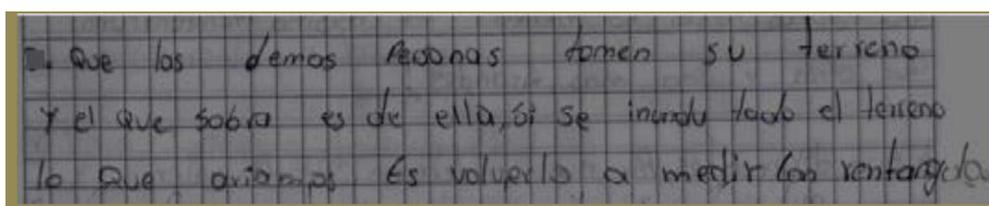


Ilustración 55. Angie, ¿cuál era su porción de tierra? agosto, 2012

En este escrito se logra evidenciar dos soluciones al problema sobre la inundación. La primera, es considerando que la inundación sólo cubre pocos terrenos (parcelas), aquí, Angie y su equipo proponen una solución colectiva: si algunos terrenos no llegan a inundarse entonces los dueños de esos terrenos van a respetar los terrenos ajenos, de esa manera, los dueños de los terrenos inundados, sabrían que el sobrante es de ellos. La segunda solución, es considerando que todo el terreno se inunda. En esta parte, se puede notar el reconocimiento, por parte de los integrantes del equipo de Angie, de la forma del terreno -rectangular, como la unidad de medida. Aquí, se resalta, nuevamente, la importancia del Google Earth como mediador, por dar la posibilidad de observar, de una manera dividida el terreno. Y de permitir a la vez, que los estudiantes realicen un movimiento en su pensamiento, que les ayuda a reconocer dicho rectángulo. En ese sentido, se concuerda con Moreno & Hegedus (2010) cuando sostienen que las construcciones matemáticas se convierten en acontecimientos más dinámicos, basados en movimientos, con las exploraciones, conjeturas y razonamientos en torno a la agregación de los objetos matemáticos promovidos por las acciones de los estudiantes con un ambiente dinámico.

Al intentar explicar cómo volver a medir el rectángulo Oscar expresó:

Las personas saben la cantidad que tiene cada una, entonces la medirían, por ejemplo: 65 pasos de ancho y 78 pasos de largo. En forma de rectángulo.

(Oscar, socialización ¿cómo volver a medir el rectángulo? agosto, 2012)

En lo expresado por Oscar, se nota que considera la unidad de medida “pasos” para establecer un ejemplo de cómo medir la superficie del terreno inundado. Además, se percibe la necesidad, en Oscar, de conocer las dimensiones laterales (ancho y largo) del terreno, para poder recuperarlas después de la inundación.

Así, se considera que los estudiantes, en esta segunda actividad realizada, interpretan que el problema de la inundación del terreno, es un momento de justificación del aspecto que envuelve a la unidad de medida en la medición; y establecen la unidad de medida como base principal en el interior de la actividad de dividir terrenos. Puesto que, se percibe el hecho que liga las manifestaciones particulares de medición de los estudiantes y la formación de una explicación con base en la relación de comparación de la unidad de medida al cuantificar el aspecto continuo.

Para concluir la segunda etapa de este camino hacia la fracción, se debe decir que en ella se evidencian aspectos de la geometría, constituidos por la necesidad de hacer objetos y formas para resolver problemas de la vida cotidiana, relacionados con la “cuantificación” de los elementos de la naturaleza como el agua (visto en la actividad 1) y la tierra (visto en esta actividad-2) que vienen sin unidades. Además, se presenciaron como estas formas y objetos dispuestos para los niños en herramientas, se convirtieron en instrumentos (desde Bartolini & Mariotti, 2006 y Moreno & Hegedus, 2008, 2010) lo cual implica que de alguna manera ponga en juego las formas de representación del conocimiento matemático (sistemas semióticos) y a su vez se constituyan como signos que, a través de su uso en la actividad matemática, modifiquen la cognición de las personas, como lo vimos en Oscar, Daniel, Angie, Catalina, Dayana y Jonathan, al relacionar el número y la forma en términos de una comparación. Ya que es la comparación, desde Carra (1998), el proceso que conduce a la medición y ésta a su vez, es esencial para la construcción del objeto -fracción.

La medición y otros procesos relacionados con ello, los analizaremos con mayor soltura en el siguiente capítulo.

FRACCIÓN: MOVIMIENTO QUE EXPRESA COMPARACIONES DE MAGNITUDES

CONTINUAS

Gracias a la simulación de situaciones que se desarrollaron en el recorrido histórico-cultural del movimiento conceptual de la fracción en los dos capítulos anteriores, los y las estudiantes, tuvieron la oportunidad de haber aprendido nociones de grandeza, en relación con aspectos geométricos y aritméticos. Lo cual, posibilitó la ambientación y la motivación de la construcción de la maqueta de nuestra escuela. Este capítulo, por su parte, tiene el propósito de analizar el concepto de fracción a partir de acciones de medir aspectos continuos de las magnitudes de cara a la construcción del plano de la maqueta.

Para problematizar las acciones de medir las longitudes y superficies de nuestra escuela, se sugirieron tres AOE que simularon cómo se desarrolló el proceso (en la historia) de la escogencia de las unidades de medida, pasando por la utilización de medidas antropométricas (utilizando partes del cuerpo) que posibilitaron la necesidad de patronizar una unidad de medida. Después de adquirir el patrón, en las nuevas acciones de medir el borde y las superficies de las diferentes dependencias de la escuela, se le presentó, a los y las estudiantes, nuevos problemas cuya resolución permite terminar de construir la conexión conceptual de la fracción. -cómo medir una magnitud menor que la unidad de medida y, cómo expresar ese resultado, fueron los problemas con la “esencia” (en términos de Davidov, 1982), que crearon la necesidad de fraccionar la unidad de medida, de comparar la magnitud con la unidad fraccionada o dividida y, el surgimiento del nuevo campo numérico. Así, es entendida la fracción como movimiento y base fundamental del número racional.

La primera AOE la titulamos “El plano: ¿con qué podemos medir nuestra escuela?”. La cual, fue desarrollada desde los equipos de trabajo que se establecieron en un principio de la investigación, esto quiere decir, que las soluciones de los y las estudiantes dispuestas aquí, corresponden a acciones compartidas provenientes de realizaciones colectivas y de las voces de los compañeros de sus pequeños grupos. Esta actividad, la empezaron a solucionar los y las estudiantes dibujando el terreno de nuestra escuela y reconociendo su forma y sus lados. Para ello, como docente les sugerí a los y las estudiantes caminar por el interior de la escuela y subir al segundo piso para observarla. El siguiente es el dibujo que socializó Dayana.

En esta representación del terreno de nuestra escuela que realiza Dayana, se puede evidenciar el reconocimiento de la forma rectangular, los lados anchos y largos de él y, la ubicación de la entrada de la escuela.

Durante la socialización, Dayana afirmó que ellos supieron que era un rectángulo porque así lo vieron desde arriba y porque también vieron como eran los lotes en el computador (refiriéndose a la actividad con el Google earth) además afirmó, que los anchos eran de un mismo tamaño y los largos también son iguales.

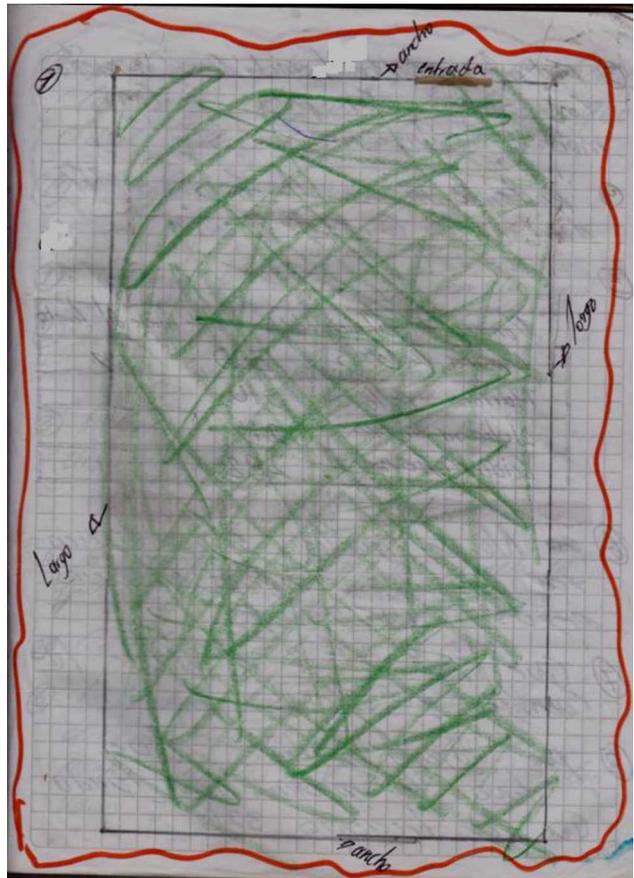


Ilustración 56. Dayana, dibujo de la forma y lados de la escuela. Septiembre de 2012

Con este reconocimiento, se puede apreciar el dominio, por parte de Dayana, de la característica del rectángulo sobre que sus lados son iguales dos a dos. Además, se nota en Dayana y su equipo

una acertada ubicación espacial por la forma como coloca la entrada de la escuela y la coincidencia del dibujo con la forma del lote o terreno donde está construida la escuela. En ese sentido, se puede establecer, de acuerdo con Davidov (1988), que hay una apropiación de los ítems trabajados en la actividad anterior con el Google earth, porque “reproduce en si las formas histórico-sociales de la actividad” (Davidov 1988, p.11).

La siguiente pregunta de esta actividad fue ¿Cómo podemos saber cuánto mide todo el borde del terreno? A lo que Angie desde su grupo compartió:

Handwritten text on a grid background: "repartiendo en pedacitos (dividiendo en rectángulos)".

Ilustración 57. Angie, ¿Cómo podemos saber cuánto mide el borde del terreno? septiembre de 2012

En este momento, como docente, quise ahondar en la respuesta y pedí a Angie que se explicara con un ejemplo, a lo que dibujó en el tablero y contestó:



Es como dividir en rectángulos, todo. Y contar los rectángulos.

(Angie, socialización ¿Cómo podemos saber cuánto mide todo el borde del terreno?, sept. 2012)

De la apreciación de Angie, se logra evidenciar el establecimiento de un término común que sirve para comparar superficies. Carasa (1984) denomina a este término como unidad de medida, el cual, favorece todas las formas de comunicación de resultado de la medición -cuantas veces cabe- atribuyendo un significado común a este. Angie, plantea dividir el terreno en rectángulos y contar esos rectángulos, esto quiere decir, que escoge una unidad de medida que posibilita la

obtención de la medición donde el término cantidad es impregnado para representar la medida de la magnitud.

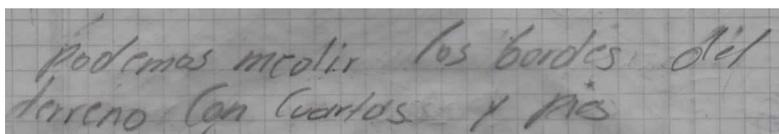
Aquí se refleja en Angie, el trabajo práctico sobre la noción matemática de grandeza, puesto que, gracias al sentido de grandeza, Angie sabe que la unidad de medida escogida -rectángulo, cabe en la magnitud a ser medida, porque reconoce de manera implícita que la primera (unidad de medida) debe tener menor intensidad que la magnitud a ser medida, para que puedan ser comparadas.

La socialización de Angie toca aspectos relacionados con la superficie, y aunque se interpretaron aquí, en la tercera actividad de este capítulo, se volverá sobre ellos. En la clase -como docente vi necesario preguntarle: Angie, con base tu respuesta, ¿qué parte del terreno se puede medir? -A lo cual me respondió: “Lo de adentro profe.” (Señalando con la mano la superficie) - ¿Qué dice que se debe medir en la pregunta? volví a indagarle. -Angie, con tono de sorpresa dijo ¡el borde!

La conveniente escogencia de la unidad como elemento que posibilita la obtención, por adición o simple conteo, de la medida de determinada cualidad o atributo, es un paso importante según Carasa (1984). Pues, esto depende que se haga un buen proceso de medición. En este sentido, Angie logró escoger una unidad de medida adecuada, pero, para la medición de la magnitud que subyace de la división en pedazos de rectángulos -de la superficie.

Daniel, en este instante, manifestó el deseo de participar, y compartió lo siguiente:

Ilustración 58. Daniel, ¿Cómo podemos saber cuánto mide el borde del terreno?, sept. 2012



Podemos medir los bordes del terreno con cuartos y pies

Ilustración 62. Dayana, registro escrito, ¿cómo los bordes del terreno sin utilizar el metro? sept. De 2012

De estas respuestas se puede evidenciar el aprendizaje sobre el reconocimiento de la magnitud a ser medida y la conveniente escogencia de su unidad de medida por parte de los y las estudiantes protagonistas.

Las siguientes preguntas de esta actividad (del numeral 5 al 9) consistieron en que cada equipo debía escoger una unidad de medida y con ella cada estudiante medía el borde de la escuela (los resultados los fijaron en una tabla). Posteriormente, se desarrollaron los siguientes interrogantes: Comparte los datos con los demás compañeros ¿son iguales, por qué? ¿Cuál fue la mayor dificultad que se presentó en esta actividad? ¿Quién tubo la razón de haber realizado la medición más correcta? ¿Cómo llegamos a un acuerdo? ¿Qué pasaría si midiéramos con las cuartas, y con pies?

Cabe agregar, que la medición del borde de la escuela se realizó por el rededor de ésta. Se pidió permiso a los vecinos colindantes y el docente orientó esta actividad por grupos. Las siguientes son las respuestas de Daniel y de Dayana.

5

Nombre del equipo	Medida total del borde del terreno.
DANIEL NARANJO	729
Katy yuliana	87
Dayana canoles.	119
los 5 Dayana	790
Spietany correa	126

La medida q escogimo para medir fue paso largo.

6 Los datos de mis compañeros son diferente por q los pasos de unos de mi compañeros son mas largos.

7 La mayor dificultad fue cuando medimo el terreno de la escuela.

8 Aunque le dio los mismo paso de mi compañero por q:

Dayana: 119
Katy: 87
Daniel: 129

9 si podiamos contar con lo mismo paso podemos dar igual.

Ilustración 64. Daniel, registro escrito, escogencia de la unidad de medida, sept. De 2012

Nombre del equipo	Medida total del borde del terreno.
Pyxxt	320
	310
	81

La medida q escogimo para medir fue paso largo.

6 Los datos de mis compañeros son diferente por q los pasos de unos de mi compañeros son mas largos.

7 La mayor dificultad fue cuando medimo el terreno de la escuela.

8 Aunque le dio los mismo paso de mi compañero por q:

Dayana: 119
Katy: 87
Daniel: 129

9 si podiamos contar con lo mismo paso podemos dar igual.

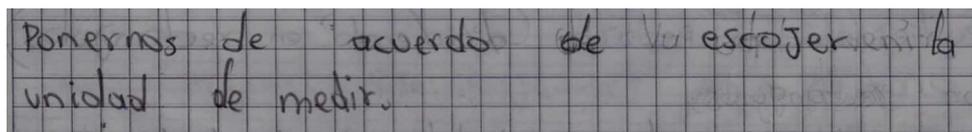
Ilustración 63. Dayana, registro escrito, escogencia de la unidad de medida, sept. De 2012

Daniel escoge los pasos como unidad de medida y Dayana los pies. A partir de las respuestas se puede evidenciar que las medidas que obtuvo cada compañero son diferentes y en el momento de socializar los resultados, percibían que esto era evidente, porque los resultados variaban. Ellos, expresaron que esto se debía al tamaño diferente de los pies. De hecho, en el escrito de Dayana parece que hay una justificación, a partir de una razón: a menor tamaño de los pies, mayor es la cantidad de pasos dada en la medición. Esto, indujo a percibir que aunque el equipo de Dayana asumió una medición correcta. La utilización de la unidad de medida no común impidió ponerse de acuerdo con la interpretación del resultado de la medida.

