



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

TRABAJO DE FIN DE GRADO  
DOBLE GRADO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

# Representaciones de Quivers

Javier Linares Torres

Tutorizado por  
Prof. Fernando Muro Jiménez

Junio 2019

## Resumen

Una representación de un quiver es una colección de espacios vectoriales y aplicaciones lineales indexadas por un grafo dirigido: el quiver. En este trabajo damos una introducción a la teoría de representaciones de quivers desarrollando las técnicas básicas que permiten dar una prueba del Teorema de Gabriel [Gab72]: *Un quiver conexo es de tipo finito si y sólo si su grafo subyacente es un diagrama de Dynkin*. Este sorprendente teorema tiene una segunda parte en donde se relacionan las clases de isomorfía de representaciones indescomponibles con el sistema de raíces del grafo subyacente en el quiver. A lo largo de este proyecto, estudiaremos la categoría de representaciones de quivers mediante un enfoque algebraico, viendo las representaciones como módulos y utilizando herramientas de álgebra homológica, pero también desde un punto de vista geométrico, definiendo las variedades de quivers y estudiando los correspondientes sistemas de raíces.

## Abstract

A quiver representation is a collection of vector spaces and linear maps indexed by a directed graph: the quiver. In this paper we intend to give an introduction to the theory of quiver representations developing basic techniques that allow us to give a proof of Gabriel's Theorem [Gab72]: *A connected quiver is of finite type if and only if its underlying graph is a Dynkin diagram*. This surprising theorem has a second part which links isomorphism classes of indecomposable representations of a given quiver with the root system of the graph underlying such a quiver. Throughout this project, we study the category of quiver representations from an algebraic approach, viewing representations as modules and using tools from homological algebra, but also from a geometrical point of view, defining quiver varieties and studying the corresponding root systems.

## Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Primeras definiciones y ejemplos</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>El álgebra de caminos</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>La resolución estándar</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Bloques</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>La variedad de las representaciones <math>\text{Rep}_Q(\alpha)</math></b>	<b>16</b>
<b>7</b>	<b>Diagramas de Dynkin y euclídeos: clasificación</b>	<b>19</b>
<b>8</b>	<b>Teorema de Gabriel</b>	<b>24</b>
<b>9</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>25</b>

## 1 Introducción

A grandes rasgos, la Teoría de Representaciones es la rama de las matemáticas que estudia la simetría en espacios lineales. Su comienzo corresponde a principios del siglo XX con el trabajo del matemático alemán F.G. Frobenius. Durante los años 30, Emmy Noether dio un punto de vista más moderno interpretando las representaciones como módulos. Desde entonces, objetos algebraicos como grupos, álgebras asociativas o álgebras de Lie han sido estudiados en el marco de esta teoría, donde la idea es representar los elementos de cierta estructura algebraica como transformaciones lineales en un espacio vectorial, dando lugar a infinidad de aplicaciones en teoría de números, geometría, teoría de la probabilidad, mecánica cuántica o teoría cuántica de campos, por mencionar algunas.

A cada álgebra asociativa de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado  $k$  se le puede hacer corresponder una estructura geométrica, el *quiver*, que no es más que un grafo dirigido<sup>1</sup>. Recíprocamente, a cada quiver le corresponde una  $k$ -álgebra asociativa, que tiene elemento identidad y dimensión finita bajo ciertas condiciones. Utilizando el quiver asociado a una álgebra  $A$ , podemos visualizar los  $A$ -módulos de dimensión finita como una colección de  $k$ -espacios vectoriales conectados a través de aplicaciones lineales, las *representaciones* del quiver. La idea de esta representación gráfica apareció a finales de los 40 con Thrall [Thr47], Grothendieck [Gro57] y posteriormente Gabriel [Gab60], pero empezaron a extenderse a principio de los 70 gracias a [Gab72] y [Gab73]. Fue en [Gab72] donde Peter Gabriel, además de probar el teorema que constituye el objetivo principal de este trabajo, definió de forma explícita las nociones de representaciones de quivers. Para muchos es considerado el punto de partida de la teoría de representaciones de álgebras asociativas moderna. Hoy en día, la teoría de representaciones de quivers constituye una de las líneas de investigación más activas dentro de este campo [CBKK11]; existen muchos problemas básicos abiertos sobre las representaciones de quivers, algunos de ellos sobre la construcción de las representaciones indescomponibles en general.

Una de las principales motivaciones que impulsó la elección de este tema para el Trabajo de Fin de Grado es la forma natural en que la teoría de representaciones de quivers aparece en ciertos problemas de álgebra lineal, como pueden ser la diagonalización simultánea de dos matrices del mismo tamaño (Ejemplo 2.8) o el problema de determinar las posibles configuraciones de  $n$  subespacios de un espacio vectorial dado (Ejemplo 2.10), permitiéndonos estudiarlos de forma general con un lenguaje sofisticado.

Es importante comentar que para un estudiante de grado como es mi caso, posiblemente sea necesario reforzar una serie de conocimientos previos antes de introducirse en esta rama de la teoría de representaciones. Los requisitos para este trabajo son:

- Nociones básicas de álgebra lineal, anillos y módulos.
- Herramientas de álgebra homológica: sobre todo el uso de los funtores Hom y Ext, así como el manejo de sucesiones exactas largas. En nuestro caso hemos utilizado como referencia principal [Rot08].
- Algunas ideas sobre teoría de categorías: los libros de introducción a la teoría de representación de quivers con los que hemos trabajado ([Sch14], [DW17] y [Bar15] sobre todo) intercalan el contenido principal con una presentación del lenguaje categórico.

---

<sup>1</sup>La distinción entre estos dos términos proviene del hecho de que la motivación que impulsó la teoría de quivers es distinta de la tradicional teoría de grafos.

- Algo de geometría algebraica: topología de Zariski del espacio afín, algunos argumentos de dimensión y acciones de grupos algebraicos.

En la Sección 2, damos las primeras definiciones y presentamos algunos problemas que motivan el estudio de las representaciones de quivers, además de enunciar el Teorema de Gabriel. En la Sección 3, asociamos a cada quiver una álgebra asociativa, el álgebra de caminos, de modo que las representaciones de un quiver se corresponden precisamente con los módulos sobre estas álgebras. En la Sección 4 y 5 estudiamos algunas propiedades de la categoría de módulos sobre álgebras de caminos, estableciendo relaciones entre las dimensiones de los espacios de endomorfismos y los de extensiones de módulos indescomponibles bajo ciertas hipótesis. En la Sección 6 damos un enfoque geométrico a las representaciones de quivers, definiendo las llamadas variedades de representaciones, de forma que estudiando la acción de un cierto grupo algebraico podremos inferir condiciones sobre las dimensiones de las órbitas correspondientes. En la Sección 7 clasificamos los grafos conexos en tres tipos: diagramas de Dynkin, diagramas euclídeos y grafos salvajes, y estudiamos los sistemas de raíces en los dos primeros casos. Finalmente, en 8 combinamos el desarrollo realizado en las secciones anteriores para demostrar el Teorema de Gabriel. Este teorema es cierto para cuerpos en general [Die99, Sec 4.7.], pero por simplicidad en lo sucesivo trabajaremos con un cuerpo algebraicamente cerrado, que denotaremos  $k$ .

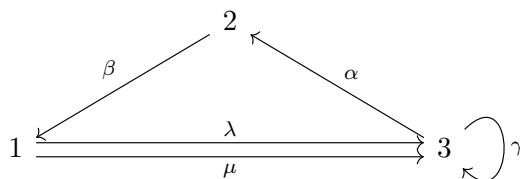
## 2 Primeras definiciones y ejemplos

**Definición 2.1.** Un quiver  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  viene dado por

- Un conjunto finito de **vértices**,  $Q_0$ , que para nosotros será  $\{1, 2, \dots, n\}$ .
- Un conjunto de **flechas**,  $Q_1$ , que también será finito.
- Aplicaciones  $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ .

Dada una flecha  $\rho$ , diremos que  $\rho$  empieza en el vértice  $s(\rho)$  y termina en  $t(\rho)$ . Lo indicaremos como  $s(\rho) \xrightarrow{\rho} t(\rho)$ .

**Ejemplo 2.2.** El siguiente quiver viene dado por:  $Q_0 = \{1, 2, 3\}$ ,  $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu\}$ ,  $s(\alpha) = 3$ ,  $s(\beta) = 2$ ,  $s(\gamma) = 3$ ,  $s(\lambda) = 1$ ,  $s(\mu) = 1$ ,  $t(\alpha) = 2$ ,  $t(\beta) = 1$ ,  $t(\gamma) = 3$ ,  $t(\lambda) = 3$ ,  $t(\mu) = 3$ :



**Definición 2.3.** Una **representación**  $X$  de  $Q$  viene dada por un  $k$ -espacio vectorial  $X_i$  para cada  $i \in Q_0$  y una aplicación lineal  $X_\rho : X_{s(\rho)} \rightarrow X_{t(\rho)}$  para cada  $\rho \in Q_1$ . Un **morfismo** de representaciones  $\theta : X \rightarrow X'$  viene dado por aplicaciones lineales  $\theta_i : X_i \rightarrow X'_i$  para cada  $i \in Q_0$  de modo que  $X'_\rho \theta_{s(\rho)} = \theta_{t(\rho)} X_\rho$  para cada  $\rho \in Q_1$ , es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_{s(\rho)} & \xrightarrow{X_\rho} & X_{t(\rho)} \\ \theta_{s(\rho)} \downarrow & & \downarrow \theta_{t(\rho)} \\ X'_{s(\rho)} & \xrightarrow{X'_\rho} & X'_{t(\rho)} \end{array}$$

es conmutativo. Definimos la composición de morfismos  $\theta : X \rightarrow X'$ ,  $\phi : X' \rightarrow X''$  como  $(\phi \circ \theta)_i = \phi_i \circ \theta_i$ . Diremos que  $X$  es de dimensión finita si cada  $X_i$  lo es. El conjunto de morfismos entre dos representaciones  $X$  y  $X'$  se denotará como  $\text{Hom}_Q(X, X')$ . A la categoría cuyos objetos son las representaciones de  $Q$  y cuyos morfismos son los morfismos de representaciones la denotaremos  $\text{Rep}(Q)$ .

Notemos que los espacios  $\text{Hom}_Q(X, Y)$  tienen estructura de  $k$ -espacio vectorial. De hecho, si consideramos el homomorfismo de espacios vectoriales

$$d : \bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}_k(X_i, Y_i) \longrightarrow \bigoplus_{\rho \in Q_1} \text{Hom}_k(X_{s(\rho)}, Y_{t(\rho)}) \quad (2.1)$$

definido como  $(\phi_x)_{x \in Q_0} \mapsto (\phi_{t(\rho)}X_\rho - Y_\rho\phi_{s(\rho)})_{\rho \in Q_1}$ , se tiene que  $\text{Hom}_Q(X, Y) = \text{Ker}(d)$ . Un isomorfismo en  $\text{Rep}(Q)$  es un morfismo  $\theta$  tal que cada  $\theta_i$  es un isomorfismo de espacios vectoriales,  $i \in Q_0$ .

**Ejemplo 2.4.** Sea  $Q$  el quiver  $1 \begin{matrix} \xrightarrow{\rho} \\ \nearrow \tau \end{matrix} 2 \xleftarrow{\sigma} 3$  y  $4 \nearrow$ . Consideremos las siguientes representaciones de  $Q$ :

$$X : \begin{matrix} k & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \longrightarrow & k^2 & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \longleftarrow & k \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \nearrow & & & & \end{matrix}, \quad Y : \begin{matrix} k & \xrightarrow{1} & k & \xleftarrow{1} & k \\ & \nearrow 1 & & & \end{matrix}$$

En este caso tenemos  $\text{Hom}_Q(X, Y) \cong k^2$ .

**Definición 2.5.** Sean  $X, Y \in \text{Rep}(Q)$ . Definimos su **suma directa**  $X \oplus Y$  como

$$(X \oplus Y)_i = X_i \oplus Y_i, \quad (X \oplus Y)_\rho = \begin{bmatrix} X_\rho & 0 \\ 0 & Y_\rho \end{bmatrix},$$

para todo  $i \in Q_0$ ,  $\rho \in Q_1$ . Diremos que una representación es **trivial** si  $X_i = 0$  para todo  $i \in Q_0$ . Si  $X$  es isomorfo a  $V \oplus W$  con  $V, W$  no triviales diremos que  $X$  es **descomponible**.

En caso contrario diremos que  $X$  es **indescomponible**. Esta terminología quedará justificada cuando en 3.6 probemos la equivalencia entre  $\text{Rep}(Q)$  y la categoría de módulos a izquierda sobre una cierta  $k$ -álgebra. También veremos que toda representación de dimensión finita tiene, salvo isomorfismo, una única descomposición como suma directa de indescomponibles (5.2). Por ello, el problema de clasificar las representaciones de un quiver se reduce a clasificar las representaciones indescomponibles.

**Ejemplo 2.6.** Una representación del quiver

$$1 \xrightarrow{\rho} 2$$

es un par de espacios vectoriales  $X_1, X_2$  junto con una aplicación lineal  $X_\rho : X_1 \rightarrow X_2$ . Sabemos de álgebra lineal que podemos tomar bases en  $X_1$  y  $X_2$  de modo que la matriz asociada a  $X_\rho$  viene dada por

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde  $r$  es el rango de  $X_\rho$  e  $I_r$  es la matriz identidad de dimensión  $r$ . Por lo tanto toda representación  $X$  es isomorfa a través de un cambio de base a una del tipo

$$X_1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} X_2 ,$$

de modo que dos representaciones  $X$  e  $Y$  son isomorfas si y sólo si  $\dim X_1 = \dim Y_1$ ,  $\dim X_2 = \dim Y_2$  y los rangos de  $X_\rho$  e  $Y_\rho$  coinciden. Para este quiver, existen 3 representaciones indescomponibles:

$$A : k \longrightarrow 0, \quad B : 0 \longrightarrow k, \quad C : k \xrightarrow{1} k,$$

ya que que toda representación  $X$  es isomorfa a

$$X \cong A^{d_1-r} \oplus B^{d_2-r} \oplus C^r,$$

donde  $d_1 = \dim X_1$ ,  $d_2 = \dim X_2$  y  $r$  es el rango de  $X_\rho$ .

