

質量異方性をもった質点のケプラー問題

久保雄宏 島田徳三

明治大学理工学部物理学科
214-8571 神奈川県川崎市多摩区東三田 1-1-1

The Anisotropic Kepler Problem

Kazuhiro Kubo Tokuzo Shimada

Department of Physics, School of Science and Technology, Meiji University
1-1-1 Higashimita, Tama-ku, Kawasaki-shi, Kanagawa-ken, 214-8571, Japan*Received October 17, 2008: Accepted December 1, 2008*

Synopsis : In this paper we revisit the Anisotropic Kepler Problem (AKP). This is one of the most fundamental problems in the field of Quantum Chaos. Quantum chaos is the study of the quantum behavior of a system, whose classical counter part involves chaos. With the advent of new technology, various quantum systems are now challenging us. These include nano-scale devices, laser trapping of atoms, the Bose-Einstein condensate, and the observation of its bright soliton modes. The classical theories of these systems have chaos and a real deep understanding of the foundation of quantum physics is required in order to correctly analyze these systems. It may be that the quantum theory, as represented by Schrödinger equation may need even to be reformulated.

For this aspect, the AKP is one of the most suitable testing grounds of the quantum chaos theory of any form. It is tractable to some extent by an analytic approach so that the periodic orbits may constitute a quantum amplitude in the quasi-classical regime, and yet it contains a hard chaos.

Here we review a seminal paper by Martin Gutzwiller written in 1977. The paper is very stimulating even nowadays and it provides us with extensive insight on the behavior of the trajectories of the electron with anisotropic mass term in a Coulomb field. We follow his analysis carefully and discuss the systematics of the trajectories with ample figures constructed by extensive numerical analysis. As a backbone theme of this paper we follow the proof by Gutzwiller of the existence of a trajectory with a given Bernoulli code.

We believe Gutzwiller's classic article will continue to be an unfailing source of insight in the quest for understanding quantum chaos. We would be happy if our efforts in preparing this manuscript should produce a small contribution to this direction. If any error should slip into this manuscript, it is throughly our fault.

1 序

本稿は、異方的な質量をもつ荷電粒子が、クーロン場でのような古典軌道をもつか (Anisotropic Kepler Problem: AKP) を詳細に考察したものである。お手本としたのは Gutzwiller の 1977 年の論文 [2] で、量子カオスの基礎とされている Gutzwiller の trace formula の論文 [1] よりは 5 年ほどあとに書かれたものである。これらは幾星霜も経た今も、量子カオス解析では突出した論文である。我々はしばらく、論文 [2] を読み解く努力を重ねた。論文には解析的な考察が沢山書いてある。それらをフォローすることは一通り出来るのだが、どうも腑に落ちないところが出てくる。特に近似がどこまで成り立っているかを定量的に確認しない限り安心が出来ない¹。論文の背景には、論文には書かれていない相当の数値計算がなされていて、それらを解析的に再導出していると思われるところが多い²。そこで我々も沢山の数値計算を実行し、とりわけ最近の数値処理・グラフィックス化アプリケーション [4] を使って、論文の記述の一つ一つを検証・批判した。その結果、Gutzwiller の解析計算の技量の高さに感嘆し、我々にはなかなか見えなかった事実が視覚化した計算の結果、判然と見えて感動し、やがて非常に複雑に思えた [2] の記述が (例えば質点の作る弧の統一的なリストが) 総合的に理解できた。本稿では紀要の紙面をいただいて、我々の前に浮かび上がった AKP 軌道の姿を我々の言葉で記述する。オリジナリティのクレームはしない。原論文よりも多少とも見やすくなった点があれば我々の喜びである。

この論文では、あくまで古典力学系の古典軌道の解析をする。しかしその動機には、量子カオスの問題への切り口として AKP を考えている。その事情を少し説明しよう。

量子力学が生まれてから、すでに 80 年あまりがたっている。非相対論的な問題では、Schrödinger 方程式が様々な系に使われて定量的な結果を正しく与えている。そこで観測の問題をのぞいては、量子力学は一つのすでに完成した体系であるかの感がある。しかし、本当にそう安心していいのだろうか。

量子力学の生い立ちは可解な力学系である。断熱不変量の考察から Bohr-Sommerfeld の量子条件が得られ、これ

を行列形式に書き直して交換関係が定式化されている。この解析力学が整備された後に、急速に計算機科学が発展し、解析的には解けない問題でも数値的には扱えるようになった。このように可解模型から視野が大幅に広がったおかげで、カオス分野の急速な発展が 1960 年代以降に起こり、カオスの間のユニバーサリティの発見、カオスの同期現象の発見、脳の認識への応用など、思いがけないような進歩が続いている。その一方、量子論はこの進歩からは極端に言えば切り離されている。様々な量子系、量子現象に適用されてはいるけれども、ルーツを可解系にもつ理論を、古典論がカオスを示す系に対しても正当性を仮定して、批判なしに適用している感が否みがたい。しかし、最近漸く可能になった挑戦的な量子系、たとえばナノテクノロジーで作られたビリヤード中を通過する電子 [5] や、レーザー・トラップされた原子 [6]、あるいは、Bose-Einstein 凝縮した流体中のブライト・ソリトン [7] などは、古典論がカオス的な振る舞いを持ちうる系で、KAM トーラスが崩壊している場合が多い。これらの新しい物理に、(カオスの物理にベースを持たない) Schrödinger 方程式などをそのまま適用していいものだろうか。古典論が可解でない場合の量子論に対する Einstein の強力な批判 [8] がすでにあるが、我々も原理的な問題の再考察・再構築が必要であると考え [9]。

量子論は大きく見ると次の 3 通りの方法に分けられる。第 1 は Schrödinger 方程式、第 2 は Heisenberg の行列力学、そして第 3 の方法が Feynman 経路積分法である。経路積分法では、量子論の原理を忠実に実現している。質点の量子論の場合、まず質点の可能なすべての経路を考え、それぞれに公平に絶対値が同じで作用を位相因子とする量子振巾 $\exp(iS/\hbar)$ を割り振る。これらを合計して、つまり経路についての積分をして、質点の遷移振巾を定義する。古典極限では、これらの経路の中で作用を最小化する経路 (古典軌道) が残ることになる。従って、この形式は、第 1 に仮定が明確で、第 2 に自然に量子論と古典論を経路という概念を架け橋として結びつける。系の古典論がカオスをもつ場合の系の量子論の様相を考察するのが量子カオス分野の基本命題だが、それには格好の作業仮説である。Gutzwiller は停留位相近似で各軌道の影響を評価して、準古典領域では、系の古典周期軌道にわたる和が量子振巾に対して支配的な寄与をなす事を見いだした [1]。この周期軌道理論で Green 関数をエネルギーの関数としてあらわすと、所謂、Gutzwiller の trace formula になるが、これは Riemann ζ 関数の trace formula と著しい類似がある。即ち、周期軌道の周期が $\zeta(1/2 + iE)$ に対する Euler の積表示での素数の対数に対応している。従って、Gutzwiller の trace formula はゼータ関数の零点分布に関する Riemann 予想を物理の立場から解く鍵かもしれない、という観点からも着目されている [10]。

¹ Gutzwiller の論文 [2] には、軌道に関する図面が一つもない。軌道を通く流れ場の図が一つだけで、他は証明に必要な運動学領域の構成図のみである。ところが本稿で明らかにするが、[2] の図の流れ場は原点近傍だけで成り立つ近似にもとづくもので、原点から離れた軌道を議論するときには使ってはならないものである。我々は、これに対し豊富に図面を使って軌道を解析する。

² 論文 [3] には豊富な図面がある。ここでは論文 [3] から論文 [2] に至るまでの双曲型特異点と衝突軌道の研究について述べている。

以上のように、量子カオスのコンテキスト [11, 12, 13, 14] で、我々は古典力学系の軌道に興味を持つ。特に力学系としては、カオスを持つが、ある程度は解析的な把握が出来て、軌道のシステマティクスがつかめるものが最初の練習舞台になる。それが AKP である。異方的な質量は具体的には半導体の物理で現れる。また、3次元での問題は非常に複雑なので2次元の AKP に限る。それでも古典論での軌道は驚くほど豊かなヴァリエティにわたり、少しやってみると非常に挑戦的な問題である事が解ってくる。

例として我々が軌道探索で得た周期軌道の一つを図1に示す。これは、我々が形から‘コロボックル’と呼んでし

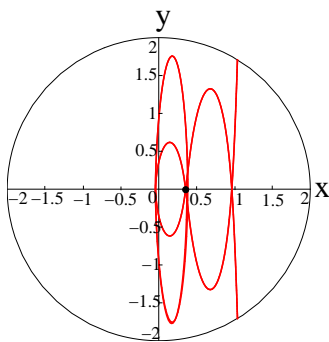


図1 AKP の対称な周期軌道の例。あだ名はコロボックル。

く親しんだものだが、この軌道は x 軸に対し垂直に打ち出したものなので x 軸に関して対称、それ以外には極めて複雑である。

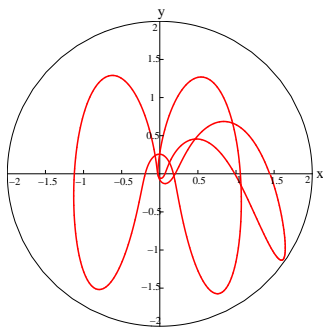


図2 AKP の一般の周期軌道の例。あだ名は耳なが。

図2は、このような対称性がない一般的な周期軌道であり不安定周期軌道である。我々は‘耳なが’と呼んだがこれは Gutzwiller の量子カオスの教科書 [13] に現れるものである³。最後に、図3に周期性が無くいつまでも続くカオス軌道の例を挙げる。これらの軌道が端的に示すように、AKP

³ この教科書でこの軌道の初期条件は $X_0 = 1.667241207245$, $U_0 =$

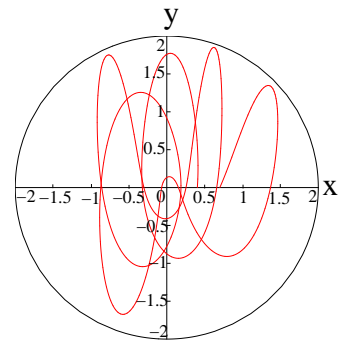


図3 AKP のカオス的な軌道。カオスなので形が無くあだ名のつけようがない。

では、トーラスが支配的な可解模型とは全く異なった領域に我々は踏み込むことになる。

本稿では、冒頭で述べたように数値計算をふんだんに取り入れながら AKP の軌道の全体像を考察する。同時に、AKP の軌道の豊富さを評価した定理に着目して、[2] の証明を解説する。以下では、まずこの定理を紹介し、どのような AKP の軌道についての理解があれば定理が証明できるかを述べる。こうして、目標地点を決めた上で AKP の軌道についての解析を行う。始めに基本的な運動学的考察をする。次に、 xy 平面の原点の近傍を運動する軌道と、原点と衝突もしくはニヤ・ミスをして、 xy 平面の有界な領域に飛び出してくる軌道に分けて解析的な考察をする。続く小節では具体的な数値計算で、解析的計算をバックアップする。最後にこれらの知見をふまえて、定理の証明を完成する。

なお、AKP について力学系の概念を駆使した Robert Devaney の仕事がある [17, 18, 15]。また3体問題への応用も興味深い [19, 20, 21]。本稿では、量子カオスの計算への準備としてより物理的な Gutzwiller のアプローチに焦点を絞るが、最後に、本稿で議論した定理をより一般的な形で証明し適用範囲を与えた Devaney の仕事について主要な論文 [18] に簡単に触れることにする。

2 与えられた2値数列に対する AKP 軌道の存在定理: その意味

2次元の AKP で、そのハミルトニアン H の値を便利のため基準値 $-1/2$ に固定する。他の値をとったとしてもその違いは軌道の座標と時間のスケールの取り方に吸収されることが簡単に示せる。質点は xy 面内で運動するとし、質

-0.238343983398 であるが、これはミスプリントである [16]。教科書の値だと全く違う非周期軌道になる。我々の周期軌道探索によれば $X_0 = 1.668021116962$, $U_0 = -0.564998260134$ である。

量行列を

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad m_1 > m_2$$

と対角的にする表示の1軸 ('heavy axis') を x 軸に, 2軸を y 軸にとる. 質点は, $y_0 = 0$ で x 軸上の座標点 (x_0, y_0) から出発することにする. 一般に, 2次元 Hamilton 方程式の解である質点の軌道は, 初期位置 (x_0, y_0) と初期運動量 (u_0, v_0) を指定すれば一意に決まる訳であるが, いまは解を $H = -1/2$ の等エネルギー曲面に拘束し, さらに $y_0 = 0$ としているから, (x_0, u_0) が軌道のラベルになる.

さて, 軌道は順次 x 軸を (x_0, x_1, x_2, \dots) で横切るとする. この数値の列は, 軌道の Poincaré Plot と呼ばれる. 軌道が切断面 (Poincaré surface of section) を横切るときのスナップショットである. いまの場合, x 軸を '切断面'⁴に選んだのは, 質量が $m_1 > m_2$ であるために, y 軸よりも x 軸を横切る回数の方が多く, 従って, より多くの情報が Poincaré Plot に残されるからである. さらに, 各 x_i の符号 ($a_i \equiv x_i/|x_i| = \pm 1$) の作る2値数の列を (a_0, a_1, a_2, \dots) としよう. この Poincaré 断面の '符号列' は, Bernoulli 列と呼ばれる. Bernoulli 列は軌道の情報のごく一部分のみを取り出したもの—軌道を粗視化したもの—である. 以上の設定のもとで, 軌道 (x_0, u_0) を与えるごとに符号列 (a_0, a_1, a_2, \dots) が決まることになる. これは自明のことである.

今度はこの問題の逆を考えてみる. すなわち, 任意の Bernoulli 列 (a_0, a_1, a_2, \dots) が与えられているとする. このとき, これを軌道の x 軸の切り方 (x_0, x_1, x_2, \dots) を符号の列として持つような軌道 (x_0, u_0) は存在するだろうか?

我々が証明しようというのは, まさにこの問題に対する定理である.

任意の符号列 (a_0, a_1, a_2, \dots) に対して, これを軌道の Poincaré 断面の符号列とする軌道が少なくとも一つ存在する.

なお, 沢山の数値的な解析の結果, 適当な質量異方性の範囲では, 軌道の存在のみならず, 存在の一意性も示されている. 本稿では, この一意性については, 次章で少しだけふれることにする. 前節でいくつかの軌道の具体的な例を示した. 周期軌道 "コロボックル" は出発点の丸印を込めて勘定して, 符号列 $(+-+++++-+++++-)$ の無限回の繰り返しに対応し, 周期軌道 "耳なが" は同様に, $(+-+-+++++-)$

⁴ 切断面というよりは, x 軸を横切るのだから, 切断線という方が正確であるが, 慣用に従う.

の無限の繰り返しである. カオス的軌道の例では, 図3で示した部分は, $(+++--+-+++-)$ である.

符号列から2進数を自然に作れば, 周期軌道は有理数で表現され, カオス軌道は無理数で表現される. 定理の主張は, いずれの場合でも, どんなに長く複雑な符号列, たとえば, 48ビット⁵の $(+++--++++--\{30\pm\}--++++)$ を与えられ, x 軸を順次にこのように切る軌道を作れ, と命ぜられたとしても, 巧みに初期条件を選べば, 原理的にはこの過酷な指示を満足させることができるということである. これは, AKP の解の空間の多様性を表している. これに比して, 質量異方性のない Kepler 問題 (の束縛問題) では解は楕円軌道に限られるから, 符号列は, 単に $(+-)$ の無限回の繰り返しに限られる. 本章では Gutzwiller によって与えられたこの定理の証明を, 我々は再構成して述べる.

原論文 [2] は Coulomb 特異点 $r = 0$ の近傍を通る軌道について超幾何微分方程式に基づく詳細な解析をして, 軌道と特異点の衝突を支配する '衝突パラメータ' を導入している. 我々はむしろ, 運動学的な観察を重視して, AKP 問題ではどのような物理現象が起きているかを視覚的に提示しようと思う.

3 運動学

我々が扱う AKP のハミルトニアンは適当な無次元化を行うと次のようにかける.

$$H = \frac{u^2}{2\mu} + \frac{v^2}{2\nu} - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \quad (1)$$

ただし, x, y はデカルト座標系での無次元化された位置座標であり, u, v はそれに共役な運動量である. また $\mu, \nu = 1/\mu$ は AKP の質量の異方性から決まる量である. この (1) から得られる Hamilton 方程式は

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{u}{\mu} \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial v} = \frac{v}{\nu} \end{aligned} \quad (2)$$

となる. Poincaré 断面では $y = 0$ であるから, $H = -1/2$ の条件は (1) より,

$$|x| \leq \frac{2}{1 + u^2/\mu}, \quad -\infty < u < +\infty \quad (3)$$

となる. xu 平面上でこの不等式 (3) を満たす領域は, Lorenz 曲線を境界とする u の正, 負の方向に開いた領域である (図

⁵ 我々は, 本稿の成果をふまえて AKP のエルゴード性の問題を考察しているが, 実際に 48 ビットの符号 (2 倍長精度に対応) を記録し, それから構成される 2 進数を用いて解析をしている.

4(a).

これを解析に便利な有界な形にするため、変換

$$X = x(1 + u^2/\mu), \quad U = \sqrt{\mu} \arctan(u/\sqrt{\mu}) \quad (4)$$

を行う。この変換は AKP 系の Liouville 体積を保存し測度を不変に保つ。

変換 (4) の逆変換は

$$x = X \cos^2\left(\frac{U}{\sqrt{\mu}}\right), \quad u = \sqrt{\mu} \tan \frac{U}{\sqrt{\mu}} \quad (5)$$

である。\$U\$ と \$u\$ は 1 対 1 対応の関係にあるので \$U\$ はスケール変換された運動量である。一方、\$X\$ は \$x\$ と同じ符号をもつが、\$x\$ と \$u\$ 両方に依存している。

新しい変数 \$X, U\$ では (3) は

$$|X| \leq 2, \quad |U| \leq B \equiv \frac{\sqrt{\mu}\pi}{2} \quad (6)$$

となり、\$XU\$ 平面上で長方形の領域となる (図 4(b)).