En la prehistoria, por este tipo de situaciones, también pasó la humanidad. Según Caraña (1984) y Lima & Moisés (1998) para enfrentarlas, la opción fue escoger una unidad que garantizara un patrón único de medición.

El patrón es un conjunto de relaciones humanas, de ideas, de cantidades, de cualidades, de operaciones mentales y manuales que los hombres convienen adoptar entre sí, de modo que se obtenga siempre un determinado resultado esperado y planeado. (Lima & Moisés 1998, p. 56)

El último punto de esta AOE, fue realizar la lectura de un problema similar que tuvo que solucionar un faraón de Egipto y plantear una conclusión acerca de lo que podemos hacer con relación a las unidades de medida que debemos escoger, para realizar mediciones. Al respecto Angie planteó lo siguiente:



Ponernos de acuerdo de la escoger una unidad de medir.

Ilustración 65. Angie, registro escrito, conclusión sobre lo que debemos hacer, sept. 2012

De esta primera actividad, se puede concluir que los y las estudiantes aprendieron que la escogencia de las unidades está relacionada con el reconocimiento de las magnitudes y el requisito de que la unidad tuviera el mismo atributo a ser medido.

La segunda AOE de esta etapa del camino hacia el aprendizaje de la fracción es una continuación de la anterior. De ahí, que el título sea: “Delimitando el plano de nuestra escuela”. En la primera pregunta de esta actividad, en común acuerdo, los y las estudiantes escogieron una unidad patrón para medir el borde de la escuela. Es de anotar aquí, que se dispusieron las condiciones para realizar un proceso democrático y participativo, en el tablero se escribieron las propuestas y cada equipo justificó su proposición. Así, lo registró Daniel:

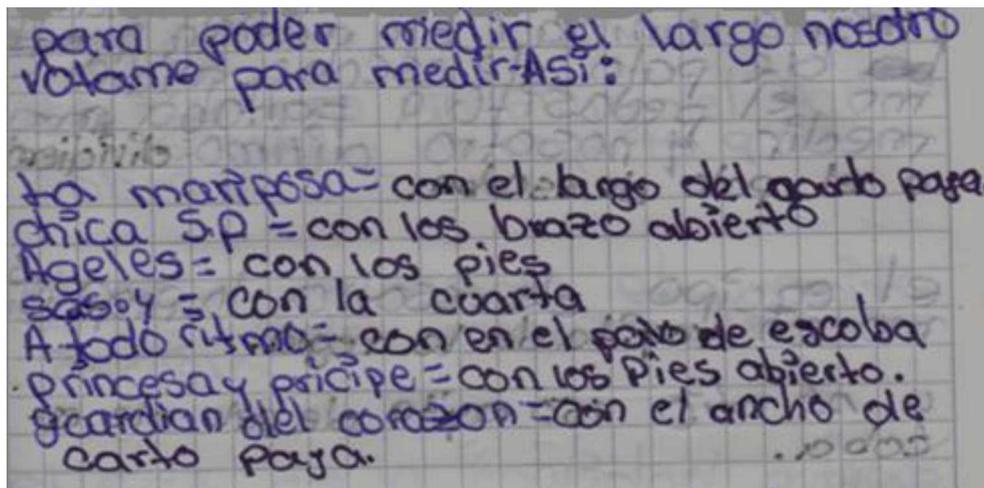


Ilustración 66. Daniel, descripción de las propuestas de los equipos para la elección del patrón de medida. Sept. 2012

En la descripción que realizó Daniel, es evidente que los equipos propusieron unidades de medida acorde a la magnitud a ser medida. Lo que permite constatar una vez más la apropiación respecto a la escogencia de la unidad de la misma especie que la magnitud. Pero, las propuestas de tomar como patrón los brazos abiertos, los pies, la cuarta y los pies abiertos, por parte de algunos grupos. Produjo en su momento, que como docente, retomara aspectos de la actividad anterior. Como ejemplo, tomé la cuarta que propuso el equipo donde está Jonathan y, señalando el lado ancho (inferior) del tablero, le pedí a Jonathan que lo midiera con la “cuarta”, -midió 19, respondió Jonathan. Después, lo medí yo y me dio 17 “cuartas”. Entonces, pregunté ¿puede la “cuarta” ser patrón? ¿Da lo mismo medir, con la “cuarta” de cualquier persona? Y se escuchó: -noooo... Sin embargo, Dayana preguntó ¿entonces, por qué si se pudo medir con el codo del faraón? -Muy bien Dayana y demás estudiantes, dije, y continué explicando: se tomó la longitud que hay desde el dedo meñique hasta el codo del faraón (sólo de él) y no es que el faraón era el único que podía medir o que se cortó el brazo y se lo dio a otros para que midieran, sino que la dispuso en muchas cuerdas señalándolas con nudos (tome un cuerda e hice el ejemplo, se la di a uno por uno, diciendo: tome la unidad patrón y mida: el ancho de la ventana, el largo del

escritorio, etc.) Por eso, ustedes pueden proponer las cuartas, los brazos abiertos, los pies, el paso. Pero, de alguien, de una sola persona, y como el faraón repartirla a todos en una cuerda o en un palo para que midamos. -claro, porque después la medida no da igual, aclaró Oscar. -así es, por eso debemos elegir entre todos, una unidad que se convierta en el patrón, y nos permita obtener el mismo resultado en una medición, para ello, deben completar o proponer otra unidad de medida; terminé diciendo.

Las nuevas propuestas de los anteriores equipos, se basaron en definir de quien era la cuarta, los brazos, los pies, y los pies abiertos. De esta manera, lo dispuesto en el diálogo anterior, revela que escoger la unidad patrón puede ser una tarea simple, a primera vista, pero como asegura Caraya (1984) y Lima & Moisés (1998), envuelve otros procesos, como la naturaleza del objeto a ser medido y la necesidad de obtener un resultado esperado y planeado.

En el momento de la votación para escoger el patrón de medición, vale decir que, como docente les pedí a los y las estudiantes que explicaran por qué los demás debían votar por su propuesta. Esto, desde la perspectiva histórico-cultural, es contribuir al proceso de humanización desde la aproximación a conceptos, en nuestro caso, de aspectos políticos y democráticos presentes en sus realidades, de una manera respetuosa de la individualidad y la singularidad. Así, describió Daniel, el resultado de la votación:

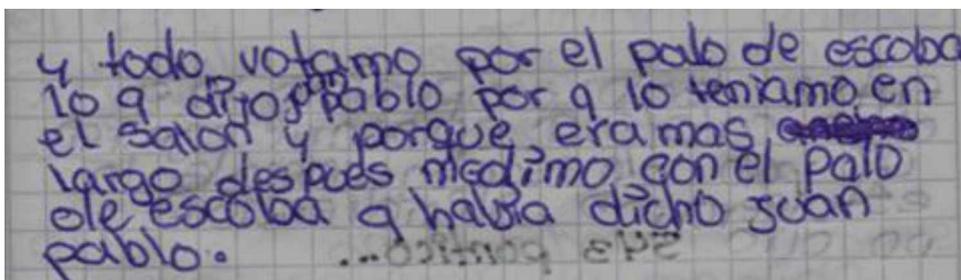


Ilustración 67. Daniel, descripción de la elección del patrón de medida. Sept. 2012

Posteriormente, se les pidió a los y las estudiantes medir, colocando la cuerda por el borde del terreno de la escuela para luego, en la cuerda, sobreponer la unidad de medida escogida por todos y contar cuántas veces cabe sobre ella. Aquí, los y las estudiantes, en sus equipos, pasaron una cuerda por el rededor de la escuela (cuando se dieron cuenta que un rollo de cuerda no alcanzó, unieron varios). Luego, algunos cortaron y otros marcaron para señalar hasta donde debían sobreponer la unidad de medida -patrón, llamada “palo de escoba”. Los resultados de los equipos de Jonathan, Catalina y Oscar respectivamente se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 14. Resultados de la medición del borde del terreno. Sept. 2012

Equipos¹⁶	Resultados de la medición sobreponiendo el palo en la lana
Súper SSJJ	112 palos de escoba y un poquito
Chicas súper poderosas	109 palos de escoba y un pedacito
A todo ritmo	108 palos de escoba y medio

A partir de estos resultados podemos ver, en comparación con las mediciones que realizaron en la actividad anterior, el surgimiento de una cantidad menor que la unidad (que sobra al finalizar la medición). Nombrada por estos estudiantes como “un poquito”, “un pedacito” o como lo expresa el equipo de Oscar “medio”. Sobre esta última parte, como docente pregunté a Oscar y su equipo ¿cómo supieron que era la mitad? Uno de ellos dijo que al medir el pedazo que sobraba lo pusieron sobre el palo y lo señalaron y después, para saber que si era la mitad lo volvieron a poner (la cuerda sobrante) en el resto del palo. Por la forma de cómo el equipo de Oscar se percató que ese sobrante es la mitad del palo de escoba, implica reconocer que existe una idea, en estos niños, de mitad mediante la comparación de dos partes iguales que pertenecen

¹⁶ Los nombres de los equipos de los y las estudiantes fueron dados por ellos mismos, al iniciar este trabajo de investigación.

a una unidad, tal vez aprendida fuera del entorno escolar, eso si, como lo dice Vigostki (2002) en una zona de desarrollo próximo, mediado por instrumentos y signos y, gracias a un proceso de internalización.

Al responder la pregunta ¿Con qué medimos?, Daniel, Angie, Jonathan, Oscar, catalina y Dayana, coincidieron al decir -con el palo de escoba y la lana. Esto refleja que los y las estudiantes identificaron de la lana como un instrumento de medición. Aquí, como docente intervine preguntando: ¿Qué representa toda esta lana? -Jonathan expresó: el borde de la escuela. -Y entonces ¿con ella medimos? Volví a interrogar. -no, dijo Jonathan. - ¿Por qué?, Pregunté de nuevo. -porque lana representa el borde y el palo de escoba es con lo que medimos. - ¿Están de acuerdo con Jonathan? pregunté a todos. -sí, se escuchó decir en coro. -entonces, escriban que aprendieron aquí, enuncié. Lo siguiente, fue lo que escribió Jonathan:

A photograph of a student's handwritten response on a grid-lined paper. The text is written in black ink and reads: "R// lo primero que hacemos es preguntar con que medimos y preguntar que vamos a medir". The first line is underlined with a double slash. The second line is partially cut off on the right side.

Ilustración 68. Jonathan, reflexión, ¿con que medimos?, sept. De 2012

En este momento, como docente afirmé y felicité a jonathan, además, dije a todo el grupo: saber que medimos y con que lo medimos es muy importante.

Los autores que retomamos, Caraña (1984), Davidov (1982), Aleksandrov et al. (1976), y Lima & Moisés (1998), para poner a prueba la fracción como un movimiento nos sugieren que éste (saber que medimos y con que lo medimos) es un aspecto crucial en la medición, y por ello, es que sugieren primero el trabajo con la noción matemática de grandeza, puesto que ayuda a establecer e identificar estos atributos en los objetos a ser medidos (cuando se les preguntaba por la cualidad común de varios objetos por ejemplo).

La siguiente pregunta que respondieron los y las estudiantes fue: ¿cómo expresar lo que medimos? Aquí, algunos estudiantes manifestaron que no entendían, por lo que como docente, delante de todos, le pedí a Daniel que escribiera en el tablero el resultado que obtuvieron al medir el borde sobreponiendo el palo de escoba en la lana. Daniel escribió:

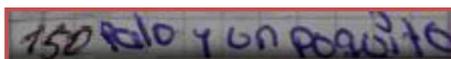
A photograph of a chalkboard with the handwritten text "150 Palo y un pedacito" written in blue chalk. The text is written in a cursive, slightly slanted style. The chalkboard has a dark background and a thin red border.

Ilustración 69. Daniel, ¿Cómo expresar lo que medimos? sept. 2012

luego, pregunté: ¿con que expresó el resultado Daniel? A lo que Dayana contestó: “con números y letras”. Entonces, aclaré que escribir el resultado con números y letras es una forma de expresar el resultado de la medición.

Al reconocer los sobrantes, autores como Caraña (1984) y Aleksandrov et al. (1976) expresan que es empezar a denotar el problema que posibilitó el surgimiento de un nuevo campo numérico. En ese sentido, el siguiente problema que se les planteó resolver, de manera individual, fue: ¿Qué podemos hacer para medir la cantidad de terreno menor que _____? En la parte de la raya los y las estudiantes debían poner el nombre de la unidad patrón escogida (el palo de escoba). Al momento de resolver este problema, varios niños se acercaron donde el profesor para decir que no entendían. Razón por la cual, como docente, expliqué a todos que la pregunta se refería a cómo medir el pedazo de cuerda que sobró. Por ejemplo, dije tomando el pedacito de cuerda del equipo de Catalina (para que Oscar y su equipo también lo pensarán), ¿Qué podemos hacer para medir esto que sobra? A lo que Daniel socializó:

"Lo podemos medir con cuartas y dedos. A mí me dio dos cuartas y cuatro dedos."

(Daniel, ¿Qué podemos hacer para medir la cantidad de terreno menor que la unidad?, sept. 2012)

Después de escuchar a Daniel, Oscar también participó:

**"podemos medirla también con el lapicero y si no alcanza, con los dedos, y si no con la lunita.
Como hacemos cuando jugamos bolita de cristal"
(Oscar, ¿Qué podemos hacer para medir la cantidad de terreno menor que la unidad?, sept.
2012)**

Se debe aclarar que el juego de bolitas de cristal es el mismo juego conocido como canicas y, la lunita es un pequeño espacio que sobra cuando miden las distancias, con cuartas o dedos - dependiendo de la distancia-, entre la canica y el orificio donde es lanzada. Ahora, la manera de expresar el nuevo resultado de esta medición, propuesto por Daniel fue:



Ilustración 70. Daniel, expresión del resultado de la medición del borde del terreno, 2012

Discusiones como la anterior se presentaron en diferentes momentos, a través de todas las actividades desarrolladas durante el trabajo de campo. Se considera que estas discusiones fueron fundamentales, así como las dadas en los equipos, ya que la interacción en el aula es un componente importante en la creación de sentidos y significados. Es por medio de la interacción que los sujetos, además de constituirse a sí mismos, pueden llegar, como lo plantea GEPAPe (2010) a aprender el conocimiento; donde la interacción social es consustancial al proceso de aprendizaje. Es así, como de estas apreciaciones, se puede notar que los y las estudiantes van recurriendo a una unidad cada vez menor que les permita obtener el resultado de la medición. Parece que quisieron evitar, resultados no enteros usando las unidades en la medición. Desde los planteamientos de Caraya (1984), esto significa expresar la medida en relación a una nueva unidad y no en relación a la antigua. Lo cual constituye el primer dilema que tuvo que enfrentar la humanidad en el sentir de la necesidad de la creación de un nuevo campo numérico. Este dilema según Caraya (1984), genera nuevos interrogantes con relación a la unidad que se utilizó.

El siguiente problema planteado a los y las estudiantes en esta actividad, fue medir directamente sólo con la unidad de medida artificial escogida por todos, escribir los resultados en una tabla y, responder las siguientes preguntas en los equipos de trabajo: ¿Con qué medimos? ¿Qué podemos hacer para medir la cantidad de terreno que sobró en cada lado? (sin crear nuevas unidades de medida) y, ¿Cómo debemos expresar las medidas de las cantidades que sobraron?

