

Kvantum-irreverzibilitás és dekoherencia
nanoeszközökben

Írta: Bernád József Zsolt

Fizika doktori iskola:

Horváth Zalán egyetemi tanár

Statisztikus Fizika, Biológiai Fizika és

Kvantumrendszerek Fizikája program:

Vicsek Tamás egyetemi tanár

Témavezetők:

Diósi Lajos egyetemi magántanár,

Geszti Tamás egyetemi tanár

ELTE, Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2005-2008

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Teljesen pozitív leképezések	6
2.1. Alapok	6
2.2. Redukált dinamikák	7
2.3. Nem-projektív mérés	8
2.4. Nyílt Q-rendszerek: master-egyenlet	9
3. A kvantum dotok	11
3.1. A rendszer leírása	11
3.2. A kettős Q-doton alapuló töltés-detektor	17
3.3. Eredmények	22
4. A folytonos mérés alkalmazása a Q-dotokon	28
4.1. A folytonos Q-mérés	28
4.2. Alkalmazás Q-dotokon	29
4.3. Folytonos Q-mérés egy doton	32
4.4. Folytonos Q-mérés a kettős doton	34
5. A rezgő tükör Q-mechanikai vizsgálata	41
5.1. Előzmények	41
5.2. Eredmények	45
6. Az eredmények összefoglalása	52
A. Appendix	54
A.1. Teljesen pozitív leképezések	54
A.2. A master-egyenlet	57
A.3. Master-egyenlet lineáris kölcsönhatás esetén	60
A.4. Korrelációs függvény meghatározása	69
A.5. A markovi áram kiszámolása	78
A.6. N -felbontott módszer	82
A.7. A folytonos mérés	85
A.8. A Mac-Donald formula	88
Hivatkozások	90

1. Bevezetés

Mi különbözteti meg a klasszikust a kvantum rendszertől? Mi a precíz átmeneti struktúrája a Q(kvantum)-rendszernek a klasszikusba? Ez az átmenet síma, vagy valami teljesen más koncepciót igénylő valami?

Ezekre a kérdésekre nem tudunk egyértelmű választ adni, sőt ezek már az elmélet megalkotásának idejében is problémának számítottak. Amíg a kvantummechanika eredetileg az atomok elméletének indult, manapság egyre nagyobb alkalmazási területet nyer. Az elmélet sikerei ellenére, nincs még meg egyezés az interpretációját tekintve. A fő problémák a megfigyelés és a mérés körül gyűrűznek. Gyakori, hogy a klasszikus mechanikát egyszerűen a kvantummechanika speciális esetének tekintik, mint a nemrelativisztikus mechanikát kis sebességek esetén a relativitáselmélet határesetének. A $\hbar \rightarrow 0$ határeset közelében azonban az interferencia megmarad. A szemiklasszikus közelítés eredményei csak hasonlítanak a klasszikus fizikára, de koherens kvantummechanikai mozgásokat írnak le.

Egy makroszkopikus test tömegközépponti mozgása egy keskeny hullámfüggvénnyel írható le, ami jól lokalizált mind a hely, mind impulzus esetében. A hullámfüggvény szétfolyna a Schrödinger egyenlet szerint, de ez nem igaz a nagy tömegek esetén. Így továbbra is megmagyarázhatatlan marad, hogy a makroszkopikus testek miért keskeny hullámfüggvénnyel rendelkeznek, amíg a szuperpozíciós elv megengedne más nem-klasszikus állapotot is. A kvantumérés is produkálhat szuperpozíciós állapotot mint a híres Schrödinger macska állapotot. A részecskefizikában például a K -mezón és annak antirészecskéje képes szuperpozíciós állapotot alkotni, amiből létrejönnek új mezónok.

Tehát koncepcióváltásra van szükség, éspedig arra, hogy a kvantummechanikában makroszkopikus rendszerek kölcsönhatnak a környezetükkel annyira, hogy nem tekinthetők izoláltaknak, semmilyen extrém esetben sem. Nagy molekulák ilyen szempontból "makroszkopikusak". Ezeket hívjuk nyílt kvantum-rendszereknek, és a részrendszer sűrűségmátrixának dinamikáját kell követni. Itt már könnyen megmutatható, hogy ezek az érdekes "makroszkopikus" szuperpozíciók nagyon rövid idő alatt tűnnek el. Ezt a folyamatot hívjuk dekoherenciának. Például egy test "klasszikusá" válik miután számtalan levegő molekulával és fotonnal ütközött.