**Ejemplo 2.7.** Sea  $Q$  el quiver

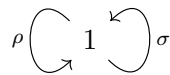


Una representación de  $Q$  no es más que un espacio vectorial  $X_1$  con un endomorfismo  $X_\rho$ . Un morfismo de representaciones  $X \rightarrow Y$  es una aplicación lineal  $\theta : X_1 \rightarrow Y_1$  tal que  $\theta X_\rho = Y_\rho \theta$ . En particular, los endomorfismos de  $X$  son exactamente los endomorfismos de  $X_1$  que conmutan con  $X_\rho$ . Dado que  $k$  es algebraicamente cerrado, podemos tomar una base de  $X_1$  de modo que la matriz de  $X_\rho$  tenga la forma

$$\begin{bmatrix} J(n_1, \lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(n_1, \lambda_1) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J(n_r, \lambda_r) \end{bmatrix},$$

donde  $J(n, \lambda)$  denota el bloque de Jordan  $n \times n$  de autovalor  $\lambda \in k$ . Dado que la matriz normal de Jordan es única salvo permutación de los bloques, dos representaciones  $X$  e  $Y$  serán isomorfas si y sólo si  $X_\rho$  e  $Y_\rho$  tienen la misma forma normal. Además podemos ver que las representaciones indescomponibles se corresponden con los bloques de Jordan, por lo que deducimos que hay un número infinito de ellas, parametrizadas por un parámetro continuo  $\lambda \in k$  y otro discreto,  $n$ .

**Ejemplo 2.8.** El problema de clasificar las representaciones del quiver con dos lazos



es equivalente a clasificar los pares de matrices salvo conjugación simultánea. Este es un problema clásico de álgebra lineal que no ha sido satisfactoriamente resuelto. Aunque existen algoritmos para calcular un conjunto de invariantes que nos permiten distinguir dos representaciones no isomorfas de una dimensión dada  $d$  (véase [Fri83] y [Bel00]), el número de pasos en estos algoritmos y el número de invariantes a calcular crece con  $d$ , así que no hay una descripción uniforme de la solución.

**Ejemplo 2.9.** Generalizando el ejemplo 2.6, podemos considerar el quiver de Kronecker con  $r$  flechas, que consta de dos vértices y  $r$  flechas  $\rho_1, \dots, \rho_r : 1 \rightarrow 2$ . La clasificación de representaciones de este quiver es equivalente a clasificar  $r$ -uplas de matrices del mismo tamaño salvo la relación  $(A_1, \dots, A_r) \sim (A'_1, \dots, A'_r)$  si existen matrices invertibles  $U$  y  $T$  con  $A'_i = TA_iU^{-1}$  para  $i = 1, \dots, r$ .

Para el caso  $r = 2$ , la clasificación fue dada por el propio Kronecker. La lista de indescomponibles es la siguiente [Bar15, Prop. 1.6]:

$$k^n \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{bmatrix} I_n \\ z^T \end{bmatrix}} \\ \xleftarrow{\begin{bmatrix} z^T \\ I_n \end{bmatrix}} \end{array} k^{n+1}, \quad k^m \begin{array}{c} \xrightarrow{I_m} \\ \xleftarrow{J(m,\lambda)} \end{array} k^m, \quad k^m \begin{array}{c} \xrightarrow{J(m,0)} \\ \xleftarrow{I_m} \end{array} k^m, \quad k^{n+1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{bmatrix} z & I_n \end{bmatrix}} \\ \xleftarrow{\begin{bmatrix} I_n & z \end{bmatrix}} \end{array} k^n.$$

donde  $n \geq 0$ ,  $m \geq 1$  son números naturales,  $\lambda \in k$  y  $z \in k^n$  denota el vector nulo.

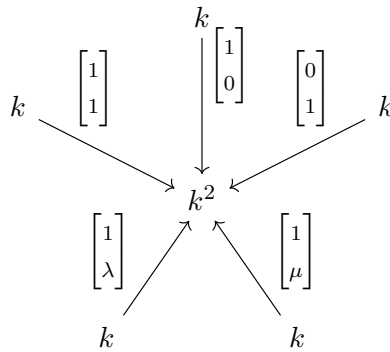
Cuando  $r = 3$ , el problema se vuelve más complicado y nos encontramos con una familia de representaciones indescomponibles caracterizada por dos parámetros continuos, a saber, las representaciones  $X_{\lambda,\mu}$  dadas por [Bar15, Prop. 1.8]:

$$(X_{\lambda,\mu})_1 = k, (X_{\lambda,\mu})_2 = k^2, (X_{\lambda,\mu})_{\rho_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, (X_{\lambda,\mu})_{\rho_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } (X_{\lambda,\mu})_{\rho_3} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}.$$

**Ejemplo 2.10.** También como una generalización de 2.6, podemos considerar el quiver de  $n$ -subespacios, dado por  $n + 1$  vértices y  $n$  flechas  $\rho_i : i \rightarrow n + 1$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Una representación  $X$  de este quiver en el que todas las aplicaciones son inyectivas se puede interpretar como una configuración de  $n$  subespacios de  $X_{n+1}$ . Para el problema de dos subespacios tenemos una lista finita de indescomponibles [Bar15, Prop. 1.5.]

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & k & \longleftarrow & 0 & k & \longrightarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & 0 & \longrightarrow & 0 & \longleftarrow & k \\ & & k & \xrightarrow{1} & k & \longleftarrow & 0 & 0 & \longrightarrow & k & \xleftarrow{1} & k & k & \xrightarrow{1} & k & \xleftarrow{1} & k. \end{array}$$

Para el caso en el que  $n = 5$ , de nuevo encontramos una familia 2-paramétrica de representaciones indescomponibles:



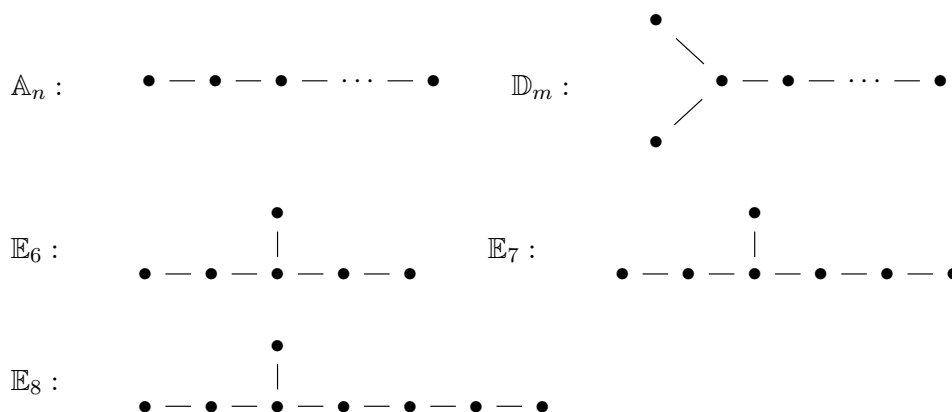
En este caso, existen otras familias de representaciones indescomponibles donde el número de parámetros se puede hacer arbitrariamente grande.

Hemos observado diferentes comportamientos en la clasificación de representaciones indescomponibles para varios quivers. En los Ejemplos 2.6 y 2.10 para  $n = 2$  hemos obtenido un número finito de representaciones indescomponibles. A este tipo de quiver se le denomina de tipo **finito**. Si por el contrario hay un número infinito de indescomponibles

pero se pueden parametrizar en una familia de dimensión a lo sumo 1, entonces el quiver se denomina de tipo **manso** (Ejemplos 2.7 y 2.9 para  $r = 2$ ). Si la situación es similar a la de los Ejemplos 2.9 para  $r = 3$  o 2.10 con  $n = 5$ , diremos que el quiver es de tipo **salvaje**. Para una definición precisa de manso y salvaje, véase por ejemplo [KJ16, Cap. 7]. Es bien conocido que todo quiver es de tipo finito, manso o salvaje, de forma excluyente. De hecho esta tricotomía es cierta para toda álgebra de dimensión finita [CB88].

Olvidándonos de la orientación de las flechas en un quiver, obtenemos su grafo subyacente. El siguiente teorema, cuando menos sorprendente, fue probado por Gabriel en [Gab72] y constituye el objetivo fundamental de este trabajo.

**Teorema 2.11** (Gabriel, parte I). *Un quiver conexo es de tipo finito si y sólo si su grafo subyacente es un diagrama de Dynkin de tipo ADE, que son los siguientes ( $n \geq 1, m \geq 4$ ):*



El subíndice en los diagramas de Dynkin indican el número de vértices del grafo. Estos diagramas juegan un papel importante en la clasificación de álgebras de Lie simples, en los sistemas de raíces cristalográficos y grupos de Coxeter, y otros tipos de objetos “de tipo finito”. El Teorema de Gabriel nos permite por lo tanto distinguir entre quivers finitos e infinitos (mansos y salvajes). La prueba que exponemos en este trabajo sigue los pasos dados en las notas de William Crawley-Boevey [CB92], donde el argumento principal no involucra el uso de funtores de reflexión como en [ASS06] o [DW17].

### 3 El álgebra de caminos

Dado un quiver  $Q$ , podemos hacerle corresponder una  $k$ -álgebra asociativa, la  $k$ -álgebra de caminos, que denotaremos por  $kQ$ . Este concepto es clave ya que al probar la equivalencia de categorías  $\text{Rep}(Q) \simeq kQ\text{-Mod}$ , podremos aplicar herramientas potentes de la teoría de módulos a las representaciones del quiver. Además, las álgebras de caminos son esenciales en la teoría de representaciones de álgebras asociativas pues para toda  $k$ -álgebra  $A$  de dimensión finita, se tiene que  $A$  es Morita equivalente<sup>2</sup> a una  $k$ -álgebra del tipo  $kQ_A/I$  (véase [ASS06, I.6.10. y II.3.7.]), donde  $Q_A$  es un quiver asociado a  $A$  e  $I$  es un ideal admisible<sup>3</sup>. Por lo tanto si tenemos una propiedad de una  $k$ -álgebra de dimensión finita

<sup>2</sup>Dos  $k$ -álgebras  $A$  y  $B$  son Morita equivalentes si las categorías  $A\text{-Mod}$  y  $B\text{-Mod}$  son equivalentes. Informalmente podemos decir que, desde el punto de vista de la Teoría de Representaciones,  $A$  y  $B$  son iguales.

<sup>3</sup>Quiere decir que  $R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2$  para cierto  $m \geq 2$ , donde  $R_Q$  es el ideal (por ambos lados) generado por las flechas. Informalmente, estas condiciones implican que los caminos de una longitud mayor o igual a  $m$  son nulos y que no podemos “cortar las flechas”.



sobre un cuerpo algebraicamente cerrado que pueda ser detectada en la categoría  $A\text{-Mod}$ , como ser manso o salvaje, es suficiente estudiarla para álgebras de caminos con relaciones, es decir, del tipo  $kQ_A/I$ . Podemos decir por lo tanto que el papel jugado por las álgebras de caminos en la teoría de álgebras asociativas de dimensión finita es similar al que juegan los anillos de polinomios en las álgebras conmutativas.

**Definición 3.1.** Un **camino** no trivial de longitud  $m$  de  $Q$  es una sucesión  $\rho_1 \dots \rho_m$  ( $m \geq 1$ ) de aristas que satisfacen  $t(\rho_{i+1}) = s(\rho_i)$  para  $1 \leq i \leq m$ . Un diagrama del tipo  $\bullet \xleftarrow{\rho_1} \bullet \xleftarrow{\rho_2} \dots \xleftarrow{\rho_m} \bullet$  representa un camino que empieza en  $s(\rho_m)$  y que termina en  $t(\rho_1)$ . Para cada vértice  $i \in Q_0$ , denotaremos como  $e_i$  el **camino trivial** que empieza y termina en  $i$ . Denotaremos por  $s(x)$  y por  $t(x)$  al vértice inicial y terminal del camino  $x$ , respectivamente. Un **ciclo orientado** es un camino no trivial  $x$  tal que  $s(x) = t(x)$ .

**Definición 3.2.** El **álgebra de caminos**  $kQ$  es la  $k$ -álgebra cuya base son los caminos de  $Q$  y donde el producto de dos caminos  $x, y$  viene dado por la composición  $xy$  cuando  $t(y) = s(x)$  o por 0 en caso contrario.

**Ejemplo 3.3.** Consideremos el quiver  $1 \xrightarrow{\rho} 2 \xrightarrow{\sigma} 3$ . Entonces  $kQ$  tiene como base los caminos  $e_1, e_2, e_3, \rho, \sigma$  y  $\sigma\rho$ . El producto de los caminos  $\sigma$  y  $\rho$  viene dado por  $\sigma\rho$ , mientras que  $\rho\sigma = 0$ . Otros productos son  $\rho\rho = 0, e_1\rho = 0, e_2\rho = \rho, e_3(\sigma\rho) = \sigma\rho, e_1e_1 = e_1, e_1e_2 = 0$ , etc.

Notemos que en este trabajo la composición de caminos se denota igual que la composición de aplicaciones, dando así prioridad a los  $kQ$ -módulos a izquierda. En algunas referencias, como [Sch14] o [DW17], se desarrolla la teoría componiendo por la derecha y trabajando con  $kQ$ -módulos a derecha.