Para desarrollar esta actividad, el docente se desplazó con cada equipo para realizar la respectiva medición. Aquí, los y las estudiantes sobrepusieron el palo de escoba por el piso correspondiente al borde de la escuela. Para marcar la longitud del palo de escoba en el piso, los y las estudiantes en sus equipos, escogieron tizas, lápiz, piedras que rayan. Pero, hubo un equipo, el de Oscar, que inició la medición marcando las longitudes del palo de escoba poniendo piedritas, esto, provocó confusión en el conteo de la cantidad de palos de escoba. Oscar se acordó de la actividad donde, por la inundación, se borraban las marcas. Y en su momento, realizó la siguiente reflexión:

Se borraron las marcas, como en la inundación. Lo que tenemos que hacer es volver a medir, y esta vez, vamos a rayar con la piedra para que no se borre.

(Oscar, actividad, midiendo el borde de la escuela. sept. 2012)

Esta reflexión de Oscar es un ejemplo de una reproducción en sí mismo de las formas histórico-sociales de la actividad, en otras palabras, de lo que la GEPAPe (2010) denomina -apropiación. Podemos ver en Oscar, que los aprendizajes que adquirió en la actividad, sobre la medición, se construyen y se transforman al ponerlos en práctica.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos por el equipo de Daniel y Jonathan:

Lado a medir de nuestra escuela	medido con: palo de escoba
Ancho N°1 (Frente)	22 X Palo y un poquito
Ancho N°2 (parte p)	22 X Palo y un poquito
Largo N°1 (entrando a la d)	32 X Palo y un poquito
Largo N°1 (entrando a la i)	32 X Palo y un poquito

Ilustración 71. Daniel, registro escrito, medida del borde de la escuela. sept. de 2012

Lado a medir de nuestra escuela	medida con: palo de escoba
Ancho N°1 (Frente)	21 y 3 Cuartas
Ancho N°2 (parte posterior)	21 y 3 Cuartas
Largo N°1 (entrando a la derecha)	33 y 4 Cuartas
Largo N°1 (entrando a la izquierda)	33 y 4 Cuartas

Ilustración 72. Jonathan, registro escrito, medida del borde de la escuela, sept. De 2012

A partir de estos resultados, se logra evidenciar una discrepancia en los resultados de la medición. Además, en Daniel y su equipo, la utilización de la expresión “y un poquito”, para expresar la cantidad que sobra en la medición. En cambio, Jonathan y su equipo, recurren al empleo de la unidad de medida -cuartas, para expresar esa cantidad menor que el palo de escoba.

Para superar las discrepancias en los resultados de la medición del borde de la escuela, como docente, llevé a cabo otra medición con la participación de todo el grupo. Los resultados obtenidos coincidieron con los que obtuvo el equipo de Daniel, Catalina y Dayana. Cabe decir, que los y las estudiantes de los equipos de Daniel, Catalina y Dayana se alegraron mucho. Pero, esta alegría se extendió al punto de burlarse de los estudiantes de los demás equipos. Por ello, me

permití aquí como docente, pronunciar un mensaje alentador para los agredidos y una reflexión para los agresores: ustedes no se preocupen, todos nos equivocamos, yo me he equivocado midiendo muchas veces; y ustedes muchachos, (señalando a los agresores) ¿no se han equivocado alguna vez? Si alguien se equivoca debemos ayudarlo o corregirlo y no burlarse o, ya se les olvidó lo que decía la canción: “lo más importante que yo aprendí fue multiplicar la paz y dividir el amor”. Los y las estudiantes asentaron la cabeza y se escuchó decir “verdad profe”. ¿Estamos de acuerdo que no debemos burlarnos cuando alguien se equivoca? -pregunté. Todos dieron una respuesta afirmativa.

En la anterior situación, los hechos son generadores de procesos de humanización. Se enseña a tener en cuenta los sentimientos y sensibilidades de los demás. En ese sentido, es que las AOE (de la GEPAPe, 2010), propone el trabajo en el aula de clase. Teniendo en cuenta este tipo de circunstancias para formar a los y las estudiantes en pro de que sean mejores ciudadanos.

Al responder la pregunta ¿con qué medimos? Catalina escribió:

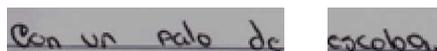
A photograph of a handwritten note on lined paper. The text is written in black ink and reads "Con un palo de escoba." The words "palo" and "escoba" are underlined. The note is placed on a grey rectangular background.

Ilustración 73. Catalina, registro escrito, ¿con qué medimos? sept. De 2012

Con respecto a la respuesta de Catalina, se nota un aprendizaje sobre la identificación de la unidad y los instrumentos que permiten realizar la acción de medir y fijar propiedades e indicios del objeto, del fenómeno material, permitiendo la formación de abstracciones (en términos de Davidov, 1982).

Seguidamente, al responder el problema sobre ¿cómo medir la cantidad de terreno que sobró en cada lado?, esta vez sin crear nuevas unidades de medida. Jonathan desde su equipo, escogió las cuartas (como lo vimos en la ilustración anterior, que retoma los resultados de la medición)

motivo que provocó que como docente interviniera para esclarecer a todos, que esta vez, era sin utilizar otras unidades de medida diferentes al palo de escoba. -¿cómo así profe?, preguntó Angie. -es, como medir esos poquitos que sobraron utilizando el mismo palo de escoba, expliqué. Después de un par de minutos, Daniel y Dayana se me acercaron para decir que no habían podido hacer nada.

Tuvieron que pasar muchísimos años según Aleksandrov et al. (1976), para que la humanidad diera respuesta al problema mencionado anteriormente. Esta solución, surgió de la experiencia y de la relación con el objeto concreto, de la realización de operaciones de medir y contar, que fueron comunes en los días de la prehistoria. Estos autores, expresan que fue así como surgieron realmente las fracciones, de la división y comparación de las magnitudes continuas; en otras palabras, de las mediciones.

Para solucionar este problema en el aula de clase, se trae la descripción de los siguientes diálogos:

Como docente mencioné: recordemos lo que hizo Oscar ¿por qué le dio la mitad, en la medición pasada? -porque era la mitad, dijo Oscar. ¿Cómo supieron que era la mitad?, pregunté. -porque el pedacito de lana lo pusimos en el palo, marcamos con un lápiz, y daba en una parte en la mitad y, por la otra la pusimos y daba también en la mitad, contestó Oscar. -Bueno, y ¿esa rayita en el palo que da a entender?, agregué. -que el palo está dividido en dos, contestó Oscar. Correcto, ¿y qué hay que hacer? Volví a indagar. -dividir el palo, replicó Oscar. Exacto, en el pasado los seres humanos dividían la unidad de medida en partes iguales. Pero, ¿cómo dividimos el palo de escoba en partes iguales?, hagan propuestas en el cuaderno, pronuncié. Oscar y Dayana, desde sus equipos, nos compartieron lo siguiente:

3) C ja fot fcoiwer

|g }ye|io| ct); wifrjjy^ier

Iag* H<rp>ye üraop <e\|

|t U*fl4

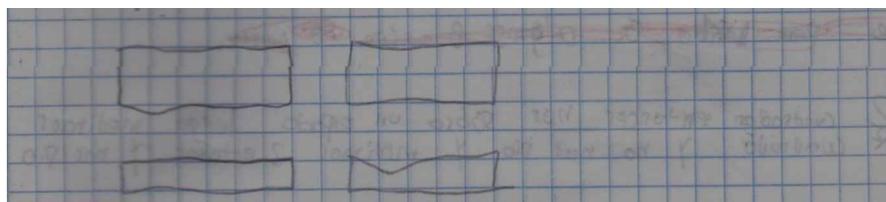


Ilustración 74. Oscar. Registro escrito ¿cómo dividir el palo de escoba en partes iguales?, sept. 2012

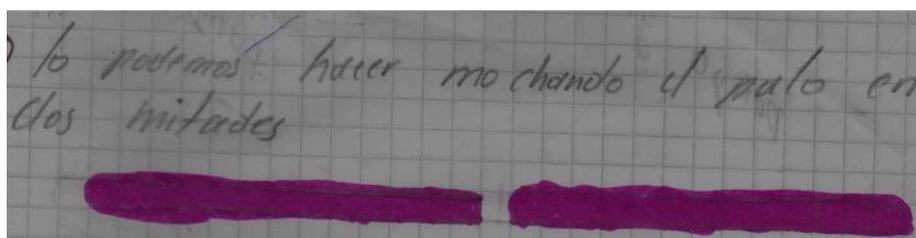


Ilustración 75. Dayana, Registro escrito, ¿cómo dividir el palo de escoba en partes iguales? sept. De 2012

La propuesta de Oscar y Dayana están buenas, pero, ¿seguirán siendo todavía un palo de escoba? Dije como docente. -Sí, contestó segura Dayana. -Bueno, partamos por la mitad un palo de escoba y llamemos a alguien y preguntémosle qué es eso, para ella, expresé. En ese instante, llamé a la profesora que se encontraba en el salón vecino. Y ante la pregunta respondió: esos son dos palos o dos pedazos de palo. Agradecí a la profesora y pregunté a los y las estudiantes: ¿eso es verdad? -Dayana y todos lo aceptaron rápidamente. No obstante, indagué: ¿por qué? -Porque ya no es un palo de escoba, son dos pedazos de palo, notificó Oscar. -Bueno, muy bien, muéstrenme cómo dividir el palo de escoba en partes iguales, dije. -Angie, después de un rato, compartió:

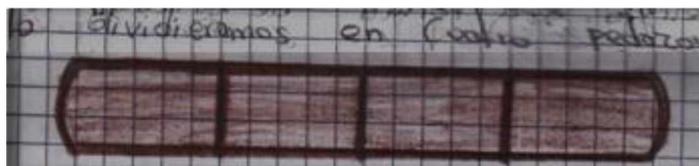


Ilustración 76. Angie, Registro escrito, ¿cómo dividir el palo de escoba en partes iguales? sept. De 2012

Angie mostró en su representación un palo de escoba dividido en cuatro partes iguales. En este dibujo deja entrever que la división la realizó recurriendo a las cuadrículas del cuaderno, cada cinco cuadrículas dispuso una separación. Así, se lo comuniqué a los demás estudiantes, por lo que les pedí, ahora en los equipos, que dividieran el palo de escoba real.

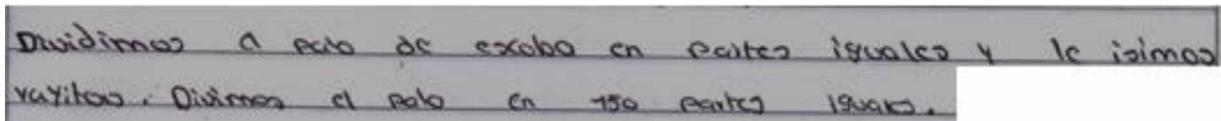
En la hora de la socialización, Oscar compartió:

Para dividir el palo de escoba, nosotros primero usamos las cuartas y no nos daba igual, con los pies y tampoco, hasta que con el cúbito de Yeiner lo logramos dividir en cinco partes igualitas. (Oscar, socialización, ¿Cómo dividir el palo de escoba en partes iguales? Sept. De 2012)

Oscar, para demostrar lo que dijo, llamó a Yeiner (nombre cambiado para esta investigación) y sobrepuso la distancia entre el dedo meñique y el codo, en el palo de escoba; cinco veces efectivamente. Con este planteamiento de Oscar y su equipo, nos desplazamos a medir la parte menor que el palo de escoba, del frente (anden) de la escuela. Cuando Oscar dispuso el palo para compararlo con la longitud a medir, nos dimos cuenta que la longitud abarcó desde un extremo del palo hasta un punto entre la segunda y tercera división del palo. Lo cual, no generó una medida exacta de la longitud. Pero, pregunté: ¿Cuál es el resultado, hasta aquí, de esta medición? -Llevamos 22 palos, manifestó Oscar (señalando la longitud medida anteriormente). -muy bien ¿y qué más? Agregué (señalando lo que faltaba por medir). -No se dijeron algunos estudiantes. - dos partes de, ¿Cuántas hay?, Expresé. -Cinco, exclamaron algunos. -Excelente, ¿quién quiere decir el resultado completo?, Propuse. -22 palos y dos partes de cinco y un poquito, dijo Jonathan. -muy bien, pero ¿Cómo medimos ese poquito?, formulé.

En este momento, volvimos al aula de clase y luego, varios estudiantes me preguntaron: ¿qué hacemos ahora?; -seguir dividiendo el palo de escoba en más partes, hasta que podamos expresar

la medida con el palo de escoba, respondí. Las siguientes fueron las propuestas del equipo de Catalina y Dayana:

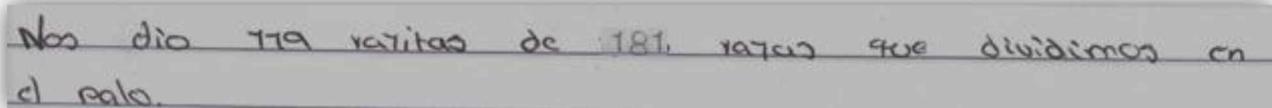


Dividimos el palo de escoba en partes iguales y le hicimos rayitas. Dividimos el palo en 150 partes iguales.

Ilustración 77. Catalina, registro escrito, ¿cómo dividir el palo de escoba en partes iguales? sept. de 2012

Al preguntarle a Catalina cómo lo dividieron y explicó que utilizaron el dedo meñique de una compañerita. Con esta nueva propuesta nos desplazamos a medir en el corredor, la longitud que nos hacía falta.

Grato fue para todos los y las estudiantes saber que la longitud del espacio que hacía falta por medir coincidía en su extremo con una marca dispuesta en el palo de escoba del equipo de Catalina. Entre todos contamos y nos dimos cuenta que no eran 150 sino 181 partes en que estaba dividido el palo de escoba. -Se equivocaron, pero los corregimos, cierto profe, dijo Dayana. Claro eso es lo que debemos hacer cuando alguien se equivoca, y el que se equivoca debe aceptar su error y corregirlo. El siguiente es un registro de Catalina acerca del resultado obtenido.



Nos dio 779 rayitas de 181 rayitas que dividimos en el palo.

Ilustración 78. Catalina, registro escrito del resultado de medir la longitud menor que el palo de escoba. sept. 2012

Como docente, después de felicitar a Catalina y a su equipo. Nos desplazamos a medir el otro espacio, esta vez del largo de la derecha, entrando a la escuela. Aquí, comparamos la longitud menor que faltaba por medir y el largo del palo de escoba de Catalina. De esta comparación los niños notaron que el extremo de la longitud quedó entre el espacio de dos marcas o rayitas que

estaban dividiendo el palo. Y ahora ¿qué hacemos?, preguntó Angie. Debemos dividirlo en muchas más partes, le respondí haciendo un gesto de ir al aula de clase.

Dayana y su equipo, por su parte, también propusieron una idea genial: buscaron unos palillos de dientes en la tienda escolar y mediante ensayo-error consiguieron dividir el palo en 18 partes iguales. Luego, los acompañamos a medir la primera longitud y todos nos motivamos mucho porque la longitud en su extremo coincidió con la marca establecida para la división del palillo.