A kvantum-dekoherencia modellek kutatása nagyon aktív területté vált az elmúlt 20 évben. A világon tanszékek és laboratóriumok alakultak, amelyek a terület matematikai és fizikai tanulmányozásával foglalkoznak. Ez a mechanizmus akkor jön létre amikor egy kvantum-rendszer kölcsönhat a környezettel, és a környezet dinamikájára kiátlagolunk. Példaként említem, hogy a kvantum-számítógép megalkotásának központi problémája a kvan-

tum -dekoherencia, mivel az elképzelt számítógép koherens állapotú kvantum-bitekkel (qubit) dolgozna.

A dekoherencia elmélet kísérleti igazolásai is megjelentek a 90-es években [1], de a félvezető nanoszerkezetek elektrontranszportjában további tesztelési lehetőségek állnak fenn. Ilyen rendszerek már elkészíthetők, köszönhetően a félvezető-fizika fejlődésének. A *GaAs/AlGaAs* típusú anyagokkal megvalósítható a 2DEG, azaz a kétdimenziós elektron gáz. A mezoszkopikus rendszerekben az elektronok tipikus koherencia-hullámhossza összemérhető a rendszer méretével. Az elektronok viselkedése csak részlegesen magyarázható a szilárdtest fizikában alkalmazott kváziklasszikus közelítéssel. A rendszer teljes kvantummechanikai leírása szükséges. Alapvető kvantummechanikai effektusok tanulmányozása vált lehetségessé a mezoszkopikus rendszerek révén. Erre az egyik legismertebb példa az egész, illetve törtszámú kvantum-Hall-effektus [2], [3]. A kvantum dotok szintén ilyen eszközök, amikben megjelenik az irreverzibilitás vagy dekoherencia, és mivel ezeket már nagy mennyiségben gyártják, ez is egy jó lehetőség az elmélet további ellenőrzésére. Ezt két fejezetben fogom vizsgálni. Továbbá ott vannak a nano-tükrök [4], amiket szilíciumból készítenek és *SiO₂/Ta₂O₅* típusú anyagokkal borítják be. Ilyen nagy rendszer mozgásában még egyáltalán nincs kísérleti bizonyítéka a kvantumos viselkedésnek. Jelenleg a C_{60} -nal történt interferencia kísérlet pozitív eredményt adott [5], de ennél nagyobb molekulákra nem sikerült forrást előállítani. Így maradtak a sok nagyságrenddel nagyobb nano-tükrök, amik segítségével lépéseket tehetünk a makro-mikro világ határának megértése felé. Szóba jöhet az univerzális dekoherencia modellek tesztelése is. Ez a rendszer, fizikáját tekintve a kvantum-optikával rokon terület, és az ötödik fejezetben fogok a részletekről írni.

Ezeket a fizikai modelleket ugyanaz a matematikai terület köti össze, mégpedig a teljesen pozitív leképezések elmélete [7]. Ezért ezt a dolgozatot egy olyan fejezettel kezdem, ami röviden összefoglalja ezt a kutatási irányzatot. Ezt a koncepciót fogom majd követni a többi fejezetben is, és a részleteket vagy állítások bizonyításait az olvasó megtalálhatja a függelékben.

A második fejezet áttekinti a teljesen pozitív leképezéseket, főleg az alkalmazásokat a nyílt kvantum-rendszerek dinamikája esetén, a nem-projektív mérést, a folytonos kvantummérést. Szó lesz továbbá a Kraus-alakról, a Lindblad-strukturúkról [8], [10]. Ez a fejezet nem fogja tartalmazni az elmélet összes alkalmazott példáját, hanem a dolgozatban leírt fizikai rendszerek matematikai hátterét biztosítja.

A harmadik fejezetben a kettős Q-dotot és az ezen alapuló elektron-detektort fogom vizsgálni. Itt a Born-Markov közelítést használom, aztán a rendszer mozgásegyenletét N -felbontott technikával oldom meg. Ez a rendszer egy qubit kiolvasására van kitalálva, de az eredeti gondolat onnan szá-

mazik, hogy ha két ilyen detektor korrelációit néznénk különböző módon előfeszítve, akkor újabb kísérleti bizonyítékot nyerhetnénk a hullámfüggvény összeomlásáról. Hullámfüggvény összeomlásról vagy kollapszusról beszélünk, amikor mérés hatására a rendszer véletlenszerűen beugrik valamelyik saját-állapotába. Ebben a részben szó lesz még a rendszeren átfolyó áram és a zajspektrum kiszámolásáról.

