



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Título

Caminos y ciclos hamiltonianos en torneos

Realizado por:
María Teresa García-Miña Hernández

Supervisado por:
Desamparados Fernández Ternero

17 de Junio de 2019

Índice general

1. Preliminares	5
1.1. Caminos orientados en torneos	6
1.2. Ciclos orientados en torneos	9
2. Caminos y ciclos en torneos	12
3. Periodos, bloques similares y clones de vértices	15
4. Caminos que generan un ciclo orientado	24
5. Permutaciones alternadas y caminos antidirigidos	31
A. Paridad de caminos y ciclos en torneos	35

Resumen / Abstract

En esta memoria trabajaremos con Torneos, centrándonos en un estudio de los caminos y ciclos Hamiltonianos en Torneos. La noción de torneo es relativamente nueva, comienzos del siglo *XX*, si la comparamos con otras áreas de la Teoría de Grafos.

En este trabajo se presentan nociones y resultados que nos conducen a relacionar las paridades del número de caminos Hamiltonianos antidirigidos y del número de ciclos Hamiltonianos dirigidos en un torneo dado.

También se dan algunas propiedades para torneos transitivos.

In this memory we will work with Tournaments, focusing on a study of Hamiltonian paths and cycles in Tournaments. The notion of tournament is relatively new, early *XX* century, if we compare it with other areas of Graph Theory.

In this report we present notions and results that lead us to relate the parities of the number of antirected Hamiltonian paths and the number of Hamiltonian cycles on a given tournament.

Some properties are also given for transitive tournaments.

Introducción

En 1966 apareció un estudio [5] por parte de F. Harary y L. Moser, en el cual se estudian los torneos “round robin”, en dichos torneos los jugadores o equipos participan en un juego que no puede terminar en empate y en el que todos los participantes juegan entre sí exactamente una vez. Así, el término Torneo se debe al origen de la noción.

Existe una gran cantidad de fenómenos empíricos con estructuras asimétricas y completas, que pueden representarse gráficamente como torneos. Podemos verlo en experimentos de comparación pareada, donde, por ejemplo, se quiere saber las preferencias de una persona sobre cierto tema de forma que para cada par de datos indique cuál prefiere. La estructura de sus preferencias declaradas puede ser representada por un torneo en el que los vértices representan los datos y las aristas dirigidas la elección. También en estudios sobre dominación en algunas sociedades de animales, de modo que para cada par de individuos, uno domina al otro. En votación por mayoría, el resultado de los votos puede ser representado por un digrafo cuyos vértices son grupos políticos o partidos y cuyas aristas dirigidas indican que partido derrotó al otro.

Los primeros resultados sobre torneos estuvieron motivados por este tipo de aplicaciones, de naturaleza estadística. En las últimas décadas se ha centrado la atención en la estructura combinatoria de los torneos, dando lugar a un área diferenciada dentro de la Teoría de Grafos.

En 1965, F. Harary, R.Z. Norman y D. Cartwright presentaron, en una monografía dedicada a grafos dirigidos [6], un estudio introductorio de los torneos desde el punto de vista de la teoría de grafos, distanciándose de sus aplicaciones. J.W. Moon, en [8], reunió la mayoría de resultados que existían sobre torneos hasta 1968. La paridad del número de caminos Hamiltonianos y torneos transitivos, son dos aspectos sobre torneos que se encuentran en su libro y que trataremos en este trabajo.

Más concretamente, nos centraremos en caminos y ciclos Hamiltonianos en torneos generales, aunque también mostraremos algunos resultados para el tipo particular de torneos transitivos. Estos conceptos surgen en 1934 con el Teorema de Redei [8], que es un resultado relativo a la paridad de caminos Hamiltonianos en torneos.

Comenzaremos viendo, en el **Capítulo 1**, una serie de conceptos básicos de Teoría de Grafos, con los que trabajaremos posteriormente. Continuaremos con los conceptos de camino orientado y camino simétrico, mostrando algunas propiedades sencillas de éstos. Análogamente, procederemos con los conceptos de ciclos orientados y ciclos simétricos.

Uno de los resultados más relevantes en los que se apoya este trabajo es el Teorema 2.1, que establece que la paridad del número de caminos no simétricos Hamiltonianos no depende del torneo considerado. Este resultado es una versión más débil del resultado probado por R. Forcade [2], cuya demostración se presenta en el **Apéndice A**. Además, en el **Capítulo 2**, se recogen una serie de proposiciones relativas a las nociones de conjunto de caminos/ciclos orientados de un cierto tipo, que nos serán de gran utilidad para capítulos posteriores.

En el **Capítulo 3** se da una caracterización de caminos Hamiltonianos que generan el mismo ciclo (Lema 3.13). Para simplificar la demostración de este resultado hacemos uso de las definiciones auxiliares de periodos, bloques similares y clones de vértices, para las que se prueban varios resultados previos al Lema 3.13.

Nuestro objetivo en el **Capítulo 4** es relacionar la paridad del número de caminos Hamiltonianos y el número de ciclos Hamiltonianos generados por ese camino, lo cual se establece en el Teorema 4.5. Este teorema es fundamental para la demostración del resultado principal de esta memoria. También se recogen en este capítulo algunas propiedades para torneos transitivos.

Finalmente, en el **Capítulo 5** se demuestra que coinciden las paridades del número de caminos Hamiltonianos antidirigidos y del número de ciclos Hamiltonianos dirigidos sobre un torneo. Este es el principal resultado de este trabajo y su demostración se apoya en resultados de capítulos anteriores y en la noción de permutación alternada.

Capítulo 1

Preliminares

Comenzaremos recordando algunas definiciones básicas de Teoría de Grafos. Para completar las nociones y propiedades se puede consultar [3] y para profundizar sobre torneos se puede consultar [8].

Se denomina **grafo** a todo par $G = (V, E)$ tal que $V \neq \emptyset$ es un conjunto de elementos llamados vértices, puntos o nodos, y E es un conjunto, que puede ser vacío, de parejas no ordenadas de elementos de V , llamadas aristas.

Un **digrafo** es aquel al que se le ha dado una orientación a cada una de sus aristas, es decir, cada arista se considera un par ordenado.

Un **camino** es una secuencia finita de vértices, v_1, v_2, \dots, v_n , de modo que cada vértice v_i es adyacente al siguiente v_{i+1} .

Un **camino** v_1, v_2, \dots, v_n se dice **cerrado** si $v_1 = v_n$, es decir, comienza y termina en el mismo vértice.

La **longitud de un camino** es el número de vértices que posee menos uno.

Un **arco** es un camino en el que todos sus vértices son distintos.

Un **ciclo** es un camino cerrado, que es un arco, salvo que el primer y último vértice coinciden.

Un **camino dirigido** es un camino con todas las aristas orientadas en la misma dirección. Si, además, el último vértice del camino coincide con el primero, y la arista que los une tiene la misma orientación que el resto, entonces es un **ciclo dirigido**. Si este camino dirigido no está contenido en ningún otro, a éste se le llama **camino dirigido maximal**.

Un **camino** se dice **Hamiltoniano** si contiene a todos los vértices del grafo una sola vez, salvo si el primer vértice coincide con el último, en cuyo caso tendremos un **ciclo Hamiltoniano**.

Un **n-torneo** T es un digrafo completo con n vértices.

Algunos ejemplos de torneos se muestran en la siguiente figura:

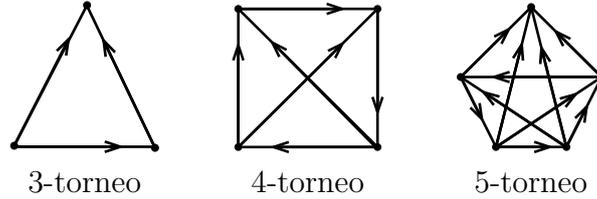


Figura 1.1: Ejemplos de torneos de orden pequeño.

1.1. Caminos orientados en torneos

En esta sección veremos varias definiciones sobre caminos orientados.

Definición 1.1 Dado un digrafo, un **camino orientado** P se dice que es de tipo $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, $s \geq 1$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \cdot \alpha_{i+1} < 0$, $\forall i = 1, \dots, s-1$ (si $s \geq 2$), si P está formado por s bloques (es decir, subcaminos dirigidos maximales) I_1, I_2, \dots, I_s tal que $\text{long}(I_i) = |\alpha_i|$.

Ejemplo 1.2 Vamos a dar un ejemplo de camino de tipo $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ con $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2$ y $\alpha_3 = 1$. Sea P el camino de la Figura 1.2, vemos que P está formado por los bloques I_1, I_2 e I_3 tales que

$$\text{long}(I_1) = \text{número de vértices que posee} - 1 = 1 = |\alpha_1|,$$

$$\text{long}(I_2) = 2 = |\alpha_2| \text{ y}$$

$$\text{long}(I_3) = 1 = |\alpha_3|.$$

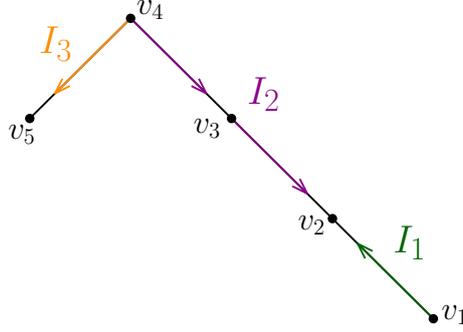


Figura 1.2: Camino orientado de tipo $P(1, -2, 1)$.

Sean x_i e y_i los extremos del bloque I_i , con $I_i \cap I_{i+1} = \{y_i\} = \{x_{i+1}\}$, que denotaremos por $\text{end}(I_i) = \{x_i, y_i\}$, entonces podemos escribir el camino orientado como $P = I_1 I_2 \dots I_s$.

Para $u, v \in I_i$, $I_i[u, v]$ es el subcamino de I_i con extremos u y v . Escogemos x_1 e y_1 tal que verifiquen la siguiente condición:

$$\alpha_1 > 0 \iff I_1 \text{ va de } x_1 \text{ a } y_1$$

Podemos probar, de forma más general, por inducción en i , que

$$\forall i = 1, \dots, s, \alpha_i > 0 \iff I_i \text{ va de } x_i \text{ a } y_i.$$

También es importante observar que dado un camino orientado P , una vez que escogemos el extremo x_1 , su tipo queda determinado de forma única. Así, cada camino tiene (a lo sumo) dos tipos posibles. Fijándonos en el ejemplo 1.2 los dos tipos serían $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y $P(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$ que se obtienen al considerar como vértice inicial v_1 y v_5 , respectivamente. Son iguales, pues P está formado por los bloques I_1, I_2, I_3 y $\alpha_1 = \alpha_3$.

Por comodidad, denotamos ε_s al conjunto de las s -tuplas $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z}^s$ tal que $\alpha_i \cdot \alpha_{i+1} < 0, \forall i = 1, \dots, s - 1$.