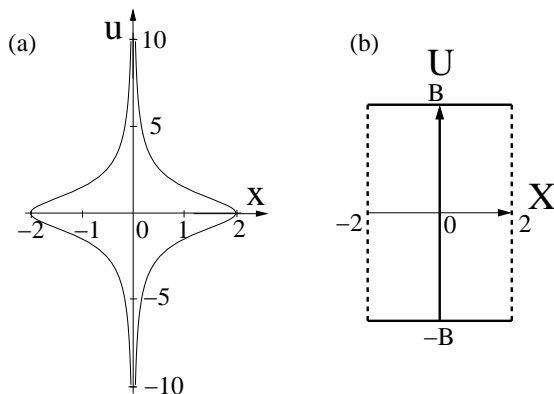


図 4 (a) Poincaré 断面 (\$y = 0\$) での \$(x, u)\$ の値がとり得る領域。\$\mu = \sqrt{5}\$。境界は Lorenz 曲線。\$u\$ の正、負の方向に開いた領域である。(b) 左の領域を、変数 \$X, U\$ で見直した長方形の領域。\$B \equiv \sqrt{\mu}\pi/2\$。\$X = 0\$ および \$|U| = \sqrt{\mu}\pi/2\$ の線分 (太線) 上の点に対応する軌道は衝突軌道。\$|X| = 2\$ の線分 (破線) 上の点に対応する軌道は \$x\$ 軸に沿って運動する。

この長方形の中の任意の一点は、これを初期値とする一つの軌道に対応している。特徴のある軌道が、この長方形の境界と \$X = 0\$ の線分で起こる。

\$X = 0\$ の線分: \$X = 0\$ であれば (5) の第 1 式第 1 因子のために \$x = 0\$。かつ、切断面を出発するときは \$y = 0\$ なので、この線分上の各点に対応する軌道は、Coulomb 場の特異点 (すなわち \$r = 0\$) から出発する。このとき原点にある正のイオンと質点 (電子)

が衝突するので、衝突軌道 (collision trajectory) と呼ぶ。

\$U = \pm\sqrt{\mu}\pi/2\$ の辺: (5) の第 1 式第 2 因子のために、やはり \$x = 0\$ となるから、これらの軌道もやはり衝突軌道である。物理的にいうと、(5) の第 2 式で、\$u = \pm\infty\$ となっていることから、ポテンシャルエネルギーが \$-\infty\$ の \$xy\$ 平面の原点 (\$r = 0\$) で、ここでは運動エネルギーが \$+\infty\$ になっている。

図の左右の境界 \$X = \pm 2\$ の両線分: \$|X| = 2\$ は、(3) で等号が成り立つ場合で、運動エネルギーが \$u\$ のみで担われている (\$v = 0\$)。すなわち切断面を \$y = 0\$ で出発し、そのまま \$v = 0\$ で \$x\$ 軸にそって運動する軌道である。衝突軌道ではない。

後のために、作用 \$S\$ とヴィリアル \$R\$ を次のように定義する。

$$S = \int_0^1 \left(u \frac{dx}{dt} + v \frac{dy}{dt} \right) dt,$$

$$R = - \int_0^1 \left(x \frac{du}{dt} + y \frac{dv}{dt} \right) dt.$$

積分は軌道の始点 0 から終点 1 にわたって行う。軌道の始点 0 から終点 1 に至るまでにかかる時間は

$$T = \int_0^1 dt$$

であるが、\$H = -1/2\$ の下ではこの \$T\$ を使って作用 \$S\$ とヴィリアル \$R\$ の間に、

$$R = \frac{1}{2}(S + T) \quad (7)$$

という関係がある。新しい変数 \$X, U\$ を使って書いた \$R\$ を変分すると

$$\delta R = -X_1 \delta U_1 + X_0 \delta U_0 \quad (8)$$

そこで

$$\frac{\partial R}{\partial U_0} = X_0, \quad \frac{\partial R}{\partial U_1} = -X_1 \quad (9)$$

となる。

4 弧 (arc) と複合弧 (composite arc)

弧とは、AKP の Hamilton 方程式の解の一部でその \$i\$ 番目のものは \$x\$ 軸を \$U_i\$ で横切ってから (このとき \$y_i = 0\$) 再び \$x\$ 軸を \$U_{i+1}\$ で横切る (\$y_{i+1} = 0\$) ものである。この弧を \$(U_i, U_{i+1})_{(a_i, a_{i+1})}\$ と書く。弧の初期条件として \$(X_i, U_i)\$ を与えれば、弧は、当然、積分により一意に決まる。これに比べると、上記の弧の指定の仕方は、\$(U_i, U_{i+1})\$ を与えて弧を決めようというものであるから、いわば、\$X_i\$ を \$U_{i+1}\$ にトレードしたものである。注意すべき点は、このやり方だと

U_i と U_{i+1} に加えて、さらに a_i と a_{i+1} を指定して、漸く弧が一意に決まることである⁶。

定理の命題は、AKP の軌道で与えられた (a_0, a_1, a_2, \dots) を持つものを作れというものである。そこで、 (a_0, a_1, a_2, \dots) に応じて複合弧

$$(U_0, U_1)_{(a_0, a_1)}(U_1, U_2)_{(a_1, a_2)} \cdots (U_{i-1}, U_i)_{(a_{i-1}, a_i)}(U_i, U_{i+1})_{(a_i, a_{i+1})} \quad (10)$$

を作る。

複合弧の x 軸の切り方は確かに a_0, a_1, \dots になっている。しかし、弧 $(U_{i-1}, U_i)_{(a_{i-1}, a_i)}$ の終端点の X 座標 $(X_i^{\text{終}} = -\partial R(U_{i-1}, U_i)/\partial U_i)$ と、その次の弧 $(U_i, U_{i+1})_{(a_i, a_{i+1})}$ の始点の X 座標 $(X_i^{\text{初}} = \partial R(U_i, U_{i+1})/\partial U_i)$ は一般には一致していない。だから複合弧 (10) は隣接する弧の間で X 座標にジャンプが一般には起こっていて、Hamilton 方程式の一続きの解 (軌道) にはなっていない。そこで上手に U_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) を選んで、複合弧 (10) を、一続きの軌道に‘育てられるか?’ ということが問題になる。

複合弧に対するヴィリアルを

$$\mathcal{R}_{(a_0, \dots, a_n)}(U_0, \dots, U_n) \equiv R((U_0, U_1)_{(a_0, a_1)}) + \cdots + R((U_{n-1}, U_n)_{(a_{n-1}, a_n)}) \quad (11)$$

で定義しよう。各 i 番目の弧と弧の連結で $X_i^{\text{終}}$ と $X_i^{\text{初}}$ の一致する条件は

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial U_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (12)$$

となる。これはヴィリアル \mathcal{R} が、その変数 (U_0, \dots, U_n) の定義域上で極値を持つ条件に他ならない。具体的には、一般的な極値ではなく \mathcal{R} の最大値の存在を示すことが出来る。即ち複合弧の概念を導入したので、我々の定理は

$$\mathcal{R}_{(a_0, \dots, a_n)}(U_0, \dots, U_n) \equiv R((U_0, U_1)_{(a_0, a_1)}) + \cdots + R((U_{n-1}, U_n)_{(a_{n-1}, a_n)})$$

は、その変数 $(U_0, U_1, \dots, U_{n-1})$ の定義域上で最大値を持つ。

に変形された。これを証明するには、複合弧のヴィリアル \mathcal{R} を扱う前に、複合弧の構成要素の単独の弧 $(U_i, U_{i+1})_{(a_i, a_{i+1})}$ に対するヴィリアル $R((U_i, U_{i+1})_{(a_i, a_{i+1})})$ の振る舞いを調べなければならない。

⁶ $(a_i a_{i+1})$ が $(+-)$, $(-+)$ の場合には、 $B = \sqrt{\mu\pi}/2$ として、 $-B \leq U_0 \leq B, -B \leq U_1 \leq B$ だが、 $(++)$ では、 $-B \leq U_0 \leq B, -B \leq U_1 \leq g(U_0)$ 、 $(--)$ では、 $-B \leq U_0 \leq g(U_1), -B \leq U_1 \leq B$ と運動量領域が制約される。文献 [2] の?-D 参照。本稿では、小節 6.2.1, 6.4.2 で議論している。

5 弧に対するヴィリアル $R(U_i, U_{i+1})$

我々は、弧 $(U_0, U_1)_{(a_0, a_1)}$ に対するヴィリアル R を考察したい。これは一見簡単に見えて、実はなかなか困難な問題である。

数値解析の立場でまず考えてみよう。この場合、弧は一つの Poincaré 断面の点 X_0 から‘運動量’ U_0 で出発し⁷ 次の Poincaré 断面の点 X_1 に‘運動量’ U_1 で到着するまでの軌道である。そこで、 (X_0, U_0) から、運動方程式を次の Poincaré 断面まで積分すれば U_1 とヴィリアル R が同時に求まる。このようにして、例の矩形 (6) 中の任意の (X_0, U_0) に対して R を数値計算するのは容易である。しかし (U_0, U_1) を与えて、それに対する R を計算するには、 U_0 の下の $X_0 \rightarrow U_1$ の対応を逆に $U_1 \rightarrow X_0$ の対応に直してやらなければならない。この作業の具体的な方法、結果は後に述べる。この方法では定量的な R の評価を得ることができるが、十分に (X_0, U_0) のグリッドを細かくとらなければならない。

解析的に弧 $(U_0, U_1)_{a_0, a_1}$ に対するヴィリアル R の対応を探り出すには、Gutzwiller の使用した興味深い方法がある。これは、可能なすべての弧をその運動学的な特徴で分類し、それぞれのクラスの中のいくつかの典型的な弧について、一方では、その弧の $(U_0, U_1)_{a_0, a_1}$ を解析的に割り出し、他方では、そのヴィリアル R をやはり解析的に評価し、これをもって $(U_0, U_1)_{a_0, a_1}$ に対応する R を割出す方法である。スキーム的に書いてみると、

$$\begin{array}{l} \text{特徴的な弧} \rightarrow (U_0, U_1) \\ \text{同じ弧} \rightarrow R \\ \downarrow \\ \text{特定の } (U_0, U_1) \rightarrow \text{対応する } R \end{array}$$

となる⁸。このやり方だと、どのようなタイプの弧がどのような運動学的な領域 (U_0, U_1) で現れてどのような値のヴィリアル R をもつか、全体像をつかむことができる。その全体像をつかんでからはじめて、後に述べる定理の証明ができる。しかし、運動学的領域の典型的な部分の情報を並べて全体

⁷ (X_0, U_0) から初期条件は完全に決まる。なぜなら、Poincaré 断面上の点だから $y_0 = 0$ 、 X_0, U_0 から x_0, u_0 は変数変換でただちに決まり、エネルギー $H = -1/2$ を通して v_0 も決まる。従って、 X_0, U_0 が与えられれば、初期座標 (x_0, y_0) と初期運動量 (u_0, v_0) が完全に決まる。

⁸ これは太陽、地球、月の3体運動の解析での長年の困難点を解き、量子論と古典論の橋渡しでもあり、Riemann 予想への糸口とも思われる周期軌道論を構成した Gutzwiller の力量を感じさせる方法である。我々は、数ヶ月かけて PC を利用しつつフォローしたが、大変に感銘を受けた。

像をつかむことはできても、その間の変化を的確に追うことは非常に難しい。それは数値的解析で十分に補わなければならない。以下しばらく、解析的方法で、弧とヴィリアル R の関係を調べよう。

6 解析的な方法による弧の分類とヴィリアル R の評価

6.1 極座標空間での特異点と、軌道の自律 (Autonomous) 領域

我々の問題にしているのは、Bernoulli 列 (a_0, a_1, a_2, \dots) と、軌道 (X_0, U_0) の対応関係である。この AKP の問題を考えるときに、決め手となるのは、「 xy 平面の原点 (Coulomb ポテンシャルの特異点) と軌道の衝突」である。これを見るために、 xy 平面の原点と軌道の衝突を経て、幾何学的に移り変わる軌道の対を考えてみる (図 5)。すると、それぞ

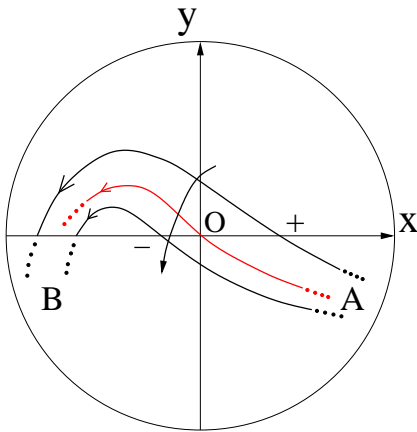


図 5 軌道の変化による Bernoulli 列の変化。A, B はそれぞれ一続きの +, - の列を表す。Bernoulli 列 $(A, +, B)$ をもつ軌道 (3つの軌道のうち一番上の軌道) が $(A, -, B)$ をもつ軌道 (一番下の軌道) に変形するのは、軌道と xy 平面の原点 O との衝突 (真ん中の軌道) を通してのみである。

れの軌道に対応する Bernoulli 列 (a_0, a_1, a_2, \dots) があるが、一方の列は、他方の列のどこかのビット a_k 一つが反転したのになっている。すなわち、軌道と特異点の衝突ごとに、Bernoulli 列が変化を起こす。「衝突が Bernoulli 列を生成している」といってもいい。以下では、このように原点と衝突する軌道を「衝突軌道」(collision trajectory) と呼ぶことにする。

こうしてみると、AKP の弧の分類で、何より大切なのは、原点近傍 ($r \approx 0$) を運動する弧に着目することである。それには座標および運動量を極座標表示するのが良い。すな

わち、 (x, y, u, v) の代わりに $(\chi, r, \vartheta, \psi)$ を導入する。

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\mu} e^\chi \cos \vartheta, & v &= \sqrt{\nu} e^\chi \sin \vartheta, \\ x &= r \cos \psi, & y &= r \sin \psi. \end{aligned} \quad (13)$$

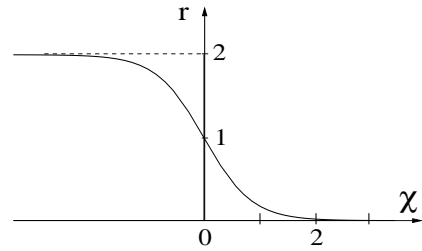
質点の運動エネルギーを K とすると、

$$K \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{\mu} + \frac{v^2}{\nu} \right) = \frac{1}{2} e^{2\chi} \quad (14)$$

となる。今後頻繁に使う変数 χ では、質点の運動エネルギーは $e^{2\chi}/2$ である。 $H \equiv K - 1/r = -1/2$ なので、

$$r = \frac{2}{1 + e^{2\chi}}, \quad 0 < r < 2, \quad -\infty < \chi < \infty \quad (15)$$

である。我々の興味のある xy 面内の原点近傍 $r \rightarrow 0$ は、運動エネルギーが最大になる大きな χ の領域 ($\chi \rightarrow \infty$) である。また運動範囲の上限 (転回点 $r \rightarrow 2$) では、運動エネルギーが零になり、 $\chi \rightarrow -\infty$ である。Hamilton 方程式 (2)



をこれらの変数で書く。 u と v の時間微分、 x と y の時間微分は、(13)、(2) より、

$$\begin{aligned} u(\dot{\chi} - \dot{\vartheta} \tan \vartheta) &= -x/r^3, & v(\dot{\chi} + \dot{\vartheta} \cot \vartheta) &= -y/r^3 \\ x(\dot{r}/r - \dot{\psi} \tan \psi) &= u/\mu, & y(\dot{r}/r + \dot{\psi} \cot \psi) &= v/\nu \end{aligned}$$

である。ここで u, v で始まる式には $-v, u$ を掛けて合計し x, y で始まる式には $-y, x$ を掛けて合計すると、それぞれ

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= (xv - yu)/e^{2\chi} r^3 \\ \dot{\psi} &= (xv/\nu - yu/\mu)/r^2 \end{aligned}$$

となる。また $\dot{\chi} = -\dot{r}/r^2 e^{2\chi}$ は、 $\dot{r} = (x\dot{x} + y\dot{y})/r = (xu/\mu + yv/\nu)/r$ を使うと

$$\dot{\chi} = -(xu/\mu + yv/\nu)/r^3 e^{2\chi}$$

となる。従って Hamilton 方程式は ($\mu = 1/\nu$ に注意して)

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} &= -\frac{(1 + e^{2\chi})^2}{4e^\chi} (\sqrt{\nu} \cos \vartheta \cos \psi + \sqrt{\mu} \sin \vartheta \sin \psi), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{(1 + e^{2\chi})^2}{4e^\chi} (\sqrt{\mu} \cos \vartheta \sin \psi - \sqrt{\nu} \sin \vartheta \cos \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{1}{2} e^\chi (1 + e^{2\chi}) (\sqrt{\nu} \cos \vartheta \sin \psi - \sqrt{\mu} \sin \vartheta \cos \psi) \end{aligned} \quad (16)$$

となる. $H = -1/2$ の条件のために独立な Hamilton 方程式はこれら 3 本である.

(16) においてパラメータを t から χ に変数変換すると次の式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{d\chi} &= \frac{\sqrt{\mu} \cos \vartheta \sin \psi - \sqrt{\nu} \sin \vartheta \cos \psi}{\sqrt{\nu} \cos \vartheta \cos \psi + \sqrt{\mu} \sin \vartheta \sin \psi}, \\ \frac{d\psi}{d\chi} &= \frac{2}{1 + e^{-2\chi}} \cdot \frac{\sqrt{\nu} \cos \vartheta \sin \psi - \sqrt{\mu} \sin \vartheta \cos \psi}{\sqrt{\nu} \cos \vartheta \cos \psi + \sqrt{\mu} \sin \vartheta \sin \psi}. \end{aligned} \quad (17)$$

xy 平面の原点近傍では, (15) より $\chi \rightarrow \infty$ だから第 2 式右辺の先頭の因子が 2 に見なせて,

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{d\chi} &= \frac{\sqrt{\mu} \cos \vartheta \sin \psi - \sqrt{\nu} \sin \vartheta \cos \psi}{\sqrt{\nu} \cos \vartheta \cos \psi + \sqrt{\mu} \sin \vartheta \sin \psi}, \\ \frac{d\psi}{d\chi} &\cong 2 \cdot \frac{\sqrt{\nu} \cos \vartheta \sin \psi - \sqrt{\mu} \sin \vartheta \cos \psi}{\sqrt{\nu} \cos \vartheta \cos \psi + \sqrt{\mu} \sin \vartheta \sin \psi} \end{aligned} \quad (18)$$

となる. この (18) は, 自律系 (autonomous system) である. 以下では, この極限 $\chi \rightarrow \infty$ をとる近似を autonomous 近似と呼び, χ が非常に大きい xy 平面の原点近傍を 'autonomous 領域' と呼ぶ. autonomous 領域の軌道については, (あるいは autonomous 近似のもとでは), 変数 ϑ, ψ の発展は自律的に決まり, ϑ, ψ 平面上のベクトル場で議論できるので見通しが立てやすい. そこで, 今度は, (16) に autonomous 近似を適用すると

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &\cong -\frac{e^{3\chi}}{4} (\sqrt{\mu} \cos \vartheta \sin \psi - \sqrt{\nu} \sin \vartheta \cos \psi) \\ \frac{d\psi}{dt} &\cong -\frac{e^{3\chi}}{4} \cdot 2 (\sqrt{\nu} \cos \vartheta \sin \psi - \sqrt{\mu} \sin \vartheta \cos \psi) \end{aligned} \quad (19)$$

となる. (16) では, $d\vartheta/dt, d\psi/dt$ の式で, χ 依存性が異なっていたが⁹, autonomous 近似をした (19) では, 共通の因子 $e^{3\chi}/4$ になっている. そこで変数変換 $dt' = (e^{3\chi}/4)dt$ で,

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt'} &\cong -(\sqrt{\mu} \cos \vartheta \sin \psi - \sqrt{\nu} \sin \vartheta \cos \psi) \\ \frac{d\psi}{dt'} &\cong -2(\sqrt{\nu} \cos \vartheta \sin \psi - \sqrt{\mu} \sin \vartheta \cos \psi) \end{aligned} \quad (20)$$

となる⁹. 図 6 は, (20) の流れを示したもので, Gutzwiller の論文 [2] の唯一の図面 Fig. 1 である. なお, 角度変数 ϑ, ψ は 2π 周期なので基本領域だけを示している.

⁹ Gutzwiller の論文 [2] では, このベクトル場を与えている Fig. 1 のキャプションで, (変数変換とは書かずに) large χ 極限で (ϑ, ψ) 平面への projection であるとしている. projection ができるのは $d\vartheta/dt, d\psi/dt$ の χ 依存性の因子が autonomous 極限では一致しているからである. Devaney も, 時間に関する同様の変数変換で, 系の 'slow down' を行ってから $r = 0$ に限定して, 衝突多様体 (collision manifold) 上の vector 場を導いている [18]. これは (20) のベクトル場と (記法の違いをのぞいて) 一致する.

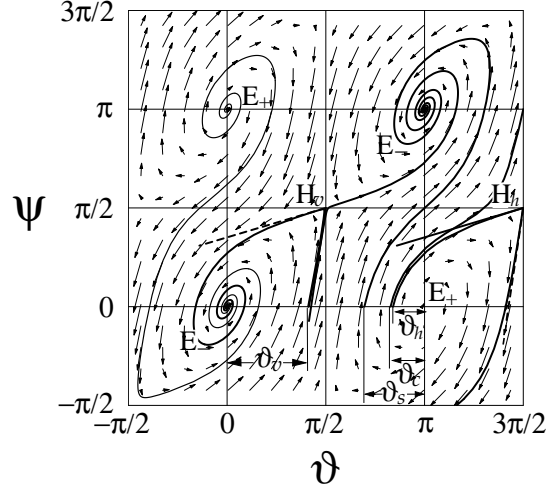


図 6 Autonomous 領域における Hamiltonian 流 (20). 流れの矢印は時間 t の増加の向きを表す. E_+, E_- : 楕円型特異点. H_v, H_h : 双曲線型特異点. 流線は, $\vartheta_0 = \vartheta_v$ で H_v に反射し分かれて 2 つの E_- に吸い込まれるもの, $\vartheta_0 = \pi - \vartheta_s, \pi - \vartheta_c, \pi - \vartheta_h$ のもの, 都合 4 つの初期値のもの, 及び $E_+(0, \pi)$ から湧き出して $E_-(0, 0)$ に吸い込まれるもの. $\vartheta_v, \vartheta_s, \vartheta_c, \vartheta_h$ については表 1 を参照.

一般的にいうと, 有限時間 t では, autonomous 領域の軌道は autonomous 領域にとどまる. なぜなら, (17) のベクトル場の右辺は一般的にはオーダー 1 の量であり, $\Delta\vartheta \approx 1$, もしくは $\Delta\psi \approx 1$ の変化は, $\Delta\chi \approx 1$ で起こり, $\Delta\chi \approx 1$ 程度では, もとの非常に大きな χ は, やはり非常に大きな χ にとどまるからである.