**Ejemplo 3.4.** Veamos un par de ejemplos de  $k$ -álgebras que podemos construir como álgebras de caminos:

1. Si  $Q$  es el quiver  $\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 1 \end{array}$  entonces  $kQ \cong k[t]$ . Si  $Q$  tiene 1 vértice y  $r$  lazos, entonces  $kQ$  es la  $k$ -álgebra asociativa libre en  $r$  letras.
2. Si  $Q$  es tal que a lo más hay un camino entre cualquiera dos vértices, entonces  $kQ$  es isomorfo a la subálgebra

$$\{C \in M_n(k) \mid C_{ij} = 0 \text{ si no hay caminos de } j \text{ a } i\}$$

de  $M_n(k)$ , mediante el isomorfismo  $e_i \mapsto E_{ii}, \rho \mapsto E_{ji}$ , donde  $s(\rho) = i, t(\rho) = j$  para  $\rho \in Q_1, i \in Q_0$  y  $E_{ji}$  denota la matriz con todas sus entradas nulas salvo  $(E_{ji})_{ji} = 1$ . En particular, las matrices triangulares inferiores se pueden identificar con el álgebra de caminos de  $\mathbb{A}_n : 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n$ .

Sea  $Q$  un quiver y  $A = kQ$ . A continuación vamos a realizar una serie de observaciones que describen las propiedades de  $A$  y que podremos resumir en la siguiente frase: “El álgebra de caminos es una  $k$ -álgebra básica y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos”. Denotaremos como  $\text{Hom}_A(X, Y)$  los homomorfismos de  $A$ -módulos a izquierda de  $X$  a  $Y$  y  $\text{End}_A(X) = \text{Hom}_A(X, X)$ . Recordemos que un  $A$ -módulo  $P$  es proyectivo si para todo homomorfismo sobreyectivo  $f : X \rightarrow Y$  y todo morfismo  $g : P \rightarrow Y$ , existe un morfismo  $h : P \rightarrow X$  tal que  $g = fh$ . Los módulos libres son proyectivos y si  $P = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$ ,  $P$  es proyectivo si y sólo si cada  $P_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) lo es.

1. Los  $e_i$  son **idempotentes ortogonales**, es decir,  $e_i e_j = 0$  si  $i \neq j$  y  $e_i^2 = e_i$ .
2.  $A$  tiene elemento identidad dado por  $1 = \sum_{i=1}^n e_i$ . Es decir, los  $e_i$  forman un conjunto completo de idempotentes ortogonales.
3. Los  $k$ -espacios vectoriales  $Ae_i, e_j A, e_j A e_i$  tienen como base los caminos que empiezan en  $i$ , los que terminan en  $j$  y los que empiezan en  $i$  y terminan en  $j$ , respectivamente.
4. Se tiene que  $A = \bigoplus_{i=1}^n Ae_i$  (como  $A$ -módulo por la izquierda). Deducimos que los  $Ae_i$  son  $A$ -módulos proyectivos.
5. Si  $X$  es un  $A$ -módulo por la izquierda, entonces  $\text{Hom}_A(Ae_i, X) \cong e_i X$  (como espacios vectoriales) mediante el isomorfismo  $\varphi \in \text{Hom}_A(Ae_i, X) \mapsto \varphi(e_i) \in e_i X$ .
6. Si  $0 \neq f \in Ae_i$  y  $0 \neq g \in e_i A$ , entonces  $fg \neq 0$ : notemos que si  $x$  e  $y$  son caminos de longitud máxima que aparecen en las expresiones de  $f$  y  $g$  respectivamente, el coeficiente de  $xy$  en  $fg$  es no nulo.
7. Los  $e_i$  son idempotentes **primitivos**, es decir,  $Ae_i$  es un  $A$ -módulo indescomponible. En efecto, si  $\text{End}_A(Ae_i) \cong e_i A e_i$  contuviese un idempotente  $f$ , se tendría que  $f^2 = f = f e_i$ , luego  $f(e_i - f) = 0$  y ahora usamos 6.
8. Si  $e_i \in Ae_j A$ , entonces  $i = j$ , ya que una base del espacio  $Ae_j A$  está formada por los caminos que pasan por  $e_j$ .
9.  $A$  es una  $k$ -álgebra básica, es decir,  $Ae_i \not\cong Ae_j$  para  $i \neq j$ : de existir un isomorfismo  $\phi : Ae_i \rightarrow Ae_j$ , tendríamos que  $\phi(e_i) \in e_i Ae_j$  y  $\phi^{-1}(e_j) \in e_j Ae_i$ , por lo que  $e_i = \phi^{-1}(\phi(e_i)e_j) = \phi(e_i)\phi^{-1}(e_j) \in Ae_j A$ , lo que contradice 8.

En la siguiente proposición enumeramos algunas otras propiedades que cumplen las álgebras de caminos, pero no daremos la prueba ya que no serán utilizadas en lo sucesivo.

**Proposición 3.5.** 1.  $A$  es de dimensión finita si y sólo si  $Q$  no tiene ciclos orientados.

2.  $A$  es prima, es decir,  $IJ \neq 0$  para ideales no nulos  $I, J$  si y sólo si para todo  $i, j \in Q_0$ , existe un camino desde  $i$  hasta  $j$ .
3.  $A$  es noetheriana por la izquierda (derecha) si y sólo si dado un ciclo que pasa por  $i$ , entonces sólo una única flecha empieza (termina) en  $i$ .
4. Una base del radical de Jacobson de  $A$  son los caminos  $x$  tales que no hay otro camino desde  $t(x)$  a  $s(x)$ .
5. El centro de  $A$  viene dado por  $k \times k \times \cdots \times k \times k[t] \times k[t] \times \cdots \times k[t]$ , con un factor por cada componente conexa  $C$  de  $Q$  de modo que dicho factor es  $k[t]$  si y sólo si  $C$  es un ciclo.

A continuación probaremos la equivalencia entre las categorías  $\text{Rep}(Q)$  y  $kQ\text{-Mod}$  que hemos comentado anteriormente. Haremos sólo la construcción de los funtores cuasi-inversos, ya que la comprobación de que las correspondientes composiciones son naturalmente equivalentes a los funtores identidad es tediosa y no son interesantes en el contexto de este trabajo.

**Lema 3.6.** La categoría  $\text{Rep}(Q)$  es equivalente a  $kQ\text{-Mod}$ .

*Demostración.* Primero definamos  $\mathcal{F} : kQ\text{-Mod} \rightarrow \text{Rep}(Q)$  que a cada  $kQ$ -módulo  $M$  le hace corresponder la representación dada por  $X_i = e_i M$  para cada  $i \in Q_0$  y por  $X_\rho : e_{s(\rho)} M \rightarrow e_{t(\rho)} M$ ,  $m \mapsto \rho m$  para  $\rho \in Q_1$ . Si  $\phi : M \rightarrow N$  es un morfismo de  $kQ$ -módulos, entonces definimos  $\mathcal{F}(\phi) : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(N)$  dada por  $\mathcal{F}(\phi)_i = \mathcal{F}(\phi)|_{e_i M}$ .

Por otro lado, definimos  $\mathcal{G} : \text{Rep}(Q) \rightarrow kQ\text{-Mod}$  del siguiente modo. Dada una representación  $X$  de  $Q$ , definimos  $\mathcal{G}(X) = \bigoplus_{i \in Q_0} X_i$ . Sean  $X_i \xrightarrow{\varepsilon_i} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\pi_i} X_i$  los morfismos canónicos. Entonces definimos la acción de  $kQ$  sobre  $\mathcal{G}(X)$  como  $\rho_1 \cdots \rho_m x = \varepsilon_{t(\rho_1)} X_{\rho_1} \cdots X_{\rho_m} \pi_{s(\rho_m)}(x)$ ,  $e_i x = \varepsilon_i \pi_i(x)$ . Si  $\theta : X \rightarrow X'$  es un morfismo de representaciones, definimos  $\mathcal{G}(\theta) : \bigoplus_{i \in Q_0} X_i \rightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} X'_i$  como la suma directa de los  $\theta_i$ .  $\square$

**Ejemplo 3.7.** Sea  $Q$  un quiver y  $A = kQ$ . Construyamos la representación correspondiente a los  $A$ -módulos proyectivos  $Ae_i$ ,  $i \in Q_0$ . Si llamamos  $X = \mathcal{F}(Ae_i)$ , entonces la representación  $X$  viene dada por  $X_j = e_j Ae_i$ ,  $j \in Q_0$  y por  $X_\rho : e_{s(\rho)} Ae_i \rightarrow e_{t(\rho)} Ae_i$ ,  $a \mapsto \rho a$ ,  $\rho \in Q_1$ . En particular, si  $Q$  es el quiver

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 4 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 2 & & \end{array}$$

entonces tenemos que  $Ae_1$  se corresponde con la representación

$$\begin{array}{ccccc} & & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & & \\ & & \downarrow & & \\ k & \xrightarrow{\quad} & k^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & k^2 \\ & \searrow 1 & \nearrow & & \\ & & k & & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gracias a esta equivalencia, podemos trasladar el lenguaje de las categorías de módulos al de las representaciones de quivers, de modo que podremos hablar de subrepresentaciones, núcleos, imágenes, sucesiones exactas, etc. De aquí en adelante usaremos la misma notación para referirnos tanto a módulos como a representaciones.

**Definición 3.8.** Sea  $Q$  un quiver con  $n$  vértices. El **vector de dimensiones** de una representación  $X$  de dimensión finita es el vector  $\underline{\dim} X \in \mathbb{N}^n$  dado por  $(\underline{\dim} X)_i = \dim X_i = \dim \text{Hom}_A(Ae_i, X)$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Aquí  $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$  denota el conjunto de enteros no negativos. Se define la **forma de Euler** como la forma bilinear en  $\mathbb{Z}^n$  dada por

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i - \sum_{\rho \in Q_1} \alpha_{s(\rho)} \beta_{t(\rho)}$$

para  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$ . Se define la **forma de Tits**  $q(\alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle$ , que es una forma cuadrática en  $\mathbb{Z}^n$ . Finalmente, definimos la **forma bilinear simétrica** o **forma de Cartan** como  $(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha \rangle$ .

**Ejemplo 3.9.** Para el quiver

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

las matrices de las formas de Euler y Cartan respecto a la base canónica de  $\mathbb{Z}^3$  son, respectivamente,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

## 4 La resolución estándar

En esta sección vamos a probar que las álgebras de caminos son hereditarias, es decir, los submódulos de módulos proyectivos son proyectivos<sup>4</sup>. Para ello veremos que en la categoría  $kQ\text{-Mod}$  siempre existen resoluciones proyectivas que acaban al segundo paso, que denominaremos resoluciones estándar. De hecho, se tiene que para un ideal  $I$  de  $kQ$  cualquiera, la  $k$ -álgebra  $kQ/I$  es hereditaria si y sólo si  $I = 0$  [GR97, Sec. 8.2].

Recordemos algunos rudimentos de álgebra homológica: dado un anillo  $R$ , una resolución proyectiva de un  $R$ -módulo  $M$  es una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\delta_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} M \longrightarrow 0$$

donde cada  $P_i$  es proyectivo. En esta sección trabajaremos con los funtores  $\text{Ext}_R^i(-, M)$ , que se definen como los funtores derivados por la derecha de  $\text{Hom}_R(-, M)$ , es decir,  $\text{Ext}_R^i(N, M)$  es el  $i$ -ésimo grupo (en nuestro caso  $k$ -espacio vectorial) de cohomología del cocomplejo de cadenas obtenido al aplicar  $\text{Hom}_R(-, M)$  a cualquier resolución proyectiva de un  $R$ -módulo  $N$ . El grupo abeliano  $\text{Ext}_R^1(M, N)$  también se puede obtener al considerar las extensiones de  $M$  por  $N$ , es decir, sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{a} E \xrightarrow{b} M \longrightarrow 0$$

bajo la relación de equivalencia  $0 \rightarrow N \xrightarrow{a} E \xrightarrow{b} M \rightarrow 0 \sim 0 \rightarrow N \xrightarrow{a'} E' \xrightarrow{b'} M \rightarrow 0$  si existe un isomorfismo  $\zeta$  tal que  $a' = \zeta a$  y  $b = b'\zeta$ . La suma en este grupo es descrita mediante la denominada “suma de Baer” (véase [Rot08, Sec. 6.2 y 7.2] para el caso general o [Bar15, Sec. 5.2.] para  $R$  una  $k$ -álgebra), mientras que el elemento neutro en dicho grupo corresponde con la extensión  $0 \rightarrow N \rightarrow N \oplus M \rightarrow M \rightarrow 0$ . Además, si  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$  es una sucesión exacta, al aplicar el funtor  $\text{Hom}_R(-, M)$  se obtiene la sucesión exacta larga (recordemos que, al ser  $\text{Hom}_R(-, M)$  exacto por la izquierda,  $\text{Ext}_R^0(-, M) = \text{Hom}_R(-, M)$ ):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(Z, M) & \xrightarrow{g^*} & \text{Hom}_R(Y, M) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}_R(X, M) \\ & & & & \Delta_1 & & \\ & \searrow & & & & & \\ & & \text{Ext}_R^1(Z, M) & \xrightarrow{g_1^*} & \text{Ext}_R^1(Y, M) & \xrightarrow{f_1^*} & \text{Ext}_R^1(X, M) \\ & & & & \Delta_2 & & \\ & \searrow & & & & & \\ & & \text{Ext}_R^2(Z, M) & \xrightarrow{g_2^*} & \text{Ext}_R^2(Y, M) & \xrightarrow{f_2^*} & \text{Ext}_R^2(X, M) \xrightarrow{\Delta_3} \cdots \end{array}$$

veamos por ejemplo cómo funcionan los homomorfismos  $\Delta_1 : \text{Hom}_R(X, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(Z, M)$  y  $g_1^* : \text{Ext}_R^1(Z, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(Y, M)$ . Si  $\phi \in \text{Hom}_R(X, M)$ , entonces  $\Delta_1(\phi)$  es la extensión

<sup>4</sup>Un comentario obligado acerca de la definición de  $k$ -álgebra hereditaria. En principio deberíamos definir  $k$ -álgebra hereditaria a izquierda, ya que la propiedad de que los submódulos de módulos proyectivos sean proyectivos es una condición impuesta en la categoría de  $kQ$ -módulos a izquierda que, en general, no implica que se cumpla también en la categoría de  $kQ$ -módulos a derecha,  $\text{Mod-}kQ$ . Sin embargo, para las álgebras de caminos tenemos la equivalencia de categorías

$$\text{Mod-}kQ \simeq kQ^{\text{op}}\text{-Mod},$$

donde  $Q^{\text{op}}$  es el quiver obtenido al invertir el sentido de las flechas de  $Q$ . Por lo tanto  $\text{Mod-}kQ$  también es hereditaria.