Denotemos por $\mathcal{T}_P(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ al conjunto de caminos del tipo $P(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ en un torneo T y por $f_T(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ al número de caminos de tipo $P(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ en T .

Ejemplo 1.3 Consideremos el 4-torneo de la Figura 1.1 y la 2-tupla $\alpha = (1, -1)$. Tenemos que $\mathcal{T}_P(\alpha) = \{P_1, P_2\}$ con $P_1 = I_1 I_2$ y $P_2 = I'_1 I'_2$. Luego, $f_T(\alpha) = 2$.

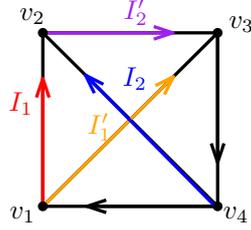


Figura 1.3: $\mathcal{T}_P(\alpha)$ y $f_T(\alpha)$, para $\alpha = (1, -1)$, en un 4-torneo.

Para cada tupla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z}^s$, podemos definir

$$-\alpha = (-\alpha_1, \dots, -\alpha_s) \text{ y } \bar{\alpha} = (\alpha_s, \alpha_{s-1}, \dots, \alpha_1).$$

Si $\alpha = -\bar{\alpha}$, entonces decimos que α es **simétrica**.

Definición 1.4 Un camino orientado se dice **simétrico** si es de tipo $P(\alpha)$ con α tupla simétrica.

Ejemplo 1.5 Consideremos el tipo $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ con $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1$ y $\alpha_4 = -1$. Observemos que

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1, -1, 1, -1) = \\ &= -\bar{\alpha} = (-\alpha_4, -\alpha_3, -\alpha_2, -\alpha_1) = (1, -1, 1, -1) \end{aligned}$$

Podemos extender la Definición 1.1 permitiendo que α_i tome el valor 0. Basta considerar

$$P(\alpha_1, \dots, \alpha_j, 0, \alpha_{j+2}, \dots, \alpha_s) = P(\alpha_1, \dots, \alpha_j + \alpha_{j+2}, \dots, \alpha_s)$$

donde α_j y α_{j+2} tienen el mismo signo,

$$P(0, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = P(\alpha_2, \dots, \alpha_s)$$

y

$$P(\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, 0) = P(\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}).$$

Esta extensión tiene un interés particular para algunos cálculos que haremos más adelante.

Definición 1.6 Un **camino dirigido** es un camino en el que todas las aristas están orientadas en la misma dirección.

Definición 1.7 Un **camino** en un grafo dirigido se dice **antidirigido** si para cada dos aristas adyacentes del camino éstas tienen orientaciones opuestas, es decir, si dos aristas consecutivas del camino no forman un camino dirigido.

Ejemplo 1.8 En la siguiente figura, podemos observar que el camino formado por $v_5v_4v_3v_2v_1$ es dirigido y $v_5v_1v_4v_2$ es antidirigido.

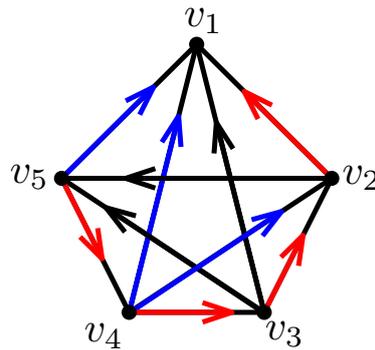


Figura 1.4: Camino dirigido y camino antidirigido.

1.2. Ciclos orientados en torneos

En esta sección se muestran para ciclos nociones análogas a las de la sección anterior.

Definición 1.9 Dado un grafo orientado, un **ciclo orientado** C se dice que es de tipo $C(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$; $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \cdot \alpha_{i+1} < 0$, $\forall i = 1, \dots, s - 1$ (cuando $s \geq 2$) y $\alpha_s \cdot \alpha_1 < 0$, si C está formado por s bloques I_1, \dots, I_s , con $\text{end}(I_i) = \{x_i, y_i\}$ (los extremos del bloque I_i), $\text{long}(I_i) = |\alpha_i|$ e $I_i \cap I_{i+1} = \{y_i\} = \{x_{i+1}\}$, $1 \leq i \leq s - 1$ e $I_s \cap I_1 = \{y_s\} = \{x_1\}$.

Ejemplo 1.10 Sea $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1$ y $\alpha_4 = -2$. Entonces en la Figura 1.5 tenemos un ciclo orientado de tipo $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

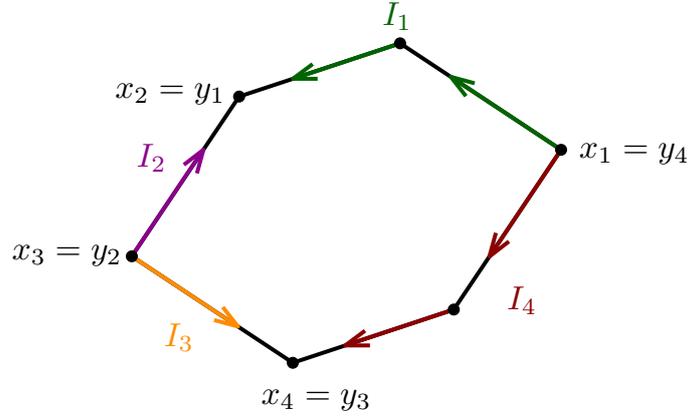


Figura 1.5: Ciclo orientado de tipo $C(2, -1, 1, -2)$.

También si imponemos la siguiente condición:

$$\alpha_1 > 0 \iff I_1 \text{ va de } x_1 \text{ a } y_1,$$

podemos probar que

$$\forall i = 1, \dots, s, \alpha_i > 0 \iff I_i \text{ va de } x_i \text{ a } y_i.$$

Podemos observar que, para un ciclo orientado C , s debe ser par, a menos que C sea un ciclo dirigido, en cuyo caso $s = 1$.

Denotemos por $\mathcal{T}_C(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ al conjunto de ciclos orientados de tipo $C(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ en un torneo T y por $g_T(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ al número de ciclos orientados de tipo $C(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ en T .

Ejemplo 1.11 Fijándonos de nuevo en el 4-torneo de la Figura 1.1, para $\alpha = (2, -1)$, obtenemos que $\mathcal{T}_C = \{C_1, C_2\}$, donde C_1 está formado por los bloques I_1 e I_2 y C_2 por I'_1 e I'_2 . Por lo que $g_T(\alpha) = 2$.

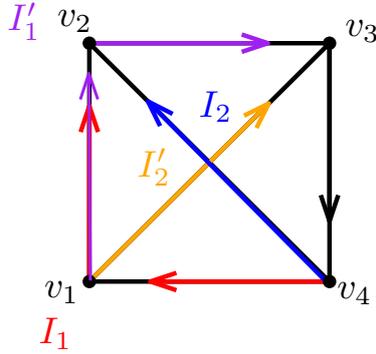


Figura 1.6: \mathcal{T}_C y g_T , para $\alpha = (2, -1)$, en un 4-torneo.

Definición 1.12 Un ciclo orientado C se dice **simétrico** si es de tipo $C(\alpha)$ para alguna s -tupla α simétrica.

También podemos permitir que α_i tome el valor 0 para ciclos, considerando

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s) = C(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s),$$

donde α_{i-1} y α_{i+1} tienen el mismo signo y, usando las propiedades anteriores,

$$C(0, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = C(\alpha_2 + \alpha_s, \alpha_3, \dots, \alpha_{s-1})$$

y

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, 0) = C(\alpha_1 + \alpha_{s-1}, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-2}).$$

Capítulo 2

Caminos y ciclos en torneos

La noción de camino simétrico que hemos visto en la Definición 1.4 fue introducida por R. Forcade en [2], donde probó que la paridad del número de caminos no simétricos Hamiltonianos de un cierto tipo no depende de la elección del torneo. Utilizaremos la siguiente versión de este resultado:

Teorema 2.1 *Para cualquier s -tupla $\alpha \in \mathbb{Z}^s$ no simétrica, y cualesquiera T y T' torneos con $n = \sum_{i=1}^s |\alpha_i| + 1$ vértices, se verifica que*

$$f_T(\alpha) \equiv f_{T'}(\alpha) \pmod{2}.$$

Los siguientes resultados muestran la relación entre dos tipos si los conjuntos de caminos/ciclos correspondientes coinciden.

Proposición 2.2 $\mathcal{T}_P(\alpha) = \mathcal{T}_P(\beta) \iff \alpha = \beta \text{ o } \alpha = -\bar{\beta}$.

Demostración:

Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \varepsilon_s$ y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_t) \in \varepsilon_t$. Para la condición necesaria, sea $P \in \mathcal{T}_P(\alpha) = \mathcal{T}_P(\beta)$; P es simultáneamente de tipo $P(\alpha)$ y $P(\beta)$. Ya que s y t representan el número de bloques en P , entonces $s = t$. Como P es de tipo $P(\alpha)$, entonces $P = I_1 I_2 \dots I_s$, donde $|I_i| = |\alpha_i|$, $\text{end}(I_i) = \{x_i, y_i\}$ y $\text{end}(P) = \{x_1, y_s\}$.

Análogamente, como P es de tipo $P(\beta)$, entonces $P = I'_1 I'_2 \dots I'_s$, donde $|I'_i| = |\beta_i|$, $\text{end}(I'_i) = \{x'_i, y'_i\}$ y $\text{end}(P) = \{x'_1, y'_s\}$.

Esto implica que $\{x_1, y_s\} = \{x'_1, y'_s\}$. Tenemos dos casos:

- Si $x_1 = x'_1$, entonces $y_s = y'_s$. Sean I_1 e I'_1 los únicos bloques que contienen a x_1 y x'_1 respectivamente, entonces $I_1 = I'_1$. Análogamente, $I_s = I'_s$. Además, $\{y_1\} = I_1 \cap I_2 = I'_1 \cap I_2$. Como I'_2 es el único bloque

que tiene algún vértice en común (solo uno) con I'_1 , entonces $I_2 = I'_2$ e $\{y_1\} = \{y'_1\}$. Procedemos de forma similar para probar que $I_i = I'_i$, $\forall i = 3, \dots, s-1$. Por lo tanto, $\alpha_i = \beta_i$, $\forall i = 1, \dots, s$. Luego, $\alpha = \beta$.

- Si $x_1 = y'_s$, entonces $x'_1 = y_s$. Esto implica que $I_1 = I'_s$ e $I_s = I'_1$. Obtenemos, de modo análogo, que $I_2 = I'_{s-1}, \dots, I_{s-1} = I'_2$. Por tanto, $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = (-\beta_s, \dots, -\beta_1)$. Luego, $\alpha = -\bar{\beta}$.