A negyedik fejezetben a folytonos Q-mérés alkalmazásáról lesz szó az egy Q-dot, és a kettős Q-dot esetében. Kiszámolom a markovi áram operátort, a rendszeren átfolyó áramot és annak a zajspektrumát. Tárgyalom a folytonos Q-mérés következtében megjelenő kvantum Zénón-effektust (QZE) [11].

Az ötödik fejezetben a rezgő tükör és a Michelson-interferométer leírását tárgyalom. Tárgyalom a javasolt kísérlet koncepcióit, és kiszámolom a foton-interferencia láthatósági függvényét. Szó lesz a master-egyenlet Gaussi-ansatz megoldásáról, a hőmérséklet és a tükör súrlódási együtthatójának fontos szerepéről. A cél, hogy a javasolt kísérlet paraméter tartományairól eldöntse, hogy elegendőek-e ahhoz, hogy makroszkopikus kvantummechanikát lássunk, illetve univerzális dekoherenciát.

A dolgozat célja, hogy a dekoherenciát leírja, mint környezeti hatást a részrendszerre. Ennek a környezeti hatásnak okozója lehet a Q-dothoz csatlakozó fémes vezető vagy árammérő, illetve a tükröt tartó mikromechanikai oszcillátor. Mindhárom esetben a részrendszer sűrűségmátrixának időfejlődése a legfontosabb kiszámolandó mozgásegyenlet. Ha ez az egyenlet adott, akkor már meghatározhatunk minden olyan mennyiséget, amit elemezni szeretnénk. A környezet a Q-dotok esetében fermionikus állapotokból, a tükör esetében pedig bozonikus állapotokból áll. A három különböző rendszer mozgásegyenletéről be kell látni, hogy Lindblad-alakú, mivel ez biztosítja a sűrűségmátrix fizikai értelmezhetőségét.

2. Teljesen pozitív leképezések

A dolgozatban különböző rendszerek sűrűségmátrixának mozgásegyenletét vezettem le. Ahhoz, hogy ezek a dinamikák valószínűségi leírás szempontjából értelmesek legyenek, a teljesen pozitív leképezések osztályához kell tartozniuk. Ez alatt értem, hogy a sűrűségmátrix sajátértékei maradjanak mindig pozitívak, a nyoma pedig egy. A teljesen pozitív leképezések elméletének azt a kis szeletét adom meg, amelyre a dolgozat is épül.

2.1. Alapok

Ezt a fejezet a Diósi Lajos [6] könyvére alapozom. Itt nincsenek saját eredmények, hanem a következőkben tárgyalt fizikai rendszerek matematikai megalapozását célzom meg. Sem állítások, sem tételek bizonyításaival nem foglalkozom, nem szeretném az olvasó figyelmét elterelni. Viszont az appendix A.1 fejezetében az egyes részeket részletesen fogom elemezni.

A teljesen pozitív leképezések elmélete a kvantummechanikában a sűrűségmátrixszal való műveletekhez kapcsolódik. Az elméletet Stinespring [7] alkotta meg. A fizikai alkalmazásának elterjedését pedig Kraus-nak [8] köszönhetjük. Egy Φ lineáris leképezés pozitív, hogy ha egy adott rendszer $\hat{\rho}$ sűrűségmátrixát egy nem-negatív definit mátrixba viszi át. Mivel sűrűségmátrixról van szó, ezért a leképezés utáni mátrix nyoma nem haladhatja meg az egyet.

$$\begin{aligned}\Phi : \hat{\rho} &\longrightarrow \Phi\hat{\rho}, \\ \Phi\hat{\rho} &\geq 0, \quad \text{Tr}(\Phi\hat{\rho}) \leq 1.\end{aligned}\tag{1}$$

A nem-negatív definit mátrix azt jelenti, hogy önadjungált és a sajátértékei nem-negatívak, ezt nevezzük pozitív szemidefinitésnek. A sűrűségmátrix ezt egyértelműen teljesíti. Egy Φ lineáris pozitív leképezés teljesen pozitív ha az \mathcal{I}_n identitással (értelmezési halmaz az n -dimenziós mátrixok tere) való $\Phi \otimes \mathcal{I}_n$ kiterjesztése esetén a leképezés pozitív marad az összetett rendszerrel szemben, bármilyen n esetében. $\hat{\rho}_{teljes}$ sűrűségmátrix a $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_R$ rendszeren, ahol a \mathcal{H}_R a környezet Hilbert-tere. Mivel a dolgozatomban nyom megőrző teljesen pozitív leképezésekkel foglalkoztam, ezért a továbbiakban csak ezt vizsgálom.