しかし, これには例外がある. もし, ベクトル場の値がほとんど零だと, $\Delta\vartheta \approx 1$, もしくは $\Delta\psi \approx 1$ の変化に際して, $|\Delta\chi| \approx \infty$ となる. このうちで, $\Delta\chi \approx -\infty$ の場合は, はじめに χ が非常に大きい場合でも, 質点の運動とともに χ が任意に小さくなる. この場合, はじめに autonomous 領域にいた軌道でも, 時間 t の経過とともに, xy 平面の原点近傍の autonomous 領域から, xy 平面の有限領域に現れてくる. 逆に, $\Delta\chi \approx \infty$ の場合は, xy 平面の有限領域の軌道が, 時間 t の経過とともに, xy 平面の原点近傍の autonomous 領域に呑み込まれていく. このような特異な場合をさらに詳しく分析しよう.

ベクトル場が零となる特異的な場合は 2 通りある. すなわち,

- (a) $\sin \vartheta = \sin \psi = 0$
- (b) $\cos \vartheta = \cos \psi = 0$

のいずれかである.

条件 (a) を満たす ϑ, ψ の周りでは, 流れ場に渦が発生している. 例えば, $\vartheta = \psi = 0$ を考える. この近傍で (17) は

線形化すると

$$\frac{d\vartheta}{d\chi} \approx -\vartheta + \mu\psi, \quad \frac{d\psi}{d\chi} \approx \frac{2}{1+e^{-2\chi}} (-\mu\vartheta + \psi) \quad (21)$$

となり, 更に autonomous 近似をすると,

$$\frac{d\vartheta}{d\chi} \approx -\vartheta + \mu\psi, \quad \frac{d\psi}{d\chi} \approx 2(-\mu\vartheta + \psi) \quad (22)$$

である. 発展行列の固有値は

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 \pm i\sqrt{8\mu^2 - 9} \right)$$

である. $\mu^2 = 5$ では, これらは複素共役の固有値であるから, 条件 (a) を満たす ϑ, ψ は, 楕円型の特異点 (elliptic singularity) である. 図 6 では, $\vartheta = \psi = 0$ のような吸い込み口タイプの楕円型特異点を E_- で, 湧き出し口タイプの楕円型特異点を E_+ で表している. $\vartheta = \psi$ 面上で, これらの楕円型特異点は, 全体として間隔 π の格子をなし, 軌道は E_- には反時計回りに回転しながら吸い込まれ, E_+ からは時計回りに回転しながら湧き出す.

一方, 条件 (b) を満たす ϑ, ψ の例として, $\vartheta = \psi = \pi/2$ を考える. この近傍では, (17) は, $\vartheta' = \vartheta - \pi/2, \psi' = \psi - \pi/2$ で線形化すると

$$\frac{d\vartheta'}{d\chi} \approx -\vartheta' + \nu\psi', \quad \frac{d\psi'}{d\chi} \approx \frac{2}{1+e^{-2\chi}} (-\nu\vartheta' + \psi') \quad (23)$$

となり, 更に autonomous 近似すると

$$\frac{d\vartheta'}{d\chi} \approx -\vartheta' + \nu\psi', \quad \frac{d\psi'}{d\chi} \approx 2(-\nu\vartheta' + \psi')$$

である. 発展行列の固有値は

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{9 - \frac{8}{\mu^2}} \right)$$

で, $\mu^2 = 5$ では, 正, 負の固有値であるから, これは, 双曲線型特異点 (hyperbolic singularity) である. $\vartheta\psi$ 面上で, 軌道は, この点に近づいたあと, はじかれるようにして遠ざかる. 図 6 では, $\vartheta = \psi = \pi/2$ のように, ほぼ垂直な漸近線に沿って (vertical に) 流れを引き込み, ほぼ水平に流れをはじき出す特異点を H_v , このちょうど逆の振る舞いのものを H_h (horizontal singularity) と記している. $\vartheta\psi$ 面上で, これらの双曲線型特異点も格子間隔 π で格子状に並び, 楕円型特異点の格子と双対な格子をなす. これらの特異点では (17) の右辺が 0 になるため, 軌道がこれらの点に近づくと χ は激しく変化し, 有限の t で, $\Delta\chi \approx \infty$ となる. これらが, 軌道が autonomous 領域から xy 平面的有限領域に現れ

たり, xy 平面的有限領域から autonomous 領域に落ち込んでいくメカニズムである. この点については 6.3 節 ‘衝突軌道’ で詳しく考察する.

なお, 以上の議論では, $\Delta\chi \approx \pm\infty$ となる楕円型特異点や双曲線型特異点の位置の分析に, autonomous 近似をした (17) を用いている. しかし, 実際に, 軌道が図 6 で $\vartheta\psi$ 平面内の各特異点の近傍を通過する時には, $\Delta\chi$ が激しく変動する. 従って軌道の特異点近傍で追うときには, autonomous 近似をとることは許されず, (16), もしくは, (17) を近似なしに積分しないといけない. 流れ場でいうと, (16) の右辺の与える 3 次元 $\chi\vartheta\psi$ 空間での場を考えるか, もしくは, (17) の右辺の与える χ に依存する流れ場を考えなければならない. この点については, 次節 6.2 で具体的に議論をする¹⁰.

6.2 弧の分類

我々の興味があるのは, 原点近傍 (autonomous 領域) にある弧である. 弧とは, Poincaré 断面上の始点 0 から, 軌道が次に Poincaré 断面上の終点 1 に至るまでの軌道の部分である. 始点 0 では, $y = 0$ であるから, 一般性を失わずに, $X_0 > 0$ の場合を基準に考えることにして $\psi = 0$ とする. 終点 1 では $y_1 = 0$ であるが, $\psi_1 = 0 (X_1 > 0), \psi_1 = \pi (X_1 < 0)$ の 2 通りの場合がある. これらの弧は, 一般には, 出発点 0 が autonomous 領域にいれば, 終点 1 に至るまで, autonomous 領域の中を運動する. 例外は, これらの弧が, 出発点 0 は autonomous 領域にいても, 双曲線型特異点, もしくは楕円型特異点の影響で, そこから出入りをするときである. そこで, これらの例外に目を配りつつ, autonomous 領域の弧の分類をしよう.

Autonomous 領域から出発する弧については, 次の作業で, 系統的に弧の全体を把握することができる.

- (1) 出発点 0 での χ_0 を非常に大きい値に決める.
- (2) 弧は定義より $y = 0$ の Poincaré 断面から出発するのだから, $\psi_0 = 0$, もしくは, $\psi_0 = \pi$ であるが, $X_0 > 0$ の弧を考えることにして, $\psi_0 = 0$ とする.
- (3) 残りのパラメータ ϑ_0 を 0 から π の範囲で変化させて弧に起こる変化を追う.

χ_0 を非常に大きい値に取り $\psi_0 = 0$ としたことは, 正の x 軸上の非常に原点に近い出発点 0 から, 弧を非常に大きな運動量で打ち上げることを意味する. ϑ_0 は, 打ち上げ時点の 2 次元運動量ベクトルの角度であるから, $0 \leq \vartheta_0 \leq \pi$ とすれば, この出発点から $y > 0$ の上半平面向かうすべての

¹⁰ 図 6 の流れ場は, あくまで, 軌道に対しての特異点の影響を推察するためのものである. Gutzwiller の論文 [2] を読むときには, この点に注意が必要である.

弧を尽くすことが出来る。下半面に向かう弧はこれらと単に x 軸について対称の関係にあるから、特に調べなくても、対称性から理解できる。負の x 軸上の点から打ち上げるときも、同様に y 軸についての対称性で理解できる。

図 7 は、 $0 \leq \vartheta_0 \leq \pi$ の ϑ_0 から出発する軌道の典型的なものを、図 6 から抜き出したものである。この図が示すように、 ϑ_0 については、特徴的な角度がある。例えば、 $\vartheta_0 = \vartheta_v$ から出発した軌道は $\vartheta = \pi/2, \psi = \pi/2$ の双曲型特異点 H_v へ吸い込まれる。以下では、 ϑ, ψ 平面上の位置を (ϑ, ψ) で示す。これらの典型的な打ち出し角度 ϑ_0 を表 1 にリストしよう。

表 1 の第 3 列の示すように、 $0 < \vartheta_h < \vartheta_c < \vartheta_s < \vartheta_v < \pi/2$ である。そこで、 ϑ_0 の増加とともに、 $\vartheta_0 = \vartheta_v, \pi - \vartheta_s, \pi - \vartheta_c, \pi - \vartheta_h$ から、図 7 のように順次に軌道が打ち上げられることになる¹¹。

さて、図 6、図 7 のベクトル場は、始点の ϑ_0 の区間 $0 < \vartheta_0 < \pi$ (但し $\psi_0 = 0$) から、終点の ϑ_1 の適当な区間 (但し $\psi_1 = 0$, もしくは $\psi_1 = \pi$) への写像を与えている。実際、図 6 と表 1 を使って $\vartheta\psi$ 平面を塗り分けた図 8 をよく見ると、はじめの区間 ($0 < \vartheta_0 < \pi$) は 4 つの領域に分解し、それぞれに流れ場の与える写像が次のように働いている。

Region 1 ($0 < \vartheta_0 < \vartheta_v$)	$\rightarrow -\vartheta_h < \vartheta_1 < 0, \psi_1 = 0$	
Region 2A ($\vartheta_v < \vartheta_0 < \pi - \vartheta_c$)	$\rightarrow \pi + \vartheta_h < \vartheta_1 < 3\pi/2, \psi_1 = \pi$	
Region 2B ($\pi - \vartheta_c < \vartheta_0 < \pi - \vartheta_h$)	$\rightarrow 3\pi/2 < \vartheta_1 < 2\pi - \vartheta_v, \psi_1 = \pi$	(24)
Region 3 ($\pi - \vartheta_h < \vartheta_0 < \pi$)	$\rightarrow \pi < \vartheta_1 < \pi + \vartheta_v, \psi_1 = 0$	

$\vartheta_0 \rightarrow$ 弧 $(U_0, U_1)_{a_0, a_1}$ の解析

式 (24) を見ると、任意の出発角度 ϑ_0 で打ち出された (χ_0 が大きい autonomous 領域の) 軌道が次の Poincaré 断面につくまでに、どのような弧 $(U_0, U_1)_{a_0, a_1}$ を描くかを解析的に理解できる。その武器は、(13) および (4) から導かれる 2 つの運動学の式

$$X = 2 \cos \psi \frac{1 + e^{2\chi} \cos^2 \vartheta}{1 + e^{2\chi}} \approx 2 \cos \psi \cos^2 \vartheta \quad (25)$$

$$U = \sqrt{\mu} \arctan(e^\chi \cos \vartheta) \approx \sqrt{\mu} \operatorname{sign}(\cos \vartheta) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{e^\chi |\cos \vartheta|} \right) \quad (26)$$

である。ただし各式の最後は autonomous 近似による。

¹¹ ϑ_s は、ここでの議論には不要なので、図 7 では省略している。

打ち上げ角度 ϑ_0 と弧の (a_0, a_1) の対応

この対応は、簡単である。 a_0, a_1 は X_0, X_1 の符号因子 ($a_i \equiv X_i/|X_i|$) であり、(25) から ψ_0, ψ_1 が 0 か π かで決まる。始点については、 $\psi_0 = 0$ と選択をしているから、 $X_0 > 0$ で $a_0 = +1$ である。終点の a_1 は式 (24) の ψ_1 を見ればよい。

- Region 1 ($0 < \vartheta_0 < \vartheta_v$): $\psi_1 = 0$ だから、 $X_1 > 0$. 弧は $X_0 > 0, X_1 > 0$ の (++) タイプ。
- Region 2A,B ($\vartheta_v < \vartheta_0 < \pi - \vartheta_h$): $\psi_1 = \pi$ だから、 $X_1 < 0$. 弧は (+-) タイプ。
- Region 3 ($\pi - \vartheta_h < \vartheta_0 < \pi$): 再び、 $\psi_1 = 0$ だから、 $X_1 > 0$. 弧は (++) タイプに属する。

物理的な解釈は次のようになる。Region 1 ($X_1 > 0$) と Region 2 ($X_1 < 0$) の境界だが、仮に質点に Coulomb 引力が働いていないとしたら、autonomous 領域での分水嶺は x 軸に垂直に打ち上った場合の $\vartheta_0 = \pi/2$ となる。正の x 軸上の原点にきわめて近い位置から正の x 方向運動量成分 ($u > 0, \vartheta_0 < \pi/2$) で打ち上げれば、当然、質点が x 軸に戻るのは $X_1 > 0$ となり、逆に $\vartheta_0 > \pi/2$ では $X_1 < 0$ となる。現実には Coulomb 引力が質点を原点に向けて引き戻すので、 $\vartheta_0 = \pi/2$ ではなく、ある程度 x 方向に正の運動量成分をもった打ち上げ方 $\vartheta_0 = \vartheta_v (< \pi/2)$ が分水嶺になるわけである。Region 2 と Region 3 の分水嶺についても類似のことで、今度は x 軸の負の方向に打ち上げたときに、 $\vartheta_0 > \pi - \vartheta_h$ となると、やはり Coulomb 引力のために x 軸の正の方向に戻ってくるようになる。

打ち上げ角度 ϑ_0 と弧の (U_0, U_1) の対応

(U_0, U_1) を決めるのは、 (a_0, a_1) の場合より事情が入り組む。基本ルールは簡単で式 (26) につきる。Autonomous 領域では χ が非常に大きいから、この式によって $|U| \lesssim B \equiv \sqrt{\mu}\pi/2$ である。あとは $\cos \vartheta_0, \cos \vartheta_1$ の符号から U_0, U_1 の正、負の符号が決まるが、ここは丁寧に考える必要がある。図 9 では、図 6、図 7 のベクトル場が与える写像を ($\vartheta\psi$ 平面を塗り分けた図 8 から ψ に関する情報を捨象して) ϑ_0 から ϑ_1 への写像として表したものである。 $\cos \vartheta_0, \cos \vartheta_1$ の符号を見やすくするように、 ϑ_0, ϑ_1 を角度変数として表している。以下の詳細な記述はこの図 9 と、まとめの表 2 と弧 $(U_0, U_1)_{(a_0, a_1)}$ の (U_0, U_1) 平面上の位置表示の図 10 を参照しながら読んでいただきたい。

(1) まず $\vartheta_0 \approx \vartheta_v$ と $\vartheta_0 \approx \pi - \vartheta_h$ の場合には双曲線型特異点の近傍を軌道が通り過ぎるため、 χ_0 の激しい減少が起

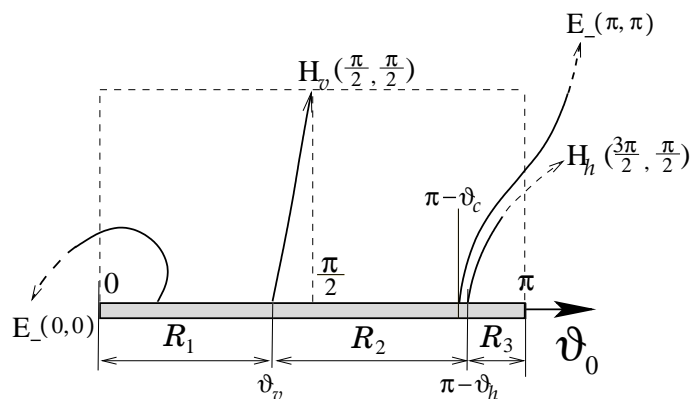


図7 区間 $0 < \vartheta_0 < \pi$ の3領域 R_1, R_2, R_3 と特徴的な軌道. ϑ_s については議論に不要なので省略する.

角度名	特徴	$\pi/2$ 単位での値
ϑ_v (vertical)	$\vartheta_0 = \vartheta_v$ の軌道は, $H_v(\pi/2, \pi/2)$ へ吸い込まれる.	0.823746449...
ϑ_s (symmetric)	$\vartheta_0 = \pi - \vartheta_s$ の軌道は, 点 $(\pi, \pi/2)$ に対して対称.	0.609792614...
ϑ_c (critical)	$\vartheta_0 = \pi - \vartheta_c$ の軌道は, 終点が $(\vartheta_1, \psi_1) = (3\pi/2, \pi)$.	0.344255689...
ϑ_h (horizontal)	$\vartheta_0 = \pi - \vartheta_h$ の軌道は, $H_h(3\pi/2, \pi/2)$ に引き込まれる.	0.319039058...

表1 特徴的な打ち出し角度と $\vartheta\psi$ 面内の特異点. 打ち出し角度の名は Gutzwiller の命名 [2], 数値は $\mu^2 = 5$ での我々の数値計算による.

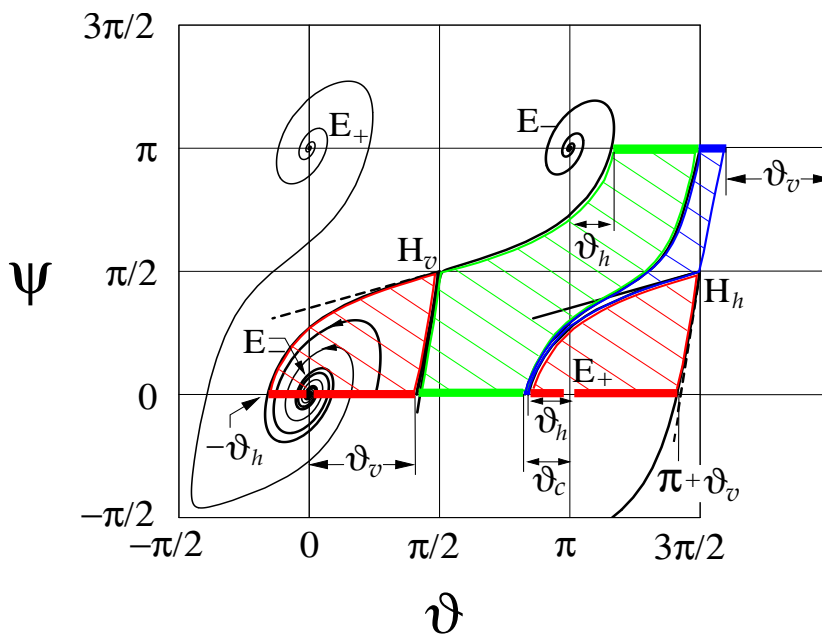


図8 区間 $0 < \vartheta_0 < \pi$ の3領域 R_1, R_2, R_3 と特徴的な軌道

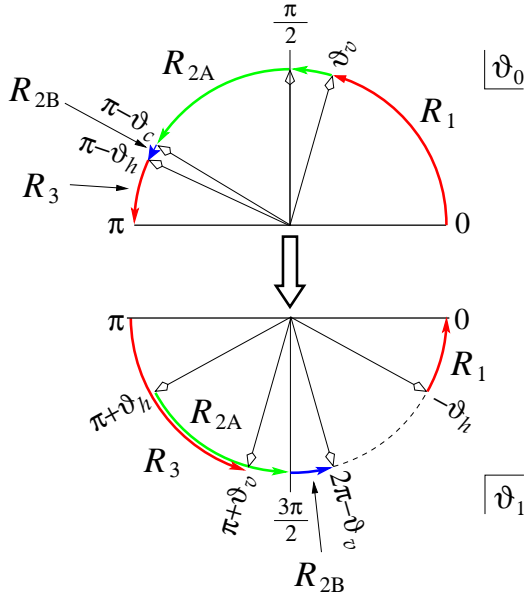


図9 ベクトル場が与える角度変数 ϑ_0 から角度変数 ϑ_1 への写像.

こり, 軌道は autonomous 領域を離れる. (表2でピンク背景の2行). これらの原点との衝突に関連する軌道 (collision trajectory) については, 次の小節で詳しく議論する. これに関連して, ここで $\vartheta_0 < \vartheta_v$ と書いた場合には不等号 ' $<$ ' に思い入れがあって特異点に向けての打ち込み角 ϑ_v の近傍を除外する.

(2) $\cos \vartheta_0$ が ϑ_0 の0から π まで増加するとき符号を変えるのは ϑ_0 が $\pi/2$ を横切るときだけである (図9の ϑ_0 の半円, 表2で鶯色背景の上の行). これに伴って (26) により U_0 は $B \rightarrow 0 \rightarrow -B$ と急速に変化する. これは領域2A ($\pi + \vartheta_h < \vartheta_1 < 3\pi/2$) のなかで起こる (表2) ので弧のタイプは $(+-)$, また $\cos \vartheta_1 < 0$ なので (26) により $U_1 \approx \pi\sqrt{\mu}/2$ にとどまっている. 従って弧 $(U_0, U_1)_{(+,-)}$ は, $(+-)$ タイプの弧の住む (U_0, U_1) の正方形の $U_1 = \pi\sqrt{\mu}/2$ の辺に沿って図10に示すように $b \rightarrow c \rightarrow d$ と変わる¹².

(3) 一方, $\cos \vartheta_1$ の変化は次の3つの契機で起こる.