obtenida al considerar el pushout de  $f$  y  $\phi$ :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \longrightarrow 0 \\ & & \phi \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \Delta_1(\phi) : 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \end{array}$$

de forma análoga, si  $\xi : 0 \rightarrow M \xrightarrow{a} E \xrightarrow{b} Z \rightarrow 0$  en una extensión de  $Z$  sobre  $M$ ,  $g_1^*(\xi)$  se obtiene como el pullback de  $g$  y  $b$ :

$$\begin{array}{ccccccc} g_1^*(\xi) : 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{a} & E & \xrightarrow{b} & Z \longrightarrow 0 \end{array}$$

Sea  $Q$  un quiver,  $A = kQ$  y  $X$  un  $A$ -módulo a izquierda. Empecemos por describir los  $A$ -módulos proyectivos y los homomorfismos que aparecerán en la resolución estándar de  $X$ . Sean

$$P_0 = \bigoplus_{i \in Q_0} Ae_i \otimes_k e_i X, \quad P_1 = \bigoplus_{\rho \in Q_1} Ae_{t(\rho)} \otimes_k e_{s(\rho)} X$$

y sean  $g : P_0 \rightarrow X$  y  $f : P_1 \rightarrow P_0$  definidos como

$$\begin{aligned} g(a \otimes x) &= ax && \text{para cada } a \in Ae_i, x \in e_i X, \\ f(a \otimes x) &= a\rho \otimes x - a \otimes \rho x && \text{para cada } a \in Ae_{t(\rho)}, x \in e_{s(\rho)} X. \end{aligned}$$

Obsérvese que tanto  $P_0$  como  $P_1$  sólo dependen de  $Q$  y del vector de dimensiones de  $X$ , mientras que  $f$  y  $g$  sí dependen de las aplicaciones lineales correspondientes a las flechas del quiver. También tenemos que para todo  $\xi \in P_0$ , podemos expresar  $\xi$  de forma única como

$$\xi = \sum_{i \in Q_0} \sum_{a \in A_i} a \otimes x_a,$$

donde  $A_i = \{\text{Caminos } a \text{ con } s(a) = i\}$  y con  $x_a \in e_i X$  casi todos nulos<sup>5</sup>. Definimos  $\text{grado}(\xi)$  como el máximo de las longitudes de los caminos  $a$  con  $x_a \neq 0$ . El siguiente lema será necesario para probar el teorema principal de esta sección:

**Lema 4.1.** *Sea  $\xi = \sum_{i \in Q_0} \sum_{a \in A_i} a \otimes x_a \in P_0$ . Entonces  $\xi + \text{Im}(f) = \{\xi + \eta \mid \eta \in \text{Im}(f)\}$  contiene un elemento de grado 0.*

*Demostración.* Sea  $a \in A_i$  es un camino no trivial tal que  $x_a \neq 0$ , entonces podemos expresar  $a = a'\rho$  con  $\rho \in Q_1$  tal que  $s(\rho) = i$  y con  $a'$  otro camino cumpliendo  $s(a') = t(\rho)$ . Viendo  $a' \otimes x_a$  como un elemento de la  $\rho$ -ésima componente de  $P_1$ , tenemos

$$f(a' \otimes x_a) = a \otimes x_a - a' \otimes \rho x_a.$$

Supongamos que  $\xi$  tiene grado  $d > 0$ , entonces llamando

$$A_i^d = \{\text{Caminos } a = a'\rho \text{ de longitud } d \text{ con } \rho \in Q_1 \text{ tal que } s(\rho) = i, t(\rho) = s(a')\},$$

tenemos que

$$\xi - f \left( \sum_{i \in Q_0} \sum_{a \in A_i^d} a' \otimes x_a \right)$$

tiene grado menor estricto que  $d$ , de modo que podemos bajar el grado hasta hacerlo nulo.  $\square$

<sup>5</sup>Recordemos que si  $Q$  tiene ciclos orientados los espacios  $Ae_i$  pueden ser de dimensión infinita.

**Teorema 4.2.** *Sea  $Q$  un quiver y  $A = kQ$ . Si  $X$  es un  $A$ -módulo por la izquierda, entonces tenemos la sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0.$$

Dicha sucesión se denomina **resolución estándar** de  $X$ .

*Demostración.* Notemos en primer lugar que para todo  $a \otimes x \in Ae_{t(\rho)} \otimes e_{s(\rho)}X$ , se tiene que

$$f(g(a \otimes x)) = f(a\rho \otimes x - a \otimes \rho x) = a\rho x - a\rho x = 0$$

por lo tanto  $\text{Im}(f) \subseteq \text{Ker}(g)$ . Para probar la otra inclusión, sea  $\xi \in \text{Ker}(g)$  y gracias al Lema 4.1 podemos tomar  $\xi' \in \xi + \text{Im}(f)$  de grado 0. Entonces

$$0 = g(\xi) = g(\xi') = g\left(\sum_{i=1}^n e_i \otimes x'_{e_i}\right) = \sum_{i=1}^n x'_{e_i},$$

con  $x'_{e_i} \in e_i X$ . Dado que  $X = \bigoplus_{i=1}^n e_i X$ , cada  $x'_{e_i}$  debe ser nulo y por lo tanto  $\xi' = 0$  y  $\xi \in \text{Im}(f)$ . Por otro lado,  $g$  es sobreyectiva ya que dado  $x \in X$ , tenemos que

$$g\left(\sum_{i \in Q_0} e_i \otimes e_i x\right) = (e_1 + \cdots + e_n)x = 1x = x.$$

Finalmente, probemos  $\text{Ker}(f) = 0$ . Sea  $\xi \in \text{Ker}(f)$ , entonces podemos escribirlo como

$$\xi = \sum_{\rho \in Q_1} \sum_{a \in A_{t(\rho)}} a \otimes x_{\rho,a}$$

donde  $x_{\rho,a} \in e_{s(\rho)}X$  no todos nulos. Si  $\xi \neq 0$ , podemos tomar  $\tilde{a}$  un camino de longitud máxima tal que  $x_{\tilde{\rho},\tilde{a}} \neq 0$  para algún  $\tilde{\rho} \in Q_1$ . Sin embargo,

$$f(\xi) = \sum_{\rho \in Q_1} \sum_{a \in A_\rho} a\rho \otimes x_{\rho,a} - \sum_{\rho \in Q_1} \sum_{a \in A_\rho} a \otimes \rho x_{\rho,a}$$

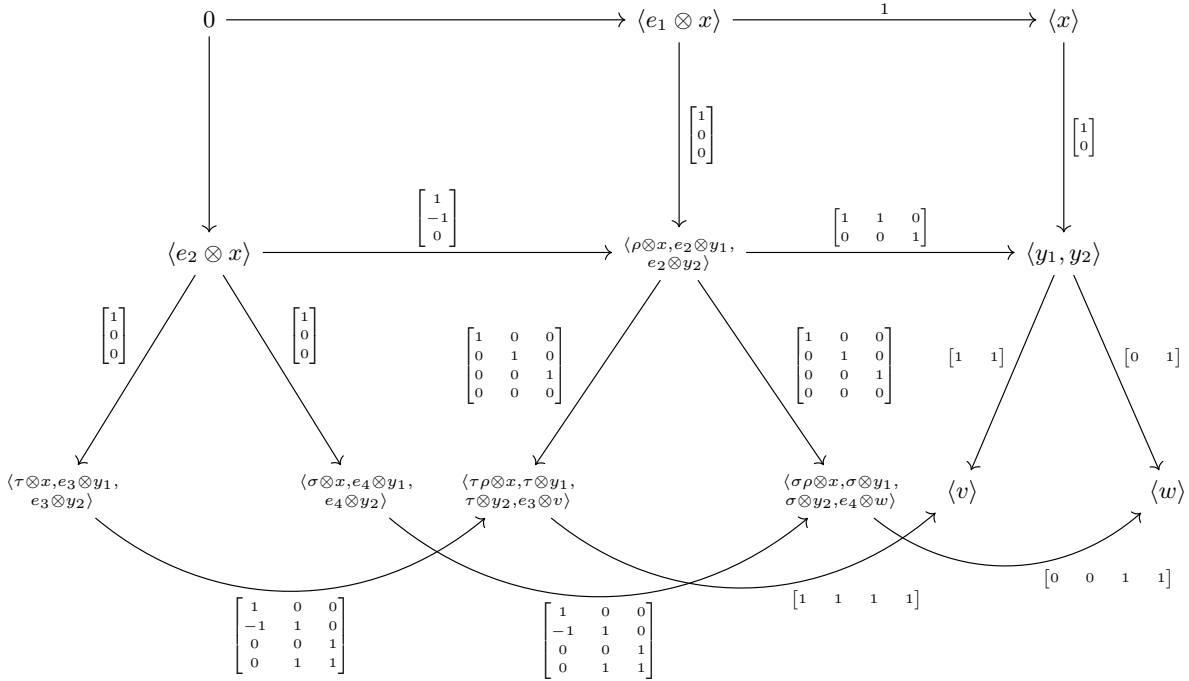
cumple que el coeficiente de  $\tilde{a}\tilde{\rho} \otimes x_{\tilde{\rho},\tilde{a}} \neq 0$ , lo que es una contradicción.  $\square$

Dado que la resolución estándar  $0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$  acaba al segundo paso, deducimos que  $\text{Ext}_A^1(X, Y) = \text{Coker}(f^*)$ , con  $f^* : \text{Hom}_A(P_0, Y) \rightarrow \text{Hom}_A(P_1, Y)$  definido como  $f^*(\phi) = \phi \circ f$ .

**Ejemplo 4.3.** Consideremos la siguiente representación  $X$  de  $\mathbb{D}_4 = 1 \xrightarrow{\rho} 2 \begin{matrix} \xrightarrow{\sigma} 4 \\ \xrightarrow{\tau} 3 \end{matrix}$ ,

$$X : \quad k \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} k^2 \begin{matrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} k \\ \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}} k \end{matrix}$$

y denominemos  $\{x\}, \{y_1, y_2\}, \{v\}, \{w\}$  las bases tomadas en  $X_1, X_2, X_3, X_4$ , respectivamente. La sucesión  $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} X$  queda descrita en términos de representación de quivers como:



Gracias a la resolución estándar podemos demostrar que las álgebras de caminos son hereditarias y además relacionar las dimensiones de los espacios  $\text{Hom}_A(X, Y)$  y  $\text{Ext}_A^1(X, Y)$  con los vectores de dimensiones de  $X$  e  $Y$  mediante la forma de Euler.

**Corolario 4.4.** 1. Si  $X$  es un  $A$ -módulo por la izquierda, entonces  $\text{Ext}_A^i(X, Y) = 0$  para todo  $A$ -módulo  $Y$ ,  $i \geq 2$ .

2.  $A$  es hereditaria, es decir, si  $X$  es un submódulo de un módulo  $P$  proyectivo, entonces  $X$  es proyectivo.

3. Si  $X, Y$  son de dimensión finita, se tiene que  $\dim \text{Hom}_A(X, Y) - \dim \text{Ext}_A^1(X, Y) = \langle \dim X, \dim Y \rangle$ .

4. Si  $X$  es de dimensión finita, entonces  $\dim \text{End}_A(X) - \dim \text{Ext}_A^1(X, X) = q(\dim X)$ .

*Demostración.* 1. Los  $A$ -módulos  $Ae_i \otimes V$  son isomorfos a la suma directa de  $\dim V$  (entiéndase también el caso en el que  $\dim V$  es infinita) copias de  $Ae_i$ , que son proyectivos por ser sumandos directos de  $A$ , que a su vez es proyectivo por ser libre. Por lo tanto la resolución estándar es una resolución proyectiva de  $X$ . El resultado se sigue de la definición de  $\text{Ext}_A^i(X, Y)$ ,  $i \geq 2$ .

2. Para todo  $A$ -módulo  $Y$ ,  $\text{Ext}_A^1(X, Y) = \text{Ext}_A^2(P/X, Y) = 0$ , ya que si  $0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} X \rightarrow 0$  es la resolución estándar de  $X$ , entonces la sucesión exacta

$$0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{\tilde{g}} P \xrightarrow{\pi} P/X \rightarrow 0,$$

donde  $\tilde{g} : P_0 \xrightarrow{g} X \hookrightarrow P$  y  $\pi$  es la proyección canónica, es una resolución proyectiva de  $P/X$ , de modo que  $\text{Ext}_A^1(X, Y) = \text{Coker}(f^*) = \text{Ext}_A^2(P/X, Y) = 0$ . Concluimos

observando que un  $A$ -módulo  $X$  es proyectivo si y sólo si  $\text{Ext}_A^1(X, Y) = 0$  para todo  $A$ -módulo  $Y$ .

3. Notemos que dada una sucesión exacta de espacios vectoriales de dimensión finita  $0 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow V_4 \rightarrow 0$ , se tiene que  $\dim V_1 + \dim V_3 = \dim V_2 + \dim V_4$ . Con esto en mente, aplicamos el funtor  $\text{Hom}_A(-, Y)$  a la resolución estándar para obtener la sucesión exacta larga (notemos que  $\text{Ext}_A^1(P_0, Y) = \text{Ext}_A^1(P_1, Y) = 0$  por ser  $P_0$  y  $P_1$  proyectivos):

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_A(P_0, Y) \longrightarrow \text{Hom}_A(P_1, Y) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(X, Y) \longrightarrow 0.$$

Ahora bien,  $\dim \text{Hom}_A(P_0, Y) = \sum_{i=1}^n \dim X_i \dim Y_i$  ya que<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(P_0, Y) &= \text{Hom}_A\left(\bigoplus_{i \in Q_0} Ae_i \otimes e_i X, Y\right) \cong \bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}_A(Ae_i \otimes e_i X, Y) \\ &\cong \bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}_k(e_i X, \text{Hom}_A(Ae_i, Y)) \cong \bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}_k(X_i, Y_i) \end{aligned}$$

y análogamente  $\text{Hom}(P_1, Y) \cong \bigoplus_{\rho \in Q_1} \text{Hom}_k(X_{s(\rho)}, Y_{t(\rho)})$  por lo que  $\dim \text{Hom}_A(P_1, Y) = \sum_{\rho \in Q_1} \dim X_{s(\rho)} \dim Y_{t(\rho)}$ . El resultado de sigue de la definición de  $\langle \underline{\dim} X, \underline{\dim} Y \rangle$ .