En el cuaderno de Dayana, esto, aparece registrado así:

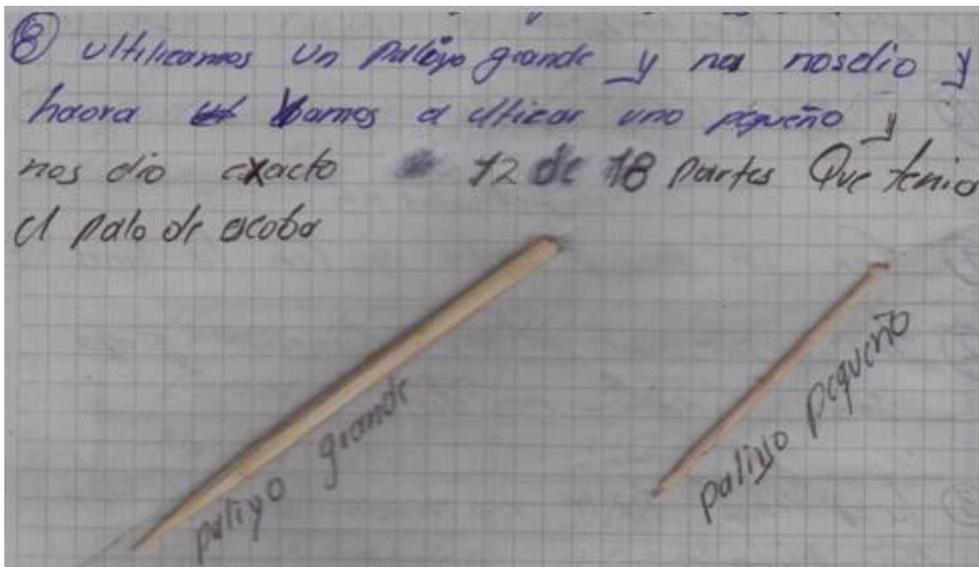


Ilustración 79. Dayana propuesta para dividir el palo. sept. 2012

Desventuradamente, Dayana y sus compañeros de equipo, al realizar la segunda medición (en el lado derecho de la escuela) se percataron de que el extremo de la longitud menor que el palo de escoba, no coincidió con ninguna de las marcas que dividían el palo de escoba (quedó entre el espacio de dos marcas o rayitas que estaban dividiendo el palo).

Posteriormente, para solucionar la problemática anterior, Daniel escribió:

Ilustración 80. Daniel, propuesta para dividir el palo en muchas partes. sept. de 2012

En la socialización, Daniel sugirió tomar el palo de escoba del Equipo donde estaba Catalina y hacerle rayitas como una regla; inmediatamente, Jonathan mencionó que con punticos también se podía. En este momento, Catalina y su equipo, aceptaron las recomendaciones de sus compañeros, y luego, con un marcador en la mano, Catalina compartió:

"Con la punta de un marcador caben tres punticos en cada partecita"

(Catalina, socialización de propuesta para dividir el palo de escoba en muchas partes, sept. 2012)



Ilustración 81. Equipo: Chicas súper poderosas. Fotografías: Propuesta de división del palo de escoba, sept. 2012

Así, describió Daniel lo que se hizo:

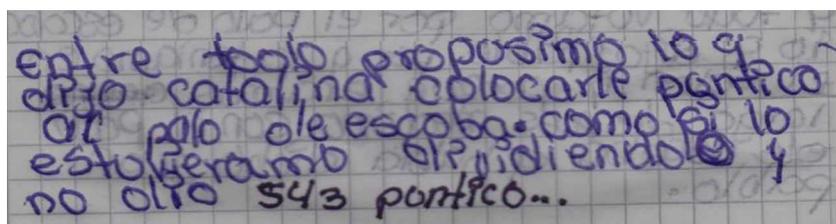


Ilustración 82. Daniel, descripción de lo realizado para dividir el palo en muchas parte, sept. 2012

Ahora, al momento de medir nuevamente el frente, los y las estudiantes contaron cuatrocientos cuarenta y tres punticos, hasta el extremo de la longitud menor que el palo de escoba. Así mismo,

nos desplazamos a medir la longitud menor que el palo de escoba del lado derecho de la escuela. Se trae aquí el resultado que expresó Angie:

**Ciento diecinueve de quinientos cuarenta y tres punticos del palo de escoba
(Angie, midiendo la longitud menor que el palo de escoba. Sept. 2012)**

Las acciones de los y las estudiantes en esta actividad, sobre todo en estas dos últimas elaboraciones, parecen indicar modificaciones que apuntan al establecimiento de una relación cuantitativa entre las unidades de medida creadas -el dedo y los punticos. Haciendo una relación de equivalencia, respectivamente a 181 dedos y quinientos cuarenta y tres punticos.

A juicio particular, en esa interpretación, esa modificación configura la existencia de una orientación común para las acciones concretas de un grupo de problemas que envuelven la necesidad de cuantificar aspectos continuos unidimensionales. La medición, no implica un número entero de veces la unidad de medida, esto es esencial para la elaboración conceptual de la fracción. Así, se puede considerar que la conexión establecida por estos estudiantes entre la unidad de medida mayor y la menor, presupone cambios en el modo de pensar del alumno una vez que, al modificar los modos de funcionamiento y regulación de sus propias acciones, se adquiere un modelo que los orienta a un conjunto de situaciones semejantes, caracterizando un pensamiento teórico (en el sentido de la GEPAPe, 2010).

Después de realizar estas mediciones, los y las estudiantes manifestaron gestos de alegría. Luego de felicitarlos, en el aula de clase, como docente abrí la siguiente pregunta de la AOE: ¿Cómo debemos expresar las medidas de las cantidades que sobraron? Y estos fueron los resultados que registraron Daniel, Catalina, Angie, Dayana y Jonathan desde cada uno de sus equipos:

, ^

cocxWQ Q?<tfjk> coarenWx^
de wa<j><<knk> . C0Crtft<<^p y -KQS
 ©ocmío v*? -f/e^ e ®e Pc'''>
 ¿le. escD'OG.

Ilustración 83. Daniel, ¿cómo debemos expresar las medidas de las cantidades que sobraron? , sept. 2012

443 de 543. Como expresar la medida

Ilustración 84. Catalina, ¿cómo debemos expresar las medidas de las cantidades que sobraron?, sept. 2012

Este grupo eligió esta forma de expresar la medida 443/543 Ponticos que tiene el resto

Ilustración 85. Angie, ¿cómo debemos expresar las medidas de las cantidades que sobraron? , sept. 2012

Como expresar la medida de
 443 de 543
 No lo haria así
 443,543

Ilustración 86. Dayana, ¿cómo debemos expresar las medidas de las cantidades que sobraron? , sept. 2012

Lo expresamos con números del resultado nos dio
 443,543 Ponticos que tiene el resto de escoba

Ilustración 87. Jonathan, ¿cómo debemos expresar las medidas de las cantidades que sobraron? , sept. 2012

Según Lima & Moisés (1998), la historia de cómo fue expresado, por los seres humanos, la cantidad de magnitud menor que la unidad de medida, es un proceso lento, que pasó por diferentes escrituras matemáticas prehistóricas egipcias, hindú-arábigas, entre otras.

En estas dos últimas situaciones, los y las estudiantes dieron cuenta del reconocimiento de la fracción como una representación numérica de cantidad que es menor que la unidad. Pero surgieron ciertas dificultades en el instante de dar cuenta de involucrar varios tipos de representaciones. En esa dirección, retomamos a Davidov (1988), cuando plantea que:

Las representaciones, surgidas gracias a la imaginación en la actividad objetal- sensorial de las personas en su comunicación, comenzaron a servir cada vez más como medio para planificar las acciones futuras y esto presuponía la comparación de sus diversas variantes y la elección de la mejor. Gracias a esto, las representaciones se hicieron objeto de la actividad del hombre sin una referencia directa a las cosas mismas. Surgió una actividad que permite transformar las imágenes ideales, los proyectos de las cosas sin cambiar hasta un cierto momento las cosas mismas. (Davidov, 1988, p.121)

Para nuestro caso, en el aula de clase, como docente les manifesté que debíamos expresarlo todos de una misma manera, por lo cual les expliqué que en la prehistoria los seres humanos habían utilizado muchas formas de escribirlo. Con rayitas, con letras, con símbolos. Además, existen formas actuales de representarlo como lo propuso Angie. Así mismo, expliqué que la “coma” nos podía servir para utilizarla en otra clase de números y de resultado de mediciones que conocerían después. Reconociendo estos aspectos de la historia de las matemáticas, les pedí elegir entre todos, una forma de expresarlo numéricamente. Así, lo registró Oscar:

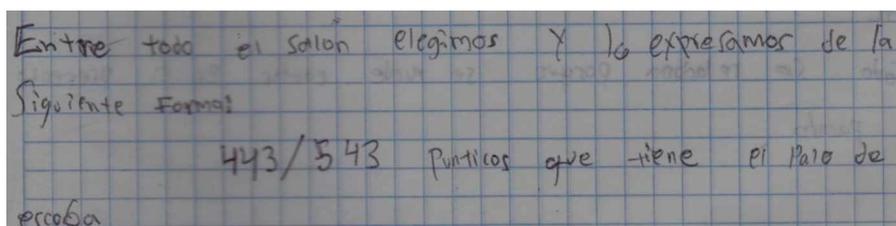


Ilustración 88. Oscar, forma de expresar la medida, cuando la magnitud es menor que la unidad, sept. De 2012

Después de haber tomado la decisión sobre cómo expresar la medida de lo que sobró, pregunté a todos los y las estudiantes: ¿qué significa $443/543$? A lo que Daniel expresó:

**"Es lo que midió el pedacito que nos faltaba por medir, cuatrocientos cuarenta y tres de quinientos cuarenta y tres punticos que tiene el palo"
(Daniel, ¿qué significa $443/543$? Sept. De 2012)**

En la socialización de Daniel, se puede evidenciar que la fracción $443/543$ es el resultado de una medición específica “el pedacito que nos faltaba por medir”, esto quiere decir, que lleva implícito una forma de expresar la división y la comparación de dos magnitudes continuas. En este sentido, compartimos con Lima & Moisés (1998) cuando expresan que la fracción es una representación numeral de una cantidad que es menor que la unidad; su desarrollo, según estos autores, propiciará la creación grandiosa de la razón y de la proporcionalidad más adelante, debido a que permiten registrar las relaciones entre las cantidades.

Los últimos dos cuestionamientos de esta AOE, se refieren a cómo medir una magnitud menor que la unidad de medida y, cómo expresar ese resultado. Estas situaciones, permitieron ver la esencia que admitió: crear la necesidad de fraccionar la unidad de medida, visto desde los planteamientos de Dayana y Jonathan hasta la propuesta, denominada por Daniel “colectiva”, de dividir el palo con muchos puntos iguales; comparar la magnitud con la unidad fraccionada o dividida, percibido en las mediciones del ancho (frente de la escuela) con las respectivas propuestas de los equipos y; el surgimiento del nuevo campo numérico, visto con la expresión, concertada, del resultado obtenido de la medición de la magnitud menor que la unidad.

El último inciso de esta actividad consistió en elaborar un modelo a escala para disponer las medidas obtenidas del borde de la escuela en la cartulina. Lo cual, es poner en práctica lo

trabajado sobre la noción de grandeza, en el sentido de discretizar el aspecto continuo representado en la cartulina.

Para orientar la construcción del modelo a escala, se retomó el resultado obtenido preguntando: ¿Cuánto mide el frente de nuestra escuela? -Y Jonathan mencionó: veintidós palos y cuatrocientos cuarenta y tres punticos. -¿Cuatrocientos cuarenta y tres, de cuántos?, ¿Cuántos tiene el palo de escoba? se debe decir completo, reiteré. A lo que ahora expresó:

Veintidós palos y cuatrocientos cuarenta y tres de quinientos cuarenta y tres punticos que tiene el palo.

(Jonathan, socialización, ¿Cuánto mide el frente de nuestra escuela? Sept. 2012)

Con el propósito de llevar esta medida a la cartulina donde se hará el plano de la escuela, como docente, aclaré: La escala de 1 a 4 significa que el largo de un palillito equivale al largo de cuatro palos de escoba colocados juntos; indicándoles, trasladar la medida a la cartulina.

Catalina tomó su cartulina, trazó una línea recta y haciendo un proceso de comparación entre esa línea y el palillito de dientes, contó cada vez que ponía el palillito: 4, 8, 12, 16, 20. Cuando llegó a 20 se encontró con un problema ¿cómo terminar de contar esos dos que faltaban? Por lo que se acercó al profesor.

Como docente, realicé un ejemplo en el tablero, tracé una línea horizontal en la parte superior e inicié el proceso de comparación marcando y contando como lo hizo Catalina. Cuando llegué a 20, trasladé la pregunta a los demás estudiantes ¿cómo terminar de contar esos dos que faltaban?

Oscar fue el primero en responder:

Se marca la mitad, y un pedacito se pone en la cartulina, porque dos es la mitad de cuatro, y como el palillo representa cuatro entonces, es la mitad.

(Oscar, socialización, modelo a escala, sept. 2012)

De la apreciación de Oscar, se nota que a lo largo de este camino, ha aprendido a tomar la “mitad” como una magnitud producto del proceso de comparación; además, en este proceso de la elaboración del modelo a escala, de este primer lado ancho (frente de la escuela), se logra percibir que la acción de comparar permite el surgimiento de nociones como parte-todo, como razón, y más aún, el de proporción -notado en Oscar cuando da a entender: que la mitad (de un objeto: palillo) representa a dos como la mitad de cuatro objetos (palos de escoba).

Oscar marcó su palillo midiendo desde ambos extremos con los dedos, puso dos en cada extremo y entre el espacio que separaba a los pares de dedos, estimó y puso una rayita con un lapicero. Este proceso ingenioso, que le permitió a Oscar establecer las mitades del palillo, representa la apropiación de un proceso que mostró anteriormente Catalina para fraccionar o dividir el palo de escoba, por lo tanto, se pueden constatar los planteamientos de la teoría de la actividad de Leontied, sobre que el aprendizaje es construido y transformado en la actividad, gracias a un proceso mediado por la compleja estructura de la actuación de las personas en diversos ambientes.

Oscar, en el tablero terminó lo que el profesor había empezado; pero, otro problema se aproximaba: ¿Cómo pasar los 443/543 punticos del palo de escoba, a la cartulina?; aclaro que a partir de la división que realizó Oscar al palillo, pregunté señalándolo: ¿Cuántos palos de escoba representa cada longitud de éstas? - dos, respondieron todos. Muy bien, y si los volvemos a dividir nuevamente en dos partes cada uno ¿Cuántas longitudes del mismo tamaño quedarían? (aquí le solicité a otro niño que lo dividiera) -quedarían cuatro, respondieron. Exacto, y ¿Cuántos palos representa cada longitud de estas? volví a indagar. - un sólo palo, respondieron los y las estudiantes (entre ellos los protagonistas de esta investigación).

Ahora, todos ya tenían el palillo dividido en cuatro partes aproximadamente iguales. Entonces les pregunté: ¿la longitud representada por $443/543$ es menor o mayor que un palo de escoba? Todos dijeron: menor. Esto refleja la importancia de haber trabajado la grandeza. Muy bien, dije. -ahora cada uno va a estimar la representación de esta longitud en el palillo y lo va a poner en la cartulina (Mientras tanto pasé por el puesto de cada uno). Cuando llegué donde Angie me percaté que no tenía representado en la cartulina la parte menor que la unidad por lo que, le solicité que estimará la cantidad de magnitud menor que la unidad. -hasta por aquí profe, dijo Angie señalando un “pedacito” de la longitud menor que la unidad.