(i) まず, ϑ_0 が ϑ_v を通過して領域1から領域2Aに切り替わるとき (表2のピンク背景の上の行) である. このとき $\cos \vartheta_1$ が正から負に変わり $U_1 \approx \pi\sqrt{\mu}/2$ から $U_1 \approx -\pi\sqrt{\mu}/2$ となる. U_1 は符号を変えるが, 前項により $U_0 \approx \pi\sqrt{\mu}/2$ である. 領域の切り替わりのために, 弧は $(++)$ タ

イブから $(+-)$ タイプになる. これは autonomous 領域の弧 a から, 双曲線型特異点の支配する領域の弧 a', b' を経過して, 再び autonomous 領域の弧 b になる過程 ($a \rightarrow a' \rightarrow b' \rightarrow b$) である.

(ii) 次に, ϑ_0 が $\pi - \vartheta_c$ を下から上へ横切るとき, 図9の写像 $\vartheta_0 \rightarrow \vartheta_1$ を通して ϑ_1 が $3\pi/2$ を下から上へ横切り, U_1 が $-\pi\sqrt{\mu}/2 \rightarrow 0 \rightarrow \pi\sqrt{\mu}/2$ と急速に変化する (U_0 は $U_0 \approx \pi\sqrt{\mu}/2$ にとどまる). これは領域2Aと領域2Bの境界で起こり, 弧は $(+-)$ タイプの弧の住む (U_0, U_1) の正方形領域の $U_0 = \pi\sqrt{\mu}/2$ の辺に沿って $d \rightarrow e \rightarrow f$ と変わる.

(iii) 最後に ϑ_0 が $\pi - \vartheta_h$ をこえて領域2Bから領域3に移るとき (i) と逆のことが起こる (表2のピンク背景の下の行). $\cos \vartheta_1$ が正から負に変わり, 弧のタイプは, $(+-)$ から $(++)$ に戻る. 従って, 弧は f から対極の g になる¹³.

以上で $\vartheta_0 \rightarrow (U_0, U_1)_{(a_0, a_1)}$ の対応が解析的に求まった. これを表にまとめたのが表2である.

表2では, 各弧 $(U_0, U_1)_{(a_0, a_1)}$ の名前を最後の列に与えている. 見やすいように, $B = \pi\sqrt{\mu}/2$ とする. 例えば弧 a は $(B, B)_{(+,+)}$ である. $\vartheta_0 \rightarrow \vartheta_v$ の極限では, 弧 a, b はそれぞれ $a \rightarrow a' : (B, -B)_{(+,+)}$, $b \rightarrow b' : (B, B)_{(+,-)}$ となり弧 a', b' は, いずれも, もろに衝突軌道の支配下の物理に従っている. そこで, このように対になった弧 a と b, a' と b' とが互いに隣接するように弧の住む領域を貼り合わせるという.

図10は, この貼り合わせた領域の上に, 表2を利用して, 打ち出し角度 ϑ_0 をパラメータとして0から π まで増加させたときに, 弧のそれぞれの $U_0 U_1$ 平面上での位置を表示したものである. いくら初期条件として χ_0 を大きくしておいても次節6.3で見ると, $\vartheta_0 \approx \vartheta_v, \vartheta_0 \approx \pi - \vartheta_h$ の場合は, 軌道が双曲線型の特異点の影響で原点近傍から飛び出す (衝突軌道). これを例外としてはじめの χ_0 が大きい場合には, 最後まで χ は大きく, 原点近傍 (autonomous) 領域にとどまる. 今見たことは, autonomous 領域の弧たちは, 貼り合わせた領域の外縁部分に並ぶ, ということにまとめられる.

6.2.1 Autonomous 領域を運動するタイプ $(++)$ の弧の運動領域は限定されていること.

軌道の存在定理の証明には, 弧 $(U_0, U_1)_{(a_0, a_1)}$ が占める運動学的領域の形が大切になる. 図10が示しているように χ_0 が大きい原点近傍 (autonomous 領域) を運動している弧のなかで (a_0, a_1) が $(++)$ のタイプの弧の占める領域

¹² ϑ_0 が $\pi/2$ を通過するとき, (25) の近似式 $X_0 \approx 2 \cos^2 \vartheta_0$ を使うと, $X_0 = 0$ となるが, (25) の等式をきちんと使えば X_0 は最小値 $X_0 = 2/(1 + e^{2\chi_0})$ となるのがわかる.

¹³ ϑ_0 が $\pi - \vartheta_c$ を通過するとき (25) により $X_0 \approx 2 \cos^2 \vartheta_c$ である. 一方, X_1 は $\vartheta_0 \approx \pi - \vartheta_c$ だと $\vartheta_1 \approx 3\pi/2, \psi_1 = \pi$ なので, (25) により $X_1 \approx -2 \cos^2 \vartheta_1 \approx 0$ となる.

Region	ϑ_0	ϑ_1	(U_0, U_1)	(a_0, a_1)	
1	$0 < \vartheta_0 < \vartheta_v$	$-\vartheta_h < \vartheta_1 < 0$	(B, B)	$(++)$	a
$\vartheta_0 \approx \vartheta_v$ 原点との衝突で non-autonomous 領域に出現					a', b'
2A	$\vartheta_v < \vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$	$\pi + \vartheta_h < \vartheta_1 < \frac{3}{2}\pi$	$(B, -B)$	$(+-)$	b
$\frac{\pi}{2}$ を通過 $\longrightarrow U_0 : B \rightarrow 0 \rightarrow -B$					b \rightarrow c \rightarrow d
2A	$\frac{\pi}{2} < \vartheta_0 < \pi - \vartheta_c$	$\pi + \vartheta_h < \vartheta_1 < \frac{3}{2}\pi$	$(-B, -B)$		d
$\pi - \vartheta_c$ を通過 $\longrightarrow \frac{3}{2}\pi$ を通過 $\longrightarrow U_1 : -B \rightarrow 0 \rightarrow B$					d \rightarrow e \rightarrow f
2B	$\pi - \vartheta_c < \vartheta_0 < \pi - \vartheta_h$	$\frac{3}{2}\pi < \vartheta_1 < 2\pi - \vartheta_v$	$(-B, B)$		f
$\vartheta_0 \approx \pi - \vartheta_h$ 原点との衝突に落ち込む					
3	$\pi - \vartheta_h < \vartheta_0 < \pi$	$\pi < \vartheta_1 < \pi + \vartheta_v$	$(-B, -B)$	$(++)$	g

表 2

は、 $U_0 \approx U_1 \approx \pi\sqrt{\mu}/2$ の角の領域の更に一部分に限られている ((-) タイプの弧の占める領域も同様に限定を受けている。) 一方で、 $a_0 \neq a_1$ の (+-), (-+) の弧は、 (U_0, U_1) 平面内の正方形の全領域にわたっている。弧 a やその近傍の弧については、これは運動学で簡単に説明できる。実際、(26) を弧の始点・終点に適用すると、弧 a では $0 < \vartheta_0 < \vartheta_v < \pi/2$, $-\vartheta_h < \vartheta_1 < 0$ のために

$$\frac{\pi\sqrt{\mu}/2 - U_1}{\pi\sqrt{\mu}/2 - U_0} \approx e^{\chi_0 - \chi_1} \frac{\cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_1} \approx e^{\chi_0 - \chi_1}$$

である。弧 a が楕円型特異点 $E(0, 0)$ の周りで螺旋運動を行う (図 6) ときに χ は減少するので $\chi_0 > \chi_1$ である。従って、 U_0 も U_1 も $U_0 \lesssim \sqrt{\mu}\pi/2$, $U_1 \lesssim \sqrt{\mu}\pi/2$ であるが、 U_1 の方が U_0 よりも境界値 $\sqrt{\mu}\pi/2$ から離れていなければならない。これが、(++) の弧の存在範囲が限定されている理由である。

また、 ϑ_0 が増加して ϑ_v に近づいていくと、今度は軌道が双曲線型特異点の近傍をとるようになり、 χ_0 に対して χ_1 がいよいよ減少する。そこで U_1 は更に境界値 $\sqrt{\mu}\pi/2$ から離れていく。これが、 $\vartheta_0 \rightarrow \vartheta_v$ で、弧が $a \rightarrow a'$ となる理由である。

更に、弧 h など出発点からすでに χ_0 が小さい弧を含めて楕円型特異点の効果を評価して同様な議論が出来ることは、小節 6.4.2 で議論する。

6.2.2 Autonomous 領域を運動する弧に対してはヴィリアル R が小さいこと。

autonomous 領域の弧たちは、貼り合わせた領域の外縁部分に並ぶが、そこではこれらの弧に対するヴィリアル R は

非常に値が小さいことを示そう。(24) に示す領域 1 と領域 3 の弧については R を

$$R = \int_0^1 \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} \cdot \frac{d\chi}{\sqrt{\nu} \cos \vartheta \cos \psi + \sqrt{\mu} \sin \vartheta \sin \psi}$$

と表示する。この式の分母が χ の関数として零点を持たないならば積分は有限である。このとき、出発点の χ_0 が非常に大きいから、autonomous 領域の軌道は autonomous 領域にとどまり続けるので χ 積分の全区間にわたって χ が非常に大きい。そうすれば $2e^x/(1 + e^{2x}) \approx 0$ であるから、 R が非常に小さいと結論できる。そこで、分母の符号を調べる¹⁴と、領域 1 の弧では図 11、領域 3 の弧では図 12 のようになっている。

同様に、領域 2 の弧については

$$R = \int_0^1 e^{-x} \frac{d\psi}{\sqrt{\mu} \sin \vartheta \cos \psi - \sqrt{\nu} \cos \vartheta \sin \psi}$$

と書いてやって、分母を解析すると図 13 となる。この場合も被積分関数の分母が零になることはない。

第 7 節では、数値計算によりこれらの弧それぞれのプロファイルを見るが、その前に AKP の問題では、もっとも大切な軌道である衝突軌道を考察しなければならない。

6.3 衝突軌道: Collision Trajectory

衝突軌道とは、 xy 平面の原点、即ち、クーロン特異点に厳密に衝突するか、もしくはそのごく近傍を通る軌道である。

¹⁴ [2] の式 (49) の R の符号は誤りである。

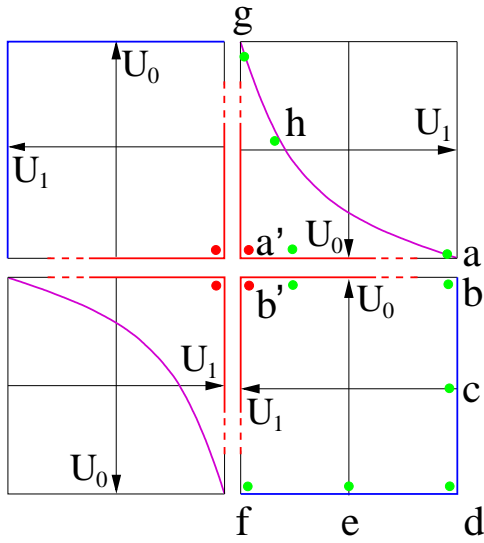


図 10 弧 $(U_0, U_1)_{(a_0, a_1)}$ をそのタイプ $(a_0, a_1) = (++)$, $(-+)$, $(--)$, $(+-)$ に応じて、それぞれ第 1, 2, 3, 4 象限に置いた正方形領域 $(-\pi\sqrt{\mu}/2 < U_0 < \pi\sqrt{\mu}/2, -\pi\sqrt{\mu}/2 < U_1 < \pi\sqrt{\mu}/2)$ に表示している. 同じ物理が隣接領域を支配するように U_0 軸, U_1 軸の向きを決めて正方形を配置しているのに注意. 青の線で書いた外側の境界近傍には $r \approx 0$ の autonomous 領域を運動する弧が並ぶ. これに属する弧 a, b, c, \dots, g はそれぞれ表 2 の弧である. ヴィリアルが最大値を与える点を赤丸で示している. これから伸びる赤で書いた内側の境界近傍には双曲線型特異点のそばを通る xy 平面上の原点との衝突軌道 (collision trajectory) が並ぶ (例: 弧 a', b'). 最後に紫の境界近傍には楕円型特異点の支配下の x 軸に沿って運動する軌道が並ぶ (例: 弧 h). χ_0 を十分に大きくして, ϑ_0 を 0 から π まで増加させると, 弧は順に $a, a', b, b', c, \dots, g$ と動く. それぞれの弧 (緑の点) については第 7 節の図 17 で詳しく特性を解析している.

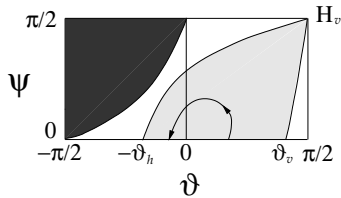


図 11 領域 1 の典型的な軌道と領域 1 の軌道の運動範囲 (灰色). 運動範囲は被積分関数の分母の符号が正の領域 (白) に完全にはまりこんでいるので, 被積分関数の分母が零になることはなく, R の積分は有限値を持つ.

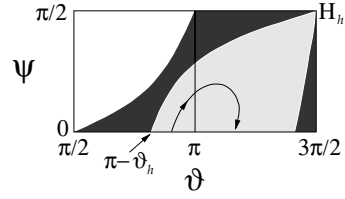


図 12 領域 3 の軌道の運動範囲は分母の符号が負の領域に完全にはまりこんでいる. 領域 1 と図が相似しているが範囲が π だけずれていることに注意.

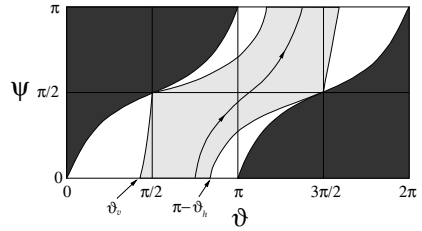


図 13 領域 2 の軌道の運動範囲は分母の符号が正の領域に完全にはまりこんでいる.

両ケースを併せて ‘衝突’ と呼ぶ. 衝突には 2 種がある.

- (1) χ_0 が非常に大きい領域 (つまり原点近傍) で $\vartheta_0 \approx \vartheta_v$, $\psi_0 = 0$ で軌道が出発すると, ほぼ垂直 (ψ 軸に平行) な漸近線に沿って $H_v(\pi/2, \pi/2)$ に近づき, そこで χ が急激に減少して, 非 autonomous 領域 (r 大) に現れる. これは, 原点との衝突から衝突軌道が現れる事象である.
- (2) χ_0 が非常に大きい領域 (つまり原点近傍) で $\vartheta_0 \approx \pi - \vartheta_h$, $\psi_0 = 0$ で軌道が出発すると, ほぼ水平な (ψ 軸に平行) な漸近線に沿って $H_h(3\pi/2, \pi/2)$ に近づき, そこで χ がさらに急激に増加して原点に衝突する. これは衝突軌道が原点との衝突に落ち込んでいく事象である.

ここでは解析的に前者を考察することにしてしよう. やり方は, 幾分, 散乱行列の立場に似ている. 軌道の始点 0 は Poincaré 断面 ($\psi_0 = 0$) 上の点で, χ_0 が非常に大きく, $\vartheta_0 \approx \vartheta_v$ の点である. 便宜上 X_0, U_0 の代わりに, χ_0, ϑ_0 で始点を与える. 出発後, 軌道はただちに双曲線型特異点 $H_v(\pi/2, \pi/2)$ の近傍を通り, その後, 再び Poincaré 断面に終点 1: (χ_1, ϑ_1) で戻る. このとき, 解析の難しい H_v 近傍は, そこでの軌道を新たな 2 つのパラメータ (A_+, A_-) で記述する.

これが, Gutzwiller の論文の中心テーマである. そこでの記述を少し補って書いて見たが, 具体的に, 定量的な評価をしておかないとスタンスが決まらない. そこで, 数値計算で事情を抑えておこう.

図 14 と図 15 は, $\vartheta_0 = 0.999\vartheta_v$ で打ち出された軌道の時間発展を $\log t$ に対して数値的にプロットしたものであ

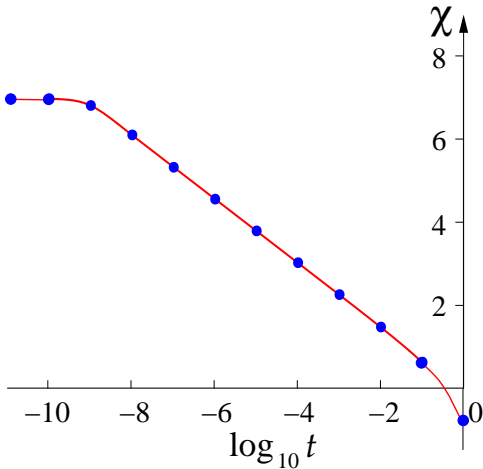


図 14 Hyperbolic Singularity に接近する軌道の χ の変化. $t \approx 10^{-9}$ から $t \approx 10^{-1}$ の間は, $\log t$ の増加に伴って χ はほぼ線形に減少する.

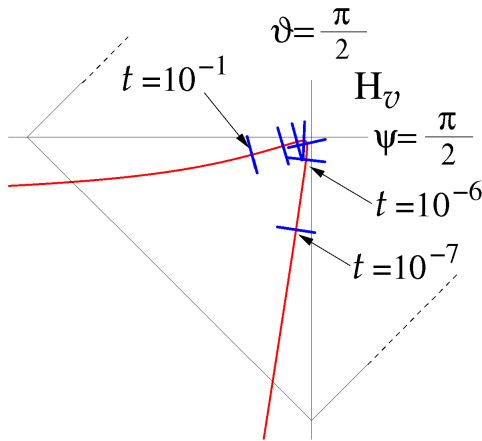


図 15 Hyperbolic Singularity 近傍での軌道の転回

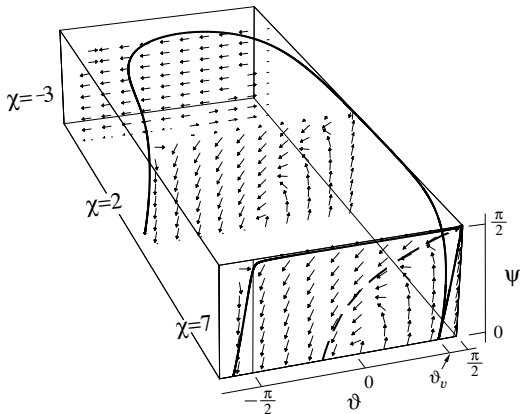


図 16 図 15 の軌道を $\chi\vartheta\psi$ の 3 次元空間で表示したもの (実線).

る. 第一段階では, 軌道は $\chi_0 = 7$ としているので極めて xy 面の原点に近い地点 ($r \approx 1.6 \times 10^{-6}$) から巨大な運動量で打ち出される. 質点は極めて急速に $\vartheta\psi$ 面上を進んだ後 ($\log_{10} t$ が 1 増加するごとに軌道の目盛りが一つずつ進んでいる) 初期時刻から僅か $t = 10^{-6}$ 後には, $\vartheta\psi$ 面で, $H_v(\pi/2, \pi/2)$ の $\Delta\vartheta \approx 0.005$ に達する. 極めて急速に $\vartheta\psi$ 面上を進んだのと対照的に, まだ χ の減少はそれほどでもなく, $\chi \approx 5$, $r = 10^{-4}$ で, まだ原点近傍の autonomous 領域にとどまっている.

第 2 段階になると, 軌道は $H_v(\pi/2, \pi/2)$ の支配下での運動を起こす. $\vartheta\psi$ 面上の運動は階段におそくなり, $\log t \approx -6$ から $\log t \approx -1$ の時間経過で, $H_v(\pi/2, \pi/2)$ の近傍を転回する. 一方, この $H_v(\pi/2, \pi/2)$ の近傍の転回の際に $\chi \approx 1$ に χ は減少し, 軌道は autonomous 領域から $r \approx 0.1$ まで飛び出している. 即ち, 質点は xy 平面の原点からの衝突で打ち出され, ただちに $H_v(\pi/2, \pi/2)$ の近傍に送られ, そこを転回しているうちに $\Delta\chi \propto -\Delta\log_{10} t$ で χ が下がって, 軌道は, xy 平面では, $\log t$ に対して指数関数的に発展する. 注意すべきは, 原点との衝突と, H_v の周りの転回との間に, 微小だが時間差があることである.

図 16 は同じ軌道を $\chi\vartheta\psi$ の 3 次元空間でみたものである. χ の値を変えていく ($\chi = 7, 2, -3$) と, ベクトル場の様子は大きく変わる. このベクトル場に従って, 軌道は ϑ が減少する方向へと流れていく. 一番手前のパネル ($\chi = 7$) の曲線 (実線) はこの 3 次元空間中の軌道をこのパネルに射影したものである. 同じ ϑ, ψ の初期値からスタートし, autonomous 近似を適用した軌道 (破線) から大きく離れていくことが分かる. $H_v(\pi/2, \pi/2)$ の近傍を通過した後, autonomous 近似を適用した軌道は $E_-(0, 0)$ に吸い込まれていくが, 実際の軌道は双曲線型特異点 $H_h(-\pi/2, \pi/2)$ へと近づいていく. このような autonomous 近似からのずれや双曲線型特異点の一つから, 他の双曲線型特異点の一つへの軌道の発展の存在は, AKP の量子論を扱う際には特に重要と考えられる.