4. Aplicar 3 a  $X = Y$ . □

## 5 Bloques

En esta sección consideraremos  $A$ -módulos de dimensión finita con  $A$  una  $k$ -álgebra hereditaria o equivalentemente  $\text{Ext}_A^i(X, Y) = 0$  para todo  $A$ -módulo  $X, Y$  e  $i \geq 2$ . En particular los resultados serán ciertos cuando  $A$  es el álgebra de caminos de un quiver. Nuestro objetivo será estudiar la relación entre los espacios  $\text{Ext}_A^1(X, X)$  y  $\text{End}_A(X)$  cuando  $X$  es un  $A$ -módulo indescomponible. Recordemos en primer lugar un par de resultados generales, conocidos a veces en la literatura como el Lema de Fitting y el Teorema de Krull-Schmidt (véase, por ejemplo, [ASS06, I.4.8, I.4.10]):

**Lema 5.1** (Lema de Fitting). *Sea  $A$  una  $k$ -álgebra y  $X$  un  $A$ -módulo a izquierda.*

1. *Si la  $k$ -álgebra  $\text{End}_A(X)$  es local, entonces  $X$  es indescomponible.*
2. *Si  $X$  es de dimensión finita e indescomponible, entonces  $\text{End}_A(X)$  es local y cada uno de sus elementos es bien nilpotente o bien invertible.*

**Teorema 5.2** (Teorema de Krull-Schmidt). *Sea  $A$  una  $k$ -álgebra y  $X$  un  $A$ -módulo a izquierda. Si  $X$  tiene dimensión finita, entonces  $X$  es la suma directa de módulos indescomponibles que, salvo permutación, están únicamente determinados salvo isomorfismo.*

**Definición 5.3.** Diremos que un  $A$ -módulo  $X$  es un **bloque** si  $\text{End}_A(X) = k$ .

<sup>6</sup>Aquí usamos que el funtor  $\text{Hom}_A(-, Y)$  transforma sumas en productos y en particular conmuta con sumas directas finitas y a continuación el isomorfismo adjunto descrito en [Rot08, Th. 2.76.]: Sean  $R$  y  $S$  anillos. Sea  $A$  un  $R$ -módulo a izquierda,  $B$  un  $S$ - $R$ -bimódulo y  $C$  un  $S$ -módulo a izquierda. Entonces se tiene

$$\text{Hom}_S(B \otimes_R A, C) \cong \text{Hom}_R(A, \text{Hom}_S(B, C)).$$



Por 5.1, tenemos que todo bloque es indescomponible. A continuación probamos un par de lemas que serán de gran importancia en la demostración del Teorema de Gabriel:

**Lema 5.4.** *Supongamos que  $X, Y$  son indescomponibles. Si  $\text{Ext}_A^1(Y, X) = 0$ , entonces todo morfismo no nulo  $\theta : X \rightarrow Y$  es o bien inyectivo o bien sobreyectivo.*

*Demostración.* Consideremos las sucesiones exactas:

$$\xi : 0 \longrightarrow \text{Im}(\theta) \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{\pi} \text{Coker}(\theta) \longrightarrow 0, \quad \eta : 0 \longrightarrow \text{Ker}(\theta) \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\tilde{\theta}} \text{Im}(\theta) \longrightarrow 0.$$

Donde  $i, \pi$  e  $\iota$  son las inclusiones y proyecciones canónicas y  $\tilde{\theta}$  está definido como  $\theta$ . Aplicamos  $\text{Hom}_A(\text{Coker}(\theta), -)$  a la sucesión  $\eta$  para obtener la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow \text{Ext}_A^1(\text{Coker}(\theta), \text{Ker}(\theta)) \xrightarrow{\iota_{*1}} \text{Ext}_A^1(\text{Coker}(\theta), X) \xrightarrow{\tilde{\theta}_{*1}} \text{Ext}_A^1(\text{Coker}(\theta), \text{Im}(\theta)) \longrightarrow 0.$$

donde usamos que  $\text{Ext}_A^i(X, Y) = 0$  para  $i \geq 2$  por ser  $A$  hereditaria, de modo que  $\tilde{\theta}_{*1}$  es sobreyectiva y  $\xi = \tilde{\theta}_{*1}(\zeta)$  para algún  $\zeta \in \text{Ext}_A^1(\text{Coker}(\theta), X)$ . Pongamos que  $\zeta$  se corresponde con la sucesión exacta  $0 \rightarrow X \xrightarrow{a} Z \xrightarrow{b} \text{Coker}(\theta) \rightarrow 0$ , de modo que existe un homomorfismo  $\beta : X \rightarrow \text{Im}(\theta)$  dando lugar al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \zeta : 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{a} & Z & \xrightarrow{b} & \text{Coker}(\theta) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \parallel \\ \xi : 0 & \longrightarrow & \text{Im}(\theta) & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{\pi} & \text{Coker}(\theta) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ahora bien, la sucesión

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix}} Z \oplus \text{Im}(\theta) \xrightarrow{\begin{bmatrix} \gamma & -i \end{bmatrix}} Y \longrightarrow 0$$

es exacta, así que es escindible pues  $\text{Ext}_A^1(X, Y) = 0$  por hipótesis y por lo tanto  $X \oplus Y \cong Z \oplus \text{Im}(\theta)$ . Si  $\text{Im}(\theta) \neq 0$ ,  $X$  o  $Y$  es un sumando de  $\text{Im}(\theta)$  por el Teorema de Krull-Schmidt. Pero si  $\theta$  no es inyectiva ni sobreyectiva, entonces  $\dim \text{Im}(\theta) < \dim X, \dim Y$ , lo que es una contradicción.  $\square$

**Corolario 5.5.** *Si  $X$  es indescomponible sin autoextensiones, es decir,  $\text{Ext}_A^1(X, X) = 0$ , entonces  $X$  es un bloque.*

*Demostración.* Todo  $\theta \in \text{End}_A(X)$  sería inyectivo o sobreyectivo y por lo tanto isomorfismo. En ese caso  $\text{End}_A(X)$  sería una álgebra de división de dimensión finita sobre  $k$ , que es algebraicamente cerrado, luego  $\text{End}_A(X) \cong k$ .  $\square$

**Lema 5.6.** *Si  $X$  es indescomponible y no es un bloque, entonces  $X$  tiene un submódulo que es un bloque con autoextensiones, es decir,  $\text{Ext}_A^1(X, X) \neq 0$ .*

*Demostración.* Es suficiente probar que si  $X$  es indescomponible y no es un bloque, entonces existe un submódulo propio  $U \subset X$  tal que es indescomponible y con autoextensiones, ya que si  $U$  no es un bloque se puede argumentar por inducción en la dimensión de  $X$ .

Escojamos  $\theta \in \text{End}_A(X)$  con  $I = \text{Im}(\theta)$  de dimensión mínima no nula. Dado que  $X$  es indescomponible y no es un bloque,  $\text{End}_A(X) \neq k$  es local, luego  $\theta$  es nilpotente y además  $\theta^2 = 0$  por minimalidad. Tenemos así que  $I \subseteq \text{Ker}(\theta)$ . Sea  $\text{Ker}(\theta) = \bigoplus_{i=1}^r K_i$  con cada  $K_i$  indescomponible, y tomemos  $j$  tal que la composición  $\alpha : I \hookrightarrow \text{Ker}(\theta) \rightarrow K_j$  es

distinta de cero. Afirmamos que podemos tomar  $U = K_j$ . En efecto, dado que la aplicación  $X \rightarrow I \xrightarrow{\alpha} K_j \hookrightarrow X$  tiene imagen  $\text{Im}(\alpha) \neq 0$ , deducimos que  $\alpha$  tiene que ser inyectiva por minimalidad. Por otro lado, tenemos que  $\text{Ext}_A^1(I, K_j) \neq 0$ . De lo contrario, consideremos el pushout

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\theta) & \xrightarrow{i} & X & \longrightarrow & I \longrightarrow 0 \\ & & \pi \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & K_j & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & I \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde  $i : \text{Ker}(\theta) \rightarrow X$  y  $\pi : \text{Ker}(\theta) \rightarrow K_j$  son la inclusión y proyección canónica, respectivamente. La fila inferior sería escindible, con  $Y \cong X$ , por lo tanto  $K_j$  sería un sumando de  $X$ , lo que es una contradicción.

Ahora bien,  $K_j$  debe tener autoextensiones pues la sucesión exacta  $0 \rightarrow I \xrightarrow{\alpha} K_j \rightarrow X \rightarrow 0$  induce una aplicación sobreyectiva  $\text{Ext}_A^1(K_j, K_j) \rightarrow \text{Ext}_A^1(I, K_j) \neq 0$ .  $\square$

## 6 La variedad de las representaciones $\text{Rep}_Q(\alpha)$

En esta sección sea  $Q$  un quiver con  $n$  vértices y  $A = kQ$ . Definiremos la variedad de las representaciones de  $Q$  de vector de dimensiones  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  y describiremos algunas de sus propiedades elementales. Usaremos algunos argumentos de dimensión de geometría algebraica. Para profundizar más en las variedades de quivers, véase [KJ16] y para una introducción a la teoría de las acciones de grupos algebraicos, hemos consultado [Bri10].

Denotaremos el espacio afín  $r$ -dimensional con la topología de Zariski como  $\mathbb{A}^r$  y consideraremos subconjuntos  $U \subseteq \mathbb{A}^r$  **localmente cerrados**, es decir, tales que son abiertos en su clausura  $\overline{U}$ . Un conjunto localmente cerrado no vacío  $U$  se dice **irreducible** si todo abierto no vacío de  $U$  es denso en  $U$ . Recordemos que la **dimensión** de un conjunto localmente cerrado  $U$  es

$$\sup \{n \mid \exists Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n \text{ subconjuntos cerrados e irreducibles de } U\}.$$

Tenemos que  $\dim U = \dim \overline{U}$ , que si  $W = U \cup V$ ,  $\dim W = \max\{\dim U, \dim V\}$  y que el espacio  $\mathbb{A}^r$  tiene dimensión  $r$ .

Un **grupo algebraico** es un conjunto localmente cerrado que tiene estructura de grupo, de modo que la multiplicación y tomar inversos son aplicaciones regulares. Si un grupo algebraico  $G$  actúa sobre  $\mathbb{A}^r$ , entonces para cada  $x \in \mathbb{A}^r$  las órbitas  $\mathcal{O}_x = \{g \cdot x \in \mathbb{A}^r \mid g \in G\}$  tienen las siguientes propiedades ([KJ16, Cap 2]):

1. Cada órbita  $\mathcal{O}_x$  es localmente cerrada.
2.  $\overline{\mathcal{O}_x}$  es una unión de órbitas. Es más,  $\overline{\mathcal{O}_x} - \mathcal{O}_x$  es una unión de órbitas de dimensión estrictamente menor que  $\dim \mathcal{O}_x$ .
3. Para cada  $x \in \mathbb{A}^r$ , el subgrupo estabilizador  $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$  es un subgrupo algebraico cerrado de  $G$ . Además se tiene el isomorfismo canónico

$$\mathcal{O}_x \cong G/G_x.$$

En particular,  $\dim G = \dim \mathcal{O}_x + \dim G_x$ .

**Definición 6.1.** Sea  $Q$  un quiver y  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , donde  $n$  es el número de vértices de  $Q$ . Definimos la **variedad de representaciones** de  $Q$  de vector de dimensiones  $\alpha$  como

$$\text{Rep}_Q(\alpha) = \prod_{\rho \in Q_1} \text{Hom}_k(k^{\alpha_s(\rho)}, k^{\alpha_t(\rho)}).$$

Se tiene que  $\text{Rep}_Q(\alpha)$  es isomorfo a  $\mathbb{A}^r$ , donde  $r = \sum_{\rho \in Q_1} \alpha_{t(\rho)} \alpha_{s(\rho)}$ . Cada elemento  $x \in \text{Rep}_Q(\alpha)$  nos da una representación de  $Q$ , que denotaremos por  $R(x)$  y que viene dada por  $R(x)_i = k^{\alpha_i}$  para  $i \in Q_0$  y  $R(x)_\rho$  es la aplicación lineal cuya matriz respecto a la base estándar es  $x_\rho$ , para  $\rho \in Q_1$ .

**Definición 6.2.** Sea  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  ( $n \geq 1$ ). Definimos

$$\text{GL}(\alpha) = \prod_{i=1}^n \text{GL}(\alpha_i, k).$$

Se trata de un grupo algebraico que es un abierto de  $\mathbb{A}^s$ , donde  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$ . Si  $Q$  es un quiver con  $n$  vértices,  $\text{GL}(\alpha)$  actúa sobre el espacio  $\text{Rep}_Q(\alpha)$  por conjugación, es decir,

$$(g \cdot x)_\rho = g_{t(\rho)} x_\rho g_{s(\rho)}^{-1}$$

para  $g \in \text{GL}(\alpha)$  y  $x \in \text{Rep}_Q(\alpha)$ . Notemos que los subgrupos estabilizadores  $\text{GL}(\alpha)_x = \{g \in \text{GL}(\alpha) \mid g_{s(\rho)} x_\rho g_{t(\rho)}^{-1} = x_\rho, \rho \in Q_1\}$  son exactamente los endomorfismos de  $R(x)$  invertibles, que denotaremos  $\text{Aut}_A(R(x))$ .