Después, tracé en el tablero dos líneas perpendiculares en cada extremo de la longitud y les pedí a todos que con sus escuadras hicieran lo mismo. Luego, pregunté: ¿Cuánto mide el largo de nuestra escuela? A lo que Dayana contestó:

**Treinta y dos palos y ciento diecinueve de quinientos cuarenta y tres punticos
(Dayana, socialización, ¿Cuánto mide el largo de nuestra escuela? Sept. 2012)**

Con la respuesta de Dayana, se ratifica la apropiación de una expresión con la cual se registran las relaciones entre cantidades de magnitud. Aquí, invité a los y las estudiantes a llevar esta medida a la cartulina, recordando que la escala de 1 a 4 significa que el largo de un palillito equivale al largo de cuatro palos de escoba colocados juntos.

Se debe anotar que en esta parte los y las estudiantes lograron (con el palillo dividido en cuatro partes) realizar la comparación en la cartulina, teniendo en cuenta la escala. Además, es pertinente resaltar que estudiantes como Oscar y Jonathan, al momento de ubicar los $119/543$ punticos del palo de escoba, realizaron una comparación con los $443/543$ punticos; porque manifestaron que la primera (longitud) es menor que la segunda. Esto refleja una buena estimación y trabajo con las magnitudes al momento de establecer una relación de entre ellas.

De esta manera, en esta segunda actividad y como reflejo de las demás actividades en el camino del aprendizaje del movimiento conceptual de la fracción, se pudo notar que todo el énfasis en la medición como producto de la relación aritmética/geometría, permitió el desarrollo de las fracciones como lenguaje verbal y numérico, usado para expresar el resultado de esa medición, puesto que los números naturales no fueron suficientes para explicar, con mayor exactitud, este resultado.

La tercera AOE fue diseñada para terminar de dibujar en el plano, las dependencias (salones, baños, sala de profesores, tienda escolar, restaurante escolar, y demás espacios como la zona donde se va a reconstruir). Para hacer esto, los y las estudiantes respondieron un cuestionario y realizaron debates colectivos frente a la generación de un nuevo campo numérico.

La primera acción, consistió en percibir y tocar con las palmas de las manos, la superficie que corresponde al piso de nuestra aula de clase y luego tocar en la cartulina la superficie que se destinaría para ella.

Los y las estudiantes, se tiraron al piso, se quitaron los zapatos, lo tocaron con los pies y las manos, dieron vueltas. Posteriormente, cuando se les indagó por la ubicación de esta superficie en la cartulina, Angie manifestó incompreensión, preguntando: ¿Cómo así profe? No entendí -a lo que indiqué: recuerden cómo se veían las superficies en el computador, gracias al Google earth. Miremos la cartulina desde arriba e imaginemos que esa es la superficie que corresponde a toda la escuela, y si queremos ubicar allí este salón ¿en qué parte lo ubicarían en la cartulina? -como por aquí; porque por acá estaría la puerta, contestó Angie, tocando una parte de la superficie del lado inferior derecho de la cartulina. Esto, deja ver lo útil que fue el trabajo del reconocimiento de la superficie y su proceso de cuantificación en las AOE previas.

La segunda pregunta de esta AOE, consistió en identificar la unidad de medida más adecuada (vista en una cuerda, una hoja de periódico o en un ladrillo), para realizar una medición de superficie. Cabe decir, que fue un trabajo individual y se socializó en una mesa redonda en la cual, Daniel compartió lo siguiente:

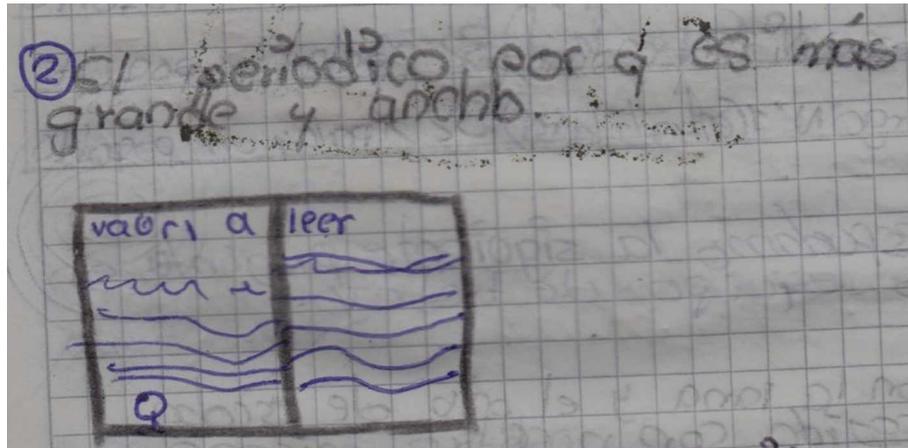


Ilustración 89 Daniel, escogimiento de la unidad para medir superficie, sept. De 2012

De la socialización de Daniel, aunque dice grande, se puede interpretar que se refirió al largo del periódico con forma de rectángulo, por tanto, junto a la identificación del ancho, reconoce elementos del periódico que lo hacen una superficie -unidad de medida, que permite hacer un proceso de medición.

Durante este debate, como docente pregunté: ¿se puede medir la superficie del piso del aula de clase, utilizando el ladrillo como unidad de medida? Dayana expresó:

Si se puede con el ladrillo, marcando en el piso y, quedarían como los lotes o casas que vimos en el computador.

(Dayana, debate, escogimiento de la unidad para medir superficie, sept. De 2012)

En la respuesta de Dayana, se puede notar el reconocimiento de la magnitud superficie en el ladrillo y precisa que con él, se haría un proceso de comparación, al tratar de mostrar como

quedaría después de sobreponer y delimitar el ladrillo en piso. En el sentido de Lima & Moisés (1998), esto es, tomar un instrumento de medición -el ladrillo, que lleva una unidad de medida al establecer cuántas veces cabe en la cantidad que se quiere medir. Como docente, retomé el planteamiento de Angie en la primera AOE de esta etapa (con lo que se abrió este análisis de esta categoría): es como dividir el rectángulo en pedazos, es decir, en otros rectángulos. Entonces ¿Cuál es la unidad de medida, la superficie de la cara del ladrillo o el ladrillo en sí? La superficie, la cara del ladrillo, todo no -dijo Angie. Esto permite pensar que ella, establece una diferenciación entre la unidad de medida y el instrumento. Seguidamente, repetí la pregunta si se podía medir con la cuerda. Y Daniel respondió:

**Con la cuerda no se puede medir el piso, porque la utilizamos para ayudar a medir el borde.
(Daniel, debate, escogimiento de la unidad para medir superficie, sept. De 2012)**

En la apreciación de Daniel, se puede evidenciar que la cuerda es una herramienta, que tiene asociados una representación y un conocimiento, los cuales le permiten convertirse en un medio (desde la GEPAPe, 2010) que ayuda al reconocimiento del perímetro de la escuela.

La siguiente pregunta de esta actividad fue: ¿Qué otros instrumentos servirán para medir la superficie que corresponde al piso del aula de clase? A lo que, en la socialización, Oscar respondió.

**Con un cuaderno, con los pies bien junticos, con la cartulina, con un cartón paja, o con el celular, pero, sería más difícil.
(Oscar, socialización, ¿Qué otros objetos o figuras te servirán para medir la superficie que corresponde al piso del aula de clase? Sept. 2012)**

Dicha respuesta, deja ver que una unidad de medida debe tener (Lima & Moisés, 1998):

**Tiene que ser de la misma naturaleza de la cantidad que se quiere; así, la longitud se mide con longitud, peso con peso, fuerza con fuerza, etc.
Puede ser de una magnitud cualquiera. (Lima & Moisés 1998, p.99)**

Cuando le indagué a Oscar sobre ¿por qué sería más difícil medir con el celular? Este respondió:

Porque tardaríamos mucho, en cambio con la cartulina sería más rápido.

(Oscar, socialización, ¿Qué otros objetos o figuras te servirán para medir la superficie que corresponde al piso del aula de clase? Sept. 2012)

Se muestra aquí, por parte de Oscar el uso que le da a la grandeza cuando realiza una comparación en términos de las relaciones de orden mayor y menor que, de las superficies del celular y la cartulina.

La cuarta pregunta de esta actividad consistió en escoger una unidad de medida que le sirva a todos para medir la superficie del piso del aula de clase. Luego, darle un nombre y realizar la medición. Para ello, los y las estudiantes, desde sus equipos de trabajo, lanzaron propuestas: Angie, dijo que con el periódico; Oscar, con la cartulina; Dayana, con un cuaderno; Daniel, con un libro; Jonathan, con la biblia y Catalina propuso unir cuatro palos y formar un cuadrado (no en sentido estricto geométrico). A Oscar le pareció tentativa, esta última propuesta porque expresó:

Sí. Sería mejor, porque permitiría medir más rápido porque es más grande.

(Oscar, socialización, ¿Qué otros objetos o figuras te servirán para medir la superficie que corresponde al piso del aula de clase? Sept. 2012)

Después de escuchar a Oscar, se eligió democráticamente la propuesta de Catalina. Por lo que cada equipo construyó su instrumento de medida de superficie con papel periódico, que ahora se convertiría en el patrón para la medición de las superficies de las dependencias de la escuela.



Ilustración 90. Equipos de Catalina y Angie, construyendo el patrón, sept. 2012

Después de construir el nuevo patrón, Catalina propuso llamarlo “cuadrado de palo de escoba” los demás estudiantes aceptaron. Inmediatamente, entre todos los y las estudiantes, utilizando todos “los cuadrados de palo” (patrón de medida de papel) construidos, medimos la superficie del aula de clase y las demás dependencias de la escuela. Cabe anotar, que se contó con la colaboración de otros profesores permitiendo la entrada a su salón para medir. Además, se pudo evidenciar que los estudiantes, en el proceso de las mediciones, pusieron en práctica las relaciones entre el ancho y el largo (vistas en clases anteriores a este proyecto) y, en algunas ocasiones, se recurrió a ello, (median el largo y el ancho y luego lo multiplicaban) por no poder tener acceso a la dependencia. A continuación se muestra lo que registró Angie:

Áreas de las dependencias de nuestra escuela

- 1- Área del Pasillo de la entrada = 10 Cuadrados de Palo de escoba.
- 2- Área de la tienda = 10 Cuadrados de Palo de escoba.
- 3- Área de la tienda de sala de profesores = $6 \times 4 = 24 + 1 \frac{1}{2} = 25 \frac{1}{2}$ Cuadrados de Palo de escoba
- 4- Área Banco de hombres = $3 \times 4 = 12 + 1 \frac{1}{2} = 13 \frac{1}{2}$ Cuadrados de Palo de escoba

- 5- Área Banco de mujeres = $13 \frac{1}{2}$ Cuadrados de Palo de escoba.
- 6- Área de oficina = $7 \frac{1}{2}$ Cuadrados de Palo de Escoba

Ilustración 91. Angie, registro escrito del área de las superficies de la escuela. Oct. De 2012

Con respecto a la siguiente pregunta desarrollada en esta AOE sobre: ¿quedó alguna cantidad del piso menor que la unidad escogida? ¿Qué hacer para medir estas partes? y, ¿Cómo expresar esas medidas? Es pertinente decir, que cuando se presentó esto, los y las estudiantes (protagonistas) doblaban el “cuadrado de palo de escoba” por la mitad; lo que fue suficiente para responder lo planteado porque estas mitades las sumaban a lo que ya habían medido. Lo siguiente es una explicación de Daniel:

El área de la oficina nos dio seis cuadrados de palo; y medio y medio, uno, serían siete; y medio, serían siete y medio.

(Daniel, midiendo las superficies de las dependencias de la escuela, Oct. De 2012)

Ahora, lo expresado por Daniel es reflejado en lo que escribió Angie, de forma numérica, y concordamos con Lima & Moisés (1998) cuando afirman que la fracción es la representación numeral de una parte, en relación al entero del cual participa. Además, en lo que anotó Angie se aprecia la utilización de números mixtos que representan números no naturales mayores que uno.

Teniendo las medidas en el tablero, sobre las dependencias, como docente, les pedí a los y las estudiantes, llevar esas medidas (mediante el modelo a escala 1:16) a la cartulina y terminar el plano de la escuela. Para ello, a los protagonistas de esta investigación, se les propuso elegir entre tres superficies la más pertinente. En este momento Oscar refirió:

Debemos elegir la del cuadrado porque con el óvalo quedarían espacios, y con el triángulo no quedan, pero sería más rápido con el cuadrado.

(Oscar, elección de una unidad pertinente, para realizar el modelo a escala, en la cartulina. Oct. De 2012)

Cuando Oscar decide elegir el cuadrado, refleja su comprensión de que el instrumento sirve para llevar la unidad de medida hasta la magnitud que se quiere medir; además, reconoce que al sobreponer el óvalo en la superficie, quedaría alguna superficie sin comparar.

Es pertinente recalcar, que la AOE estaba diseñada teniendo en cuenta que los modelos a escala de longitudes y superficies coincidieran para construir la maqueta de la escuela (el cuadrado tenía cuatro palos de escoba de lado). Igualmente, como docente, en el tablero pegué una cartulina para iniciar el proceso del modelo e irlos orientando hacia la construcción del plano. Lo primero que dibujamos fueron los dos salones ubicados en parte posterior derecha de la escuela; sus medidas fueron siete “cuadrados de palo” en el largo y seis en el ancho cada uno. Aquí, se presentó un nuevo problema, puesto que la unidad de medida representaba “cuatro cuadrados de palo” por cada lado. Dayana, propuso dividirla en dos y luego cada uno en dos, y éstos en dos más (como dobleces). De esta manera, la unidad ya tenía cuatro cuadrados de palo de escoba de lado y dieciséis de superficie. Ahora, para las cantidades menores que la unidad (como solo eran la mitad) Oscar, Dayana, y Daniel recurrieron a usar un dedo en cada extremo para dividirlo, pero Catalina y Angie, esta vez, usaron las unidades de la regla. A continuación se muestra el plano de Jonathan.

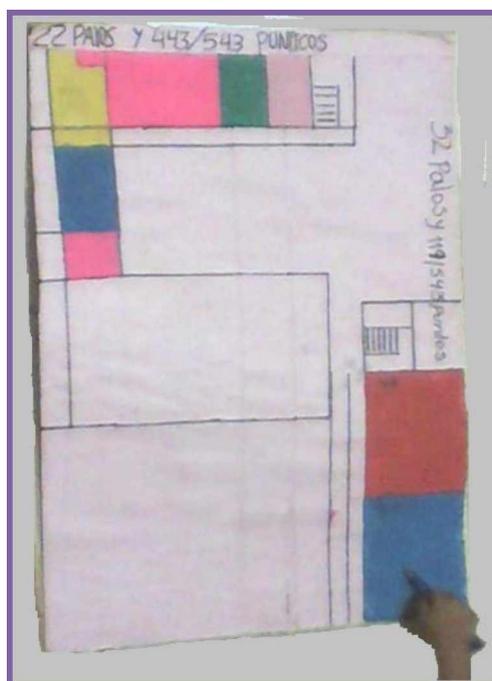


Ilustración 92. Jonathan, plano de la escuela. oct. De 2012

Los análisis de este conjunto de AOE, muestran que la idea de fracción como movimiento, fue asumida de una manera natural: en un primer momento cuando los estudiantes organizaron la tierra para ser cuantificada y escogieron la unidad adecuada; después al comparar magnitudes; luego, al dividir la unidad de medida en partes iguales y finalmente, en el momento de utilizar interpretaciones sobre la forma de expresar numéricamente un proceso de medida cuando la magnitud a medir es menor que la unidad de medida, al sugerir soluciones para problemas reales presentados en los diferentes apartados de la construcción del plano de *lmaqueta de la escuela*.

LLEGANDO A LA MAQUETA DE LA ESCUELA QUE SOÑAMOS

En este capítulo, se pretende analizar la forma como los estudiantes protagonistas, a partir de las reflexiones y apropiaciones realizadas en las tres actividades orientadoras de enseñanza, aprendieron el objeto fracción.