Para la condición suficiente, si $\alpha = \beta$, entonces el resultado es trivial. Supongamos que $\alpha = -\bar{\beta}$ y sea $P \in \mathcal{T}_P(\alpha)$ dado por $P = v_1 v_2 \dots v_n$. El camino $P' = v_n v_{n-1} \dots v_1$ es de tipo $P(-\alpha_s, \dots, -\alpha_1) = P(\beta)$ y se ve claramente que $P = P'$. Luego, P es también de tipo $P(\beta)$, lo cual prueba que $\mathcal{T}_P(\alpha) \subseteq \mathcal{T}_P(\beta)$. Análogamente, se tiene que $\mathcal{T}_P(\beta) \subseteq \mathcal{T}_P(\alpha)$, lo cual concluye nuestra prueba. ■

Lema 2.3 *Se verifica que:*

$$\mathcal{T}_C(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \mathcal{T}_C(\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}),$$

$$\forall 2 \leq i \leq s.$$

Observación 2.4 *Obsérvese que $\mathcal{T}_C(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \mathcal{T}_C(-\alpha_s, -\alpha_{s-1}, \dots, -\alpha_1)$, pues, si $C = y_1 y_2 \dots y_n \in \mathcal{T}_C(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$, entonces*

$$C' = y_n y_{n-1} \dots y_1 \in \mathcal{T}_C(-\alpha_s, -\alpha_{s-1}, \dots, -\alpha_1)$$

$$\text{y } C' = C.$$

Corolario 2.5 *Para todo $1 \leq i \leq s$, tenemos que:*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_C(\alpha_1, \dots, \alpha_s) &= \mathcal{T}_C(\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}) \\ &= \mathcal{T}_C(-\alpha_i, -\alpha_{i-1}, \dots, -\alpha_1, -\alpha_s, \dots, -\alpha_{i+1}). \end{aligned}$$

Además, se puede demostrar fácilmente que:

Proposición 2.6 *Dados $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z}^s$ y $\beta \in \mathbb{Z}^t$, se verifica que $\mathcal{T}_C(\alpha) = \mathcal{T}_C(\beta)$ si y solo si $s = t$ y, o bien $\beta = (\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$, o bien, $\beta = (-\alpha_i, -\alpha_{i-1}, \dots, -\alpha_1, -\alpha_s, \dots, -\alpha_{i+1})$, para algún $1 \leq i \leq s$.*

Como consecuencia, tenemos el siguiente resultado para ciclos Hamiltonianos.

Proposición 2.7 Sean T un torneo y $\mathcal{T}_C(\alpha)$ y $\mathcal{T}_C(\beta)$ dos conjuntos de ciclos Hamiltonianos orientados en T . Entonces, o bien $\mathcal{T}_C(\alpha) = \mathcal{T}_C(\beta)$, o bien $\mathcal{T}_C(\alpha) \cap \mathcal{T}_C(\beta) = \emptyset$.

Definición 2.8 Sea T un torneo con n vértices. Un **ciclo** Hamiltoniano orientado C en T se dice que está **generado por un camino** Hamiltoniano orientado $P = v_1v_2 \dots v_n$ si C es el ciclo obtenido de P añadiendo la arista entre v_1 y v_n .

Si P es un camino Hamiltoniano en T , C_P denota el ciclo Hamiltoniano orientado generado por P .

Definición 2.9 La **relación cíclica** \mathcal{R} es la relación de equivalencia definida en el conjunto de caminos Hamiltonianos orientados en T por:

$$PRP' \iff C_P = C_{P'}$$

Sea \mathcal{R}_α la restricción de \mathcal{R} al conjunto $\mathcal{T}_P(\alpha)$, donde $\alpha \in \mathbb{Z}^s$.

Proposición 2.10 Tenemos que PRP' si y solo si, o bien $P = P'$, o bien $P = v_1v_2 \dots v_n$ y $P' = v_{i+1}v_{i+2} \dots v_nv_1 \dots v_{i-1}v_i$, para algún $1 \leq i \leq n-1$.

Dado un ciclo $C = v_1v_2 \dots v_nv_1$, si eliminamos la arista v_iv_{i+1} obtendríamos un camino P . Esto se puede hacer para cualquier arista del ciclo, obteniendo diferentes caminos. Aunque también puede darse el caso en el que, al eliminar dos aristas distintas, obtengamos dos caminos del mismo tipo.

Ejemplo 2.11 Dado el siguiente ciclo, obtenido del 4-torneo,

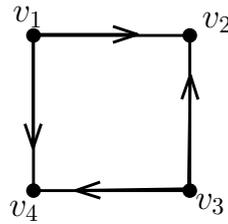


Figura 2.1: Ciclo $C = v_1v_2v_3v_4v_1$

Si quitamos la arista v_1v_2 , obtenemos el camino $v_2v_3v_4v_1$ de tipo $P(-1, 1, -1)$. Sin embargo, si quitamos v_3v_4 , conseguimos el camino $v_4v_1v_2v_3$, también de tipo $P(-1, 1, -1)$. Luego, $PR_\alpha P'$, pues P y P' tienen el mismo tipo $P(\alpha)$, con $\alpha = (-1, 1, -1)$ y, además, $C_P = C_{P'}$. Por otra parte, si quitamos la arista v_2v_3 , tenemos el camino $v_3v_4v_1v_2$ de tipo $P(1, -1, 1)$ y PRP'' , pues $C_P = C_{P''}$, aunque P y P'' no tienen el mismo tipo.

Capítulo 3

Periodos, bloques similares y clones de vértices

En este capítulo introduciremos algunos conceptos que usaremos para calcular el número de caminos de un cierto tipo que generan un ciclo dado en un torneo.

Definición 3.1 Sea la tupla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z}^s$. Se dice que r , con $1 \leq r \leq s$, es un **periodo** de α si para cualesquiera $i, j \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$i \equiv j \pmod{r} \Rightarrow \alpha_{i_s} = \alpha_{j_s},$$

donde i_s es el único entero en $\{1, 2, \dots, s\}$ tal que $i \equiv i_s \pmod{s}$.

Sea $r(\alpha) = \min\{r \mid r \text{ es un periodo de } \alpha\}$.

Ejemplo 3.2 Dada la tupla $\alpha = (2, -1, 2, -1, 2, -1, 2)$, escogemos $1 \leq r = 5 \leq s = 7$. Aplicando la Definición 3.1 tenemos que r es un periodo de α si

$$i \equiv j \pmod{5} \Rightarrow \alpha_{i_7} = \alpha_{j_7}$$

siendo i_7 y j_7 los únicos enteros en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ tales que $i \equiv i_7 \pmod{7}$ y $j \equiv j_7 \pmod{7}$, respectivamente. Tomemos $i = 1$, entonces $j = 6$, pues $1 \equiv 6 \pmod{5}$, en consecuencia, debe ser $\alpha_1 = \alpha_6$, pues i_7 y j_7 son los únicos enteros tales que $1 \equiv i_7 \pmod{7}$ y $6 \equiv j_7 \pmod{7}$ y esto sólo es posible si $i_7 = 1$ y $j_7 = 6$. Pero $\alpha_1 = 2 \neq \alpha_6 = -1$. Luego, r no es un periodo de α .

Sin embargo, con $\alpha = (2, -1, 2, -1, 2, -1)$ y $r = 4$, tomando $i = 1$ y $j = 9$, tenemos que $1 \equiv 9 \pmod{4}$. Veamos si $\alpha_{i_6} = \alpha_{j_6}$. Tenemos que $i_6 \equiv 1 \pmod{6}$ y $j_6 \equiv 9 \pmod{6}$, esto implica que $i_6 = 1$ y $j_6 = 3$. Por tanto, como $\alpha_1 = 2 = \alpha_3$, r es un periodo de α .

Proposición 3.3 Dado un entero r , $1 \leq r \leq s$, tenemos que:

$$r \text{ es un periodo de } \alpha \iff r(\alpha) \text{ divide a } r.$$

Demostración:

Si $r(\alpha)$ divide a r , sean $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $i \equiv j \pmod{r}$, entonces $i \equiv j \pmod{r(\alpha)}$, y puesto que $r(\alpha)$ es un periodo de α , $\alpha_{i_s} = \alpha_{j_s}$. Esto implica que r es un periodo de α .

Por otro lado, supongamos que r es un periodo de α . Debemos escribir $r = q \cdot r(\alpha) + b$, con $0 \leq b < r(\alpha)$. Si $b \neq 0$, sean $i \leq j$ dos enteros tales que $i \equiv j \pmod{b}$.

Así, de $j = i + b \cdot k$ para algún k , se obtiene que

$$j = i + (r - q \cdot r(\alpha)) \cdot k = i + k \cdot r - q \cdot k \cdot r(\alpha).$$

Sea $i' = i + k \cdot r$, se tiene que $i' \equiv i \pmod{r}$, entonces $\alpha_{i'_s} = \alpha_{i_s}$ y también se tiene que $i' \equiv j \pmod{r(\alpha)}$, entonces $\alpha_{i'_s} = \alpha_{j_s}$. Se sigue que $\alpha_{i_s} = \alpha_{j_s}$, entonces b es un periodo de α con $b < r(\alpha)$, lo cual es una contradicción, pues $r(\alpha)$ es el menor de los periodos. ■

Corolario 3.4 *Se verifica que $r(\alpha)$ divide a s .*

Demostración:

Por definición, s es un periodo de α si

$$i \equiv j \pmod{s} \Rightarrow \alpha_{i_s} = \alpha_{j_s}$$

donde i_s y j_s son los únicos enteros en $\{1, 2, \dots, s\}$ tales que $i \equiv i_s \pmod{s}$ y $j \equiv j_s \pmod{s}$, respectivamente. Luego, $i_s = j = j_s$ y, por tanto, s es un periodo de α y, por la Proposición 3.3, se tiene que $r(\alpha)$ divide a s . ■

Sea $t(\alpha) = \frac{s}{r(\alpha)}$. Decimos que $t(\alpha)$ es la **frecuencia** de α .

Observación 3.5 *Si $n = \sum_{i=1}^s |\alpha_i|$, $r = r(\alpha)$ y $\sigma = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_r|$, entonces σ divide a n y $t(\alpha) = \frac{n}{\sigma}$, lo que significa, a su vez, que $t(\alpha)$ divide a n . Y entonces $t(\alpha)$ divide a n y a s .*

El siguiente lema es un resultado sencillo pero tiene un uso práctico para algunas de nuestras demostraciones.

Lema 3.6 *Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{Z}$. Si*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = (\beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_s, \beta_1, \dots, \beta_{i-1}),$$

entonces, para cualquier entero no negativo k , tenemos que $\alpha_{k_s} = \beta_{[k+i-1]_s}$.