Dada una representación  $X \in \text{Rep}(Q)$  con  $\dim X = \alpha$ , tenemos que  $X \cong R(x)$  para algún  $x \in \text{Rep}_Q(\alpha)$  tomando una base. Además, dos elementos  $x, y \in \text{Rep}_Q(\alpha)$  definen representaciones isomorfas  $R(x) \cong R(y)$  si y sólo si  $y \in \mathcal{O}_x$ . Dicho de otro modo, dado un quiver  $Q$  con  $n$  vértices y  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , tenemos una biyección

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Clases de isomorfía en } \text{Rep}(Q) \\ \text{de vector de dimensiones } \alpha \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{ \text{Órbitas en } \text{Rep}_Q(\alpha) \}.$$

Para  $X \in \text{Rep}(Q)$  denotaremos  $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_x$ , con  $x \in \text{Rep}_Q(\alpha)$  cualquiera tal que  $X \cong R(x)$ .

**Ejemplo 6.3.** Sea  $Q = \mathbb{A}_3$  y  $\alpha = (1, 1, 1) \in \mathbb{N}^3$ . Entonces  $\text{Rep}_Q(\alpha) \cong \mathbb{A}^2$ ,  $\text{GL}(\alpha) = (\mathbb{A} - \{0\})^3$  y dos puntos  $(\lambda, \mu), (\lambda', \mu') \in \text{Rep}_Q(\alpha)$  están en la misma órbita si y sólo si existen  $a, b, c \in k$  no nulos que hagan conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} k & \xrightarrow{\lambda} & k & \xrightarrow{\mu} & k \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c \\ k & \xrightarrow{\lambda'} & k & \xrightarrow{\mu'} & k \end{array}$$

es decir,  $\lambda = 0$  si y sólo si  $\lambda' = 0$  y  $\mu = 0$  si y sólo si  $\mu' = 0$ . Por lo tanto hay 4 órbitas, a saber,  $\{(0, 0)\}$ ,  $\{(\lambda, \mu) \in \mathbb{A}^2 \mid \lambda = 0, \mu \neq 0\}$ ,  $\{(\lambda, \mu) \in \mathbb{A}^2 \mid \mu = 0, \lambda \neq 0\}$  y  $\{(\lambda, \mu) \in \mathbb{A}^2 \mid \lambda, \mu \neq 0\}$ . Las representaciones correspondientes a dichas órbitas son

$$k \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} k, \quad k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} k, \quad k \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k, \quad k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k,$$

respectivamente. Pronto veremos que el hecho de que la órbita de mayor dimensión corresponda con la única representación indescomponible no es casualidad.

**Lema 6.4.** Sea  $X \in \text{Rep}(Q)$  con  $\dim X = \alpha$ . Se tiene que

$$\dim \text{Rep}_Q(\alpha) - \dim \mathcal{O}_X = \dim \text{Ext}_A^1(X, X).$$

*Demostración.* Pongamos que  $X \cong R(x)$  para cierto  $x \in \text{Rep}_Q(\alpha)$ . Notemos que  $\text{GL}(\alpha)$  es un abierto no vacío de  $\mathbb{A}^r$ , con  $r = \sum_{i \in Q_0} \alpha_i^2$ , así que es denso, y por lo tanto  $\dim \text{GL}(\alpha) = s$ . Análogamente,  $\text{GL}(\alpha)_x = \text{Aut}_A(R(x))$  es también un abierto no vacío de la variedad lineal  $\text{End}_A(R(x))$ , luego también denso, así que  $\dim \text{Aut}_A(R(x)) = \dim \text{End}_A(R(x)) = \dim \text{End}_A(X)$ . Por lo tanto

$$\dim \mathcal{O}_X = \dim \text{GL}(\alpha) - \dim \text{GL}(\alpha)_x = r - \dim \text{End}_A(X).$$

teniendo en cuenta la expresión de  $q(\alpha)$ , llamando  $s = \sum_{\rho \in Q_1} \alpha_{s(\rho)} \alpha_{t(\rho)}$  y usando 4.4, tenemos finalmente

$$\dim \text{Rep}_Q(\alpha) - \dim \mathcal{O}_X = r - s - \dim \text{End}_A(X) = q(\alpha) - \dim \text{End}_A(X) = \dim \text{Ext}_A^1(X, X). \quad \square$$

**Corolario 6.5.** 1. Si  $\alpha \neq 0$  y  $q(\alpha) \leq 0$ , entonces hay infinitas órbitas en  $\text{Rep}_Q(\alpha)$ .

2.  $\mathcal{O}_X$  es abierto si y sólo si  $X$  no tiene autoextensiones.

3. Hay a lo sumo, salvo isomorfismo, un módulo de vector de dimensiones  $\alpha$  sin autoextensiones.

*Demostración.* 1. Si  $X$  es un módulo con vector de dimensiones  $\alpha$ , entonces  $\text{End}_A(X)$  es no nulo de modo que

$$\dim \text{Rep}_Q(\alpha) - \dim \mathcal{O}_X = \dim \text{Ext}_A^1(X, X) = \dim \text{End}_A(X) - q(\alpha) > 0.$$

y por cuestiones de dimensión debe haber infinitas órbitas.

2. Si  $\text{Ext}_A^1(X, X) = 0$  entonces  $\dim \mathcal{O}_X = \dim \text{Rep}_Q(\alpha)$  si y sólo si  $\dim \overline{\mathcal{O}_X} = \dim \text{Rep}_Q(\alpha)$  y en dicho caso  $\overline{\mathcal{O}_X} = \text{Rep}_Q(\alpha)$ , dado que un subconjunto propio y cerrado de un conjunto irreducible tiene dimensión estrictamente menor. Como  $\mathcal{O}_X$  es localmente cerrado, es abierto. Recíprocamente, si  $\mathcal{O}_X$  es abierto en  $\text{Rep}_Q(\alpha)$ , entonces  $\overline{\mathcal{O}_X} = \text{Rep}_Q(\alpha)$  pues  $\text{Rep}_Q(\alpha)$  es irreducible y por lo tanto sus dimensiones son iguales, luego  $\dim \text{Ext}_A^1(X, X) = 0$ .

3. Si  $X, Y$  son tales módulos,  $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y \subseteq \text{Rep}_Q(\alpha)$  son abiertos y por lo tanto densos, luego su intersección es no vacía y se tiene que  $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ . □

**Lema 6.6.** Si  $\xi : 0 \rightarrow U \rightarrow X \rightarrow V \rightarrow 0$  es una sucesión exacta no escindible, entonces  $\mathcal{O}_{U \oplus V} \subseteq \overline{\mathcal{O}_X}$  y además  $\mathcal{O}_{U \oplus V} \neq \mathcal{O}_X$ .

*Demostración.* Elijamos  $u \in \text{Rep}_Q(\underline{\dim} U)$  y  $v \in \text{Rep}_Q(\underline{\dim} V)$  tales que  $U \cong R(u)$  y  $V \cong R(v)$ . Para cada vértice  $i \in Q_0$ , podemos identificar  $U_i$  con un subespacio de  $X_i$ . Elijiendo bases de los espacios  $U_i$  y extendiéndolas a bases de  $X_i$ , podemos tomar  $x \in \mathcal{O}_X$  tal que  $x_\rho$  es de la forma

$$x_\rho = \begin{bmatrix} u_\rho & w_\rho \\ 0 & v_\rho \end{bmatrix}.$$

Para  $\lambda \in k$  no nulo, definimos  $g_\lambda \in \text{GL}(\alpha)$  como  $(g_\lambda)_i = \begin{bmatrix} \lambda \text{Id}_{U_i} & 0 \\ 0 & \text{Id}_{V_i} \end{bmatrix}$  para cada  $i \in Q_0$ .

Entonces se tiene que

$$(g_\lambda x)_\rho = \begin{bmatrix} u_\rho & \lambda w_\rho \\ 0 & v_\rho \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto  $\overline{\mathcal{O}_X}$  contiene al punto con matrices  $\begin{bmatrix} u_\rho & 0 \\ 0 & v_\rho \end{bmatrix}$ , que corresponde a  $U \oplus V$ . Finalmente veamos que  $X$  no es isomorfo a  $U \oplus V$ : aplicando el funtor  $\text{Hom}_A(-, U)$  a la sucesión  $\xi$  obtenemos la sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(V, U) \longrightarrow \text{Hom}_A(X, U) \longrightarrow \text{Hom}_A(U, U) \xrightarrow{\Delta_1} \text{Ext}_A^1(V, U) \longrightarrow \dots$$

de modo que

$$\begin{aligned} & \dim \text{Hom}_A(V, U) - \dim \text{Hom}_A(X, U) + \dim \text{Hom}_A(U, U) - \dim \text{Im}(\Delta_1) \\ &= \dim \text{Hom}_A(V \oplus U, U) - \dim \text{Hom}_A(X, U) - \dim \text{Im}(\Delta_1) = 0 \end{aligned}$$

pero  $\Delta_1(\text{Id}_U) = \xi$ , que es una extensión no trivial, luego  $\dim \text{Im}(\Delta_1) \neq 0$  y por lo tanto

$$\dim \text{Hom}_A(U \oplus V, U) \neq \dim \text{Hom}_A(X, U),$$

de donde se deduce que  $X \not\cong U \oplus V$ .  $\square$

**Corolario 6.7.** Si  $\mathcal{O}_X$  es una órbita en  $\text{Rep}_Q(\alpha)$  de máxima dimensión y  $X = U \oplus V$ , entonces  $\text{Ext}_A^1(U, V) = 0$ .

*Demostración.* Si hubiese una extensión no escindible  $0 \longrightarrow U \longrightarrow E \longrightarrow V \longrightarrow 0$ , entonces  $\mathcal{O}_X \subseteq \overline{\mathcal{O}_E} - \mathcal{O}_E$ , de modo que  $\dim \mathcal{O}_X < \dim \mathcal{O}_E$ , lo que es una contradicción.  $\square$

## 7 Diagramas de Dynkin y euclídeos: clasificación

En esta sección vamos a clasificar los grafos conexos en 3 tipos: diagramas de Dynkin, diagramas euclídeos y el resto, a veces llamados grafos salvajes. Dado un grafo conexo  $\Gamma$  con  $n$  vértices, definiremos una forma cuadrática  $q$  en  $\mathbb{Z}^n$  asociada al mismo de forma similar a como lo hemos hecho para quivers, de modo que  $\Gamma$  será Dynkin, euclídeo o salvaje según  $q$  sea definida positiva, semidefinida positiva o indefinida, respectivamente. En los primeros dos casos estudiaremos los correspondientes sistemas de raíces, dejando así terminados los preparativos para el Teorema de Gabriel.

**Definición 7.1.** Sea  $\Gamma$  un grafo finito de vértices  $\{1, 2, \dots, n\}$ , en el que pueden haber lazos y aristas múltiples, de modo que  $\Gamma$  viene dado por el conjunto de números naturales

$$\{n_{ij} = n_{ji} \text{ número de aristas entre } i \text{ y } j\}.$$

Sea  $\langle -, - \rangle$  la forma bilineal en  $\mathbb{Z}^n$  definida por

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i - \sum_{i < j}^n n_{ij} \alpha_i \beta_j$$

y sean  $q(\alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle$ ,  $(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha \rangle$ . Notemos que conociendo tanto  $\Gamma$ ,  $q$  o  $(-, -)$  podemos determinar el resto ya que  $q(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha, \alpha)$ ,  $(\alpha, \beta) = q(\alpha + \beta) - q(\alpha) - q(\beta)$  y  $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = -n_{ij}$  ( $i \neq j$ ), donde  $\varepsilon_i$  denota el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{Z}^n$ . Dado un quiver  $Q$  y  $\Gamma$  es su grafo subyacente, las definiciones de  $q$  y  $(-, -)$  coinciden con las dadas en 3.8. Sin embargo,  $\langle -, - \rangle$  depende de la orientación de las flechas y ambas definiciones coinciden si se enumeran los vértices de modo que para todo  $\rho \in Q_1$ ,  $s(\rho) < t(\rho)$ .

**Definición 7.2.** Sea  $q$  una forma cuadrática en  $\mathbb{Z}^n$ . Decimos que  $q$  es **definida positiva** si  $q(\alpha) > 0$  para todo  $0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}^n$ . Decimos que  $q$  es **semidefinida positiva** si  $q(\alpha) \geq 0$  para todo  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ . El **radical** de  $q$  es el conjunto

$$\text{rad}(q) = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n \mid (\alpha, -) = 0\}.$$

Decimos que  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$  es **sincero** si cada componente de  $\alpha$  es distinta de 0. En lo sucesivo, establecemos un orden parcial en  $\mathbb{Z}^n$  dado por  $\alpha \leq \beta$  si  $\beta - \alpha \in \mathbb{N}^n$ .

**Lema 7.3.** Si  $\Gamma$  es un grafo conexo y existe  $\beta \geq 0$  vector radical no nulo, entonces  $\beta$  es sincero y  $q$  es semidefinida positiva. Además, se tiene que si  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$

$$q(\alpha) = 0 \iff \alpha \in \mathbb{Q}\beta \iff \alpha \in \text{rad}(q).$$

donde  $\mathbb{Q}\beta = \{q\beta \mid q \in \mathbb{Q}\}$ .