La primera AOE se llamó “dialogando con constructores”, para su desarrollo invitamos a dos acudientes que supieran de construcciones civiles: Harrison y Rafael, con ellos, realizamos un diálogo espontáneo sobre la historia de la medición, las construcciones civiles y la maqueta que estamos elaborando. El propósito de este diálogo fue en primer lugar, que los y las estudiantes, reconocieran, a partir de otras voces, algunos aspectos relacionados con el movimiento conceptual de la fracción en el contexto histórico-cultural; en segundo lugar, que los y las estudiantes mostraran conocimientos matemáticos que aprendieron hasta esta parte y; en tercer lugar, que los invitados nos ofrecieran directrices para seguir construyendo la maqueta de la escuela que soñamos. A continuación, se presentan algunos datos, de la vida personal de cada uno de ellos, obtenidos en la preparación de la actividad, donde a propósito, se les comentó lo que se estaba haciendo en este proyecto y lo que queríamos lograr. Vale destacar aquí, que se les mencionó el tema del diálogo, pero, no se les dieron las preguntas para que cumpliera con la característica de ser espontáneo.

Actualmente, Harrison tiene 48 años de edad. Él es casado y tienen dos hijos (el mayor está en este grado). Es graduado como ingeniero civil de la universidad del Sinú, hacen 18 años, de la ciudad de Montería (departamento de Córdoba) ubicada a 118 km al norte y de la cual es oriundo. Recién graduado se vino a probar suerte en este municipio puesto que en Montería era muy difícil emplearse. Él trabaja como contratista del municipio de Caucasia.

Mi niñez fue normal, fui a la escuela, me gradué de bachiller en un colegio que se llama Cecilia Lleras en Montería; luego ingresé a la universidad privada del Sinú, trabajé poquito tiempo en Montería. Pero, me vine con un amigo para Caucasia; me gustó mucho éste pueblo y me quedé. (Harrison, Actividad, dialogando con constructores, Oct. De 2012)

Rafael tiene 56 años de edad. Vive en una casa propia, construida por él mismo, ubicada en un barrio cercano y es abuelo de uno de los niños protagonistas de esta investigación. Nació en Caucasia, después de realizar sus estudios de primaria, se iba con su padre (albañil) al trabajo; allí, le ayudaba a revolver mezclas y hacer mandados. Estuvo en la secundaria pero no logró concretar sus estudios porque se dedicó a trabajar; fue minero, agricultor y últimamente se considera maestro de obra, sabe realizar cualquier tipo de construcción en obra negra y obra blanca (acabados).

En aquella época, no había universidades aquí, existían tres escuelas y eso era difícil, no alcancé a terminar, yo me iba a trabajar con mi papá que era albañil, a veces nos íbamos para el río a pescar, o a sacar oro en batea. No existían tantos barrios sólo unos cuantos, desde hace unos 25 años, más o menos, es que esto se ha poblado. Yo soy maestro de obra y trabajo en cualquier tipo de construcción y me atrevo hacer cualquier casa. (Rafael, Actividad, dialogando con constructores, Oct. De 2012)

En el aula de clase, como docente, fui el encargado de orientar y disponer el espacio de tal manera que permitiera sentir, a estudiantes y visitantes, seguros para dialogar entre ellos de manera equitativa, a fin de compartir el conocimiento que cada cual tiene y aprender el de todos. Se hizo una mesa redonda y se lanzó la primera pregunta: ¿Cómo se construían las casas o las escuelas antes y cómo se construyen ahora? Esta pregunta la contestaron inicialmente los invitados:

Harrison: Anteriormente, las casas se construían en madera, se cortaban unos horcones que sostenían la casa, las paredes eran de puro palito y revocada con una mezcla hecha con boñiga de vaca y barro y el techo era de palma. Hoy son de ladrillo, hierro y cemento, se pueden hacer edificios y casas muy bonitas.

Rafael: Antes, si... Las casas eran como dice él, porque, todavía no existía el cemento. Mi papá y yo hacíamos muchas por esta región; primero se levanta como un kiosco y después se encierra con madera.

Después, cuando llegó el cemento, ya se hacía con adobes y techo de zinc o tejas. Esta escuela es una de las más viejas de Caucasia porque la hicieron de primerito con la escuela del centro y el IDEM, hace como cincuenta años, mire (señalando una pared que está sin revocar) y la hicieron con adobes macizos y acostados, porque cuando eso no se hacían columnas; ya después, como hace cuarenta años, es que se empezó a utilizar el hierro aquí en Caucasia y se hacían columnas para hacer casas y algunos edificios de dos pisos. Ahora, es que se está viendo los edificios de cuatro y cinco pisos, pero eso, antes no se hacía por acá.

Los comentarios de los invitados lograron captar la atención de los estudiantes, alguno preguntó cómo era Caucasia antes.

Rafael: Me contó mi papá que Caucasia antes se llamaba Cañafístula y los primeros que llegaron fueron los Arrieta hace como ciento treinta años y vivieron al lado del río Man, por ahí había un camino; había mucho monte y bosques. Después, empezaron a llegar personas de otras partes que transportaban ganado por aquí y se iban quedando, sólo existían unas casitas de bareque en Pueblo nuevo, ese es el barrio más viejo de Caucasia y, aquí donde está la escuela, esto era río, por aquí pasaba el río. Las personas fueron viniendo de otras partes, como aquí había mucho oro, se fue poblando. No había carretera, la gente caminaba o se iban en canoa por el río. Cuando se acabó el oro, las personas pescaban o sembraban arroz, plátano, de todo. Hoy es que la gente no siembra y ya no hay monte, todo es finca con ganado.

Desde la perspectiva histórico-cultural, el aprendizaje no ocurre espontáneamente, ni es basado solamente en las condiciones biológicas del sujeto, porque es mediado culturalmente y es reflejado en la reproducción de la apropiación de conceptos que hace el sujeto. En este caso, nuestro invitado Rafael, refleja un conocimiento por tradición oral, acerca de la historia y origen de Caucasia, historia que concuerda con lo que guardan los libros de historia de Caucasia como el de Pimienta (2007). Y que hoy, los y las estudiantes, tienen la posibilidad de conocer, ampliar y trascender en un futuro.

La segunda pregunta fue: ¿Qué y cómo medían, antes y ahora? Como docente manifesté que quería escuchar a estudiantes primero. Entre ellos, se retoma lo que dijo Oscar:

Oscar: Antes se medía con las cuartas, los pies, los dedos. Pero a todas las personas no les daba lo mismo y el faraón les dio una cuerda con el cúbito de él para que repartieran los terrenos. Ahora también medimos con eso la escuela, y cuando jugamos bolita. Pero, también con la regla y el metro.

En la apreciación de Oscar ya se empieza a notar la apropiación de cierta parte de la historia de cómo se dio el proceso de la medición, el escogimiento de unas unidades antropométricas adecuadas como recurso de comparación entre magnitudes y, el surgimiento de patrones para solucionar el problema de no obtener una misma medida. Además, Oscar reconoce la utilización de estas medidas en situaciones reales como la medición del perímetro de la escuela y algunos juegos que realiza en su diario vivir.

Harrison (nuestro visitante) quiso saber más acerca de lo que estábamos haciendo y Daniel le contó:

Daniel: Nosotros estamos haciendo un proyecto de elaborar la maqueta de la escuela, y al mismo tiempo estamos aprendiendo sobre los números y la medida y un coso ahí, sobre la medida.

Harrison: ¿un coso? ¿Cómo así? ¿Qué coso?

Daniel: Si, es que nosotros medimos el ancho de la escuela con un palo de escoba, cierto. Y nos quedó faltando un pedazo por medir, para ese pedazo inventamos una manera, dividiendo el palo con punticos, y nos dio ese resultado que era cuatrocientos cuarenta y tres de quinientos cuarenta y tres punticos del palo.

Harrison: Ah... a ese coso se le llama fracción.

Rafael: ¿y qué más hicieron?

Dayana: También hicimos un paseo y visitamos las otras dos sedes, y aprendimos que el agua se puede contar por vasos, bolsas, poncheras.

Oscar: Fuimos a la universidad y trabajamos con los computadores, vimos cómo son las casas y los terrenos desde arriba, desde el cielo. Y miramos donde queda la escuela.

Catalina: y lo de la inundación, que si se borra la marca, formamos rectángulos.

Oscar: y también hicimos el plano en la cartulina, donde quedan los salones, los baños y todo eso.

Se nota aquí, que los y las estudiantes expresan sus pensamientos como lluvia de ideas provocadora del desarrollo de las actividades y conocimientos al transitar este camino hacia la

fracción. En ese sentido, se comparte con GEPAPe (2010) cuando sustentan que para el enfoque dinámico histórico-cultural, el conocimiento de la historia del concepto se torna fundamental para identificar las conexiones importantes del concepto trabajado y, de manera indirecta, generar un movimiento que permite revelar el proceso de creación y desarrollo del concepto, comprendiendo las prácticas sociales y los conocimientos en el mismo movimiento.

En concordancia con lo anterior, pienso que comienza a reflejarse el conocimiento aprendido, como un movimiento en el desarrollo cognitivo o psíquico, el cual se realiza, según Vygotski (2001), por un proceso de internalización, en una zona de desarrollo próximo. De esa forma, el aprendizaje es mediado culturalmente y es reflejado en la reproducción de la apropiación de conceptos que hace el sujeto.

Como docente, después de explicar a los invitados un poco más sobre el proyecto, retomé la pregunta sobre los procesos de medida pasados y actuales. A lo que nuestros invitados dijeron:

Rafael: antes los viejos cortaban la madera para hacer las casas de una misma medida, según se quisiera el alto, con una cuerda. Con los pasos, como dice el niño (refiriéndose a Oscar), también se medía la cerca, o con una vara. La distancia de un lugar a otro con un tabaco, se decía: el otro pueblo está a dos tabacos. Se empezaba a caminar fumando el tabaco y cuando se le acababan dos, llegaba. Ahora, medimos con el metro, ya sabemos cuántos adobes se lleva una casa, cuanto de cemento, cuanta varilla, cuanto de arena, todo. Yo lo he aprendido con ingenieros, oficiales y otros maestros, en la práctica.

Harrison: En la universidad nos enseñan a medir con el patrón de medida universal que es el metro, pero, también con otras unidades, como la yarda, la pulgada entre otros, a los materiales, con unas fórmulas que tienen en cuenta el elemento a fabricar y de las condiciones propias del trabajo como la resistencia, el peso, el envejecimiento, etc. En la cuantificación de estos materiales, si vamos a construir una pared multiplicamos el largo que tiene por el alto. Por ejemplo, si tiene 2 metros de alto por 4 de largo, son 8 metros cuadrados. En un metro cuadrado se usan doce bloques y medio. Multiplicando doce bloques y medio por ocho metros cuadrados da 100 bloques. Pero uno pide siempre unos 5 de más por si de pronto se quiebran algunos bloques. Ya con el cemento también, se tienen cálculos: con una bolsa se pegan entre 36 y 40 bloques. Para pegar bloques, se mezcla una bolsa de cemento con tres latas de arena.

Nosotros los ingenieros vigilamos que eso se haga así, que todo tenga su medida, porque después se puede caer la construcción, los maestros de obra se encargan de hacerlo con ayuda de los albañiles. Ustedes tienen una parte aquí que les van a construir, así como les digo se va hacer. Ahora, si a ustedes no los sacan de aquí deben alejarse mucho porque esos materiales son muy pesados y pueden causar accidentes.

Docente: Ustedes (dirigiéndose a los estudiantes) ya han ido pensando en lo que se sueñan que construyan en esta parte, ¿cierto? Cuéntenle a nuestros invitados eso que ustedes quieren allí?

Oscar: yo quiero que allí se haga una cancha por eso en mi maqueta voy hacer una cancha de micro.

Angie: Yo también quiero una cancha porque nosotros no tenemos, y que tenga para jugar básquetbol y voleibol.

Catalina: Yo quiero que se haga una sala de sistemas buena, porque esa que tenemos no sirve nada.

Docente: Harrison Y Rafael, lo que pasa es que primero construiremos la maqueta de la escuela y posteriormente cada uno tendrá la oportunidad de construir en ese espacio lo que se sueña y quiere que hagan, luego, levantaré un pliego de peticiones, desde los sueños que tienen los y las estudiantes, y lo enviaremos al gobierno departamental y municipal con el objeto de que sus sueños sean tenidos en cuenta al momento de decidir que construir.

Harrison: Me parece muy bien, me dan una copia a mí, para ver en que les puedo ayudar desde la administración municipal.

Los dos invitados dejan claro que trabajar la construcción civil requiere muchos cálculos matemáticos relacionados con las medidas, las razones y las proporciones. Es por ello, de vital importancia esta clase de información para los y las estudiantes que quieren pertenecer a este gremio siendo, ingenieros o arquitectos. En concordancia con eso, como docente, les mencioné a todos, lo útil que es aprender en la escuela sobre las matemáticas, y específicamente sobre los números, la geometría, las mediciones y las fracciones. Luego, planteé un diálogo sobre los instrumentos de medición:

Harrison: Yo les puedo decir que los instrumentos de medida, en las construcciones civiles también se han usado y todavía se usan mucho. Lo que hay que tener en cuenta es que el instrumento lleva la unidad de medida impregnada ó ahí mismo y debemos saber identificarla. Por ejemplo: un ladrillo puede servir como instrumento para medir la superficie (el piso) pero también puede servir para medir la longitud o la distancia de algo, por ejemplo del borde de la escuela, con el largo, el ancho o el alto que tiene. ¿Ustedes con que instrumentos midieron para hacer esos planos?

Angie: La escuela la medimos por el borde con el palo, pero antes con la cuarta, el pie.

Harrison: Esa cuarta es una unidad de medida porque lleva una longitud para medir el borde, entre este dedo meñique y el pulgar. De aquí hasta acá (Ejemplificando en su mano) y, el instrumento es la mano porque ahí está.

Harrison: El pie es un instrumento o unidad de medida o las dos?

Catalina: Es una unidad de medida.

Angie: También es instrumento, porque la unidad es la distancia de aquí acá (muestra el zapato) y está dentro del pie.

Harrison: Correcto los pies es unidad e instrumento de medida al mismo tiempo. Y sobre la superficie qué?

Angie: La superficie de un lote se puede dividir para contarla y ahí no hay instrumentos (como en la inundación). Pero, si la medimos con el cuadrado de palo de escoba ese es el instrumento y lleva la superficie.

Catalina: El periódico es un instrumento de medida y también lleva la unidad para medir el piso.

Docente: muy bien. Y cuándo pasamos las medidas a la cartulina ¿cuáles fueron los instrumentos?

Dayana: El palillo de dientes y la cosita esa que recortamos.

Docente: No le digamos cosita. Vamos a ponerle un nombre. Que les parece "regletón"

Angie: Si.

Docente: Quién quiere contar sobre la escala?

Daniel: ¿cual escala profe?

Docente: La forma de representar las medidas de la escuela en la cartulina, ¿cómo fue eso?

Daniel: Para el borde cuatro palos de escoba equivale a un palillo y dieciséis cuadrados de palo equivale a un cuadradito de estos (mostrándolo). A no. a un "regletón". Lo dividimos y quedo así (mostrándolo).

Docente: Escuchemos ahora a don Rafael.

Rafael: Si, como dice el ingeniero en la construcción hay muchos: el balde es un instrumento para saber cuánta agua le echamos a una mezcla; la pala para saber cuánta arena, lo mismo la carretilla, o la lata de arena; la plomada para verificar que los adobes vayan derechos; el nailon para la altura o la distancia de algo.