$$\begin{aligned}(\Phi \otimes \mathcal{I})\hat{\rho}_{teljes} &\geq 0, \\ \text{Tr}((\Phi \otimes \mathcal{I})\hat{\rho}_{teljes}) &= 1.\end{aligned}\tag{2}$$

Minden teljesen pozitív leképezés felírható Kraus-alakba (lásd A.1 appendix):

$$\Phi\hat{\rho} = \sum_n \hat{M}_n \hat{\rho} \hat{M}_n^\dagger, \quad \sum_n \hat{M}_n^\dagger \hat{M}_n = \hat{I},\tag{3}$$

és a Kraus-alakú leképezés mindig teljesen pozitív. Ha megadunk egy Φ teljesen pozitív leképezést, akkor ahhoz akár több módon is megadhatjuk a M_n Kraus-mátrixokat.

A nem-teljesen pozitív leképezésekre egy jó példa a Peres-Horodecki teszt operátora. Ennek a neve: parciális transzpozíció (161),(162), ami "egy nem-létező lineáris művelet" [9]. Ezzel lehet tesztelni, hogy két két állapotú összetett rendszer összefonódott-e vagy sem, mivel ez a módszer a rendszer szeparabilitásának megállapítására szolgál.

Legyen Φ egy kétállapotú rendszeren (egy spinen, $s = \frac{1}{2}$) értelmezett lineáris művelet:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \frac{\hat{I} + \mathbf{s}\hat{\sigma}}{2}, \\ \Phi\hat{\rho} &= \frac{\hat{I} - \mathbf{s}\hat{\sigma}}{2} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}\hat{\rho}\hat{\sigma} - \frac{1}{2}\hat{\rho},\end{aligned}\tag{4}$$

ahol, \mathbf{s} a spin polarizációs vektora, és a $\hat{\sigma}$ komponensei a Pauli mátrixokból állnak. Legyen továbbá $\hat{\rho}_{teljes}$ két spin rendszerének sűrűségmátrixa. Ha a rendszerben van összefonódás:

$$(\Phi \otimes \mathcal{I}_2) \not\geq 0.\tag{5}$$

Egy ilyen leképezés nem írható a (3) Kraus-alakba.

2.2. Redukált dinamikák

Tekintsünk egy kvantum(Q)-rendszert, ami kölcsönhatásban van egy másik Q-rendszerrel (nevezzük környezetnek, jele "R"). Vezessünk be egy unitér dinamikát \hat{U} a teljes rendszeren. Ha kiátlagolunk a környezetre, a kapott Q-művelet általában nem unitér:

$$\Phi\hat{\rho} = Tr_R[\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_R)\hat{U}^\dagger].\tag{6}$$

Ez a leképezés megkapható különböző unitér dinamikákra és tetszőleges környezeti rendszerekre. A feltétele a mechanizmusnak az, hogy a kezdeti állapot korrelálatlan volt, és az unitér dinamika ezt összekeveri.

Most szeretnék egy bizonyítást adni, hogy az ilyen leképezések is felírhatók Kraus-alakba. Vezessünk be véges számú ortonormált bázisokat a környezeti rendszerre:

$$|n\rangle, \quad n = 1, 2, \dots, d_R.\tag{7}$$

Tegyük fel, hogy a környezet kezdetben a:

$$\hat{\rho}_R = |1\rangle\langle 1|,\tag{8}$$

tiszta állapotban van. A környezetre való átlagolás a következőképpen írható:

$$\text{Tr}_R[\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_R)\hat{U}^\dagger] = \sum_i \langle i | \hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_R)\hat{U}^\dagger | i \rangle. \quad (9)$$

A Kraus-mátrixok így írhatók:

$$\hat{M}_n = \langle n | \hat{U} | 1 \rangle. \quad (10)$$

Mivel az \hat{U} a teljes rendszeren van értelmezve, ezért a fenti művelet után természetes, hogy egy mátrixot kapunk:

$$\Phi\hat{\rho} = \sum_n \hat{M}_n \hat{\rho} \hat{M}_n^\dagger. \quad (11)$$

Így a leképezés teljesen pozitív.