Demostración:

Se tiene, para cualquier k , que $\alpha_{k_s} = \alpha_p$ para algún $p \equiv k \pmod{s}$, con $1 \leq p \leq s$. Si $p \leq s - i + 1$, entonces $\alpha_p = \beta_{[k+i-1]_s}$. Así, $\alpha_{k_s} = \alpha_p = \beta_{p+i-1} = \beta_{[k+i-1]_s}$. Si $p \geq s - i + 2$, entonces $\alpha_p = \beta_{p-s+i-1}$. Por lo tanto, $\alpha_{k_s} = \alpha_p = \beta_{p-s+i-1} = \beta_{[p+i-1]_s} = \beta_{[k+i-1]_s}$. ■

Análogamente, podemos probar que si

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = (-\beta_i, -\beta_{i-1}, \dots, -\beta_1, -\beta_s, -\beta_{s-1}, \dots, -\beta_{i+1}),$$

entonces $\alpha_{k_s} = -\beta_{[i+1-k]_s}$ para algún entero no negativo k .

Proposición 3.7 Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z}^s$ y

$$\alpha' = (\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}),$$

entonces $r(\alpha) = r(\alpha')$ y $t(\alpha) = t(\alpha')$.

Demostración:

Sea $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_s) = (\alpha_i, \dots, \alpha_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$, y consideremos $r(\alpha') = r'$, $r(\alpha) = r$. Primero probaremos que r es un periodo de α' , lo que implicaría que $r' \leq r$, ya que r' es el menor de los periodos de α . Sean l y p dos enteros tales que $p \equiv l \pmod{r}$, es suficiente probar que $\alpha'_{l_s} = \alpha'_{p_s}$. Tenemos $\alpha'_{p_s} = \alpha_{[p+i-1]_s}$ y $\alpha'_{l_s} = \alpha_{[l+i-1]_s}$ por el Lema 3.6. Y, puesto que $p \equiv l \pmod{r}$, se tiene que $p+i-1 \equiv l+i-1 \pmod{r}$. Pero r es un periodo de α , por lo tanto, $\alpha_{[p+i-1]_s} = \alpha_{[l+i-1]_s}$, luego $\alpha'_{l_s} = \alpha'_{p_s}$. Con lo cual, r es un periodo de α' y $r' \leq r$. Análogamente, se puede probar que $r \leq r'$. De esta manera obtenemos que $r = r'$ y, en consecuencia, $t(\alpha) = t(\alpha')$. ■

Definición 3.8 Sea C un ciclo de tipo $C(\alpha)$ y $r = r(\alpha)$. Consideremos $C = I_1 I_2 \dots I_s$ una enumeración fijada de los bloques de C . Para $1 \leq i < j \leq s$, se dice que I_i e I_j son **bloques similares** si $j \equiv i \pmod{r}$.

Por la Proposición 3.3, esto es equivalente a decir que $j - i$ es un periodo de β . Así, para cada $1 \leq i \leq s$, hay $t(\beta) - 1$ bloques similares a I_i . Además, se sigue que, si I_i e I_j son bloques similares, entonces $\beta_i = \beta_j$, y para cualquier entero no negativo k , $I_{[i+k]_s}$ e $I_{[j+k]_s}$ son bloques similares.

Definición 3.9 Sea C un ciclo orientado. Se dice que dos vértices $u, v \in C$ son **C-clones** si:

- u y v pertenecen a I_i e I_j , siendo éstos bloques similares y

- $l(I_i[x_i, u]) = l(I_j[x_j, v])$, o equivalentemente, $l(I_i[u, y_i]) = l(I_j[v, y_j])$.

Si $C \in \mathcal{T}_C(\beta)$, entonces cada v3rtice de C tiene $t(\beta) - 1$ C -clones.

Si u y v son C -clones, podemos decir tambi3n que u es un C -clon de v , o viceversa. Cuando no haya confusi3n, simplemente diremos que son clones.

Ejemplo 3.10 Dado el ciclo orientado C de tipo $C(-3, 2, -3, 2, -3, 2)$ de la Figura 3.1, se tiene que $r = r(\alpha) = 2$ y $C = I_1 I_2 \dots I_6$. Podemos observar, por ejemplo, que I_1 e I_3 son bloques similares, ya que $3 \equiv 1 \pmod{2}$. Tenemos tambi3n que u y v pertenecen a I_1 e I_3 , respectivamente, y que $l(I_1[x_1, u]) = 2 = l(I_3[x_3, v])$. Luego, u y v son C -clones.

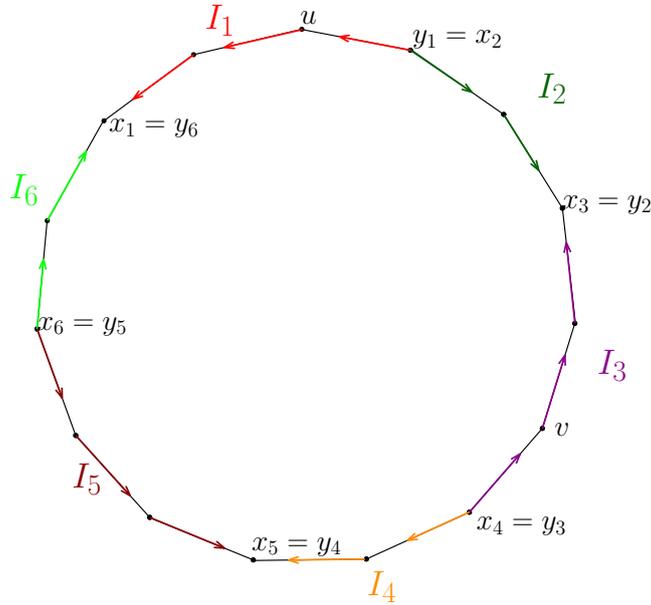


Figura 3.1: Ciclo orientado de tipo $C(-3, 2, -3, 2, -3, 2)$.

Lema 3.11 Sea $C = v_1 v_2 \dots v_n \in \mathcal{T}_C(\beta)$ un ciclo Hamiltoniano orientado en un torneo T , con $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$ y consideremos $r = r(\beta)$ y $C = I_1 I_2 \dots I_s$. Entonces v_i y v_j son C -clones, para $j \geq i$, si y s3lo si $j = m \cdot \left(\sum_{i=1}^r |\beta_i| \right) + i$ para alg3n $1 \leq m \leq t(\beta) - 1$.

Demostración:

Supongamos sin pérdida de generalidad que $v_i \in I_1$ y $v_j \in I_k$ para algún $1 \leq k \leq s$. Si v_i y v_j son C -clones, entonces debemos suponer que $v_j \neq y_k$, y, en este caso, I_1 e I_k son bloques similares. Por lo tanto, $k - 1$ es un múltiplo de r , digamos $k - 1 = m \cdot r$ para algún entero positivo m y $\beta_k = \beta_1$.

$$\begin{aligned}
j - i &= l(I_1[v_i, y_1]) + |\beta_2| + \dots + |\beta_{k-1}| + l(I_k[x_k, v_j]) \\
&= l(I_1[v_i, y_1]) + |\beta_2| + \dots + |\beta_{k-1}| + l(I_1[x_1, v_i]) \text{ por ser } v_i \text{ y } v_j \text{ clones} \\
&= |\beta_1| + |\beta_2| + \dots + |\beta_{k-1}| \\
&= |\beta_1| + |\beta_2| + \dots + |\beta_r| + |\beta_{r+1}| + |\beta_{r+2}| + \dots + |\beta_{2r}| + \dots + |\beta_{mr}| \\
&= \underbrace{|\beta_1| + |\beta_2| + \dots + |\beta_r|}_1 + \underbrace{|\beta_1| + |\beta_2| + \dots + |\beta_r|}_2 + \dots + \\
&\quad + \underbrace{|\beta_1| + \dots + |\beta_r|}_m \\
&= m \cdot \left(\sum_{i=1}^r |\beta_i| \right).
\end{aligned}$$

Por otro lado, supongamos que v_i y v_j son tales que $j = m \cdot \left(\sum_{i=1}^r |\beta_i| \right) + i$ para algún $1 \leq m \leq t(\beta) - 1$. Hay tres posibilidades. Argumentaremos por inducción en m .

1. Si $v_i = x_1$ y $m = 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^r |\beta_i| &= j - i = |\beta_1| + |\beta_2| + \dots + |\beta_{k-1}| + l(I_k[x_k, v_j]) \\
&\leq |\beta_1| + |\beta_2| + \dots + |\beta_k|
\end{aligned}$$

Pueden darse dos casos:

- Si $k - 1 < r$, entonces debemos tener $k - 1 = r - 1$, es decir, $k = r$. Así pues, k es un múltiplo de r y, en ese caso, I_{k+1} es un bloque similar a I_1 y, de $|\beta_r| = l(I_k[x_k, v_j])$ se deduce que $v_j = y_k = x_{k+1}$. Además, $l(I_{k+1}[x_{k+1}, v_j]) = 0 = l(I_1[x_1, v_i])$ lo cual prueba que v_j es un clon de v_1 .
- Si $k - 1 = r$, entonces $k - 1$ es un múltiplo de r , I_k es un bloque similar a I_1 y, de $l(I_k[x_k, v_j]) = 0 = l(I_1[x_1, v_i])$, se deduce que $v_j = x_k$. De nuevo, esto prueba que v_i y v_j son clones.

2. Si v_i es un vértice interior de I_1 , es decir, $v_i \neq x_1, y_1$, y $m = 1$, $j - i = l(I_1[v_i, y_1]) + |\beta_2| + \dots + |\beta_{k-1}| + l(I_k[x_k, v_j])$, lo cual implica que

$$\sum_{i=1}^r |\beta_i| = (|\beta_1| - l(I_1[x_1, v_i])) + |\beta_2| + \dots + |\beta_{k-1}| + l(I_k[x_k, v_j]). \quad (3.1)$$

Pueden darse tres casos:

- Si $k - 1 < r$, entonces

$$|\beta_k| + |\beta_{k+1}| + \dots + |\beta_r| = l(I_k[x_k, v_j]) - l(I_1[x_1, v_i]).$$

Sin embargo, $l(I_1[x_1, v_i]) > 0$ pues v_i no es un vértice final de I_1 , y así $l(I_k[x_k, v_j]) - l(I_1[x_1, v_i]) < |\beta_k|$; una contradicción.

- Si $k - 1 > r$, la igualdad anterior se convierte en

$$l(I_1[x_1, v_i]) = |\beta_{r+1}| + |\beta_{r+2}| + \dots + |\beta_{k-1}| + l(I_k[x_k, v_j]).$$

Pero $|\beta_1| = |\beta_{r+1}|$ por definición de periodo y $l(I_1[x_1, v_i]) < |\beta_1|$, una contradicción.

- Por lo cual, necesariamente tenemos que $k - 1 = r$, en particular esto implica que $k - 1$ es un múltiplo de r , luego I_1 y I_k son bloques similares, y se sigue de la igualdad 3.1 que $l(I_1[x_1, v_i]) = l(I_k[x_k, v_j])$. Esto prueba que v_i y v_j son clones.