La discusión colectiva como medio para compartir todas las formas de resolver un problema, permite que se analicen las ideas entre todos, e incluirlas en lo que se aprendió en el aula. En las respuestas de Catalina y Angie, aunque percibimos una confusión entre unidad e instrumento, pudimos observar cómo ellas fueron más allá de la situación planteada, por medio de la formulación de una situación diferente, como parte de su argumentación, para hacer una generalización y así poner en evidencia la diferencia entre unidad e instrumento de medida. Daniel, Dayana y Angie en su caso, muestran lo aprendido en este trasegar por el movimiento

conceptual de la fracción, frente a los aspectos abstractos de la grandeza, las magnitudes, las unidades y los instrumentos de medida. Así, estas abstracciones las alcanzan por medio del desarrollo del objeto y su asociación con lo concreto, permitiendo expresar la esencia del objeto - desde las situaciones y problemas que recuerdan.

La siguiente pregunta de este diálogo fue: ¿cómo surgió la fracción?, desde un punto de vista inclusivo, con éste interrogante se creó el espacio donde los y las estudiantes pudieron mostrar sus diferentes formas de cómo se aproximaron al concepto de fracción:

Oscar: Cuando medimos el borde de la escuela con el palo de escoba, sobró un espacio y primero lo medimos con cuartas, dedos y sobró otro pedacitico y el grupo de nosotros dijo que era una lunita. Después, lo medimos con el mismo palo dividiéndolo en muchos punticos y nos dio cuatrocientos cuarenta y tres de quinientos cuarenta y tres punticos del palo de escoba.

Docente: escríbalo en el tablero.

Oscar: 443/543 punticos

Catalina: La fracción surge cuando medimos la parte que faltaba por medir, que era menor que el palo de escoba. Nosotros dijimos que dividiendo el palo en partes iguales con un dedo meñique y después lo tuvimos que dividir con punticos, y nos dio cuatrocientos cuarenta y tres de quinientos cuarenta y tres punticos del palo.

Docente: ¿Catalina, lo dividieron con el largo o el ancho del dedo meñique, porque acuérdate que el dedo es un instrumento pero hay que especificar la unidad de medida?

Catalina: Con el ancho profe, así (tomó el palo y lo ejemplificó)

Docente: Otra pregunta Catalina, ¿con cuántos dedos está dividido el palo? Y ¿Cuántos punticos tiene cada dedo?

Catalina: El palo está dividido en ciento ochenta y un dedos, y cada dedo tiene tres punticos. En total son quinientos cuarenta y tres.

Jonathan: La fracción surgió cuando empezamos a medir el ancho del corredor de la escuela, y nos dio veintidós palos y un poquito. Para medir ese poquito primero usamos las cuartas y nos dio; pero, después el profe dijo que se tenía que medir con el mismo palo y entonces lo empezamos a dividir en partes iguales, y el profesor partió uno por la mitad y dijo que no era así, entonces, le preguntó a la profe, y la profe le dijo que eso eran dos palos. Entonces, empezamos a dividirlo y fuimos mucho a ver si daba, y Catalina dijo que con los dedos, y salimos a medir, y nos dio. Pero, después medimos el largo y no nos dio. Entonces, lo dividimos con punticos con el marcador y medimos el ancho y nos dio, y medimos el largo y nos dio.

Docente: Harrison y Rafael ¿lograron entender, desde lo que dijeron los muchachos, cómo surgió la fracción?

Harrison: Si, de un proceso de medir lo que sobró o faltó por medir. Y dividieron el palo con punticos. Cuatrocientos cuarenta y tres de quinientos cuarenta y tres punticos del palo.

Rafael: Exacto de dividir el palo en quinientos cuarenta y tres punticos, y medir la parte que dio: cuatrocientos cuarenta y tres.

Las formas de compartir lo que aprendieron Oscar, Catalina y Jonathan permite evidenciar que la fracción es una representación de un proceso de medición, que implica la división y la comparación de la unidad de medida en una magnitud -longitud, menor que esa unidad de medida. Además, se confirma desde Oscar, la fracción como la forma de escribir numéricamente cantidades menores que la unidad. Así, es importante anotar, que los estudiantes poco relacionan este hecho con la medición de la superficie de las dependencias de la escuela, por ello pensamos que esta situación con la magnitud longitud fue, desde la perspectiva histórico-cultural, generadora de las conexiones de las maneras de pensar que se reflejan en los resultados del objeto del concepto teórico. En esa misma línea, se destaca a Davidov (1988), cuando expresa:

Como contenido específico del concepto teórico aparece la relación objetiva de lo universal y lo singular (lo integral y lo diferente). En tal concepto, a diferencia de lo empírico, no está incluido algo que sea igual a cada objeto de la clase, sino que descubren las interrelaciones de los objetos aislados dentro del todo, dentro del sistema de su formación. (Davidov, 1988, p.131)

La siguiente pregunta fue referida específicamente para los invitados ¿Cómo podemos seguir elaborando la maqueta (paredes, techo, puertas, ventanas etc.)?

Harrison: Deben seguir midiendo con las unidades e instrumentos de medida seleccionados y creo que les queda mejor si miden las alturas y los anchos de todo: de las puertas, ventanas y paredes. Para los techos, pueden usar un papel que se llama "papel corrugado", y luego, se pasan, usando el mismo modelo a escala.

Rafael: yo pienso que esta parte la pueden hacer en compañía de padres o acudientes para que los ayuden un poco.

Angie: Mi mamá me dijo qué sí la podíamos hacer con ladrillos?

Harrison: Sí, los ladrillos especiales de maquetas los pueden usar. Lo que tienen que tener en cuenta, es que las alturas deben coincidir con la de la escala.

Catalina: Yo también la voy hacer con ladrillitos

Docente: ¿alguien tiene alguna pregunta para nuestros invitados?

Daniel: no

Docente: Bueno, señores Harrison y Rafael. ¿Ustedes tienen algo más que decir?

Rafael: Lo que yo siempre le he dicho a mi hijo: estudien mucho para que sean alguien en la vida.

Docente: Muchas gracias Harrison y Rafael por su presencia. ahora, les pido el favor de acompañarnos en el proceso de medición de lo que nos falta.

En este capítulo apostamos por una perspectiva histórico-cultural, que crea espacios de diálogo para aprender unos de otros. La conclusión que podemos extraer de las experiencias analizadas es que cuando se crea este espacio, no sólo nadie queda excluido, sino que además se logran prácticas educativas más ricas, mediatizadas por el otro y con mucho más sentido y significado para los y las estudiantes.

Seguidamente, nuestros invitados (Harrison y Rafael) nos ayudaron a medir las alturas del segundo piso, las puertas y ventanas. Angie describió este proceso así:

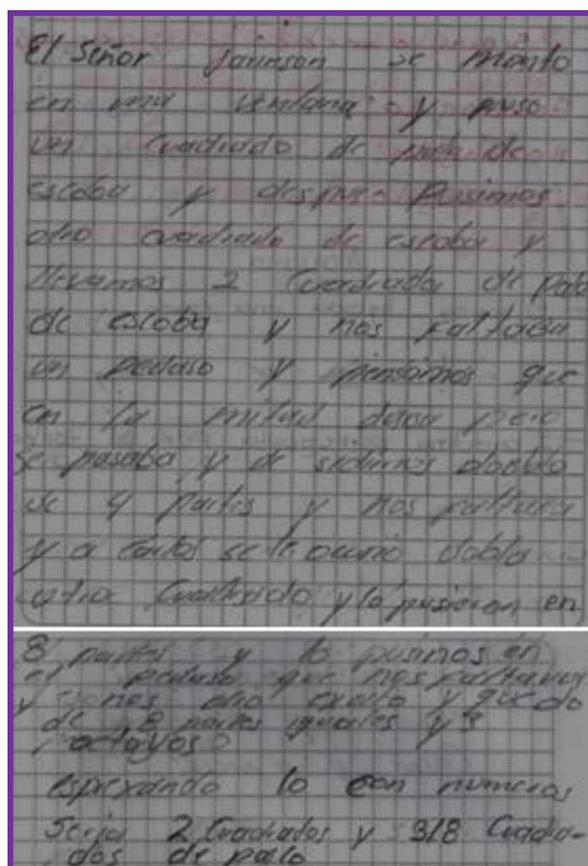


Ilustración 93. Angie, midiendo alturas con nuestros visitantes. Oct. De 2012

La segunda AOE que se tomó para analizar esta categoría se denominó “la maqueta de nuestra escuela”; en esta actividad las y los estudiantes debían construir el modelo a escala de las mediciones de las paredes, puertas y ventanas que se hicieron en la AOE anterior. Y posteriormente, construir la maqueta con la ayuda de los padres de familia. (Este día cada estudiante trajo sus materiales -cartón paja o ladrillitos, cartón corrugado, regla, tijeras, pegamento, pinturas, etc., estuvimos reunidos durante toda la jornada, y compartimos la lonchera).

En esta actividad se pudo apreciar que como ya se tenía el “regletón” marcado, de tal forma que cada cantidad de cuadrados de él representaban un cuadrado de palo, los y las estudiantes para medir el alto de las paredes de la primera planta ($2 \frac{3}{8}$ cuadrados de palo) contaron dos cuadrados en el “regletón” y de manera aproximada marcaron hasta donde podían llegar. Como docente, le pregunté a Oscar, cuando pasé por su puesto: ¿cómo supiste que da ahí, los $\frac{3}{8}$? a lo que respondió:

Porque $\frac{3}{8}$ es menor que la mitad y de aquí a aquí (señalando la parte en el "regletón") es también menor que la mitad.

(Oscar, construcción de la maqueta de la escuela, Oct. De 2012)

Luego, le volví a indagar: ¿cómo supiste que es menor que la mitad?

Porque cuando la medimos con el señor Harrison, nos dio tres de ocho, porque Carlos puso la mitad y no dio y siguió dividiendo y si le dio.

(Oscar, construcción de la maqueta de la escuela, Oct. De 2012)

En las respuestas de Oscar, se puede ver el reflejo del trabajo con la grandeza, al ser capaz de estimar la fracción del cuadrado de palo de escoba en el “regletón” y; el trabajo con las magnitudes al pasarlo al cartón paja para elaborar el modelo de las paredes, de una manera muy aproximada y coherente con un proceso que se había realizado.

Las alturas del segundo piso, las pasaron sin inconvenientes a la escala debido a que su medida fue de cinco cuadrados de palo. Es pertinente decir, que los padres fueron ayudando a recortar las distintas piezas que se necesitaron, se las compartieron entre sí. Para mi concepto, se pasó a realizar un trabajo colaborativo, las piezas que hacían unos se las daban a otros hasta que las fueron completando todas. Algunos estudiantes, pegaban dichas piezas, y otros primero dibujaron las puertas y ventanas. Entre ellas Dayana, por lo que como docente, le pregunté: ¿cómo haces para pasar las medidas de la puerta al cartón paja? Y ella contestó:

El ancho es de un cuadrado de palo, y el alto es un cuadrado y medio. Entonces, se deja este cuadrado: desde aquí hasta aquí (señalando desde la pared hasta donde inicia la puerta) y se empieza a medir, otro cuadrado del "regletón" y uno y medio para acá (señalando hacia arriba).
(Dayana, trabajo con la escala, Oct. De 2012)

En la respuesta de Dayana, se logra evidenciar la apropiación del manejo de la escala y además el reconocimiento de la fracción como una forma de expresar una medición determinada.

En esta actividad, se pudo ver a todos los y las estudiantes motivados en este proceso de la elaboración de la maqueta de la escuela y, los padres, por su parte, manifestaron que se sintieron bien y compartieron mucho. A continuación, se muestran la maqueta de la escuela de Angie y Dayana.



Ilustración 94. Angie, construyendo la maqueta de la escuela. Oct. De 2012



Ilustración 95. Daniel, la maqueta de la escuela. Oct. De 2012

Seguidamente, se desarrolló la tercera AOE denominada: “la maqueta de la escuela que soñamos”. El propósito de esta actividad es que los y las estudiantes elaboren en su maqueta, lo que se sueña que a la escuela le construyan. En esta parte, ellos imaginaron lo que querían que le construyeran a la escuela y, con la ayuda de sus acudientes lo reflejaron en la maqueta, teniendo en cuenta el modelo a escala implementado. A continuación, se muestran lo que sueñan tener en nuestra escuela los protagonistas de esta investigación.

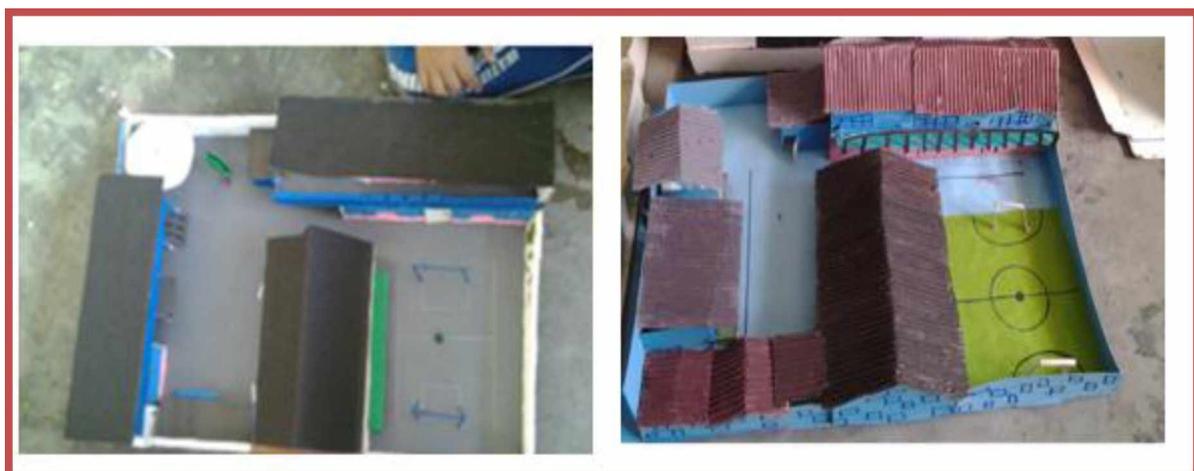


Ilustración 96. Oscar y Dayana, la maqueta de la escuela que sueño. Oct. 2012

Dos niños -Daniel y Oscar y tres niñas -Dayana, Catalina y Angie, sueñan que en la escuela se construya una cancha donde puedan jugar futbol, basquetbol y voleibol. Como docente, al preguntarle a Oscar porque sueña tener una cancha en la escuela, contestó:

**Con la cancha podemos jugar futbol, entrenar y disfrutar jugando.
(Oscar, por qué sueño con una cancha, Oct. 2012)**

Por su parte Jonathan sueña con que en nuestra escuela construyan una piscina. Como docente, le pregunté por qué y esto fue lo que contestó:

**Yo quisiera una piscina, porque serviría para nadar y que nos dieran clases de natación.
(Jonathan, por qué sueño con una piscina, Oct. 2012)**

A partir de esta categoría se resalta que los y las estudiantes protagonistas de la investigación interactuaron con varios elementos y relaciones lo cual, como investigador, me permitió deducir qué se estaba aprendiendo desde el primer momento de este recorrido, porque hubo un proceso de apropiación del movimiento conceptual de la fracción en los seis estudiantes protagonistas. A continuación, se puntualizan algunas reflexiones que permiten decir esto.

- El objeto-motivo mantuvo la motivación de las actividades de clase, y estaba en la misma línea del objeto fracción. Juntos movilizaron gran parte del proceso de investigación: construir la maqueta de la escuela que soñamos; destacando que se percibía en los y las estudiantes una emotividad especial hacia esta construcción.