さて, これで取り扱いの骨組みができた. 結局, 衝突軌道は,

$$0: (\chi_0, \vartheta_0) \rightarrow (A_+, A_-) \rightarrow 1: (\chi_1, \vartheta_1) \quad (27)$$

という 2 ステップの写像になる. 強い相互作用の S 行列理論では, 散乱の相互作用の領域をブラックボックスにして, 解析性とユニタリ性の制約のもとで, 始状態と終状態の応答を見る. ここでは, 特異点が軌道を支配する領域で衝突パラメータ (A_+, A_-) を導入して軌道を近似的に取り扱う. そして, 第 1 の写像, 第 2 の写像を作って, 両者から (A_+, A_-) を消去して, 弧 $(\chi_0, \vartheta_0) \rightarrow (\chi_1, \vartheta_1)$ を作る. あとは運動学的変換で, $(X_0, U_0) \rightarrow (X_1, U_1)$ とすれば, これが衝突に関わる弧 $(U_0, U_1)_{(a_0, a_1)}$ を与える.

6.3.1 パラメータ (A_+, A_-)

変数 $z \equiv r/2 \equiv 1/(1+e^{2\chi})$ を使うと $d/d\chi = -2z(1-z)d/dz$ なので, (23) は

$$2z(1-z) \frac{d\vartheta'}{dz} \approx \vartheta' - \nu\psi', \quad z \frac{d\psi'}{dz} \approx \nu\vartheta' - \psi' \quad (28)$$

となる. ϑ', ψ' が H_v の近傍では小さいので, これらの leading 項で近似したが, autonomous 近似はしていない. $0 \leq z \leq 1$ である. これと同じく小さな ϑ', ψ' と一般の z の近似で

$$\begin{aligned} x &= -2z \sin \psi' \approx -2z\psi', \\ y &= 2z \cos \psi' \approx 2z, \\ u &= -\sqrt{\mu}(-1+1/z)^{1/2} \vartheta', \\ v &= \sqrt{\nu}(-1+1/z)^{1/2} \cos \vartheta' \approx \sqrt{\nu}(-1+1/z)^{1/2} \end{aligned} \quad (29)$$

である. (28) をまとめて 2 階の微分方程式にすると

$$z(1-z) \frac{d^2x}{dz^2} - \frac{1}{2} \frac{dx}{dz} + \frac{\nu^2}{2z} x \approx 0 \quad (30)$$

となる. この解は超幾何関数で

$$\begin{aligned} x &\approx 2A_+ z^{\alpha_+} F(\alpha_+, \alpha_+ - 1; 2\alpha_+ - 1/2; z) \\ &\quad + 2A_- z^{\alpha_-} F(\alpha_-, \alpha_- - 1; 2\alpha_- - 1/2; z) \end{aligned} \quad (31)$$

と書ける. 但し, $\alpha_{\pm} = 3(1 \pm (1-8\nu^2/9)^{1/2})/4$ である. この x から, 対応する ϑ' と ψ' は

$$\psi' \approx -\frac{1}{2z} x, \quad \vartheta' \approx \frac{1}{\nu} \frac{d(z\psi')}{dz} \approx -\frac{1}{2\nu} \frac{dx}{dz} \quad (32)$$

で与えられるから, $H_v(\pi/2, \pi/2)$ の近傍では,

$$\begin{pmatrix} \vartheta' \\ \psi' \end{pmatrix} = A_+ \begin{pmatrix} -\mu\alpha_+ \\ -1 \end{pmatrix} z^{\alpha_+-1} + A_- \begin{pmatrix} -\mu\alpha_- \\ -1 \end{pmatrix} z^{\alpha_- -1} \quad (33)$$

となる. これで, 衝突パラメータ (A_+, A_-) が導入された.

幾何的な解釈をする.

(i) H_v 近傍の衝突領域では, ψ', ϑ' が小さく, 従って (29) から $x \approx 0, u \approx 0$ である. 軌道が H_v 近傍を通る間は, y 軸に殆ど沿って運動している. これからの僅かなずれは, x, u (或いは, ψ', ϑ') が記述している.

(ii) 質量異方性が大きく $\nu^2 \ll 1$ なので, $\alpha_+ \approx 3/2, \alpha_- \approx \nu^2/3 \approx 0$ である. そこで (31) では, 第 1 項が変数 $z (\approx y/2)$

に対する強い依存性をもち, 第 2 項は z に殆どよらない. xy 面内での原点との衝突後, H_v 近傍の通過中に, χ の減少に伴って $z \approx y/2$ が増加し, これに伴って第 1 項の A_+ 項のために, 衝突軌道は y 軸から離れていく.

(iii) 一方 (33) は, $\vartheta\psi$ 面上の双曲線型特異点 $H_v(\pi/2, \pi/2)$ の近傍で, ほぼ水平な漸近線方向 $(-\mu\alpha_+, -1) \approx (-3\mu/2, -1)$ と, ほぼ垂直な漸近線方向 $(-\nu/3, -1)$ の 2 方向に分解して軌道を記述している. α_+, α_- の評価を代入すると

$$\begin{pmatrix} \vartheta' \\ \psi' \end{pmatrix} \approx A_+ \begin{pmatrix} -3\mu/2 \\ -1 \end{pmatrix} z^{1/2} + A_- \begin{pmatrix} -\nu/3 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{z}$$

となる. そこで, xy 平面の原点との衝突直後の $z \approx 0$ では第 2 項の A_- 項が主要部をなし, 垂直に近い漸近線に沿って軌道が H_v に入ることが確認される. 即ち, A_- 項は原点との衝突から近い時の軌道を記述し, A_+ 項は (H_v 近傍を通り過ぎたあとの) 衝突から遠い時の軌道を記述している.

6.3.2 始点 $0 \rightarrow (A_+, A_-)$

Poincaré 断面から χ_0 を大きくとって原点の十分近傍から, 打ち上げ角度 $\vartheta_0 \approx \vartheta_v$ で軌道を出発させることにしよう. ちょうど $\vartheta_0 = \vartheta_v$ で打ち出した場合を基準にとって添え字 0 をつけて表すと, この場合は垂直方向の漸近線に沿って H_v に軌道は進むので, $A_{+0} = 0$ で A_{-0} が何らかの有限値を持つ. この軌道を中心として初期条件が僅かにずれた軌道 ($\vartheta_0 = \vartheta_v + \delta\vartheta_0, \psi_0 = 0$) たちの全体は, 始点 ($\vartheta_0 = \vartheta_v, \psi_0 = 0$) の近傍を $H_v(\pi/2, \pi/2)$ の近傍へ写像している. この写像は (27) の第 1 段の写像に対応している. すべての初期値に対して軌道の発展方程式 (17) を積分すればこの写像を作れるが, 実際には $\delta\vartheta_0$ が小さいので具体的には, 基準となる中心の軌道に対しては (17) を使い, その周りの軌道たちについては (17) を線形近似した

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\vartheta}{d\chi} &= \frac{1}{\gamma^2} (-\mu \sin^2 \psi + \nu \cos^2 \psi) \delta\vartheta + \delta\psi, \\ \frac{d\delta\psi}{d\chi} &= \frac{2}{1+e^{-2\chi}} \cdot \frac{1}{\gamma^2} (-\delta\vartheta + (\mu \sin^2 \vartheta + \nu \cos^2 \vartheta) \delta\psi), \\ \gamma &= \sqrt{\nu} \cos \vartheta \cos \psi + \sqrt{\mu} \sin \vartheta \sin \psi \end{aligned} \quad (34)$$

を使えばよい. この $\delta\vartheta, \delta\psi$ の数値積分が始点 ($\vartheta_0 = \vartheta_v + \delta\vartheta_0, \psi_0 = 0$) から打ち出した軌道の $H_v(\pi/2, \pi/2)$ 近傍を記述するパラメータ $A_+ = \delta A_{+0}$ と $A_- = A_{-0} + \delta A_{-0}$ を与える. スキームとして書くと

$$\begin{aligned} (\chi_0, \vartheta_0) &\longrightarrow (A_+, A_-) \\ \text{中心軌道: } (\chi_0, \vartheta_v) &\xrightarrow{(17)} (A_{+0} = 0, A_{-0}) \\ \text{変分: } \delta\vartheta_0 &\xrightarrow{(34)} \delta A_{+0}, \delta A_{-0} \end{aligned}$$

となる．どのようにパラメータが決まるか具体的に検討しよう．

(33) より中心の軌道については $\psi' = -A_{-0}z^{\alpha-1}$ だから，軌道が H_v に近づくとき $\chi \rightarrow -\infty$ となることを考慮して

$$A_{-0} = - \lim_{\chi \rightarrow -\infty} (\psi - \pi/2) e^{2(\alpha-1)\chi} \quad (35)$$

となる．これは (17) の数値積分から，パラメータ A_{-0} を抽出する方法を与えている．同様に始点の変分 $\delta\vartheta_0$ ($\delta\psi_0 = 0$) によって生じる $\delta\vartheta$, $\delta\psi$ は, (34) の積分で計算されるが，同時に H_v の近傍では (33) の変分で

$$\begin{pmatrix} \delta\vartheta \\ \delta\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu\alpha_+ & -\mu\alpha_- \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A_{+0} z^{\alpha_+-1} \\ \delta A_{-0} z^{\alpha_--1} \end{pmatrix} \quad (36)$$

となっているので，これを逆に解いて

$$\begin{aligned} \delta A_{+0} &= \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left(2/(9\mu^2 - 8)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. (-\delta\vartheta + \mu\alpha_- \delta\psi) e^{2(\alpha_+-1)\chi}, \right. \\ \delta A_{-0} &= \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left(2/(9\mu^2 - 8)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. (\delta\vartheta - \mu\alpha_+ \delta\psi) e^{2(\alpha_--1)\chi} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

となる．これにより (34) の数値積分から δA_{+0} , δA_{-0} を決定できる．(35), (37) をあわせれば軌道のパラメータ $A_+ = \delta A_{+0}$, $A_- = A_{-0} + \delta A_{-0}$ が始点 ($\vartheta_0 = \vartheta_v + \delta\vartheta_0$, $\psi_0 = 0$) に対して決まることになる．

ここまでは始点での χ_0 を十分に大きい適当な数としたが， χ_0 に対するパラメータの依存性を明らかにするために，基準として $\chi_0 = 0$ とした場合のパラメータを更に添字 0 を右につけて， A_{-00} , δA_{+00} , δA_{-00} (前と同様に $A_{+00} = 0$) とする．軌道が H_v にきわめて接近して χ が急激に減少しない限り (17), (34) の右辺の χ 依存性は無視できる．そこでパラメータ χ は (17), (34) で加法的なので，

$$A_{-0} = A_{-00} e^{2(\alpha_--1)\chi_0} \quad (38)$$

である．またパラメータ δA_{+00} , δA_{-00} が ϑ_0 に線形に依存しているので，

$$\delta A_{+00} = -k_{+0} \delta\vartheta_0, \quad \delta A_{-00} = k_{-0} \delta\vartheta_0, \quad (39)$$

とおいて

$$\begin{aligned} \delta A_{+0} &= -k_{+0} e^{2(\alpha_+-1)\chi_0} \delta\vartheta_0, \\ \delta A_{-0} &= k_{-0} e^{2(\alpha_--1)\chi_0} \delta\vartheta_0 \end{aligned} \quad (40)$$

となる．

パラメータ A_+ , A_- を求めるには， $\chi_0 = 0$ で数値積分 (17), (34) を実行し (35), (37) と同様の極限で A_{-00} , k_{+0} ,

k_{-0} を求めて (38), (40) に代入し， A_{-0} , δA_{+0} , δA_{-0} を求めれば，後は直ちに $A_+ = \delta A_{+0}$, $A_- = A_{-0} + \delta A_{-0}$ である．便利のために一つの式にまとめると

$$A_+ = \delta A_{+0} = -k_{+0} e^{2(\alpha_+-1)\chi_0} \delta\vartheta_0, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} A_- &= A_{-0} + \delta A_{-0} \\ &= (A_{-00} + k_{-0} \delta\vartheta_0) e^{2(\alpha_--1)\chi_0} \end{aligned} \quad (42)$$

上記のように A_{-00} , k_{+0} , k_{-0} は $\chi_0 = 0$ の解析で決まる定数である．

これで，第 1 段の写像: 始点 $0 \rightarrow (A_+, A_-)$ が決まった．

6.3.3 衝突パラメータ A_+

初期条件を変えたときの (A_+, A_-) の変化を考察しよう．衝突軌道を考えるため， χ_0 を大きくし出発点を xy 平面の原点に近づける．

(1) すると $\alpha_- - 1 < 0$ だから (42) に従って A_- は減少する．そこで，軌道は同じ z について双曲線型特異点 H_v に近づけることになる． χ_0 を大きくすればするほど，また $\delta\vartheta_0$ を零に近づければ近づけるほど， A_- は減少しそれだけ軌道は H_v に接近する．(ただし $\delta\vartheta_0 \neq 0$ であると， H_v をもろに通過することはない)．

(2) 一方で H_v の近傍を軌道が通過し，autonomous 領域を離れた後を支配している A_+ を (41) で考える．今度は $\alpha_+ - 1 > 0$ だから， χ_0 を大きくする効果と $\delta\vartheta_0$ を零に近づける効果は互いに拮抗するので，バランスをとってやると， A_+ を一定にすることができる．

そこで， χ_0 を十分に大きくとり， $\delta\vartheta_0$ をそれに応じて適当に決めると， A_- が非常に小さくて H_v にいくらかでも接近し，しかも A_+ を与えられた値に持つ軌道が作れることになる．

この極限として A_+ が適当な非零の有限値で $A_- = 0$ の軌道が考えられる．この極限に位置する軌道では， $\chi_0 \rightarrow 0$ だから xy 平面の原点との厳密な衝突が起こっていることになる．従って，これは理想的な衝突軌道 (ideal collision trajectory) である．この軌道では，(31), (29) から x , y はそれぞれ

$$\begin{aligned} x &\simeq 2A_+ z^{\alpha_+} \\ y &\simeq 2z \end{aligned} \quad (43)$$

である． $\alpha_+ \approx 3/2$ を使えば， $y \approx 2(x/2A_+)^{2/3}$ となる． $\chi_0 \rightarrow \infty$ に対応して， $z \rightarrow 0$ だから， $\vartheta\psi$ 面で H_v 近傍に到達するまで y 軸にほとんど完全に沿って軌道は発展する．

衝突軌道を数値的に調べるときに， xy 平面の特異点を初期値として積分 (17) を行うことはできない．そこで，わずかに離れた点を初期値として使いたい近似式 (43) を特異点のそばで使ってしまうと誤差が拡大する．そこで，近似を

上げて

$$\begin{aligned} x &= Az^\alpha (1 + az + \dots) + Cz^{3\alpha-2} (1 + \dots) + \dots, \\ y &= 2z + Bz^{2\alpha-1} (1 + bz + \dots) \\ &\quad + Dz^{4\alpha-3} (1 + \dots) + \dots, \end{aligned} \quad (44)$$

とすればよい. 但し

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\alpha-1/2}, \\ B &= \frac{3A^2}{4(4\alpha-1)(2\alpha-3)}, \\ b &= \frac{(\alpha+1/2)(\alpha-1)}{2\alpha+1/2}, \\ C &= \frac{3\nu^2}{16(\alpha-1)(8\alpha-7)} A(4B+A^2), \\ D &= \frac{3}{2} \left(AC - B^2 - BA^2 - \frac{5}{32} A^4 \right) / (8\alpha-5)(4\alpha-5). \end{aligned} \quad (45)$$

衝突パラメータ $A = A_+$ ごとに, この x, y (と同様に求めた u, v) から Hamilton 方程式 (2) の積分で衝突軌道が与えられる.

6.3.4 $(A_+, A_-) \rightarrow$ 終点 1

先ほど, 始点 0: (χ_0, ϑ_0) とパラメータ (A_+, A_-) の関係をつけた時は, χ_0 が非常に大きく $\vartheta_0 = \vartheta_v$, $\psi = 0$ を出発点とする軌道を中心の基準軌道として使った. 今度はパラメータ (A_+, A_-) と終点 (χ_1, ϑ_1) の関係をつけるのだが, それには理想的な衝突軌道 (A_+ が有限で $A_- = 0$) を基準軌道とし, その周りの軌道を変分で作ることにする. すなわちスキームは

$$\begin{aligned} (A_+, A_-) &\longrightarrow (\chi_1, \vartheta_1) \\ \text{中心軌道: } (A_{+1}, A_{-1} = 0) &\xleftarrow{(17)} (\chi_{11}, \vartheta_{11}) \\ \text{変分: } \delta A_{+1}, \delta A_{-1} &\xleftarrow{(34)} \delta \chi_{11}, \delta \vartheta_{11} \end{aligned}$$

である. ここで $\vartheta_0 < \vartheta_v$ なら $\psi_1 = 0$, $\vartheta_0 > \vartheta_v$ なら $\psi_1 = \pi$ で, 記号 ' \leftarrow ' は, 終点からの逆向きの積分を表している. そこで極限が $\chi \rightarrow +\infty$ となるところだけが前と違うだけで, パラメータは

$$\begin{aligned} A_{+1} &= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\psi - \pi/2) e^{2(\alpha+1)\chi}, \\ \delta A_{+1} &= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(2 / (9\mu^2 - 8)^{1/2} \right) \\ &\quad (-\delta\vartheta + \mu\alpha_- \delta\psi) e^{2(\alpha+1)\chi}, \quad (46) \\ \delta A_{-1} &= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(2 / (9\mu^2 - 8)^{1/2} \right) \\ &\quad (\delta\vartheta - \mu\alpha_+ \delta\psi) e^{2(\alpha-1)\chi} \end{aligned}$$

となる. また, 前と同様,

$$\begin{aligned} \delta A_{+1} &= k_{+1} \delta \chi_1 + k_{+2} \delta \vartheta_1, \\ \delta A_{-1} &= k_{-1} \delta \chi_1 + k_{-2} \delta \vartheta_1 \end{aligned} \quad (47)$$

である.

6.3.5 Synthesis

いよいよ前小節までで導いた $0 \rightarrow (A_+, A_-)$ と $(A_+, A_-) \rightarrow 1$ の式を総合しよう.

(1) 始点で (χ_0, ϑ_0) を (X_0, U_0) に書き換えてやるのが出来る. 実際,

$$\begin{aligned} X_0 &\equiv x_0 \left(1 + \frac{u_0^2}{\mu} \right) = \frac{2}{1 + e^{2\chi_0}} (1 + e^{2\chi_0} \cos^2 \vartheta_0) \\ &\approx 2 \cos^2 \vartheta_0 = 2 \cos^2 (\vartheta_0 + \delta\vartheta_0) \end{aligned}$$

だから, $X_0 \equiv 2 \cos^2 \vartheta_v - \delta X_0$ とおくと,

$$\delta X_0 = 2 \sin 2\vartheta_v \cdot \delta\vartheta_0, \quad (48)$$

である. また $U_0 \equiv \sqrt{\mu}\pi/2 - \delta U_0$ とおくと, (26) より

$$\delta U_0 = \sqrt{\mu} e^{-\chi_0} / \cos \vartheta_v \quad (49)$$

である. そこで, $e^{-\chi_0} = \delta U_0 \cos \vartheta_v / \sqrt{\mu}$, $\delta\vartheta_0 = \delta X_0 / 2 \sin 2\vartheta_v$ を使うと (41) は

$$A_- \approx A_{-00} \left(\frac{\cos \vartheta_v \cdot \delta U_0}{\sqrt{\mu}} \right)^{2(1-\alpha_-)} \quad (50)$$

となる. 但し A_{-00} に対して $k_{-0} \delta\vartheta_0$ を切り捨てた. また (42) は

$$A_+ = -\frac{\delta X_0}{2 \sin 2\vartheta_v} \cdot k_{+0} \left(\frac{\sqrt{\mu}}{\delta U_0 \cos \vartheta_v} \right)^{2(\alpha_+-1)} \quad (51)$$

となる.

(2) 衝突パラメータが A_{+1} の衝突軌道 ($A_{-1} = 0$) の終点を (X_1, U_1) とする. この近傍の軌道の終点が $\delta X_1, \delta U_1$ だけのずれをもつとすると, パラメータの変分を表す (47) は同値に

$$\begin{aligned} \delta A_{+1} &= l_{+1} \delta X_1 + l_{+2} \delta U_1, \\ \delta A_{-1} &= l_{-1} \delta X_1 + l_{-2} \delta U_1 \end{aligned} \quad (52)$$

と表せる.