3. Si $v_i = y_1$, entonces $v_i = x_2$ y procedemos de forma similar a los casos previos.

Ahora supongamos que $m \geq 2$ y que la afirmación es cierta para $m - 1$, es decir, si $l = (m - 1) \cdot \left(\sum_{i=1}^r |\beta_i| \right) + i$, entonces v_l es un clon de v_i . Sea

$j = m \cdot \left(\sum_{i=1}^r |\beta_i| \right) + i$. Podemos escribir $j = l + \left(\sum_{i=1}^r |\beta_i| \right)$, lo que implica,

por el caso $m = 1$, que v_j es un clon de v_l . Y, puesto que v_l es un clon de v_i , tenemos que v_j es un clon de v_i , lo que concluye la prueba. ■

Lema 3.12 Sean $P = v_1v_2 \dots v_n$ y $P' = v_iv_{i+1} \dots v_nv_1 \dots v_{i-1}$ dos caminos Hamiltonianos orientados en un torneo T tales que

$$C_P = C_{P'} \in \mathcal{T}_C(\beta) = \mathcal{T}_C(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s).$$

Sea $r = r(\beta)$. Si v_i es un C_P -clon de v_1 , entonces v_{i-1} es también un C_P -clon de v_n .

Demostración:

Puesto que v_i es un C_P -clon de v_1 , por el Lema 3.11, $i-1 = m \cdot \left(\sum_{i=1}^r |\beta_i| \right)$, para algún $1 \leq m \leq t(\beta) - 1$.

$$\begin{aligned} n - (i - 1) &= n - m \cdot \left(\sum_{i=1}^r |\beta_i| \right) \\ &= t(\beta) \cdot \left(\sum_{i=1}^r |\beta_i| \right) - m \cdot \left(\sum_{i=1}^r |\beta_i| \right) \\ &= (t(\beta) - m) \cdot \left(\sum_{i=1}^r |\beta_i| \right) \end{aligned}$$

con $1 \leq t(\beta) - m \leq t(\beta) - 1$, lo cual prueba que v_{i-1} es un clon de v_n . ■

Los dos resultados anteriores nos conducen a establecer una caracterización de que dos caminos tengan el mismo tipo en términos de la noción de clon.

Lema 3.13 Sean P y P' dos caminos Hamiltonianos orientados diferentes en un torneo T tal que $C_P = C_{P'}$ y C_P es no simétrico. Entonces P y P' tienen el mismo tipo si y sólo si cada extremo de P' es un C_P -clon de un extremo de P .

Demostración:

Sea $P = v_1v_2 \dots v_n$. Puesto que $C_P = C_{P'}$, por la Proposición 2.10, $P' = v_iv_{i+1} \dots v_nv_1 \dots v_{i-1}$ para algún $1 < i \leq n$. Sea $C_P = C_{P'} = I_1I_2 \dots I_s \in \mathcal{T}_C(\beta) = \mathcal{T}_C(\beta_1, \dots, \beta_s)$, con $|I_i| = |\beta_i|$, $\text{end}(I_i) = \{x_i, y_i\}$ y sea $r = r(\beta)$. De hecho, β es no simétrica, ya que C_P no lo es. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\beta_1 > 0$ y que $v_1 \in I_1$. Primero, asumiremos que los extremos de P y P' son C_P -clones, tales que v_i es un clon de v_1 y v_{i-1} es un clon de v_n . Pueden darse varios casos:

1. Si v_1 es un extremo de I_1 , entonces, o bien $v_1 = x_1$, en cuyo caso $P \in \mathcal{T}_P(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s + 1)$, o bien $v_1 = y_1$ y $P \in \mathcal{T}_P(\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_s, \beta_1 - 1)$.
2. Si $v_1 \notin \text{end}(I_1)$ y \tilde{v}_1 es el v3rtice adyacente a v_1 , tenemos tres casos.
 - Si $x_1 = \tilde{v}_1$ es adyacente a v_1 en C_P , entonces $P \in \mathcal{T}_P(\beta_1 - 1, \beta_2, \dots, \beta_s)$.
 - Si $y_1 = \tilde{v}_1$ es adyacente a v_1 en C_P , entonces $P \in \mathcal{T}_P(1, \beta_2, \dots, \beta_s, \beta_1 - 2)$.
 - En otro caso, v_1 es un v3rtice interior de I_1 y $P \in \mathcal{T}_P(\beta_1'', \beta_2, \dots, \beta_s, \beta_1')$ con $I_1' = I_1[x_1, v_1]$, $I_1'' = I_1[v_1, y_1]$, $|\beta_1'| = |I_1'| - 1$, $|\beta_1''| = |I_1''|$.

Supongamos que $x_1 = \tilde{v}_1$ es adyacente a v_1 en I_1 ; los otros casos pueden estudiarse de forma similar. $P \in \mathcal{T}_P(\beta_1 - 1, \beta_2, \dots, \beta_s)$ y podemos escribir $P = I_1'' I_2 \dots I_s$, con $|I_1''| = \beta_1 - 1$. Como v_i es un clon de v_1 , tenemos los siguientes hechos:

- $v_i \in I_j$ para alg3n $j \equiv 1 \pmod{r}$,
- $l(I_j[x_j, v_i]) = l([I_1(x_1, v_1)]) = 1$, lo que significa que v_i es adyacente a x_j en I_j e
- I_1 e I_j son bloques similares, por lo tanto tienen la misma orientaci3n en C_P . Y, como tenemos tambi3n $l(I_j[v_i, y_j]) = l([I_1(v_1, y_1)])$, entonces podemos escribir $P' = I_j'' I_{j+1} \dots I_s I_1 \dots I_{j-1}$; $|I_j''| = |I_1''| = \beta_1 - 1$.

Del hecho de que I_1 e I_j sean bloques similares, podemos tambi3n deducir que $I_{[j+k]_s}$ es un bloque similar a $I_{[1+k]_s}$ para cualquier entero no negativo k , en particular:

$$|I_{j+1}| = |I_2|, |I_{j+2}| = |I_3|, \dots, |I_s| = |I_{s-j+1}|, |I_1| = |I_j|, \dots, |I_{j-1}| = |I_s|.$$

Esto prueba que P y P' son del mismo tipo.

Ahora supongamos que P y P' tienen el mismo tipo. Podemos f3cilmente verificar que, si los bloques de P enumerados por orden desde v_1 hasta v_n son del mismo tipo que los bloques de P' enumerados por orden desde v_i, v_{i-1}, \dots, v_1 hasta v_n, \dots, v_{i+1} , entonces β podr3a ser sim3trica, y ser3a una contradicci3n. Luego, los bloques de P' son bloques similares a aquellos de P correspondientes a una enumeraci3n de la forma $v_i v_{i+1} \dots v_n v_1 \dots v_{i-1}$.

De nuevo, supongamos que v_1 es un v3rtice adyacente a x_1 en I_1 y que $v_i \in I_j$. Se sigue que $P' \in \mathcal{T}_P(\beta'_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_s, \beta_1, \dots, \beta_{j-1})$ con

$$(\beta'_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_s, \beta_1, \dots, \beta_{j-1}) = (\beta_1 - 1, \beta_2, \dots, \beta_s), \quad (3.2)$$

por tanto,

$$(\beta'_j + 1, \beta_{j+1}, \dots, \beta_s, \beta_1, \dots, \beta_{j-1}) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s). \quad (3.3)$$

Adem3s,

$$\beta'_j + 1 + |\beta_{j+1}| + \dots + |\beta_s| + |\beta_1| + \dots + |\beta_{j-1}| = \sum_{i=1}^s |\beta_i|.$$

Usando las ecuaciones 3.2 y 3.3, podemos deducir lo siguiente:

$$\beta'_j + 1 = \beta_j = \beta_1, \beta_{j+1} = \beta_2, \dots, \beta_s = \beta_{s-j+1}, \beta_1 = \beta_{s-j+2}, \dots, \beta_{j-1} = \beta_s.$$

M3s formalmente, podemos escribir, por el Lema 3.6, para cualquier entero no negativo k : $\beta_{k_s} = \beta_{[k+j-1]_s}$. Nos gustar3a probar que v_i es un clon de v_1 , y esto ser3a suficiente por el Lema 3.12. Para que v_i sea un clon de v_1 , necesitamos probar que v_i y v_1 tienen posiciones similares en I_j e I_1 , respectivamente.

Como $\beta'_j = \beta_j - 1$, deducimos que v_i es el v3rtice adyacente a x_j en I_j , lo que prueba que v_i y v_j tienen posiciones similares en I_j e I_1 , respectivamente.

Previamente necesitamos probar que $j - 1$ es un periodo de β .

Sean k y k' dos enteros tales que $k > k'$ y $k \equiv k' \pmod{j - 1}$. Nos gustar3a probar que $\beta_{k_s} = \beta_{k'_s}$. Supongamos que $k = k' + c \cdot (j - 1)$ para alg3n entero positivo c . Argumentaremos por inducci3n en c . Si $c = 1$, entonces $k = k' + j - 1$ y $\beta_{k_s} = \beta_{[k'+j-1]_s} = \beta_{k'_s}$, como observamos anteriormente. Si $c \geq 2$, sea $k'' = k' + (c - 1) \cdot (j - 1)$. Supongamos que se cumple para $c - 1$, es decir, $\beta_{[k'']_s} = \beta_{[k'+(c-1)\cdot(j-1)]_s} = \beta_{k'_s}$. Puesto que $k = k'' + j - 1$, entonces por el caso $c = 1$, tenemos que $\beta_{k_s} = \beta_{k''_s} = \beta_{k'_s}$, como era necesario. Esto prueba que $j - 1$ es un periodo de β .

Finalmente, v_1 y v_i son clones. ■

Capítulo 4

Camino que generan un ciclo orientado

Ahora podemos calcular, dado un tipo β , el número de caminos Hamiltonianos orientados, que generan un ciclo orientado C de tipo $C(\beta)$; probaremos que es equivalente a lo que llamamos frecuencia de β .

Para ello, seguiremos la siguiente notación:

- $h(T)$ es el número de caminos Hamiltonianos dirigidos en un torneo T .
- $a(T)$ es el número de caminos Hamiltonianos antidirigidos en T .
- $h_a(T)$ es el número de caminos Hamiltonianos antidirigidos en T , que comienzan con una arista con orientación positiva.
- $c(T)$ es el número de ciclos Hamiltonianos dirigidos en T .

Definición 4.1 Un *torneo* se dice **transitivo** con n vértices, denotado por TT_n , si sus vértices pueden etiquetarse $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de modo que $(v_i, v_j) \in E(TT_n)$, $\forall i < j$.

Ejemplo 4.2 Ya hemos visto ejemplos de n -torneos, a continuación, mostraremos un ejemplo de un torneo transitivo con n vértices para $n = 5$.