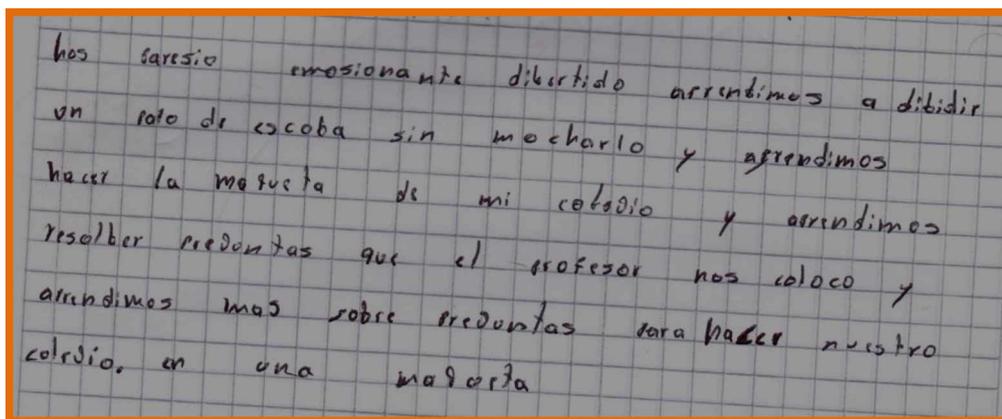


Ilustración 97. Jonathan, Apreciación del trabajo realizado. Oct. De 2012

- En términos de la GEPAPe (2010), se puede decir que los estudiantes reconocieron a partir de algunos aspectos importantes de la historia del concepto, las conexiones esenciales del movimiento conceptual de la fracción. Los estudiantes se apropiaron de estas conexiones para hacer suyo un concepto de fracción, en términos de dar cuenta de un movimiento que explica un proceso de medición.
- Ideas como variación de intensidad (grandeza), unidad de medida, instrumento de medición, patrón, magnitud (longitud, superficie), y hasta fracción, que fueron centrales en las categorías anteriores, se vieron fortalecidos en este episodio por el diálogo con los invitados y la construcción de la maqueta que soñamos.

Así, se puede decir que en este proceso de investigación, los estudiantes aprendieron la fracción como una forma de expresar una medición que cumple con unas características especiales. Para ellos, la fracción no estuvo ligada a la enunciación de una definición que recogiera las características comunes de dicho objeto, sino que, desde las diferentes conexiones, situaciones simuladas de la historia, representaciones y abordajes, cada estudiante interactuó con elementos constitutivos del movimiento conceptual de la fracción.

DESPUÉS DEL RECORRIDO

El motivo que impulsó a desarrollar esta investigación de maestría fue la necesidad, construida en la cotidianidad escolar con los estudiantes de cuarto grado, de fundamentar la práctica pedagógica sobre la enseñanza y el aprendizaje de la fracción, de tal manera que apuntara a la formación de mejores ciudadanos.

Para lograr lo anterior, se inició una búsqueda; ésta nos proporcionó el reconocimiento de la perspectiva histórico-cultural y, a partir de ella, unas teorías -como la teoría de la actividad y las Actividades Orientadoras de Enseñanza, que permitieron mediar, interpretar y comprender la fracción como un movimiento conceptual que proviene del pensamiento y el lenguaje en la actividad social e histórica de la humanidad, y en ese camino, ver el trabajo educativo como un proceso humanizador capaz de transformar a los estudiantes, al docente, y a la realidad, desde la construcción de un pensamiento teórico, producido en la actividad del sujeto (en unidad de la teoría con la práctica), que supera el sentido común. Con estos fundamentos, nos planteamos la pregunta que dio inicio al trabajo de investigación aquí expuesto: ¿cómo analizar el proceso de aprendizaje del concepto de fracción, en estudiantes de un grado cuarto de básica, desde la perspectiva histórico-cultural?

Para responder esta pregunta, realizamos un diseño metodológico desde un paradigma cualitativo, bajo un abordaje de una investigación participante y un enfoque crítico dialéctico. El trabajo de campo lo desarrollamos con estudiantes del grado cuarto de una institución educativa de carácter oficial, del municipio de Caucasia. La producción de datos la realizamos a partir de las interacciones directas con los seis estudiantes, protagonistas de la investigación, mediadas por actividades orientadoras de enseñanza, enmarcadas dentro de la Teoría de la Actividad, y esta a

su vez, en la perspectiva histórico-cultural. Dichas teorías, posibilitaron analizar los datos desde cuatro categorías emergentes. La primera, todo se relaciona; la segunda, la relación entre la forma y el número; la tercera, fracción: movimiento que expresa comparaciones de magnitudes continuas; y la cuarta, llegando a la maqueta de la escuela que soñamos.

A partir de los aspectos anteriores, dispusimos esta investigación en términos de un camino que al transitarlo, permite responder la pregunta de investigación, teniendo en cuenta la importancia de la humanización en la constitución del sujeto, así como el papel fundamental de factores históricos, sociales, culturales y políticos en el proceso de aprendizaje del conocimiento matemático, específicamente, del concepto de fracción. A continuación, planteamos las conclusiones a las que llegamos, en este recorrido, con el que se trata de dar respuesta a nuestra pregunta de investigación.

- Destacamos, a partir de los argumentos de la GEPAPe (2010), que el aprendizaje de un concepto puede ocurrir cuando participamos de los movimientos de la creación de éste, en una actividad que incorpora la práctica y la teoría en sus aspectos sociológicos y lógicos, es decir, cuando el sujeto se apropie de la producción histórica y social de la humanidad al “hacer” en la realidad, de forma mediada por instrumentos y signos (entre ellos el lenguaje) producidos culturalmente. Así fue como los y las estudiantes protagonistas, desde sus realidades, practicaron el concepto de grandeza y el de magnitud principalmente cuando comparan objetos y fenómenos en diferentes situaciones.
- Los estudiantes protagonistas asociaron el número a cantidades discretas y luego crearon la unidad artificial para poder medir las magnitudes, que en un inicio se presentaron en continuidad desde la interiorización que hicieron de la unidad de medida, mediado por el software libre Google earth, entre otros.

- En el camino recorrido, los y las estudiantes protagonistas, desde sus subjetividades, constituidas en dialogía con sus contextos, se aproximaron paulatinamente al objeto matemático, desde las interacciones con sus compañeros de aula y el docente investigador. De esta forma, y a través de las actividades orientadoras de enseñanza, los estudiantes tomaron conciencia progresiva de nociones esenciales del movimiento conceptual de la fracción: la grandeza, unidad de medida, el instrumento de medición, el patrón, las magnitud (longitud, superficie), y la fracción como forma de expresar numéricamente una medición “especial”. Esta toma de conciencias les permitió visualizarlo y dotarlo de significado; es decir, les permitió el proceso de aprender el concepto de fracción.
- La idea de aprendizaje de Vygotski (2001), en cuanto a que es mediado culturalmente y es reflejado en la reproducción de la apropiación de conceptos que hace el sujeto. Se evidenció, cuando los y las estudiantes se apropiaron de los distintos elementos para hacer suyo un concepto de fracción, en términos de dar cuenta del movimiento que explica su proceso desde unas conexiones histórico-culturales retomadas en las AOE y que también fueron reflejadas en la cuarta categoría de análisis para explicar lo que realizamos, a las personas que nos visitaron.
- En este proceso de investigación, las interacciones entre los diferentes sujetos participantes se constituyeron en elementos importantes para entender que las enunciaciones individuales no estaban desligadas de las complejidades de unas realidades situadas desde la voces de los otros. En ese movimiento de lo social a lo individual, se dio el aprendizaje, mediado culturalmente, de conceptos y significaciones sobre la fracción (tal como se dio en las cuatro categorías emergentes).

- Consideramos que haber recorrido este camino posibilitó un aprendizaje de la fracción desde lo abstracto a lo concreto. En ese sentido, los estudiantes protagonistas de la investigación, encontraron ciertas conexiones en las cualidades comunes de los objetos, las magnitudes, y la medición de lo que “sobraba”; conexiones que reconocieron como movimiento. Interpretamos que en esos momentos las preguntas: ¿todo se puede contar? ¿Cómo podemos medir los bordes del terreno, sin utilizar el metro? ¿Qué podemos hacer para medir la cantidad de terreno menor que la unidad de medida? ¿Cómo debemos expresar numéricamente las cantidades menores que la unidad de medida? y sus correspondientes representaciones, realizadas por los estudiantes, se encontraban en el plano de lo abstracto ya que aún, eran muy generales. Pero, al solucionarlas a través de procesos históricos, simulados en la construcción de la maqueta, posibilitó a los estudiantes, aprender el movimiento conceptual de la fracción, de manera concreta.
- Haber encaminado las actividades desde el objeto-motivo: construir la maqueta de la escuela que soñamos, provocó que los seis estudiantes protagonistas sintieran la necesidad de darle sentido a las acciones que las actividades les proponían. Así, los estudiantes hicieron suyas, entre otras, las ideas de unidad de medida, instrumento de medida, patrón, fracción porque desde sus realidades, se realizaron procesos de mediación que les posibilitaron aprender.
- EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN, DESDE LA PERSPECTIVA HISTÓRICO-CULTURAL: UN CAMINO... Un camino que ayuda a formar mejores ciudadanos y, entender cómo las diversas aproximaciones, reflexiones y apropiaciones hechas por los estudiantes, en permanente interacción con otros, les posibilitó aprender la fracción. Teniendo en cuenta, la realidad que les pertenece y de la que hacen parte.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alexandrov A. D, Kolmogorov A. N, Laurentiev M. A y otros (1976). La matemática: su contenido, métodos y significados. Alianza Universidad.
- Bajtín, M. (2009). Estética de la creación verbal. México: Publimex.
- Bishop, A. (2004) La tecnologías simbólica llamada matemáticas y su papel en la educación. Doc.
- Cano, M. F. (1997) Investigación participativa: inicios y desarrollos. Recuperado el 26 de octubre de 2009, de: www.insp.mx/Portal/Centros/ciss/nls.../inv_participativa.pdf.
- Caraya, B. J. (1984) conceitos fundamentais da matemática. 2º Ed. Lisboa: Gradiva.
- Catalani, E. M. T. (2002) Ainter-relacao forma e conteudo no desenvolvimento conceitual da fracao / - Campinas, SP: (s.n.)
- Davidov V. (1982). Tipos de generalización en la enseñanza. Havana: Pueblo y Educación.
- Davidov V. (1988). La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico. Investigación psicológica teórica y experimental. Moscú: Progreso.
- De León H. & Fuenlabrada I. (1996) Procedimientos de solución de los niños de primaria en problemas de reparto. Revista mexicana de investigación educativa. Vol. 1, Núm. 2, Pág. 268-282.
- Denzin, N., Guba, E. & Lincoln, Y. (1994). *Competing paradigms in qualitative research*. Handbook of qualitativeresearch. Park, CA: SAGE Publications.
- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semioticos y aprendizajes intelectuales. 2a. ed. Cali: Meter Lang - Universidad del Valle. [Titulo original: Semiosis et Penssee Humaine. Registres Semiotiques et Apprendissages intellectuels. (1995)].
- Gallardo J. R., González j. L., Quispe W. Y. (2008) interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción relime, vol. 11 (3).
- GEPAPe/Feusp. Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Actividade Pedagógica. (2010). A actividade pedagógica na teoria histórico-cultural. Brasília-DF: Liber Livro Editorial Ltda.
- Gonzale Rey. F (2005) Pesquisa qualitativa e subjetividade: os procesos de construaao da informaao. Sao Paulo: Pioneira Thomson Learning

Jaramillo, D. (2009). Educado Matemática, Leitura e Escrita: Armadilhas, utopias e realidades. PROVIA. En C. E. Lopes & A. M. Nacalato (Eds.). Entre o saber cotidiano e o saber escolar um olhar a partir da etnomatemática. Utopia o realidade? Belo horizonte: Mercado de letras.

Lima L. & Moisés R. (1998) A Fração. A distribuição da terras. CEVEC-CIARTE.

Meza A. & Barrios M. (2010). Propuesta Didáctica para la Enseñanza de las Fracciones. Memoria 11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. ASOCOLME.

MEN. (1998). Estándares curriculares de matemáticas. Bogotá. Ed. Magisterio.

Miguel, A. (2005). Pesquisa em Educação Matemática e mentalidade bélica. Texto apresentado na mesa redonda intitulada “Pesquisa em Educação Matemática e Transformação Social: Perspectivas e Interfaces”, no dia 12 de novembro de 2005 na abertura do IX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática”, ocorrido de 12 a 14 de novembro de 2005 na Faculdade de Educação da Universidade de Sao Paulo.

Miguel, A & Miorim, M. (2005). História na Educação Matemática: Propostas e desafios. Belo Horizonte: Autentica.

Monteiro, A., Orey, D. & Domite, M. (2004) Etnomatemática: papel, valor e significado. In: Ribeiro, J. Domite, M. & Ferreira, R. (Orgs.) Etnomatemática: papel, valor e significado. Sao Paulo: Zouk.

Monteiro, Alexandrina y Jackeline Mendes Rodrigues, (2011) “Prácticas sociales y organización curricular: cuestiones y desafíos”, traducción del portugués por Elkin Obregón, Revista Educación y Pedagogía, Medellín, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, vol. 23, núm. 59, pp. 37-46.

Morretti, V. D. (2007) Professores de Matemática em atividade de ensino. A perspectiva histórico-cultural para a formação de professores. Tese (doutorado em educação: ensino de ciencias e matemática). Universidade de Sao Paulo. Brasil.

Obando G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. REVISTA EMA, VOL. 8, Nº 2, 157-182.

Obando G, Vanegas M. D. y Vásquez N. (2006), pensamiento numérico y sistemas numéricos. Diploma en desarrollo de competencias básicas en matemáticas en la educación básica y media de departamento de Antioquia. Módulo 1. Gobernación de Antioquia. UdeA. Artes y Letras Ltda.

Pimienta B. A. (2007) La Configuración de la Identidad Local en la Diversidad Cultural: El Caso de Caucasia. Revista: PALABRA. Vol. 8

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin.

Radford, L. (2004). *Semiótica Cultural y Cognición*. Recuperado el 12 de Septiembre de 2010 de: <http://www.martes.laurentian.ca/NR/rdonlyres/808730CD-2FF4-45A3-AB1B06BAFF87B51B/0/Tuxtla3.pdf>

Radford, Luis. (2008) *Theories in Mathematics Education: A Brief Inquiry into their Conceptual Differences*. École des sciences de l'éducation. Université Laurentienne. Ontario, Canada.

Roth, W.-M., & Radford, L. (2011). *A cultural historical perspective on teaching and learning*. Rotterdam: Sense Publishers.

Ruiz Ledesma, Elena Fabiola. *Tratamiento de los conceptos de razón y proporción a través de un programa didáctico*. México, D.F, (2005).

Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa. Propuestas epistemológicas que orientan al investigador*. Bogotá: Cooperativa editorial magisterio.

Sanchez Francisco Alejandro (2010) *Las Representaciones en el Conjunto de los Números Racionales: Estudio de Caso para Grado Quinto de Primaria*. Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

Vergnaud, G. (1990) *la teoría de los campos conceptuales*, (traducción de Juan Díaz Godino) *recherches en didactique des mathématiques*. CNRS Y Universite Rene Descartes. Vol. 10 N° 2, 3.

Vygostki, L.S. (2001). *Construindo o pensamento e da linguagem*. Sao Paulo: Martins Fontes.

Vygostki, L.S. (2002). *A formação social da mente*. 6. Ed. Sao Paulo: Martins Fontes.