(3) これら衝突に近い軌道はすべて $U_0 \lesssim B$ だが, U_1 の方は B から離れている. つまり (U_0, U_1) の正方形領域では $U_0 \lesssim B$ の辺のそばにいる. 重要なのは, U_1 を固定して正方形の辺に垂直な変分 δU_0 に対してのヴィリアル R の振る

舞いである。そこで (52) の第 2 式で $\delta U_1 = 0$ として衝突軌道では $A_{-1} = 0$ である事に注意すると

$$A_- = \delta A_{-1} = l_{-1} \delta X_1$$

となる。この第 2 段の写像における A_- と第 1 段の写像に関する (50) の A_- を等置すると、

$$\delta X_1 = \frac{A_{-00}}{l_{-1}} \cdot \left(\frac{\cos \vartheta_v \cdot \delta U_0}{\sqrt{\mu}} \right)^{2(1-\alpha_-)} \quad (53)$$

を得る。

一方で、 $A_+ = A_{+1} + \delta A_{+1}$ であるが補正を無視して $A_+ = A_{+1}$ として、第 1 段の写像に関する (51) の A_+ と等置すると

$$\delta X_0 = -2 \sin 2\vartheta_v \frac{A_{+1}}{k_{+0}} \cdot \left(\frac{\cos \vartheta_v \cdot \delta U_0}{\sqrt{\mu}} \right)^{2(\alpha_+ - 1)} \quad (54)$$

を得る。

(4) χ_0 大で $\vartheta_0 \approx \vartheta_v$ の衝突軌道は軌道は殆ど y 軸に沿ってすすむが、 A_{+1} の符号によって y 軸に対して左右に振り分けられる。実際、(31) を通して x の符号が決まり、 x が正 (従って X も正) なら、最後にも $X_1 > 0$ となる。つまり、 $A_{+1} > 0$ なら $X_0 > 0$, $X_1 > 0$ で、 $A_{+1} < 0$ なら $X_0 > 0$, $X_1 < 0$ である。

この境界の $A_{+1} = 0$ だと $x = u = 0$ で最後まで y 軸に沿う軌道になり、 $\chi_0 \rightarrow \infty$ の極限では、 xy 平面の原点から $v = \infty$ 飛び出し、 y 軸に沿って $y = 0$ から運動範囲の上限の $y = 2$ に達して転回し、 $v = -\infty$ で再び $y = 0$ に戻る軌道である。これに対するヴィリアルは

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2dv}{1+v^2/\nu} = 2\pi\sqrt{\nu} \quad (55)$$

である。

6.4 x 軸に沿った軌道

前小節で見た衝突軌道は双曲線型特異点に支配されていて y 軸に沿って運動する。ここでは、楕円型特異点に支配されている軌道は x 軸に沿って運動していることを見る。これらの軌道も楕円型特異点の近傍を通るときに χ が減少する場合があります、そのときは原点近傍を離れ x 軸に沿って非 autonomous 領域に出現し転回点まで行って転回し、再び原点近傍に戻ってくる。

6.4.1 変数 ζ の導入と座標 y の従う 2 階常微分方程式

$\psi = 0$, $\vartheta = 0$ の楕円型特異点の近傍の軌道は (21) で記述されるが前小節に倣って独立変数を $z = 1/(1+e^{2x})$ にすると

$$2z(1-z) \frac{d\vartheta}{dz} = \vartheta - \mu\psi, \quad z \frac{d\psi}{dz} = \mu\vartheta - \psi$$

となる。これでも議論を進めることが出来るが、不便なのは $z (= r/2)$ の一つの値に対して y 軸の正方向を向く運動と y 軸の負方向を向く運動と 2 通りの運動が属することである。むしろ x 方向の運動量 u に着目すると、原点から質点が出発するとき $u = \infty$, 転回点で $u = 0$, 原点に質点に戻るとき $u = -\infty$ となり、軌道に沿って単調減少 1 価の変数なので、ここでも運動量空間で軌道を考えることにする。更に便利のため

$$\zeta \equiv -\frac{u}{(\mu+u^2)^{1/2}} = \pm\sqrt{1-z}$$

を独立変数にとり、 $-\infty < u < \infty$ がコンパクトな区間 $-1 < \zeta < 1$ になるようにしよう。これは、変数 z の $0 \leq z \leq 1$ の区間を 2 重に被覆し、 z での記述の 2 価性を解消するものである。Hamilton の運動方程式 (2) に立ち帰って議論を進める。

x 軸に沿った運動では変数 x , u が大きい値をもち、変数 $y \approx 0$, $v \approx 0$ である。そこで (2) の最初の 2 式では $y = 0$ とおくと、

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{u}{\mu} \quad (56)$$

となるから初期条件 $u = \infty$ で $x = 0$ を考慮して

$$x = 2/(1+u^2/\mu) = 2(1-\zeta^2) \quad (57)$$

を得る。次の 2 式では、小さい変数 y , v について線形化をし、 t の代わりに変数 ζ を使うと、 $d\zeta/dt = 1/4\sqrt{\mu}(1-\zeta^2)^{1/2}$ だから

$$\frac{dy}{d\zeta} = 4\mu^{3/2}(1-\zeta^2)^{1/2}v, \quad \frac{dv}{d\zeta} = -\frac{\sqrt{\mu}}{2(1-\zeta^2)^{5/2}}y \quad (58)$$

となる。出発点が厳密に $x = 0$ でしかも常に y 軸に沿った運動という極限では、出発点で $\zeta = -1$, 転回点 ($u = v = 0$, $x^2 + y^2 = 4$) で $\zeta = 0$, 原点に戻ると $\zeta = 1$ である。従属変数 y を $y = (1-\zeta^2)^{3/4}p(\zeta)$ で $p(\zeta)$ に変換して、(58) を一本の 2 階常微分方程式にすると $p(\zeta)$ は Legendre の微分方程式

$$\frac{d}{d\zeta} \left((1-\zeta^2) \frac{dp}{d\zeta} \right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{2\mu^2 - 9/4}{1-\zeta^2} \right) p = 0$$

で記述される。この解はスピン量子数が $1/2$, 磁気量子数 im ($m = 1/2(8\mu^2 - 9)^{1/2}$) の随伴 Legendre 函数

$P_{1/2}^{im}(\zeta)$, $Q_{1/2}^{im}(\zeta)$ で、超幾何級数で書くと、それぞれ

$$\begin{aligned} p(\zeta) &= (1-\zeta^2)^{im/2} F\left(im/2 + \frac{3}{4}, im/2 - \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \zeta^2\right) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(-im)}{\Gamma(\frac{5}{4}-im/2)\Gamma(\frac{1}{4}-im/2)} z^{im/2} \\ &\quad F\left(\frac{3}{4} + im/2, -\frac{1}{4} + im/2; 1 + im; z\right) + c.c. \\ q(\zeta) &= \zeta(1-\zeta^2)^{im/2} F\left(im/2 + \frac{5}{4}, im/2 + \frac{1}{4}; \frac{3}{2}; \zeta^2\right) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(-im)}{\Gamma(\frac{3}{4}-im/2)\Gamma(-\frac{1}{4}-im/2)} z^{im/2} \\ &\quad F\left(\frac{5}{4} + im/2, \frac{1}{4} + im/2; 1 + im; z\right) + c.c. \end{aligned} \quad (59)$$

となる。超幾何級数の変換公式を使ったそれぞれの第2式を見ると p, q とも、確かに実数値を持つことがわかる。原点近傍の変数 z が小さいところで主要項 ($z^{im/2}$ と $z^{-im/2}$) を集めると、

$$y \approx \frac{A^*}{2} z^{3/4+im/2} + c.c. = |A| e^{-3\chi/2} \cos(m\chi + \phi_A) \quad (60)$$

となる。

6.4.2 楕円型特異点の影響

これから導かれる重要なことをリストしよう。

(1) z が増加 (χ の減少) する際に、 xy 平面では x 軸に沿って軌道が原点から離れるとともに、 y は振幅の絶対値を増加させながら正、負の値を交互にとる。 $y = r \sin \psi$ なので、これは $\vartheta\psi$ 平面上で楕円型特異点 $E(0,0)$ の周りで軌道が螺旋運動を行う (図6) ときに、 ψ が正、負の値を交互にとるのに対応している。

(2) 上の y の零点を与える χ の間隔は、 χ_0, χ_1 がともに大きく、従って z が小さいとする近似が良いところでは、

$$\Delta\chi \equiv \chi_0 - \chi_1 = \frac{\pi}{m} (\approx 1.12) \quad (61)$$

である。なお最後の数値は $\mu^2 = 5$ の場合である。

(3) ϑ の方は、螺旋運動 (図6) を見ればわかるように $\vartheta \approx 0$ である。従って、(26) から $U_0 \approx \pi\sqrt{\mu}/2$, $U_1 \approx \pi\sqrt{\mu}/2$ である。もっと正確には (26) から

$$\frac{\pi\sqrt{\mu}/2 - U_1}{\pi\sqrt{\mu}/2 - U_0} \approx e^{\chi_0 - \chi_1} = e^{\pi/m} (\approx 3.09) \quad (62)$$

である。楕円型特異点 $E(0,0)$ の周りで軌道が螺旋運動を行う (図6) ときに $\psi_0 = \psi_1 = 0$ であるから、(13), (4) により $X_0 > 0$, $X_1 > 0$ であり、我々の弧は (+,+) タイプである。従って、(+,+) タイプの弧 $(U_0, U_1)_{(+,+)}$ は、正方形領

域 (U_0, U_1) の全体でなく $U_0 \approx U_1 \approx \pi\sqrt{\mu}/2$ の角の領域の (62) を下限とする一部分だけを占める。

(4) もっと一般的に χ が小さい領域では、(59) で z の leading 項をとっただけではだめで、級数全部を評価して (60) に相当する式を作ることになる。 y の零点が ζ_0 で起こったとすると、(軌道が次に Poincaré断面を横切る) y の次の零点 ζ_1 ($\zeta_0 < \zeta_1$) は、この式によって必ず1価に決まる。これが正方形領域 (U_0, U_1) の全体で弧 $(U_0, U_1)_{(+,+)}$ が実現する領域の境界 $U_1 = g(U_0) < U_0$ を決める。(この境界の $U_0 \approx U_1 \approx \pi\sqrt{\mu}/2$ の角での傾きが (62) である。

これで、解析的な考察による弧の分析が終わった。

7 弧の観察の旅とヴィリアル面の構成

今度は、数値計算によって、弧が実際にどのような形をしているか、運動学的な領域のどの部分にどのようなタイプのものが現れるか、数値的な解析を通して具体的に視覚化して見ていこう。

それぞれの弧の初期値は次のように決める。まず χ_0 は a から g までは $\chi_0 = 5.5$ とする。これは autonomous 領域での振る舞いを調べるためである。そして h は $\chi_0 = -1$ とする。これは x 軸に沿う軌道について調べるためである。

次に a から h の各々の ϑ_0 は、表3に示した $0 < \vartheta_0 < \pi$ の特徴的な10個の値を用いる。

図17に示すこれら a から h の10個の図は、各々上下の2つの図で構成される。上図は xy 平面上での弧の様子が赤線のグラフで表示されている。またその左上隅に、図10で示した弧 (U_0, U_1) の運動学的領域で、その弧がどこに位置するかを緑の丸印で示す。

以下ではこの弧の運動学的領域を「ドメイン」と呼ぶことにする。ドメインは (+,+) と (+,-) の2つを、図10に従って配置したものを表示している。

考えている弧は、 $0 < \vartheta_0 < \pi$ により xy 平面の上半面に限られるため、この領域だけを表示する。また、軌道の片端の青丸は始点を表す。

これらの xy 面上での弧の様子を描くのに、2つのスケールが用いられているので注意する。これについて少し説明する。

a', b', h の3つの図は、拡大を必要としないため、実スケールで描かれている。この3つの図に描かれている半径2の円弧は、(15) で決まる運動の最大領域を表している。

残りの7つの図には共通して、上の3つの図に比べおよそ1000倍の拡大図が用いられている。このうち a, d, e, f, g の5つの図には、これをさらに、およそ20倍に拡大した図が挿入されている。

このおよそ20倍に拡大された領域は次のように決める。

a	$0.1\vartheta_v$	c	$\pi/2$	f	$(\pi - \vartheta_h) - 0.0126(\pi/2 - \vartheta_h)$
a'	$0.998\vartheta_v$	d	$\pi/2 + 0.384(\pi/2 - \vartheta_c)$	g	$(\pi - \vartheta_h) + 0.5\vartheta_h$
b'	$1.002\vartheta_v$	e	$\pi - \vartheta_c, (\vartheta_1 = 3\pi/2)$	h	$\pi - 0.2$
b	$\pi/2 - 0.0475\vartheta_v$				

表3 ϑ_0 に用いる 10 個の値

まず, a の図では, 弧のタイプが $(++)$ であり, 弧の形は x 軸に沿う. そのため x 軸の正の方向に広めに拡大領域を設定した.

そして残りの d, e, f, g の図については, 弧は共通して $(+-)$ のタイプで, a の図で拡大した領域の半分ほどの正方領域にいずれも収まる. そこでこの 4 つの図については共通の領域を拡大した.

下図には $\vartheta\psi$ 平面上での基本領域における軌道の様子を赤線で表した. 背景の矢印は, autonomous 近似をした (20) によるベクトル場である. 図中の丸記号は楕円型特異点を表す. また, 菱形の記号は双曲線型特異点を表す. 楕円型特異点のうち吐き出し型のは白抜きに, また吸い込み型のは黒塗りとした. 同様に, 双曲線型特異点 H_v を白抜き, また双曲線型特異点 H_h は黒塗りとした. これらの丸記号と菱形の記号は互いに双対的な格子の上に並ぶ (図 6 の注釈参照).

点 $(\vartheta, \psi) = (0, 0)$ と $(\pi, 0)$ を結ぶ青い線は, ここで問題にしている弧の始点の領域を表す.

この始点の領域を表す青線に下向きにつけられた 3 つの目盛りは, ϑ が小さい順にそれぞれ ϑ_v (青), $\pi - \vartheta_c$ (ピンク), $\pi - \vartheta_h$ (青) を表す.

そのため, 弧の始点と終点は, 極座標での表示 (13) を用いて $\psi = 0$ あるいは $\psi = \pi$ となる. 具体的には, 対称性から, $0 < \vartheta_0 < \pi$, $\psi_0 = 0$ として, ϑ_0 に対する弧の変化を調べれば十分であることは, 小節 6.2 で見た通りである.

また autonomous 領域では運動量が非常に大きくなることにも注意する.

それでは ϑ の初期値である ϑ_0 を変えながら, 弧の様子がどのように変わるか観察していこう.

a : まず始点は autonomous 領域にあることから, 運動量は非常に大きい. また, ϑ_0 の値が非常に小さいことから, x 軸に対する打ち出し角度は小さく, また x 軸の正の方向に打ち出される.

弧は, a の上図にあるような x 軸に沿う形となる. この 2 つの事実から, 始点においても終点においても x 方向の運動量成分は大きな正の数となる. また始点, 終点の x 座標は

どちらも正である. そのため a の上図で左上隅に描かれているように, 弧はドメインの第 1 象限の右下隅に位置する. しかも, $\vartheta\psi$ 平面上でみると, この弧は $(\vartheta, \psi) = (0, 0)$ の楕円型特異点の影響下にあり, この点に巻き付くように運動している.

a' : この弧の ϑ_0 は ϑ_v よりわずかに小さいだけである. $\vartheta\psi$ 平面での様子を見ると, 軌道が $(\vartheta, \psi) = (\pi/2, \pi/2)$ の双曲線型特異点のごく近くを通過している様子が分かる. $\vartheta_0 < \vartheta_v$ であるため, 特異点に近づいたあとは左にそれ, $y = 0$ ($\psi = 0$) に戻る. そのため $(++)$ タイプの弧となる.

双曲線型特異点のごく近傍を通過中に χ の値は著しく減少する. そのため, 特異点を過ぎたあと軌道はもはや autonomous 領域には無く, 背後のベクトル場に全く従わないところに注意を要する. また, 同様の理由により, 初期値が $0 < \vartheta_0 < \vartheta_v$ であると, autonomous 近似をすれば終点は $-\vartheta_h < \vartheta_1 < 0$ にたどり着くのだが, (近似をせず) 正確に軌道扱おうと, これよりも外側のつまり $\vartheta_1 < -\vartheta_h$ にたどり着くことが出来る.

xy 平面上の運動でみると, χ の著しい減少により, autonomous 領域 (原点近傍) から脱出し, 軌道は拡大しなくても表示可能な領域に現れ, 運動領域の最大値である $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$ 付近まで到達する ($\vartheta\psi$ 平面上では $\vartheta = 0$ に対応する).

その際, ほぼ y 軸に沿って運動する. これは原点との衝突により非 autonomous 領域に出現する衝突軌道である. 転回点に達したあと, y の値を加速度的に減少させながら再び x 軸に戻る.

この例では運動量 u は正で始まり, 途中符号を変えて, 終点での運動量 u_1 の符号は負 (これは xy 平面での軌道の様子からも, また $\vartheta\psi$ 面上の軌道の終点が $-\pi < \vartheta_1 < -\pi/2$ であることから分かる) となる. 弧はドメインの第 1 象限左下隅に位置している.

b' : ϑ の初期値 ϑ_0 が ϑ_v よりわずかに大きいこの弧は, a' と対で, 原点との衝突により非 autonomous 領域に出現する衝突軌道である.

$\vartheta_0 > \vartheta_v$ であるため, $\vartheta\psi$ 平面上での軌道の様子は, $(\vartheta, \psi) = (\pi/2, \pi/2)$ の双曲線型特異点に近づいたあと右

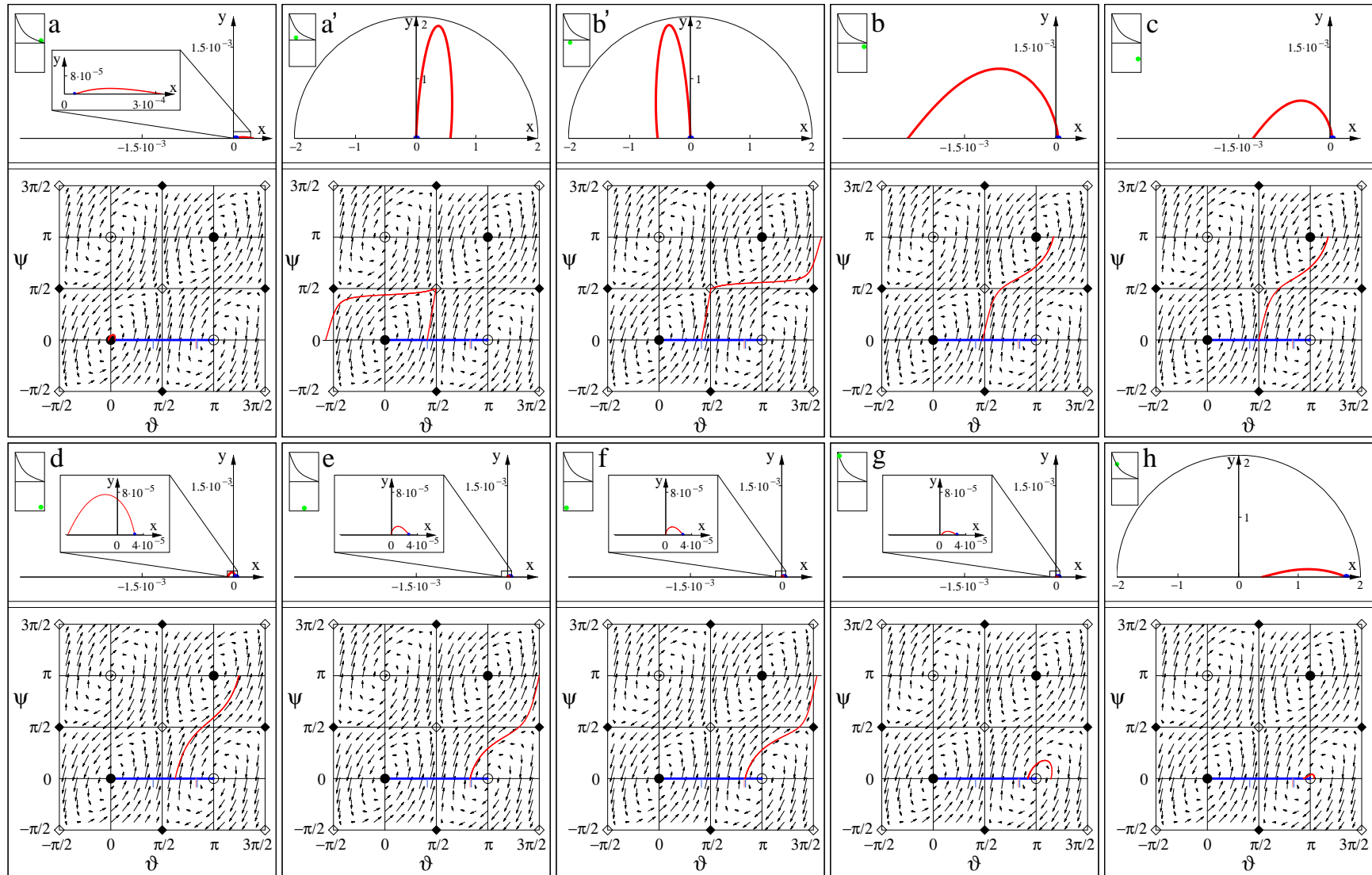


図 17: 初期値 ϑ_0 を変化させたときの対応する弧の変化とドメイン上での動き。

にそれ、 $\psi_1 = \pi$ に達する。そのため (+-) タイプの弧となる。

a' と b' は対になっており、それらの ϑ_0 は、双曲線型特異点の指標である ϑ_v から、同じ大きさだけ離れている。 xy 平面上、および $\vartheta\psi$ 平面上での両軌道の様子は対称的である。また、図 10 のようなドメインの配置にすると、両弧のドメイン上での位置は、ドメインが接する線について対称になる。 a' 同様、やはり、 χ の減少が原因となり、autonomous 近似した諸量とのずれが特徴的である。

b : これまでに、autonomous 領域の弧である a から始まり、2つの非 autonomous な衝突軌道 a' , b' をみた。 b は、再び autonomous 領域の弧である。以降 g まで、autonomous 領域の弧を扱うことになる。