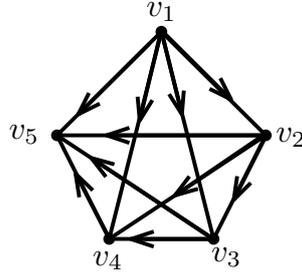


Figura 4.1: TT_5 , un torneo transitivo con $n = 5$ vértices.

Observación 4.3 *Cualquier torneo transitivo es acíclico, es decir, no puede contener ciclos dirigidos ya que siempre habrá un vértice del cual parten todas las aristas y al que no llegará ninguna, y otro al que le ocurra lo contrario.*

Teorema 4.4 *Sea $P \in \mathcal{T}_P(\alpha)$ un camino Hamiltoniano orientado en un torneo T . Sea $C_P \in \mathcal{T}_C(\beta)$ tal que C_P es no simétrico y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ con s par, entonces $\#\bar{P} = t(\beta)$, donde \bar{P} es la clase de equivalencia de P módulo \mathcal{R}_α .*

Demostración:

\bar{P} contiene tanto a P como a los caminos P' en T que tienen el mismo tipo que P verificando $C_{P'} = C_P$. Por el lema 3.13, el número de tales caminos P' es exactamente el número de C_P -clones que puede tener un extremo de P , esto es, $t(\beta) - 1$. Finalmente, $\#\bar{P} = t(\beta)$. ■

Nuestro resultado principal muestra una relación entre la paridad del número de ciclos Hamiltonianos dirigidos y la del número de caminos Hamiltonianos antidirigidos comenzando con una arista de orientación positiva en un torneo. Por este motivo, primero determinaremos una igualdad general que mostrará la relación entre la paridad del número de caminos Hamiltonianos de un cierto tipo y el número de ciclos Hamiltonianos generados por ese camino. Lo formularemos de la siguiente manera:

Teorema 4.5 *Sea T un torneo de orden impar $n \geq 5$ y consideremos una s -tupla $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \varepsilon^s$ tal que no es de la forma $(1, -(n-1))$ o $(-1, n-1)$,*

$\sum_{i=1}^s |\alpha_i| = n$ y s es par. Sea

$$\alpha_i * 1 = \begin{cases} \alpha_i - 1 & \text{si } \alpha_i > 0 \\ \alpha_i + 1 & \text{si } \alpha_i < 0 \end{cases}$$

Si $\alpha = (\alpha_1 * 1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ es simétrica, tenemos:

$$g_T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \equiv f_T(\alpha_1 * 1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \pmod{2}.$$

En otro caso:

$$\begin{aligned} & g_T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \equiv \\ & \equiv (f_T(\alpha_1 * 1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) + g_T(\alpha_1 * 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s * 1)) \pmod{2}. \end{aligned}$$

Para probar este resultado, necesitamos los siguientes lemas previos:

Lema 4.6 Sea $\alpha = (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z}^s$ con s par, $\alpha_i \cdot \alpha_{i+1} < 0$ $\forall i = 1, \dots, s-1$ y $\alpha_1 > 0$. Sea T un torneo de orden $n = \sum_{i=1}^s |\alpha_i|$ y sean $\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ y $\beta' = (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s - 1)$. Tenemos que:

$$\mathcal{T}_C(\beta) = \mathcal{T}_C(\beta') \iff \alpha \text{ es simétrica.}$$

Demostración:

Teniendo en cuenta la Observación 2.4, se verifica que $\mathcal{T}_C(\beta) = \mathcal{T}_C(-\bar{\beta})$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_C(\beta) = \mathcal{T}_C(\beta') & \iff \beta' = -\bar{\beta} \\ & \iff \\ (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s - 1) & = (-\alpha_s, -\alpha_{s-1}, \dots, -\alpha_2, -\alpha_1) \\ & \iff \\ (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s - 1 + 1) & = (-\alpha_s, -\alpha_{s-1}, \dots, -\alpha_2, -\alpha_1 + 1) \\ & \iff (*) \\ (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s) & = (-\alpha_s, -\alpha_{s-1}, \dots, -\alpha_2, -\alpha_1 + 1) \\ & \iff \\ & \alpha \text{ es simétrica.} \end{aligned}$$

(*) Debemos tener en cuenta que $\alpha_1 > 0$, luego, al ser s par, $\alpha_s < 0$. Con lo cual, tanto a la parte izquierda de la igualdad como a la derecha le estamos quitando una arista. ■

Ejemplo 4.7 Veamos un ejemplo que ilustra la conclusión del Lema 4.6. Sea

$$\alpha = (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1, -1, 1, -1)$$

con $s = 4$ par y $\alpha_1 > 0$. Podemos observar que es simétrica pues $\alpha = (1, -1, 1, -1) = (-\alpha_4, -\alpha_3, -\alpha_2, -\alpha_1 + 1)$. Consideremos el 5-torneo siguiente:

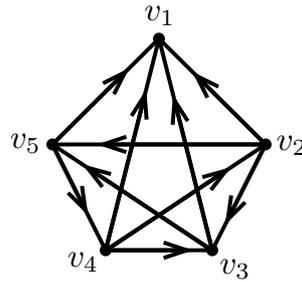


Figura 4.2: Un 5-torneo.

Sean $C = v_5v_4v_3v_2v_1v_5$ un ciclo de tipo $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (2, -1, 1, -1)$ y $C^* = v_5v_1v_2v_3v_4v_5$ de tipo $\beta' = (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 - 1) = (1, -1, 1, -2)$. Se ve que $-\beta = \beta'$ y C y C^* serían el mismo ciclo visto como ciclo de tipo β y de tipo β' , respectivamente.

Lema 4.8 Sean $\mathcal{T}_C = \{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ y $\mathcal{T}_{C'} = \{C'_1, \dots, C'_q\}$ los conjuntos de ciclos orientados de tipo $C = C(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = C(\beta_1)$ y $C' = C(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s - 1) = C(\beta_2)$, respectivamente. Entonces

$$t \cdot t(\beta_1) + q \cdot t(\beta_2) \equiv (t + q) \pmod{2}$$

Demostración:

Teniendo en cuenta la Observación 3.5, $t(\beta_1)$ divide a n y n es impar, por tanto, $t(\beta_1) \equiv 1 \pmod{2}$. De forma similar, tenemos que $t(\beta_2) \equiv 1 \pmod{2}$.

Vamos a considerar las siguientes propiedades de congruencias, que aplicaremos posteriormente:

- (1) Si $a \equiv b \pmod{m}$ y k es un entero, se cumple:

$$ka \equiv kb \pmod{m}$$

- (2) Si tenemos dos congruencias con igual módulo:

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ y } c \equiv d \pmod{m}$$

podemos sumarlas, restarlas o multiplicarlas de forma que también se verifican las congruencias

$$a + c \equiv (b + d) \pmod{m} \text{ y } ac \equiv bd \pmod{m}$$

Luego, usando la propiedad (1) tenemos:

$$\begin{cases} t \cdot t(\beta_1) \equiv t \cdot 1 \pmod{2} \iff t \cdot t(\beta_1) \equiv t \pmod{2} \\ q \cdot t(\beta_2) \equiv q \cdot 1 \pmod{2} \iff q \cdot t(\beta_2) \equiv q \pmod{2} \end{cases}$$

y, aplicando la propiedad (2), concluimos que:

$$t \cdot t(\beta_1) + q \cdot t(\beta_2) \equiv (t + q) \pmod{2}$$

■

Demostración del Teorema 4.5:

Supongamos que $\alpha_1 > 0$, se sigue que $\alpha_s < 0$. Vamos a calcular

$$f_T(\alpha_1 * 1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = f_T(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$$

para el caso en que α es no simétrica. Sea $P \in \mathcal{T}_P(\alpha) = \mathcal{T}_P(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$. Por el Lema 4.6, como α es no simétrica, entonces C_P es o bien de tipo $C(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = C(\beta_1)$, o bien de tipo $C(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s - 1) = C(\beta_2)$, y estos dos tipos son distintos. Sea $\mathcal{T}_{C,1} = \{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ el conjunto de ciclos del primer tipo en un torneo T y sea $\mathcal{T}_{C,2} = \{C'_1, \dots, C'_q\}$ el conjunto de ciclos del segundo tipo. Sea φ la aplicación dada por:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{T}_P(\alpha) &\rightarrow \mathcal{T}_{C,1} \cup \mathcal{T}_{C,2} \\ P &\mapsto \varphi(P) = C_P \end{aligned}$$

Supongamos que $\mathcal{T}_{C,1} \cap \mathcal{T}_{C,2} \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{T}_{C,1} = \mathcal{T}_{C,2}$ por la Proposición 2.7. Por el Lema 4.6, α debe ser simétrica y sería una contradicción. Por tanto, debemos tener $\mathcal{T}_{C,1} \cap \mathcal{T}_{C,2} = \emptyset$. Además, φ es sobreyectiva, por consiguiente

$$\begin{aligned} f_T(\alpha) &= \#\mathcal{T}_P(\alpha) = \sum_{P \in \mathcal{T}_P(\alpha)} \#\varphi^{-1}(C_P) = \\ &= \sum_{C \in \mathcal{T}_{C,1} \sqcup \mathcal{T}_{C,2}} \#\varphi^{-1}(C) = \sum_{C_i \in \mathcal{T}_{C,1}} \#\varphi^{-1}(C_i) + \sum_{C'_j \in \mathcal{T}_{C,2}} \#\varphi^{-1}(C'_j). \end{aligned}$$

Por el Teorema 4.4, $\#\varphi^{-1}(C_i) = \#\bar{P} = t(\beta_1)$ para algún $P \in \varphi^{-1}(C_i)$ y equivalentemente, $\#\varphi^{-1}(C'_j) = t(\beta_2)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
f_T(\alpha) &= \sum_{i=1}^t \#\varphi^{-1}(C_i) + \sum_{j=1}^q \#\varphi^{-1}(C'_j) = \\
&= \sum_{i=1}^t t(\beta_1) + \sum_{j=1}^q t(\beta_2) = \\
&= t \cdot t(\beta_1) + q \cdot t(\beta_2) \equiv \\
&\equiv (t + q) \pmod{2} \equiv \\
&\equiv (g_T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) + g_T(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s - 1)) \pmod{2}, \\
&\quad \text{ya que } \alpha_s < 0.
\end{aligned}$$

Si α es simétrica, la prueba es similar, con la única diferencia de que C_P debe ser de tipo $C(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = C(\beta_1)$. Y usando la misma biyección φ de $\mathcal{T}_P(\alpha)$ a $\mathcal{T}_{C,1}$, obtenemos la otra igualdad. El procedimiento es análogo cuando $\alpha_1 < 0$. Así, se completa la prueba. \blacksquare

En la siguiente proposición, trataremos el caso particular que omitimos en el Teorema 4.5:

Proposición 4.9 *Sea T un torneo de orden n .*

$$g_T(1, -(n-1)) \equiv (n \cdot c(T) + h(T)) \pmod{2}.$$

Demostración:

Seguiremos los pasos dados en la demostración del Teorema 4.5. Calcularemos $h(T)$, considerando los ciclos generados por un camino Hamiltoniano dirigido, P , en T . Es fácil ver que C_P tiene uno de los dos tipos distintos siguientes: o bien C_P es un ciclo Hamiltoniano dirigido en T , o bien C_P es de tipo $C(1, -(n-1))$. De nuevo, sean $\mathcal{T}_{C,1} = \{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ y $\mathcal{T}_{C,2} = \{C'_1, C'_2, \dots, C'_q\}$ los conjuntos de ciclos Hamiltonianos dirigidos y los conjuntos de ciclos Hamiltonianos de tipo $C(1, -(n-1))$ en T , respectivamente. Usando la misma aplicación φ y observando que

$\mathcal{T}_{C,1} \cap \mathcal{T}_{C,2} = \emptyset$, tenemos: $h(T) = \sum_{i=1}^t \#\varphi^{-1}(C_i) + \sum_{j=1}^q \#\varphi^{-1}(C'_j)$. Ahora, para cualquier $1 \leq i \leq t$, C_i es un ciclo dirigido, por lo tanto $\#\varphi^{-1}(C_i)$, que es el número de caminos Hamiltonianos dirigidos en T generando C_i , es igual a n .