*Demostración.* Por hipótesis tenemos que, para cada  $i = 1, \dots, n$ ,

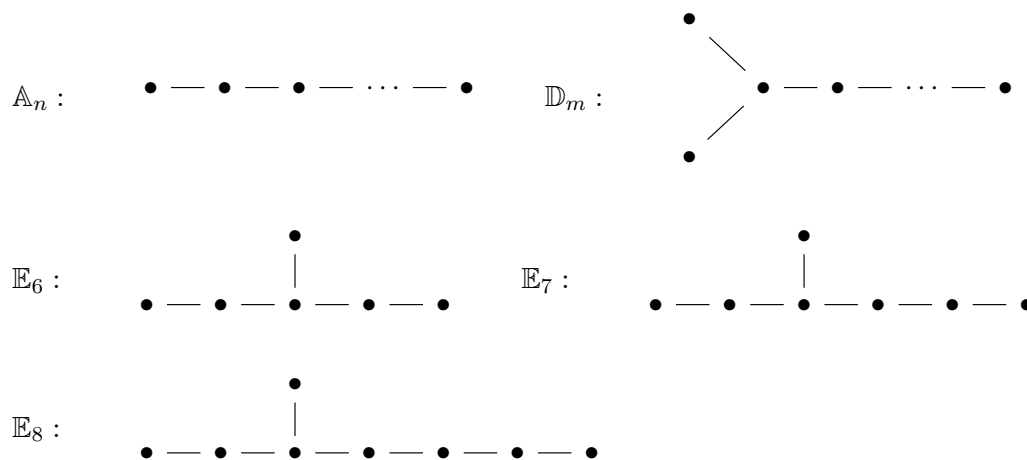
$$0 = (\varepsilon_i, \beta) = (2 - 2n_{ii})\beta_i - \sum_{i \neq j} n_{ij}\beta_j, \quad (7.1)$$

Si  $\beta_i = 0$ , entonces  $\sum_{i \neq j} n_{ij}\beta_j = 0$  y como cada término es mayor o igual que 0, tenemos que  $\beta_j = 0$  siempre que haya una arista desde  $i$  a  $j$ . Dado que  $\Gamma$  es conexo, se sigue que  $\beta = 0$ , lo que es una contradicción. Por lo tanto  $\beta$  es sincero. Ahora bien, usando 7.1,

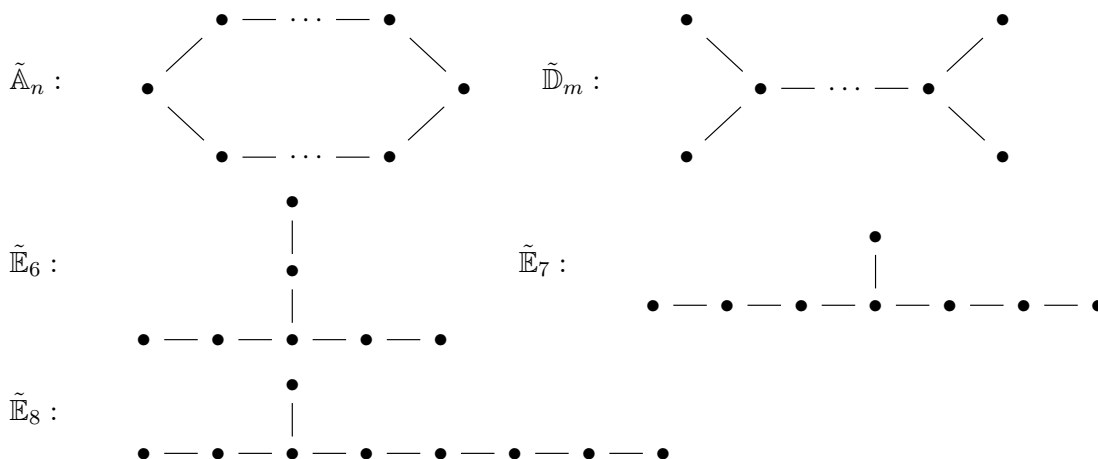
$$\begin{aligned} q(\alpha) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - \sum_{i \leq j} n_{ij}\alpha_i\alpha_j = \sum_{i=1}^n (2 - 2n_{ii})\beta_i \frac{1}{2\beta_i} \alpha_i^2 - \sum_{i < j} n_{ij}\alpha_i\alpha_j \\ &= \sum_{i \neq j} n_{ij} \frac{\beta_j}{2\beta_i} \alpha_i^2 - \sum_{i < j} n_{ij}\alpha_i\alpha_j \\ &= \sum_{i < j} n_{ij} \frac{\beta_j}{2\beta_i} \alpha_i^2 + \sum_{i < j} n_{ij} \frac{\beta_i}{2\beta_j} \alpha_j^2 + \sum_{i < j} n_{ij}(-\alpha_i\alpha_j) \\ &= \sum_{i < j} n_{ij} \frac{\beta_i\beta_j}{2} \left( \frac{\alpha_i}{\beta_i} - \frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)^2. \end{aligned}$$

Se sigue que  $q$  es semidefinida positiva. Si  $q(\alpha) = 0$ , entonces  $\alpha_i/\beta_i = \alpha_j/\beta_j$  siempre que haya una arista desde  $i$  hasta  $j$ , y de nuevo, dado que  $\Gamma$  es conexo, tenemos que  $\alpha \in \mathbb{Q}\beta$ . Si  $\alpha \in \mathbb{Q}\beta$ , entonces  $\alpha \in \text{rad}(q)$ , ya que  $\beta \in \text{rad}(q)$  por hipótesis. Finalmente si  $\alpha \in \text{rad}(q)$  claramente se tiene que  $q(\alpha) = 0$ .  $\square$

**Definición 7.4.** 1. Diremos que los siguientes grafos son **diagramas de Dynkin** ( $n \geq 0, m \geq 4$ ):



2. Diremos que los siguientes grafos son **diagramas euclídeos** ( $n \geq 0, m \geq 4$ ):



Notemos que  $\tilde{A}_0$  tiene un vértice con un lazo y  $\tilde{A}_1$  tiene dos vértices unidos por dos aristas. En los diagramas de Dynkin, el subíndice indica el número de vértices mientras que en los euclídeos corresponde al número de vértices menos uno.

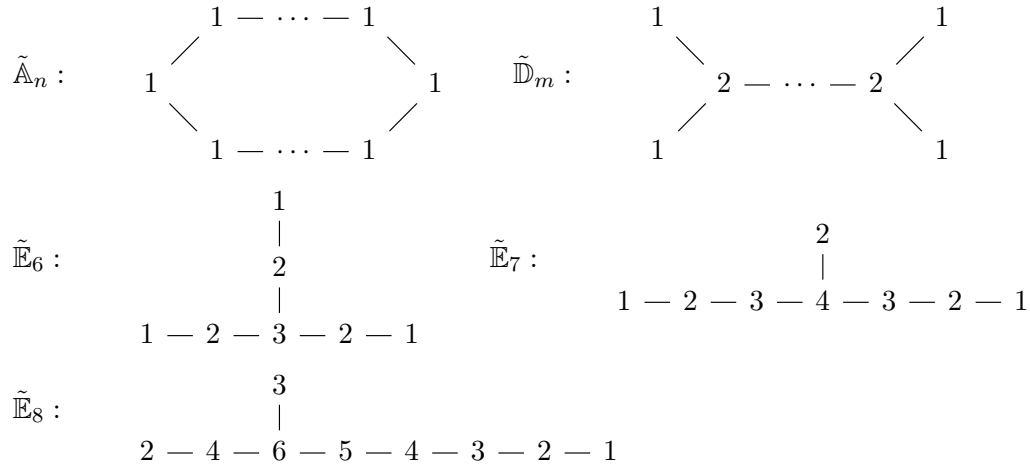
En teoría de Lie aparecen otras familias de diagramas de Dynkin y euclídeos. Estrictamente hablando, hemos definido aquí los diagramas de Dynkin y euclídeos de tipo ADE. A continuación probamos un lema de carácter combinatorio antes de dar el teorema que nos permitirá clasificar los grafos conexos en función de  $q$ .

**Lema 7.5.** *Sea  $\Gamma$  un grafo conexo. Si  $\Gamma$  no es un diagrama de Dynkin ni euclídeo, entonces  $\Gamma$  contiene un subgrafo euclídeo.*

*Demostración.* Si  $\Gamma$  no contiene ningún  $\tilde{A}_n$ , entonces no tiene ciclos y por lo tanto es un árbol. Si no contiene ningún  $\tilde{D}_n$ , no puede haber vértices de grado  $\geq 4$  y tampoco puede haber más de dos vértices de grado 3. Si todos los vértices son de grado 2 entonces  $\Gamma = \tilde{A}_n$ . Sea  $v$  de grado 3 y sean  $d_1 \leq d_2 \leq d_3$  las distancias de  $v$  a los 3 vértices de grado 1. Si  $d_1 \geq 2$ , entonces  $\Gamma$  contiene a  $\tilde{E}_6$ . Supongamos por lo tanto que  $d_1 = 1$ . Si  $d_2 = 1$ , entonces

$\Gamma = \mathbb{D}_n$  para algún  $n$  y si  $d_2 \geq 3$ , entonces  $\Gamma$  contiene a  $\tilde{\mathbb{E}}_7$ . Supongamos entonces  $d_2 = 2$ . Si  $d_3 = 3$  o  $4$ , entonces  $\Gamma = \mathbb{E}_7$  o  $\Gamma = \mathbb{E}_8$ , respectivamente. Finalmente, si  $d_3 \geq 5$ , entonces  $\Gamma$  contiene a  $\tilde{\mathbb{E}}_8$ .  $\square$

**Definición 7.6.** Sea  $\Gamma$  un diagrama euclídeo. Llamaremos **vector radical**, y lo denotaremos  $\delta$ , a los vectores dados por:



los vértices  $i$  con  $\delta_i = 1$  son denominados **vértices extendidos**. Notemos que si eliminamos un vértice extendido de un diagrama euclídeo obtenemos su correspondiente diagrama de Dynkin.

**Teorema 7.7.** Sea  $\Gamma$  un grafo conexo.

1. Si  $\Gamma$  es un diagrama euclídeo,  $q$  es semidefinida positiva y  $\text{rad}(q) = \mathbb{Z}\delta$ , donde  $\delta$  es el vector radical correspondiente.
2. Si  $\Gamma$  es un diagrama de Dynkin, entonces  $q$  es definida positiva.
3. En otro caso, existe  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$  tal que  $q(\alpha) < 0$ .

*Demostración.*

1. Se puede comprobar que cada vector  $\delta$  es radical. Por ejemplo, para  $\tilde{\mathbb{E}}_6$ ,

$$\begin{aligned}
 (\delta, \alpha) &= 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 4\alpha_4 + 2\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7 \\
 &\quad - 2\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 - 3\alpha_4 - 2\alpha_5 - 3\alpha_6 - 2\alpha_7 \\
 &\quad - 3\alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_6 \\
 &\quad - 2\alpha_3 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

La clave es ir verificando que para cada  $\delta_i$ , se tiene que  $2\delta_i = \sum_{j | n_{ij} \neq 0} \delta_j$ , ya que el coeficiente de  $\alpha_i$  en  $(\delta, \alpha)$  es precisamente  $2\delta_i - \sum_{j | n_{ij} \neq 0} \delta_j$ . Por lo tanto  $q$  es semidefinida positiva por el Lema 7.3. Dado que  $\delta_i = 1$  para algún  $i$  en todos los casos,

$$\text{rad}(q) = \mathbb{Q}\delta \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}\delta.$$

2. Podemos extender  $\Gamma$  a su correspondiente diagrama euclídeo,  $\tilde{\Gamma}$ . Sea  $\tilde{q}$  su forma cuadrática y  $\delta$  un vector radical. Supongamos que existe  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$  no nulo tal que



$q(\alpha) \leq 0$  y sea  $\tilde{\alpha}$  definido como  $\alpha$  en los vértices de  $\Gamma$  y nulo en el vértice extendido. Tenemos que  $\tilde{q}(\tilde{\alpha}) = q(\alpha) \leq 0$  y por lo tanto  $\tilde{q}(\tilde{\alpha}) = 0$ , ya que  $\tilde{q}$  es semidefinida positiva. Se sigue del Lema 7.3 que  $\tilde{\alpha} \in \mathbb{Q}\delta$ , pero eso es imposible pues  $\tilde{\alpha}$  es nulo en el vértice extendido.

3. Gracias al Lema 7.5 existe  $\Gamma'$  subgrafo euclídeo y sea  $\delta$  su vector radical. Si todos los vértices de  $\Gamma$  están en  $\Gamma'$ , entonces se puede tomar  $\alpha = \delta$ . Si  $i$  es un vértice que no está en  $\Gamma'$  de modo que exista una arista que conecte  $i$  con  $\Gamma'$ , entonces podemos tomar  $\alpha = 2\delta + \varepsilon_i$ , pues  $q(\alpha) = q(2\delta) + q(\varepsilon_i) + (2\delta, \varepsilon_i) < 0$ , ya que  $q(2\delta) = 4q(\delta) = 0$ ,  $q(\varepsilon_i) = 1 - n_{ii} \leq 1$  y  $(2\delta, \varepsilon_i) = 2(\delta, \varepsilon_i) \leq -2$ .

□

**Definición 7.8.** Sea  $\Gamma$  un grafo conexo. Definimos el conjunto de **raíces** de  $\Gamma$  como

$$\Delta = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n \mid \alpha \neq 0, q(\alpha) \leq 0\}.$$

Diremos que una raíz  $\alpha$  es **real** si  $q(\alpha) = 1$  y que es **imaginaria** si  $q(\alpha) = 0$ . Diremos que  $\alpha$  es **positiva** si  $\alpha \geq 0$  y que es **negativa** si  $\alpha \leq 0$ .

Cada  $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}^n$  es siempre una raíz. Además, para todo  $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$  y  $\beta \in \text{rad}(q)$ ,  $-\alpha, \alpha + \beta \in \Delta \cup \{0\}$ , ya que  $q(\alpha \pm \beta) = q(\beta) + q(\alpha) \pm (\beta, \alpha) = q(\alpha)$ . Si  $\Gamma$  es un diagrama de Dynkin, todas las raíces son reales. En el caso de que  $\Gamma$  sea euclídeo, las raíces imaginarias son exactamente  $\text{rad}(q) - \{0\}$ .

**Lema 7.9.** Sea  $\Gamma$  un diagrama de Dynkin o euclídeo. Cada raíz  $\alpha \in \Delta$  es positiva o negativa.

*Demostración.* Supongamos que  $\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$ , con  $\alpha^+, \alpha^- \geq 0$  no nulos y con soporte disjunto, es decir, para todo vértice  $i$ ,  $\alpha_i^+ > 0$  si y sólo si  $\alpha_i^- = 0$  y viceversa. Claramente se tiene que  $(\alpha^+, \alpha^-) \leq 0$ , de modo que

$$1 \geq q(\alpha) = q(\alpha^+) + q(\alpha^-) - (\alpha^+, \alpha^-) \geq q(\alpha^+) + q(\alpha^-).$$

Por lo tanto  $\alpha^+$  o  $\alpha^-$  debe ser una raíz imaginaria y como consecuencia un vector sincero, en cuyo caso el otro debe ser nulo, lo que es una contradicción. □

**Proposición 7.10.** Si  $\Gamma$  es euclídeo, entonces  $(\Delta \cup \{0\}) / \sim$  es finito, donde  $\alpha \sim \beta$  si y sólo si  $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}\delta$ .