この図は $\vartheta_v < \vartheta_0 < \pi/2$ の軌道の一例を示すものである。しかし、例えば ϑ_0 として ϑ_v と $\pi/2$ の真ん中をとると、これではまだ $(\vartheta, \psi) = (\pi/2, \pi/2)$ の双曲線型特異点の影響が及んでしまう。そのため、弧を autonomous 領域にとどめるためには、 ϑ_0 は ϑ_v からかなり離さねばならず、結果的に $\pi/2$ のかなり近くを選ぶことになる。Autonomous 領域にあることから、 $\vartheta\psi$ 平面上の軌道は背景のベクトル場に沿っている。 $\vartheta_v < \vartheta_0 < \pi/2$ であることから U_0 は正、また、 $\pi < \vartheta_1 < 3\pi/2$ により U_1 は負で、この弧はドメイン第4象限の右上隅に位置する。

c, d, e, f : c で $\vartheta_0 = \pi/2$ であり、 b, c, d を通して U_0 の符号が正から負に変化する。この動作の際、 $\pi < \vartheta_1 < 3\pi/2$ であるから U_1 は常に負であり、また autonomous 領域にあるので $-B \lesssim U_1$ 。従ってこれは、ドメイン上で、第4象限の右端を上から下に移動することに対応する。

次に、 e では $\vartheta_1 = 3\pi/2$ となる。これを契機として $d \rightarrow e \rightarrow f$ で U_1 の符号が負から正に変化する。この動作の際、 $\pi/2 < \vartheta_0 < \vartheta_h$ であるから、 U_0 は常に負であり、上と同様にして $-B \lesssim U_0$ 。従ってこれは、ドメイン上で、第4象限の下端を右から左に移動することに対応する。

b から f に移るに従い、 $\vartheta\psi$ 平面上の軌道は双曲線型特異点から遠ざかり、その影響が順に薄れていく。これは xy 平面上の様子にも反映し、弧の大きさが順に小さくなり、より autonomous 領域にとどまる性質が強くなっている。

また xy 平面上の弧の終点が、順に原点に近づいている様子が分かる。これは f と次にみる g との間で、原点との衝突があることを意味し、弧のタイプが一連の (+-) から再び (++) に戻ることを示唆している。

g : $\vartheta_h < \vartheta_0 < \pi$ であるこの弧は、再び $\psi_1 = 0$ となりタイプは (++) となる。

$\vartheta_h < \vartheta_0$, $\vartheta_1 < 3\pi/2$ であり U_0, U_1 はともに負となることから、ドメイン上で弧の位置は第1象限左上隅となる。 f

では弧の位置は第4象限の左下隅であったが、そこから (g に移る際に) 対極のこの位置までジャンプする。

これで autonomous 領域において、 ϑ_0 を $(0, \pi)$ の間で動かす旅が終了する。

h : この図は楕円型特異点に支配される x 軸に沿う弧の一例である。これはこれまでの autonomous 領域における旅には属さない。弧の始点は非 autonomous 領域にとる。 $\vartheta\psi$ 平面上では $(\vartheta, \psi) = (\pi, 0)$ の楕円型特異点の周りで運動している。興味深いのは、この弧のドメイン上の位置で、第1象限の境界曲線の上に位置していることである。 a や g の弧は、弧の位置が同じ境界曲線上にあるとも見なせる。これらはともに x 軸に沿う弧である。この h の弧も、これと共通している。

7.1 数値計算によるヴィリアル面の構成

最後に、 U_0, U_1 のドメイン上にヴィリアル R を描く。これが、ドーム型の滑らかな曲面で、真ん中で最大値を持つことが第2節の定理の主張の一部分である。

これで、定理の証明の武器がすべて整った。

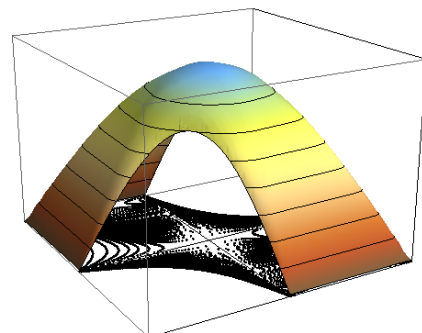
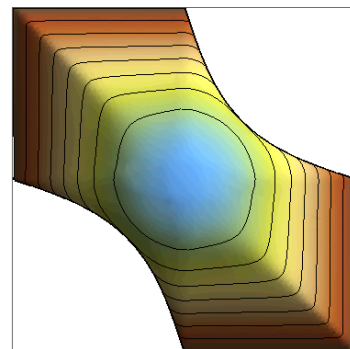


図 18 ドメイン上のヴィリアル R. 高さは (55) で求めた $2\pi\sqrt{\nu}$ である。 (X_0, U_0) のグリッドから (X_1, U_1) と R を積分で求め、最後に (U_0, U_1) 上のデータとして再収約したものである。

8 再びAKP軌道の存在定理: その証明

AKP 軌道分析の長い旅を漸く終えて、いよいよ、第 2 節で紹介した定理の証明にはいる。証明すべきは、

$$\mathcal{R}_{(a_0, \dots, a_n)}(U_0, \dots, U_n) \equiv R((U_0, U_1)_{(a_0, a_1)}) + \dots + R((U_{n-1}, U_n)_{(a_{n-1}, a_n)})$$

が、その変数 $(U_0, U_1, \dots, U_{n-1})$ の定義域上で最大値を持つ、ということであるが、ここまでの議論で、単一の弧 $(U_0, U_1)_{(a_0, a_1)}$ に対するヴィリアル関数 R の振る舞いは解決している。そこで、まず複合弧の引数 $(U_0, U_1, \dots, U_{n-1})$ のドメイン¹⁵を確定しよう。このとき注意すべきなのは、弧 $(U_0, U_1)_{(+, -)}$ のドメインは、 $U_0 U_1$ 平面の正方形領域全体 $-\sqrt{\mu\pi}/2 < U_i < \sqrt{\mu\pi}/2$ であるが、弧 $(U_0, U_1)_{(+, +)}$ のドメインは $U_0 U_1$ 平面の正方形領域の中で一部分の三角型領域に限定されているということである (小節 6.2.1, 及び 6.4.2 参照。) そこで、複合弧の変数 (U_1, \dots, U_{n-1}) の存在領域は、区間 $I \equiv (-\sqrt{\mu\pi}/2, \sqrt{\mu\pi}/2)$ の直積 I^{n-1} の部分集合のドメインに限られる¹⁶。このドメインを扱うには、図のような基本的ドメイン W_1, W_2, W_3 の直積 $(W_2 \otimes W_1 \otimes W_3 \otimes \dots)$ などとしてとらえるのがいい。ここで W_j は、タイプが $(a_{i-1} \neq a_i = a_{i+1} = \dots = a_{i+j-1} \neq a_{i+j})$ の複合弧の変数 (U_i, \dots, U_{i+j-1}) のドメインである。一般性を失わずに $a_{i-1} = a_{i+1} = -1, a_i = a_{i+1} = \dots = a_{i+j-1} = 1$ として良い。図 19 ではこれを仮定し、各 (U_i, U_{i+1}) の正方形領域に、それぞれ当該のヴィリアル $R(U_i, U_{i+1})$ を最大にする部分に大きな丸印をつけている。順に説明すると、

W_1 : タイプが $a_{i-1} \neq a_i \neq a_{i+1}$ の複合弧の変数 U_i の動く 1 次元ドメインである。これは制限を全く受けず区間 I そのもの

W_2 : $(a_{i-1} \neq a_i = a_{i+1} \neq a_{i+2})$ の複合弧の変数 (U_i, U_{i+1}) の動く 2 次元ドメインである。

W_3 : $(a_{i-1} \neq a_i = a_{i+1} = a_{i+2} \neq a_{i+3})$ の複合弧の変数 (U_i, U_{i+1}, U_{i+2}) の動く 3 次元ドメインである。

このように高次元のドメインが順に定義される。図 19 で縦横の棹状の線分で示したのが、順にドメイン W_1, W_2, W_3, W_4 で動く変数 $U_i, (U_i, U_{i+1}), (U_i, U_{i+1}, U_{i+2}), (U_i, U_{i+1}, U_{i+2}, U_{i+3})$ である。念のため、ドメイン W_3 をモンテカルロ法のイベント生成で作った図 20 に示す。 \mathcal{R} の

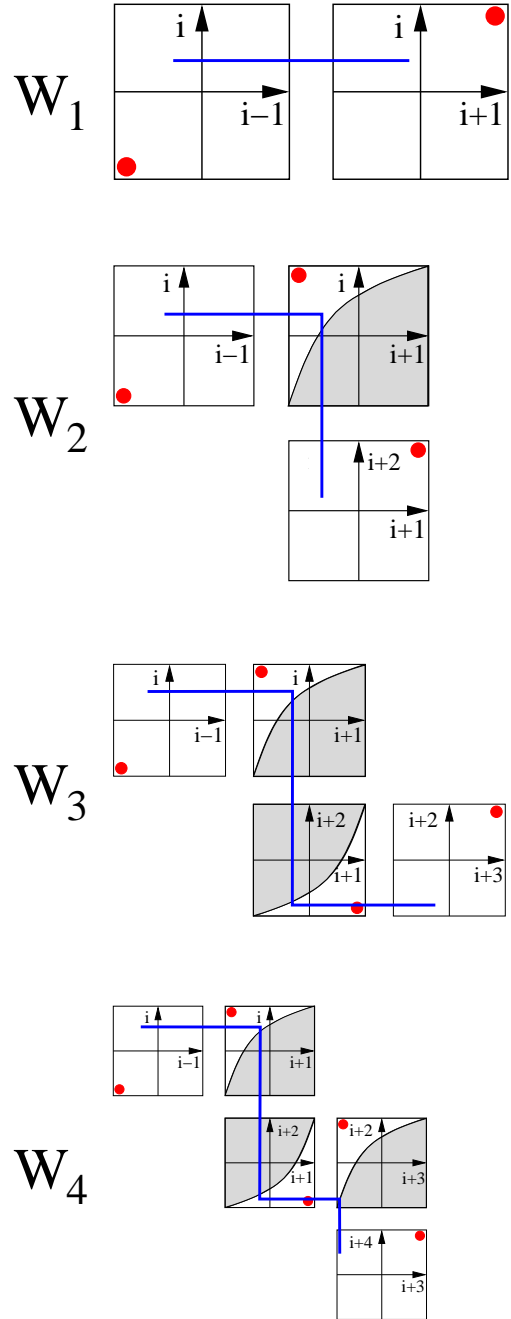


図 19

¹⁵ 関数 \mathcal{R} に対しては確かに定義域だが、これは興味深い高次元の幾何物体であるので我々は [2] の用語でドメインと呼ぶ。もっとも domain は定義域に違いない。

¹⁶ 複合弧を連続な軌道に育てるべく接続するのは (U_1, \dots, U_{n-1}) による $n-1$ 個の接合手 (joint) である。

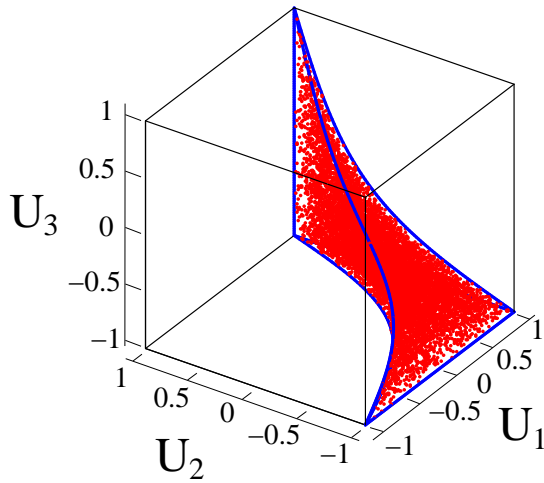


図20 3次元ドメイン W_3 . 各辺のサイズは1に規格化してある.

最大値の存在を示すには \mathcal{R} がそのドメイン (W_j の直積) に最大値を持つことをいえばよい. これは, 次の2つのことにもとづく.

1) 各ドメインにおいて \mathcal{R} は U_i について滑らかな関数である.

2) \mathcal{R} の微分をドメインの境界で考えると常に内部に向かって増える方向を少なくとも1つ持つ.

前者は, 微分方程式の解から計算される関数であることと数値計算でのチェックから (数学的に厳密な証明は難しいが) 正しいとする. そこで, 以下では後者の証明をみることにする. \mathcal{R} の引数のうち任意の U_i を選び, 他の運動量 $U_\ell (\ell \neq i)$ を止めて U_i だけを自由に動かしたとき, それによる \mathcal{R} の変化を調べよう. この U_i は W_j のいずれかに属している. そこで, j の可能なケースをしらみつぶしに調べていこう.

まずはじめに $U_i \in W_1$ のケースを考える. 議論を確定するため, X_i の符号を正にとる (この制約により一般性を失うことはない). すると W_1 の定義から, X_{i-1} , および X_{i+1} の符号はともに負と決まる. これは二つの弧, 弧 (U_{i-1}, U_i) , 弧 (U_i, U_{i+1}) がそれぞれ $(-+)$, $(+-)$ のドメインに属することと同値である. 図21にはこの二つのドメインを示した. 図21の a は弧 (U_{i-1}, U_i) を, また b は弧 (U_i, U_{i+1}) を表す. 図10でドメインを扱ったときと向きを変えているが, それぞれのドメインのタイプを反映して, 最大の R を示す

大きな丸印が適切な位置にあることに注意する.

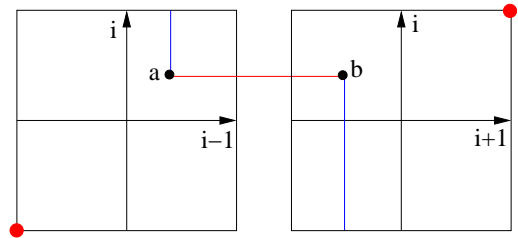


図21

ここで U_{i-1}, U_{i+1} を固定しよう. 図21では各ドメインに描かれている垂直な線を固定することに対応する. その上で U_i の動ける範囲を調べてみよう. 図21では U_i の値は二つのドメインを結ぶ水平な線で表される. U_i の値を変えることは, この水平な線を上下に動かすことに対応しているが, 図から明らかなように, この線の可動域は $(-\sqrt{\mu\pi}/2, \sqrt{\mu\pi}/2)$ である. つまり U_i は $-\sqrt{\mu\pi}/2 \leq U_i \leq \sqrt{\mu\pi}/2$ の間を自由に動くことができる.

ここからは U_i が両極限, すなわち $-\sqrt{\mu\pi}/2$, または $\sqrt{\mu\pi}/2$ に非常に近いときの考察を順にしていく. まずはじめに $U_i \rightarrow -\sqrt{\mu\pi}/2$ の場合 (以下では case A と呼ぶ) を考えよう. 図21ではこれは水平な線を下端まで下げることにあたる (図22).

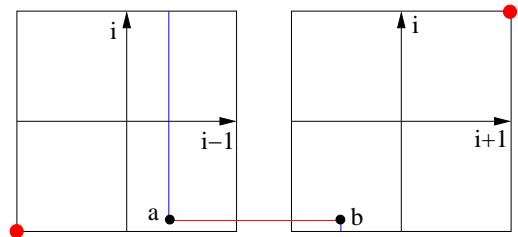


図22

このとき左側のドメインの (U_{i-1}, U_i) は最大の R を示す大きな丸印に近づく. 前に触れたようにドメインの境界のうち大きな丸印を含む境界で, 軌道は collision 軌道であった. そのため弧 (U_{i-1}, U_i) は U_i で collision を引き起こす. 逆に右側のドメインの (U_i, U_{i+1}) は大きな丸印から遠ざかる. これは弧 (U_i, U_{i+1}) が autonomous 領域にあることを意味する.

次に $U_i \rightarrow \sqrt{\mu\pi}/2$ の場合 (以下では case B と呼ぶ) を考える. これは図21において水平な線を上端の方へ動かすことにあたる (図23).

このとき, 今度は (U_{i-1}, U_i) が大きな丸印から遠ざかり (U_i, U_{i+1}) が大きな丸印に近づく. つまりこれは, 先ほ

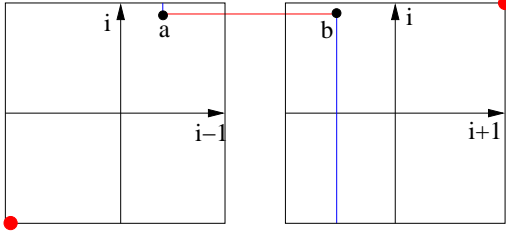


図 23

どとは逆で、弧 (U_{i-1}, U_i) が autonomous 領域に行き、弧 (U_i, U_{i+1}) が U_i で collision を引き起こすことを意味している。

以下では、上の極限的な二つのケース A, B を使いながら \mathcal{R} が U_i に対し極値を持つことを示そう。case A についての議論が同様に case B についても使えることから、前者に限って議論することにする。

さて、今考えている弧は 2 つあり、弧 (U_{i-1}, U_i) と弧 (U_i, U_{i+1}) である。それぞれについて $\frac{\partial R(U_{i-1}, U_i)}{\partial U_i}$ と $\frac{\partial R(U_i, U_{i+1})}{\partial U_i}$ を計算することを考えよう。二つの弧はそれぞれ $(-+)$, $(+-)$ というように互いに違うドメインに属しているため、本来 R の関数形はそれぞれの弧について異なるが、それを区別する添え字は省略することにする。

はじめに弧 (U_{i-1}, U_i) について考える。この弧は $(-+)$ のドメインに属している。 R の全微分式である式 (23)

$$\delta R = -X_1 \delta U_1 + X_0 \delta U_0 \quad (63)$$

により R の U_i での微分 (この場合これは終点 U_i での微分に相当する) は

$$\frac{\partial R(U_{i-1}, U_i)}{\partial U_i} = -X_i \quad (64)$$

となる。今考えている case A つまり $U_i \rightarrow -\sqrt{\mu}\pi/2$ では (64) の右辺にある X_i が

$$X_i = 2 \cos^2 \vartheta_v \quad (65)$$

となるのだが、このことを順を追って説明しよう。

前述のようにこの弧は collision を引き起こす。これはどこかで双曲線型特異点 に近づいていることを意味している。つまり $\vartheta_i \sim \vartheta_v, \pi + \vartheta_v, \dots$ のいずれかである。まずはこの分枝を一つに絞ろう。式 (26) から

$$U_i \approx \sqrt{\mu} \operatorname{sign}(\cos \vartheta_i) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{e^{X|\cos \vartheta_i|}} \right) \quad (66)$$

であるが、今は $U_i \simeq -\sqrt{\mu}\pi/2$ であることを考えると、 $\cos \vartheta_i = -1$ であることが必要であり、これから

$$\vartheta_i = \vartheta_v + \pi \quad (67)$$

であることが結論される。次に (25) から

$$X_i \approx 2 \cos \psi_i \cos^2 \vartheta_i \quad (68)$$

となるが、今考えている弧については $X_i > 0$ なので $\cos \psi_i > 0$ であり、 $\psi = 0$ となる。これは $\vartheta\psi$ 面上で表すと図 24 の二つの弧のうち右のものになる。