Por el Teorema 4.4, para cualquier $1 \leq j \leq q$, $\#\varphi^{-1}(C'_j) = t(1, -(n-1)) = 1$ pues $r(1, -(n-1)) = s = 2$. Por consiguiente,

$$h(T) = n \cdot t + q = n \cdot c(T) + g_T(1, -(n-1)),$$

como queríamos probar. ■

Lema 4.10 *Bajo las condiciones del Teorema 4.5, tenemos que:*

$$g_T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) + c(T) \equiv g_{TT_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \pmod{2}.$$

Demostración:

Argumentaremos por inducción en s y en $\min_{i=1}^s |\alpha_i|$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\alpha_1 \geq 0$ y que $\min_{i=1}^s |\alpha_i| = \alpha_1$. Para $s = 2$, si $\alpha_1 = 0$, entonces $g_T(0, \alpha_2) = g_T(\alpha_2) = c(T)$ y $g_{TT_n}(0, \alpha_2) = c(TT_n) = 0$ debido a que el torneo transitivo es acíclico. Veamos que el resultado es cierto para $\alpha_1 \geq 1$. Como (α_1, α_2) es no simétrica, entonces $|\alpha_1| < |\alpha_2|$, con lo cual tenemos también $|\alpha_1 - 1| < |\alpha_2|$. Esto significa que un camino de tipo $P(\alpha_1 - 1, \alpha_2)$ es no simétrico, por tanto, por el Teorema 4.5, tenemos:

$$g_T(\alpha_1, \alpha_2) \equiv (f_T(\alpha_1 - 1, \alpha_2) + g_T(\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1)) \pmod{2}.$$

Ahora, por el Teorema 2.1, $f_T(\alpha_1 - 1, \alpha_2) \equiv f_{TT_n}(\alpha_1 - 1, \alpha_2) \pmod{2}$ y, aplicando la hipótesis de inducción en $g_T(\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1)$, obtenemos que:

$$g_T(\alpha_1, \alpha_2) \equiv (f_{TT_n}(\alpha_1 - 1, \alpha_2) + g_{TT_n}(\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1) + c(T)) \pmod{2}.$$

Finalmente, aplicando de nuevo el Teorema 4.5,

$$g_T(\alpha_1, \alpha_2) \equiv (g_{TT_n}(\alpha_1, \alpha_2) + c(T)) \pmod{2}.$$

Ahora, supongamos que $s \geq 4$. De nuevo, argumentando por inducción en $\min_{i=1}^s \{\alpha_i\}$, supongamos sin pérdida de generalidad que es igual a α_1 . Para $\alpha_1 = 0$, un ciclo de tipo $C(0, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = C(\alpha_2 + \alpha_s, \alpha_3, \dots, \alpha_{s-1})$ tiene $s-2$ bloques, y el resultado se mantiene. Ahora, supongamos que $\alpha_1 > 0$, y que el resultado es cierto para $\alpha_1 - 1$. De forma similar al caso $s = 2$, obtenemos:

$$\begin{aligned} & g_T(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \equiv \\ & \equiv (f_T(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) + g_T(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s - 1)) \pmod{2} \equiv \\ & \equiv (f_{TT_n}(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) + g_{TT_n}(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s - 1) + \\ & \quad + c(T)) \pmod{2} \equiv \\ & \equiv (g_{TT_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_s) + c(T)) \pmod{2} \end{aligned}$$

Como queríamos probar. ■

Capítulo 5

Permutaciones alternadas y caminos antidirigidos

En este capítulo procederemos a probar el resultado principal, que enunciamos como sigue:

Teorema 5.1 *Sea T un torneo con n vértices, $n \geq 5$, se verifica que:*

$$h_a(T) \equiv c(T) \pmod{2}.$$

donde $h_a(T)$ es el número de caminos Hamiltonianos antidirigidos en T , que comienzan con una arista con orientación positiva, y $c(T)$ es el número de ciclos Hamiltonianos dirigidos en T .

Para $n = 3, 5$ o 7 , sea $T^c(n)$ el n -torneo definido de la siguiente manera:

Si v_i y v_j son vértices, entonces $T^c(n)$ contiene las aristas dirigidas de v_i a v_j si y solo si

$$\begin{aligned} i - j &\equiv 1 \pmod{3}, \text{ si } n = 3, \\ i - j &\equiv 1 \text{ o } 2 \pmod{5}, \text{ si } n = 5, \\ i - j &\equiv 1, 2 \text{ o } 4 \pmod{7}, \text{ si } n = 7. \end{aligned}$$

Una representación gráfica de estos torneos se muestran en la siguiente figura:

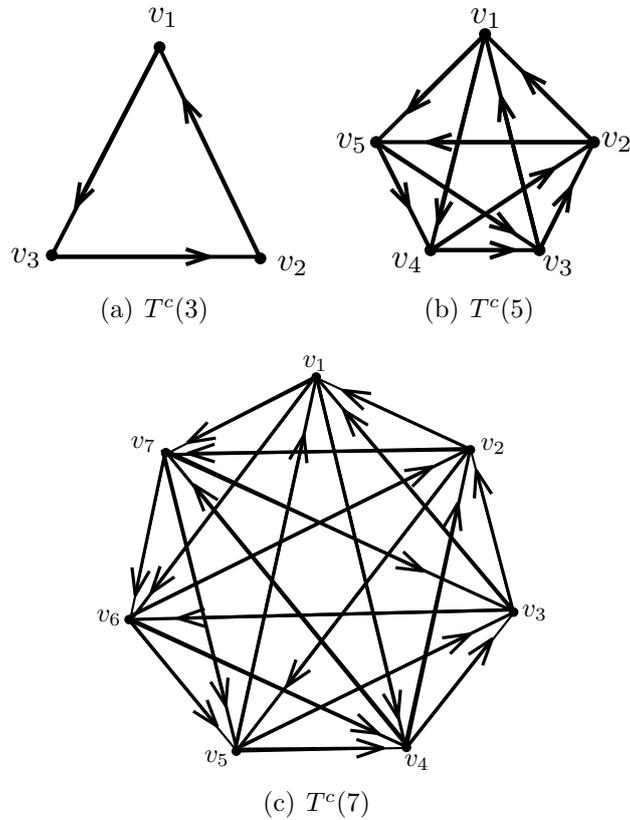


Figura 5.1: Torneos $T^c(n)$ para $n = 3, 5, 7$.

El siguiente resultado, debido a Grünbaum [4], nos garantiza la existencia de caminos Hamiltonianos antidirigidos en un torneo.

Teorema 5.2 *Excepto para $T^c(3), T^c(5)$ y $T^c(7)$, todo torneo T contiene al menos un camino Hamiltoniano antidirigido.*

Sea $n = 2k + 1$ tal que k es un entero no negativo, $k \geq 2$. Veamos un resultado de André [1] que aplicaremos a nuestro contexto. Previamente recordamos la noción de permutación alternada.

Definición 5.3 *Una **permutación** a_1, a_2, \dots, a_n de n números se dice que es **alternada** si $a_1 > a_2 < a_3 > a_4 < \dots$ o $a_1 < a_2 > a_3 < a_4 > \dots$. Al cardinal del conjunto de estas permutaciones lo denotaremos por $2A_n$.*

Ejemplo 5.4 *En el caso particular $n = 4$, dados los números $1, 2, 3, 4$, las permutaciones alternadas de estos números serían:*

$$\begin{array}{cc}
(1\ 3\ 2\ 4) & (4\ 2\ 3\ 1) \\
(1\ 4\ 2\ 3) & (3\ 2\ 4\ 1) \\
(2\ 3\ 1\ 4) & (4\ 1\ 3\ 2) \\
(2\ 4\ 1\ 3) & (3\ 1\ 4\ 2) \\
(3\ 4\ 1\ 2) & (2\ 1\ 4\ 3)
\end{array}$$

Observación 5.5 *Observemos que dada una permutación alternada, la permutación inversa también es alternada.*

Lema 5.6 [1] *El número $2A_n$ de permutaciones alternadas de n números distintas es divisible por 2^{k+1} .*

Aplicaremos el siguiente lema en la demostración del resultado principal, que resulta de reescribir el Lema 5.6 sustituyendo la noción de permutación alternada por camino Hamiltoniano antidirigido:

Lema 5.7 *El número $a(TT_n)$ de caminos Hamiltonianos antidirigidos en TT_n es divisible por 2^k .*

Demostración:

Es fácil ver que el número de enumeraciones de caminos Hamiltonianos antidirigidos en TT_n es igual al número de permutaciones alternadas de vértices en ese torneo. Además, cada camino Hamiltoniano antidirigido puede ser enumerado de dos formas distintas, dependiendo del extremo con el que comencemos la enumeración. Por tanto, el número $a(TT_n)$ de caminos Hamiltonianos antidirigidos es igual a la mitad del número de permutaciones alternadas. En otras palabras, $a(TT_n) = \frac{2A_n}{2} = A_n$ y $a(TT_n)$ es divisible por 2^k . ■

Definición 5.8 *Dado un torneo T , \bar{T} es el torneo obtenido de T cambiándole el sentido de orientación a todas las aristas de T .*

Proposición 5.9 *Con las notaciones de los resultados anteriores, se tiene que:*

$$h_a(TT_n) = \frac{A_n}{2}.$$

Demostración:

Por definición, $h_a(TT_n)$ es el número de caminos Hamiltonianos antidirigidos en TT_n empezando con una arista con orientación positiva, es decir, $h_a(TT_n) = f_{TT_n}(1, -1, \dots, 1, -1)$. Pero

$$f_{TT_n}(1, -1, \dots, 1, -1) = f_{\overline{TT_n}}(-1, 1, \dots, -1, 1) = f_{TT_n}(-1, 1, \dots, -1, 1),$$

ya que $\overline{TT_n} = TT_n$. Por lo tanto, $f_{TT_n}(1, -1, \dots, 1, -1)$ es igual a $f_{TT_n}(-1, 1, \dots, -1, 1)$ y ambos son iguales a $\frac{a(TT_n)}{2}$. Finalmente,

$$h_a(TT_n) = f_{TT_n}(1, -1, \dots, 1, -1) = \frac{a(TT_n)}{2} = \frac{A_n}{2}.$$

■

Observación 5.10 *Téngase en cuenta que los torneos $T^c(5)$ y $T^c(7)$ no son transitivos y, por tanto, no es de aplicación este resultado.*

Ya podemos pasar a probar el teorema principal.