*Demostración.* Sea  $i$  un vértice extendido. Si  $\alpha$  una raíz con  $\alpha_i = 0$ , entonces  $\delta - \alpha$  y  $\delta + \alpha$  son raíces cuya componente  $i$ -ésima es positiva, por lo tanto por 7.9 tenemos que  $\delta - \alpha, \delta + \alpha \geq 0$ . Se sigue que

$$\{\alpha \in \Delta \cup \{0\} \mid \alpha_i = 0\} \subseteq \{\alpha \in \mathbb{Z}^n \mid -\delta \leq \alpha \leq \delta\},$$

que es finito. Finalmente, si  $\beta \in \Delta \cup \{0\}$ , entonces  $\beta - \beta_i\delta \in \{\alpha \in \Delta \cup \{0\} \mid \alpha_i = 0\}$ . □

**Corolario 7.11.** Si  $\Gamma$  es Dynkin, entonces  $\Delta$  es finito.

*Demostración.* Sea  $\tilde{\Gamma}$  el correspondiente grafo euclídeo obtenido al extender  $\Gamma$  a través de un vértice  $i$ . Entonces podemos ver toda raíz  $\alpha$  de  $\Gamma$  como una raíz de  $\tilde{\Gamma}$  con  $\alpha_i = 0$ , de modo que obtenemos el resultado usando 7.10. □

## 8 Teorema de Gabriel

En esta sección vamos a combinar casi todo lo que hemos hecho para probar el Teorema de Gabriel. El paso clave es observar que si  $Q$  es un quiver y su grafo subyacente es de tipo Dynkin, entonces todo módulo indescomponible es un bloque sin autoextensiones.

**Teorema 8.1** (Gabriel, parte II). *Supongamos que  $Q$  es un quiver tal que su grafo subyacente es un diagrama de Dynkin y sea  $q$  su forma de Tits. La aplicación  $X \mapsto \underline{\dim} X$  induce una biyección entre las clases de isomorfía de las representaciones indescomponibles de  $Q$  y las raíces positivas de  $q$ .*

*Demostración.* Probemos en primer lugar que si  $X$  es indescomponible,  $\underline{\dim} X$  es una raíz de  $q$ . Afirmamos que  $X$  es un bloque. Si no fuese así por 5.6 existiría  $U \subset X$  submódulo propio de  $X$  que es bloque con autoextensiones y por lo tanto

$$0 < q(\underline{\dim} U) = \dim \text{End}_A(U) - \dim \text{Ext}_A^1(U, U) = 1 - \dim \text{Ext}_A^1(U, U) \leq 0,$$

contradiciendo el hecho de que  $q$  sea definida positiva. Por otro lado, se sigue de

$$0 < q(\underline{\dim} X) = \dim \text{End}_A(X) - \dim \text{Ext}_A^1(X, X) = 1 - \dim \text{Ext}_A^1(X, X)$$

que  $X$  no puede tener autoextensiones y además  $\underline{\dim} X$  es una raíz positiva.

Por otro lado, sea  $\alpha$  una raíz positiva. Probemos que existe un módulo indescomponible  $X$  con  $\underline{\dim} X = \alpha$ . Para ello, consideremos una órbita  $\mathcal{O}_X$  de máxima dimensión en  $\text{Rep}_Q(\alpha)$  y veamos que  $X$  es indescomponible. En caso contrario, supongamos que  $X = U \oplus V$ . Por 6.7, tenemos que  $\text{Ext}_A^1(U, V) = \text{Ext}_A^1(V, U) = 0$ , luego

$$\begin{aligned} 1 = q(\alpha) &= q(\underline{\dim} U) + q(\underline{\dim} V) + \langle \underline{\dim} U, \underline{\dim} V \rangle + \langle \underline{\dim} V, \underline{\dim} U \rangle \\ &= q(\underline{\dim} U) + q(\underline{\dim} V) + \dim \text{Hom}_A(U, V) + \dim \text{Hom}_A(V, U) \geq 2, \end{aligned}$$

que es una contradicción, por lo que  $X$  es indescomponible. Finalmente, si  $X, X'$  son dos módulos indescomponibles con el mismo vector de dimensiones, entonces  $X \cong X'$  gracias a 6.5(3).  $\square$

**Teorema 8.2** (Gabriel, parte I). *Si  $Q$  es un quiver conexo cuyo grafo subyacente es  $\Gamma$ , entonces hay un número finito de representaciones indescomponibles si y sólo si  $\Gamma$  es Dynkin.*

*Demostración.* Si  $\Gamma$  es Dynkin entonces los módulos indescomponibles se corresponden con las raíces positivas, que por 7.11 son un número finito.

Recíprocamente, supongamos que existe un número finito de representaciones indescomponibles. Todo módulo es suma directa de indescomponibles, así que, salvo isomorfismo, hay un número finito de módulos con vector de dimensiones  $0 \neq \alpha \in \mathbb{N}^n$ . Por lo tanto hay un número finito de órbitas en  $\text{Rep}_Q(\alpha)$ . Por 6.5(1) tenemos que  $q(\alpha) > 0$ . Concluimos gracias a la clasificación de grafos dada en el Teorema 7.7.  $\square$

Si se calculan las raíces positivas de los diagramas de Dynkin podemos ver que el número de clases de isomorfía de representaciones de un quiver  $Q$  de tipo finito es ([ASS06, VII.5.10.]):

$A_n$	$D_m$	$E_6$	$E_7$	$E_8$
$\frac{1}{2}n(n+1)$	$m^2 - m$	36	63	120

Para quivers de tipo manso, también tenemos una descripción similar en términos de los diagramas euclídeos [DF73]:

**Teorema 8.3.** *Un quiver  $Q$  que no es de tipo finito es de tipo manso si y sólo si su grafo subyacente es la unión de diagramas de Dynkin y diagramas euclídeos.*

Una de las consecuencias del Teorema de Gabriel es que los vectores de dimensiones de los módulos indescomponibles de un quiver  $Q$  con grafo subyacente de tipo Dynkin no depende de la orientación de las flechas. El siguiente resultado, probado por Kac en 1980, afirma que esta propiedad se mantiene para un quiver arbitrario [Kac80]:

**Teorema 8.4.** *Para un quiver arbitrario  $Q$  el conjunto de vectores de dimensiones de representaciones indescomponibles de  $Q$  no depende de la orientación de las flechas. Los vectores de dimensión de representaciones indescomponibles se corresponden con las raíces positivas de la forma de Tits asociada.*

## 9 Conclusiones

Una de las principales ideas con las podemos concluir este trabajo es que las técnicas de teoría de representación de quivers nos dan un modo conveniente de visualizar las álgebras de dimensión finita y sus módulos. Sin embargo, no hemos tratado formas de atacar el problema de calcular los módulos indescomponibles y los homomorfismos entre ellos. Por ello, el contenido aquí expuesto puede ser una buena introducción para comenzar diferentes líneas de continuación de estudios. Por un lado, tenemos la Teoría de Auslander-Reiten, originalmente introducida por M. Auslander en [Aus74], donde se definen herramientas potentes de la Teoría de Representaciones como las sucesiones de Auslander Reiten, que son sucesiones exactas que en cierto sentido son minimales entre todas las sucesiones no escindibles, o el quiver de Auslander, donde los vértices son los módulos indescomponibles y las flechas son los denominados morfismos irreducibles. Esta teoría nos permite conocer, mediante un algoritmo de carácter combinatorio denominado “knitting”, ciertas partes (a veces incluso todas) de la categoría de módulos sobre una álgebra. Por otro lado, está la Teoría de tilting [HR82], donde la idea básica es, a grandes rasgos, reemplazar convenientemente una álgebra  $A$  cuya teoría de representaciones sea complicada de estudiar por otra álgebra  $B$ , de modo que las categorías  $A\text{-Mod}$  y  $B\text{-Mod}$  sean similares pero el problema pueda ser atajado.

También es importante comentar que este trabajo ha supuesto un primer contacto con matemáticas, quizás no de primera línea de investigación, pero sí más allá del grado. No obstante, existe una relación evidente entre lo que hemos estudiado aquí con asignaturas del grado en Matemáticas, entre las que destacaría “Álgebra Lineal y Geometría I”, “Estructuras Algebraicas”, “Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica” y otras más allá del Departamento de Álgebra, como puede ser “Homología Simplicial”, donde un uso diferente del álgebra homológica me ha ayudado a entender la versatilidad de esta teoría matemática. Sin duda este trabajo me ha dado la oportunidad de extender mis conocimientos y tener una visión más global de lo aprendido estos años. En particular, me gustaría resaltar las nociones aprendidas de teoría de categorías (aunque en el trabajo no se utilicen de manera decisiva). Me ha resultado muy interesante la manera en la que ciertos objetos típicos de diferentes teorías matemáticas comparten propiedades universales que se pueden enunciar en términos de composición de flechas. Desde mi humilde opinión me hubiese gustado que a lo largo del grado se hubiese introducido este lenguaje.

Finalmente, es bien conocido que la Teoría de Representaciones juega un papel importante en la Mecánica Cuántica y sobre todo en Física de Partículas, lo cual relaciona

el contenido de este trabajo con mis estudios en Físicas. También la teoría de quivers es utilizada en este contexto, como muestran a continuación una serie de artículos donde se aplica en diferentes campos de la física teórica: [Ura01] (Física de Partículas), [FM00] (Supersimetría) y [DM96] (Teoría de Cuerdas).

## Referencias

- [ASS06] Ibrahim Assem, Andrzej Skowronski, and Daniel Simson. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory*, volume 65. Cambridge University Press, 2006. 6, 14, 24
- [Aus74] Maurice Auslander. Representation theory of artin algebras ii. *Communications in algebra*, 1(4):269–310, 1974. 25
- [Bar15] Michael Barot. *Introduction to the representation theory of algebras*. Springer, 2015. 1, 5, 10
- [Bel00] G Belitskii. Normal forms in matrix spaces. *Integral Equations and Operator Theory*, 38(3):251–283, 2000. 4
- [Bri10] Michel Brion. Introduction to actions of algebraic groups. *Les cours du CIRM*, 1(1):1–22, 2010. 16
- [CB88] William W Crawley-Boevey. On tame algebras and bocses. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(3):451–483, 1988. 6
- [CB92] W Crawley-Boevey. Lectures on representations of quivers, lectures in oxford. <https://www.math.uni-bielefeld.de/~wcrawley/quivlecs.pdf>, 1992. 6
- [CBKK11] William Crawley-Boevey, Bernhard Keller, and Solberg Krause. Representation theory of quivers and finite dimensional algebras. *Oberwolfach Reports*, (1):523–609, 2011. 1
- [DF73] Peter Donovan and Mary Ruth Freislich. *The representation theory of finite graphs and associated algebras*. Number 5. 1973. 25
- [Die99] Jill Dietz. Representations and cohomology, i: Basic representation theory of finite groups and associative algebras. *The American Mathematical Monthly*, 106(5):485, 1999. 2
- [DM96] Michael R Douglas and Gregory Moore. D-branes, quivers, and ale instantons. *arXiv preprint hep-th/9603167*, 1996. 26
- [DW17] Harm Derksen and Jerzy Weyman. *An introduction to quiver representations*, volume 184. American Mathematical Soc., 2017. 1, 6, 7
- [EGH<sup>+</sup>11] Pavel I Etingof, Oleg Golberg, Sebastian Hensel, Tiankai Liu, Alex Schwendner, Dmitry Vaintrob, and Elena Yudovina. *Introduction to representation theory*, volume 59. American Mathematical Soc., 2011.
- [FM00] Bartomeu Fiol and Marcos Marino. Bps states and algebras from quivers. *Journal of High Energy Physics*, 2000(07):031, 2000. 26

- [Fri83] Shmuel Friedland. Simultaneous similarity of matrices. *Advances in Mathematics*, 50(3):189–265, 1983. [4](#)
- [Gab60] Peter Gabriel. Sur les catégories abéliennes localement noethériennes et leurs applications aux algèbres étudiées par dieudonné. *Séminaire Serre.*, 1960. [1](#)
- [Gab72] Peter Gabriel. Unzerlegbare darstellungen i. *Manuscripta mathematica*, 6(1):71–103, 1972. [1](#), [6](#)
- [Gab73] Peter Gabriel. Indecomposable representations ii. *Symposia Mat. Inst. Naz. Alta Mat.*, 6(11):81–104, 1973. [1](#)
- [GR97] Peter Gabriel and Andrei V Roiter. *Representations of finite-dimensional algebras*, volume 73. Springer Science & Business Media, 1997. [10](#)
- [Gro57] Alexander Grothendieck. Sur quelques points d’algèbre homologique. *Tohoku Math. J.*, (9):119–221, 1957. [1](#)
- [HR82] Dieter Happel and Claus Michael Ringel. Tilted algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 274(2):399–443, 1982. [25](#)
- [Kac80] Victor G Kac. Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory. *Inventiones mathematicae*, 56(1):57–92, 1980. [25](#)
- [KJ16] Alexander Kirillov Jr. *Quiver representations and quiver varieties*, volume 174. American Mathematical Soc., 2016. [6](#), [16](#)
- [Rot08] Joseph J Rotman. *An introduction to homological algebra*. Springer Science & Business Media, 2008. [1](#), [10](#), [14](#)
- [Sch14] Ralf Schiffler. *Quiver representations*. Springer, 2014. [1](#), [7](#)
- [Thr47] Robert Thrall. On ahdir algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 22(53):49–50, 1947. [1](#)
- [Ura01] Angel M Uranga. From quiver diagrams to particle physics. In *European Congress of Mathematics*, pages 499–506. Springer, 2001. [26](#)