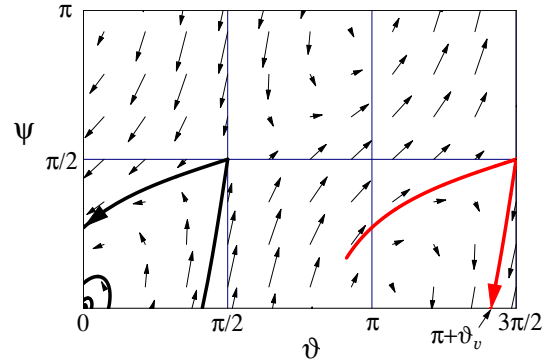


図 24

これと (67) で決定した ϑ_i とをあわせて $X_i = 2 \cos^2 \vartheta_v$ が結論される。これで (65) を説明することが出来た。

以上により、弧 (U_{i-1}, U_i) については

$$\frac{\partial R(U_{i-1}, U_i)}{\partial U_i} = -X_i = -2 \cos^2 \vartheta_v \quad (69)$$

であることがわかった。

ここまでは弧 (U_{i-1}, U_i) について考えてきたが、ここから弧 (U_i, U_{i+1}) に話を移そう。まずこの弧は $(+-)$ のドメインに属している。また扱うべきヴィリアルは $R(U_i, U_{i+1})$ である。弧 (U_i, U_{i+1}) にとって今考えている case A つまり $U_i \rightarrow -\sqrt{\mu}\pi/2$ という条件は、弧の始点についての条件である。前に議論したとおり、始点の運動量がこのような値をとる軌道について、 ϑ の初期値は $\vartheta_0 = \pi - \vartheta_c$ である。この弧については $X_0 > 0$ なので $\psi_0 = 0$ であり、再び (25) を用いることで $X_i = 2 \cos^2 \vartheta_c$ とわかる。(64) と同様の式として (ただし今度は U_i での微分が始点での微分と見なされることに注意して)

$$\frac{\partial R(U_i, U_{i+1})}{\partial U_i} = X_i \quad (70)$$

であるから、弧 (U_i, U_{i+1}) については

$$\frac{\partial R(U_i, U_{i+1})}{\partial U_i} = X_i = 2 \cos^2 \vartheta_c \quad (71)$$

であることがわかる。

以上で2つの弧 (U_{i-1}, U_i) , 弧 (U_i, U_{i+1}) それぞれについて、 $\partial R/\partial U_i$ の計算が完了した。結果は (69) および (71) である。もっとも知りたかった \mathcal{R} の U_i についての微分は、

$$\mathcal{R} = \dots + R(U_{i-1}, U_i) + R(U_i, U_{i+1}) + \dots \quad (72)$$

であることを考えると、(69) と (71) をあわせることで直ちに得られ以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial U_i} &= \frac{\partial R(U_{i-1}, U_i)}{\partial U_i} + \frac{\partial R(U_i, U_{i+1})}{\partial U_i} \\ &= -2 \cos^2 \vartheta_v + 2 \cos^2 \vartheta_c \end{aligned} \quad (73)$$

前に議論したように $\vartheta_c < \vartheta_v$ であるから、

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial U_i} > 0, \quad (U_i \text{ の下限において}) \quad (74)$$

となる。これと同様の議論により case B ($U_i \rightarrow \sqrt{\mu\pi}/2$) については

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial U_i} < 0, \quad (U_i \text{ の上限において}) \quad (75)$$

であることが確かめられる。

上の二つの式 (74) および (75) により \mathcal{R} が U_i の関数として極値を持つことは次のようにしてわかる。まず (74) から、 U_i の下限において U_i を増加させると、 \mathcal{R} も増加することがわかる。次に (75) から U_i の上限においては U_i を増加させると、今度は \mathcal{R} が減少することがわかる。この証明のはじめに仮定したように \mathcal{R} はなめらかな関数であるとすれば、 \mathcal{R} は U_i の下限から増加し始め、やがての U_i 上限ではすでに減少の最中でなくてはならない (図 25)。

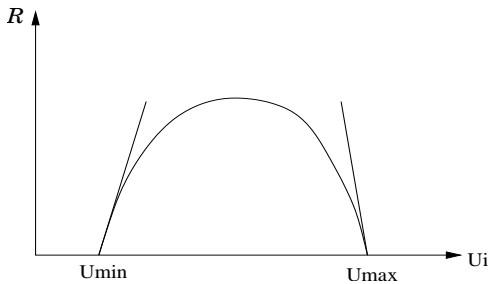


図 25

これを満足するには U_i が下限から上限に至るまでの間に \mathcal{R} が極値をとる必要があることは明らかである。

さて、ここまで $U_i \in W_1$ のケースを考えてきたわけだが、ここからは U_i が W_2, W_3, \dots のいずれかに含まれる場合を考察しよう。ここでも議論を確定させるために、一般性を失うことなく $X_i > 0$ とする。 W_2, W_3, \dots ではその定義から X_i と X_{i-1} とは異符号、 X_i と X_{i+1} とは同符号であるから、いまの場合は $X_{i-1} < 0, X_{i+1} > 0$ となる。つまり二つの弧、弧 (U_{i-1}, U_i) および弧 (U_i, U_{i+1}) はそれぞれ $(-+), (++)$ のドメインに属している。図 26 はそれぞれのドメインを表示したものである。

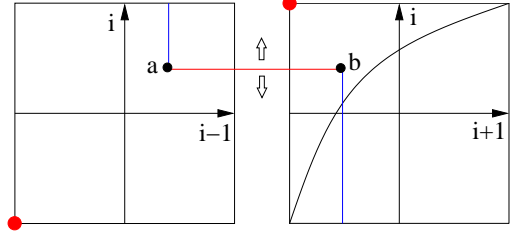


図 26

図 21 の時と同様に a は弧 (U_{i-1}, U_i) を、また b は弧 (U_i, U_{i+1}) を表す。 W_1 のケースで行ったのと同様に U_{i-1}, U_{i+1} を固定し U_i を動かすことを考えその可動域を調べることにする。まずはその下限をみることにしよう。図 26 において、 U_i の値を表す水平な線分 ab を下げていくとやがて端点 b が境界の曲線にぶつかる (図 27)。

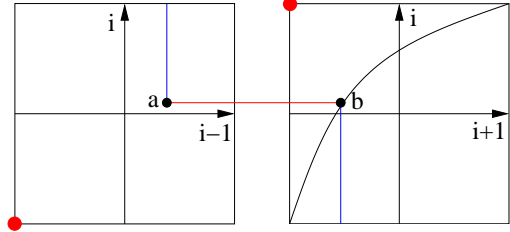


図 27

U_i はこの値より小さくすることは出来ない。つまり $(++)$ のドメインでは U_i の値の下限が

$$U_{i+1} < g(U_i) \quad (76)$$

の条件で決まっているわけである。この下限で弧 (U_i, U_{i+1}) を考えることにする。図 27 から b が境界曲線のごく近くにいることがわかる。これは弧 (U_i, U_{i+1}) が x 軸に沿った弧であることを意味している。そのためこの弧に沿っては近似的に $y = 0, v = 0$ と考えることが出来る。この近似をエネルギー保存の式に適用すると

$$\frac{u^2}{2\mu} - \frac{1}{|x|} = -\frac{1}{2} \quad (77)$$

となり, X と x, u の関係式を用いると

$$X = x \left(1 + \frac{u^2}{\mu} \right) = 2 \quad (78)$$

を得る. つまり x 軸に沿っている弧 (U_i, U_{i+1}) については, その弧に沿っていつでも $X = 2$ と見なして良いことになる. そして弧 (U_i, U_{i+1}) の始点もこの例外ではなく, $X_i = 2$ となる. これと (70) により, U_i の下限において

$$\frac{\partial R(U_i, U_{i+1})}{\partial U_i} = X_i = 2 \quad (79)$$

が成り立つ.

一方, 弧 (U_{i-1}, U_i) は $(-+)$ タイプであり, 力学的な制約を持たない. あえて言えば, この弧が $(-+)$ タイプであることから $X_i > 0$ (正確には $0 < X_i < 2$) のみが条件である. 従って (U_{i-1}, U_i) が任意で, (64) により $(-+)$ タイプの任意の弧 について

$$-2 < \frac{\partial R(U_{i-1}, U_i)}{\partial U_i} < 0 \quad (80)$$

が成立する.

さて (79), (80) により U_i の下限における R の U_i についての微分値が各ドメインごとに求まった. この (79), (80) を足しあわせることにより,

$$\frac{\partial R}{\partial U_i} > 0 \quad (81)$$

が U_{i-1}, U_{i+1} を止めたときの U_i の下限で成り立つことがわかる.

ここまででは下限に焦点を当てて議論してきた. 一方の U_i の上限では $U_i = \sqrt{\mu}\pi/2$ である. このとき大きな丸印の位置を見ればわかるように (図 28), 弧 (U_{i-1}, U_i) は完全に autonomous 領域にいて弧 (U_i, U_{i+1}) は U_i で collision している. これは前に $U_i \in W_1$ の場合で U_i の上限を議論したとき (case B) と同様であり, (75) より U_i の上限では

$$\frac{\partial R}{\partial U_i} < 0, \quad (U_i \text{ の上限において}) \quad (82)$$

が起こっている. [Q.E.D]

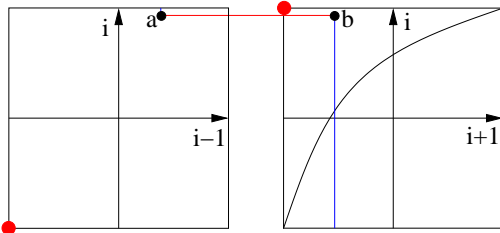


図 28

これで, Gutzwiller による証明が終わった. ここで, Devaney による力学系の立場からの証明 [18] のあらましを見ておこう.

1) 衝突多様体 (Collision Manifold) を導入する. それには, まず, エネルギー e のもとの 3 変数 r, ϑ, ψ の発展方程式¹⁷で, 変数変換 $dt' = r^{-3/2} \sqrt{2(1+re)} dt$ を行う. これは原点近傍 ($r \approx 0$) を拡大された時間スケールで記述するので系の発展を 'slow down' させる. そのおかげで (r, ϑ, ψ) の領域 $[0, -1/e] \times S^1 \times S^1$ 上のベクトル場 $(dr/dt', d\vartheta/dt', d\psi/dt')$ では $r = 0$ での発散は除去されている. 境界 $\{0\} \times S^1 \times S^1$ が衝突多様体 Λ であり, $r = 0$ においた $(d\vartheta/dt', d\psi/dt')$ が Λ 上のベクトル場を与える. このベクトル場は (20) の右辺と同じであるが Gutzwiller での autonomous 極限が, $r = 0$ と限定する操作にきれいに置き換えられ, 境界 $r = 0$ のベクトル場と $r > 0$ のベクトル場とが連続的につながっている.

2) 衝突軌道と Λ 上の流れの均衡点 (特異点) の関係を押さえる. 衝突多様体から出発して衝突多様体に戻る軌道 (bi-collision orbit) の中で正 (負) の x 軸に沿って往復するものを γ_1^\pm , 正 (負) の y 軸に沿って往復するものを γ_2^\pm と記す. Λ 上の均衡点は (本稿の autonomous 近似でのベクトル場からもわかるように) 8 個ある. その中の 4 個 ($\vartheta = 0, \psi = 0$), (π, π) , $(0, \pi)$, $(\pi, 0)$ が双曲型, 他の 4 個が楕円型で, $(-\pi/2, -\pi/2)$, $(\pi/2, \pi/2)$ が吸い込み, $(-\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, -\pi/2)$ が湧き出しである. 各均衡点の特性指数解析から簡単に次が解る:

$$\begin{aligned} \gamma_1^+ &\subset W^u(0, 0) \cap W^s(0, \pi), \\ \gamma_1^- &\subset W^u(\pi, \pi) \cap W^s(\pi, 0), \\ \gamma_2^+ &= W^u(\pi/2, \pi/2) \cap W^s(\pi/2, -\pi/2), \\ \gamma_2^- &= W^u(-\pi/2, -\pi/2) \cap W^s(-\pi/2, \pi/2) \end{aligned}$$

但し, $W^{s,u}$ は各均衡点の安定 (不安定) 多様体を示す.

3) 第 1 式で $(0, 0)$ は Λ 上で鞍点だから Λ に接する方向に不安定方向があり, Λ から離れる向きも調べると不安定である. 従って, $W^u(0, 0)$ は 2 次元の多様体である. 同様に $W^s(0, \pi)$ も 2 次元である. これら 2 次元の不安定多様体, 安定多様体は γ_1^\pm に沿って横断的に交叉することが証明される. (第 2 式も同様.) すなわち, γ_1^\pm は, 横断的なヘテロクリニック解である.

¹⁷ これは, 本稿の (16) と同じものだが, Devaney では, 記法が Gutzwiller と変わって, 'heavy axis' が $(x$ 軸の代わりに) y 軸に, ϑ が位置ベクトルの角度に, ψ が運動量ベクトルの角度になっていることに注意を要する. また, 質量比は $(\mu^2$ でなく) 単に μ と記す. この手稿でこの [18] の紹介の部分に限って, 記法は上記の Devaney のものを用いる

4) 第3式で $(\pi/2, \pi/2)$ は Λ 上で吸い込みで Λ から離れる向きのみ不安定である。従って、 $W^u(\pi/2, \pi/2)$ は1次元、同様に $W^s(\pi/2, -\pi/2)$ も1次元である。これらの交わりが γ_2^\pm である。(第4式も同様。) γ_2^\pm の近傍の軌道は螺旋的な振る舞いを持つ。

5) 上記のことから、AKPの流れの中には、馬蹄形写像が組み込まれていることが示される。すなわち、 γ_1^\pm に横断的に小さな四角 E を置く。複数の関所を AKP の流れ中に適切に設定する。 E の点でそこからの軌道がそれらの関所を順にくぐり抜けて、 E に戻ってこられるようなものに着目し、そのような点の全体からなる E の部分集合を Σ_1 とする。また、このような軌道の与える $\Sigma_1 \rightarrow E$ のポアンカレ写像を F とすると、この写像 F が馬蹄形写像の公理を満たしている。そこで、

$$\Sigma = \overline{\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} F^n(\Sigma_1)}$$

はカントール集合で、 $F: \Sigma \rightarrow \Sigma$ は、ベルヌーイ・シフト写像と位相共役である。

Devaney の証明は、大変、厳密にできている。定理の適用範囲が、質量比 $> 9/8$ であることが明確にされている。Gutzwiller が autonomous 近似で見えていくところを、境界での衝突多様体の上の流れと、バルクの流れを対応させながら議論を進める。おそらく、AKP のエルゴード性の議論には一つの堅固な基礎を与えているものであろう。一方で、Gutzwiller のアプローチは荒削りで、その論文 [2] に自らも書いているとおり厳密な証明ではないかもしれないが、非常に端的に AKP の本質をえぐり出しているように感ぜられる。

結語

本稿では、Martin Gutzwiller の論文 [2] をたどりつつ、我々の視点から、有用な新しい図面を豊富に入れ、整理・解説を行った。具体的に、我々が努力を傾注した点をリストする。

(1) 弧の分類の際、論文 [2] では初期値 ϑ_0 を変化させドメイン上での位置を計算する。小節 6.2 では、図 7, 8, 9 と表 2 により、臨界角度を境に輻輳する物理の変化を明瞭にした。

(2) 小節 6.3 の衝突軌道について全体をスキーム化し、その中に論文 [2] の式をできるだけ変えずに、その役割が明確になるように整理して組み込む努力をした。さらに、注意を要する双曲線型特異点 H_v 近傍での χ の変化を数値計算で

確かめ、図 14, 15, 16 に示した。

(3) 弧を、初期値 (X_0, U_0) について求めることは容易だが、我々は多数の弧 (約 8 万個) の大規模なデータを作成し、さらに (U_0, U_1) について再整理してヴィリアル R の曲面を構成し、図 18 に示した。この結果は Gutzwiller の解析計算を裏付け、実際に複合弧のヴィリアル R がドメイン内に極大値を持つことの試算を可能にする。

(4) 定理証明の決め手の式 (65), (71) の導出は、非自明でありながら論文 [2] では省略されている。我々は、導出過程を細かく明示した。(弧の分類の部分は、この導出に則するよう工夫した。)

(5) 高次元ドメインを、モンテカルロ法で視覚化した。

(6) 図 11, 12, 13 により、ヴィリアル R の被積分関数が当該の積分領域に極を持たないことを示した。

物理内容について、オリジナリティのクレームは一切しない。我々が読み解いた記録を多少の工夫とともにここに記し、AKP を視野に入れて量子カオスの研究を目指すコミュニティに提供するのが本稿の目的である。

今からちょうど 30 年まえに書かれた古典的至宝である Gutzwiller の論文 [2] が、輝かしい道しるべとなるのに我々の努力がもし多少でも役立てば、我々の望外の幸せである。もしも、本稿に何らかの Error が入り込んだとすれば、我々の責任に帰するものである。

謝辞

我々は、この手稿を簡単な英語の内容説明を添えて、目を通していただけるように Gutzwiller 氏にそのまま送り、このように原論文 [2] の引用が多く、(あのように立派な論文に対して) あるいはお節介に余計なことを付け加えているものを、刊行してよろしいかとおたずねした。ご返事は、驚くほど謙虚で暖かいものであり、疑問へのご返事、参考文献の教示に加えて、邦文なので内容を良く理解はできないが、自分は、'a great admirer of pictures' で、物理の上では数式よりも図面を大切に思う。あなた方が多くの図面を用意したことは、良い判断だった、刊行を期待して待つ、とってください。Gutzwiller 氏の寛容に深く感謝をする。

参考文献

- [1] M. C. Gutzwiller, J. Math. Phys. **12**, 343 (1971).
- [2] M. C. Gutzwiller, J. Math. Phys. **18**, 806 (1977).
- [3] M. C. Gutzwiller, J. Math. Phys. **14**, 139 (1973).
- [4] Mathematica 5.2 and 6, <http://www.wolfram.co.jp/> S. Wolfram, *The Mathematica Book*, Fifth Edition,

Wolfram Research Media, 2003.

Maple 11, www.maplesoft.com.

D. Richards, *Advanced Mathematical Methods with Maple*, Cambridge University Press, 2002.

- [5] 例えば, R. P. Taylor, Phys. Rev. Lett. **78**, 1952, 1997; Phys. Rev. **B73**, 235321 (2006).
- [6] 例えば, C. Monroe, W. Swann, H. Robinson, and C. Wieman, Phys. Rev. Lett. **65**, 1571, (1990). 一つの準備例として, 立川真樹, 小田島仁司, 島田徳三, 原子光学を用いた量子カオスの実験研究, 科学研究費補助金研究, 基盤研究 (C) 2004-2006.
- [7] S. L. Cornish, S. T. Thompson and C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **96**, 170401 (2006)
A. D. Martin, C. S. Adams, S. A. Gardiner, Phys. Rev. Lett. **98**, 020402 (2007).
M. Uchiyama, J. Ieda and M. Wadati, Multicomponent Bright Solitons in $F = 2$ Spinor Bose-Einstein Condensates, cond-mat/0703805v3, 2007. (家田淳一氏の懇切なセミナー講演に感謝する。)
- [8] A. Einstein, Verh. Dtsch. Phys. Ges. **19**, 82, 1917.
- [9] 中村勝弘, 量子物理学におけるカオス, 岩波 (1998). また, 同著者による, カオスと量子物理学, サイエンス社 (1997) に興味深い議論がある。
- [10] 周期軌道理論と Riemann ゼータ函数の対応は, 例えば, O. Bohigas, Nucl. Phys. **A751**, 343c-372c (2005) のページ 356c の対応テーブルを参照。
- [11] M. C. Gutzwiller, Physica **D 5**, 183 (1982).
- [12] M. C. Gutzwiller and B. B. Mandelbrot, Phys. Rev. Lett. **60**, 673 (1988).
- [13] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer (1990). [16]
- [14] M. C. Gutzwiller, in *Proceedings of Classical Mechanics and Dynamical Systems*, Marcel Dekker, Inc., (1981)
- [15] R. L. Devaney, Ibid.
- [16] Gutzwiller 氏に私信で確認していただいた。感謝する。
- [17] R. L. Devaney, J. Diff. Equ. **29**, 253 (1978).
- [18] R. L. Devaney, Inventiones Math. **45**, 221 (1978).
- [19] R. L. Devaney, Inventiones Mathematicae **60**, 249 (1980).
- [20] R. L. Devaney, Comm. Math. Phys. **80**, 465 (1981).
- [21] R. L. Devaney, Celestial Mechanics **28**, 25 (1982).