Demostración del Teorema 5.1

Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) = (2, -1, 1, \dots, -1)$ con $\sum_{i=1}^s |\alpha_i| = \#V(T) = n$. De hecho, $s = n - 1$. Por el Teorema 4.5, puesto que la $(n - 1)$ -tupla $(1, -1, \dots, -1)$ es simétrica, tenemos:

$$h_a(T) = f_T(1, -1, \dots, -1) \equiv g_T(2, -1, \dots, -1) \pmod{2}.$$

Y por el Lema 4.10,

$$g_T(2, -1, \dots, -1) \equiv (g_{TT_n}(2, -1, \dots, -1) + c(T)) \pmod{2}.$$

Pero entonces, usando de nuevo el Teorema 4.5 y la Proposición 5.9, tenemos:

$$\begin{aligned} g_{TT_n}(2, -1, \dots, -1) &\equiv f_{TT_n}(1, -1, \dots, -1) \pmod{2} \\ &\equiv h_a(TT_n) \pmod{2} \\ &\equiv \frac{A_n}{2} \pmod{2}. \end{aligned}$$

Y como $n \geq 5, k \geq 2, \frac{A_n}{2}$ es par pues es divisible por 2^{k-1} . Luego,

$$g_{TT_n}(2, -1, \dots, -1) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Se sigue que $h_a(T) \equiv g_T(2, -1, \dots, -1) \equiv c(T) \pmod{2}$, como queríamos probar. ■

Apéndice A

Paridad de caminos y ciclos en torneos

A continuación, procederemos a ver un resultado que fue introducido por Forcade en [2], en el cual estudió la paridad de caminos y ciclos en torneos. Nosotros únicamente veremos la paridad de caminos en torneos.

Sea T_n un torneo con n vértices y v_1, v_2, \dots, v_n una permutación de los vértices. Sea $\alpha_i = 1$ cuando la arista está orientada de v_i a v_{i+1} y $\alpha_i = -1$ en caso contrario, para $1 \leq i \leq n$. Recordemos que la secuencia v_1, v_2, \dots, v_n representa un camino Hamiltoniano dirigido si todas las α_i son 1, y la secuencia representa un camino Hamiltoniano antidirigido si cada $\alpha_i = -\alpha_{i+1}$. Pretendemos estudiar los caminos cuya secuencia es una tupla $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ con $\alpha_i \in \{1, -1\}$. Dada una secuencia como la indicada, sea $P = P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$ el digrafo camino con n vértices y aristas orientadas positivamente si $\alpha_i = 1$ y negativamente si $\alpha_i = -1$. Sea $M(P, T_n)$ el conjunto de morfismos biyectivos de P en T_n que conservan la orientación de P . El resultado que vamos a mostrar da la paridad de $\sharp M(P, T_n)$ en términos de la secuencia de los α_i , generalizando así el conocido teorema de Redei [8, Teorema 14] que afirma que el número de caminos Hamiltonianos dirigidos en un torneo es impar.

Sea n un entero no negativo, denotaremos por $U(n)$ al conjunto de enteros tales que $U(n) = \{i : a_i \neq 0 \text{ y } n = a_0 2^0 + a_1 2^1 \dots + a_n 2^n\}$, siendo $n = a_0 2^0 + a_1 2^1 \dots + a_n 2^n$ la expansión 2-ádica de n . Generalmente, para p primo, la expansión p -ádica de n se define como $n = a_0 p^0 + a_1 p^1 + \dots + a_n p^n$. Si m y n son enteros no negativos,

definimos la relación binaria R dada por

$$(m, n) \in R \iff U(m) \subseteq U(n)$$

Teorema A.1 *Si $P = P(\alpha) = P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$ y T_n es un torneo con n vértices, la paridad de $\sharp M(P, T_n)$ es igual al número de subconjuntos R -linealmente ordenados (incluyendo el conjunto vacío) del conjunto*

$$R_{n,\alpha} = \{i < n : (i, n) \in R, \alpha_i = -1\}.$$

Demostración:

Lo probaremos por inducción en n y en el mayor entero k tal que $\alpha_k = -1$. Obsérvese que si $\alpha_i = 1, \forall i \leq n-1$, entonces $k = 0$.

Para $n = 2$, tenemos dos vértices y dos posibles digrafos P dependiendo de si la arista que une los vértices está orientada positivamente o no, es decir, $\alpha_1 = 1$ o $\alpha_1 = -1$. Si $\alpha_1 = 1, k = 0$ y $R_{2,\alpha} = \emptyset$. Si $\alpha_1 = -1$, entonces $U(n) = U(2) = \{1\}$ y $U(m) = U(1) = \{0\}$, por tanto, $(1, 2) \notin R$ y $R_{2,\alpha} = \emptyset$ también. Luego, el único subconjunto R -linealmente ordenado de $R_{2,\alpha}$ es \emptyset . Por otra parte, T_2 coincide con el digrafo P o corresponde al torneo resultado de cambiar la orientación de la única arista de P , por lo que existe una única aplicación, la aplicación identidad o la aplicación que intercambia los vértices, de P en T_2 . Luego, $\sharp M(P, T_2) = 1$ y tendríamos el resultado.

Por otra parte, el resultado es cierto para $k = 0$ y cualquier n , pues si $k = 0$ entonces $\alpha_i = 1 \forall i$, con lo cual, $R_{n,\alpha} = \emptyset$ y, por el Teorema de Redei, $\sharp M(P, T_n)$ es impar. Luego, podemos suponer que $n > 2$ y $k > 0$. Por hipótesis de inducción, supongamos que el teorema es cierto para $n' < n$ y para cualquier $k' < n'$ y para el valor n con valores $k' < k$.

Sea $P^* = P(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 1, 1, \dots, 1)$. Obsérvese que P^* difiere de P en la k -ésima arista. Sean $P' = P(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})$ y $P'' = P(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = P(1, \dots, 1)$, los subcaminos de P obtenidos al eliminar la arista $v_k v_{k+1}$. Consideremos la aplicación

$$M(P, T_n) \cup M(P^*, T_n) \longrightarrow \bigcup_{T_k \subseteq T_n} M(P', T_k) \times M(P'', T_k^c)$$

que a cada aplicación $f \in M(P, T_n) \cup M(P^*, T_n)$ le hace corresponder el par $(f|_{P'}, f|_{P''}) \in M(P', T_k) \times M(P'', T_k^c)$ donde T_k es el subtorneo que contiene la imagen de P' por f y T_k^c es su complementario en T_n , que coincide con el subtorneo que contiene la imagen de P'' por f . Se tiene que esta aplicación es biyectiva y su inversa es la aplicación que a cada par

$(f_1, f_2) \in M(P', T_k) \times M(P'', T_k^c)$ le asocia una aplicación en $M(P, T_n)$ o $M(P^*, T_n)$ según la arista de vértices $f_1(v_k)$ y $f_2(v_{k+1})$ tenga orientación positiva o negativa.

Con lo cual,

$$\#M(P, T_n) + \#M(P^*, T_n) = \sum_k \underbrace{\#M(P', T_k)}_{(1)} \cdot \underbrace{\#M(P'', T_k^c)}_{(2)}.$$

Pero la paridad de (1) puede obtenerse por hipótesis de inducción y (2) es impar por el teorema de Redei. Así $\#M(P, T_n) + \#M(P^*, T_n)$ tiene la paridad de $\binom{n}{k} \cdot L$, donde L es el número de subconjuntos R -linealmente ordenados de $R_{k,\alpha}$. E. Lucas probó en [7, Sección 3] que si p es primo y si a_i y b_i son los i -ésimos coeficientes de la expansión p -ádica de n y k , respectivamente, esto es, $n = a_0p^0 + a_1p^1 + \dots + a_np^n$ y $k = b_0p^0 + b_1p^1 + \dots + b_np^n$, entonces $\binom{n}{k}$ es congruente módulo p con el producto de los números combinatorios $\binom{a_i}{b_i}$. En particular, obsérvese que para $p = 2$, a_i y b_i solo pueden tomar los valores 0 o 1, por consiguiente $\binom{n}{k}$ es impar si y solo si $(k, n) \in R$. Entonces si $(k, n) \notin R$, $\binom{n}{k}$ es par y la paridad de $\#M(P, T_n) + \#M(P^*, T_n)$ coincide con la paridad de L pues, por ser R transitivo, $R_{k,\alpha} \subseteq R_{n,\alpha}$.

La prueba se completa aplicando la segunda parte de la hipótesis de inducción (valores menores de k) a $M(P^*, T_n)$. ■

En el Teorema 2.1 se muestra una versión más débil de este resultado.

Bibliografía

- [1] D. André. Sur les permutations alternées. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 7:167–184, 1881.
- [2] R. W. Forcade. Parity of paths and circuits in tournaments. *Discrete Mathematics*, 6(2):115–118, 1973.
- [3] J.L. Gross, J. Yellen, and P. Zhang. *Handbook of Graph Theory, Second Edition*. Discrete Mathematics and Its Applications. Taylor & Francis, 2013.
- [4] B. Grünbaum. Antidirected hamiltonian paths in tournaments. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 11(3):249–257, dec 1971.
- [5] F. Harary and L. Moser. The theory of round robin tournaments. *The American Mathematical Monthly*, 73(3):231–246, 1966.
- [6] F. Harary, R.Z. Norman, and D. Cartwright. *Structural models: an introduction to the theory of directed graphs*. Wiley, 1965.
- [7] E. Lucas. Sur les congruences des nombres eulériens et des coefficients différentiels des fonctions trigonométriques suivant un module premier. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 6:49–54, 1878.
- [8] J.W. Moon. *Topics on tournaments*. Athena series: Selected topics in mathematics. Holt, Rinehart and Winston, 1968.
- [9] A. El Sahili and M. Abi Aad. Antidirected hamiltonian paths and directed cycles in tournaments. *Discrete Mathematics*, 341(7):2018–2027, 2018.
- [10] R. P. Stanley. *Enumerative Combinatorics*. The Wadsworth and Brooks/Cole Mathematics Series ; 1. Springer US, Boston, MA, 1986.