2.3. Nem-projektív mérés

A nem-projektív kvantummérés(Q-mérés) a projektív Q-mérés általánosítása. Röviden összefoglalva, és az appendix megfelelő fejezetében (A.7) alkalmazva, a nem-projektív mérést a következő módon építjük fel: legyenek \hat{P}_λ -k ortogonális projektorok a Hilbert téren:

$$\sum_\lambda \hat{P}_\lambda = \hat{I}, \quad \hat{P}_\lambda \hat{P}_\mu = \delta_{\lambda\mu} \hat{P}_\lambda. \quad (12)$$

A szelektív mérés:

$$p_\lambda = \text{Tr}(\hat{P}_\lambda \hat{\rho}), \quad \hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_\lambda = \frac{1}{p_\lambda} \hat{P}_\lambda \hat{\rho} \hat{P}_\lambda, \quad (13)$$

$$\hat{A} \rightarrow A_\lambda.$$

A szelektív mérés eredménye \hat{A} operátor egy A_λ sajátértéke. A mérés után a rendszer a $\hat{\rho}_\lambda$ állapotba kerül.

A nem-szelektív mérés az, amikor a szelektív mérés után kapott sokaságokat egyesítjük:

$$\sum_\lambda p_\lambda \hat{\rho}_\lambda = \sum_\lambda \hat{P}_\lambda \hat{\rho} \hat{P}_\lambda, \quad \hat{\rho} \rightarrow \sum_\lambda \hat{P}_\lambda \hat{\rho} \hat{P}_\lambda \equiv \Phi\hat{\rho}, \quad (14)$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_\lambda p_\lambda A_\lambda = \text{Tr}(\hat{A} \hat{\rho}).$$

Ez már egy irreverzibilis leképezés, és megmondja egy mérhető \hat{A} mennyiség operátorának várható értékét, amíg a szelektív mérés a \mathcal{H} Hilbert-tér egy

adott alterébe képez, és az annak megfelelő sajátértéket kapjuk.

Definiáljuk az egységmátrix pozitív felbontását:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{I}} &= \sum_n \hat{\Pi}_n, \\ \langle x | \hat{\Pi}_n | x \rangle &\geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}, \\ \hat{\Pi}_n^\dagger &= \hat{\Pi}_n!\end{aligned}\tag{15}$$

Ebben az esetben a szelektív mérés:

$$p_n = \text{Tr}(\hat{\Pi}_n \hat{\rho}), \quad \hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_n = \frac{1}{p_n} \hat{\Pi}_n^{1/2} \hat{\rho} \hat{\Pi}_n^{1/2}.\tag{16}$$

A nem-szelektív esetben:

$$\hat{\rho}_n = \sum_n \hat{\Pi}_n^{1/2} \hat{\rho} \hat{\Pi}_n^{1/2}.\tag{17}$$

Mind a projektív, mind a nem-projektív mérésnél a nem-szelektív esetben könnyen be lehet azonosítani a Kraus-alakot. Míg az első esetben maguk a Hilbert-tér projektorai, addig az általánosított résznél:

$$\hat{\Pi}_n = \hat{M}_n^2, \quad \hat{M}_n = \hat{M}_n^\dagger = \hat{\Pi}_n^{1/2}.\tag{18}$$

2.4. Nyílt Q-rendszerek: master-egyenlet

Amikor egy rendszer folyamatosan kölcsönhat egy környezeti rendszerrel, akkor ezt nyílt rendszernek hívjuk. Egy zárt rendszer alrendszere tipikusan ilyen. Az ilyen modellek esetén a dinamika redukált, így egyértelműen irreverzibilis. Van egy úgynevezett Markov-osztálya a környezeti kölcsönhatásoknak, ekkor a rendszerünk dinamikáját a markovi master-egyenlet írja le:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + \text{nem-Hamiltoni tagok} \equiv \mathcal{L}\hat{\rho}.\tag{19}$$

A \hat{H} az alrendszer Hamilton-operátora. Ebben az esetben az $\Phi(t) = \exp(t\mathcal{L})$ teljesen pozitív dinamikai leképezés generálódik. Egy a fizikában legtöbbit használt esetben, amikor az \mathcal{L} Markov-generátorok Gaussi félcsoportot alkotnak, a következő Lindblad-struktúra adódik:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} \equiv \mathcal{L}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_n \left(\hat{L}_n \hat{\rho} \hat{L}_n^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_n^\dagger \hat{L}_n, \hat{\rho} \} \right).\tag{20}$$

A $\{, , \}$ műveleten az antikommutátort értem, és ezt alkalmazom a dolgozat további fejezeteiben is.

A Lindblad-alak a [10] és [12] munkákban jelent meg, és a generátorok nemcsak Gaussi hanem például Poisson félcsoportot is alkothatnak. Az \mathcal{L} supermátrixot Lindblad-generátornak is hívjuk. Az \hat{L}_n Lindblad-mátrixok a környezet és a rendszer közti kölcsönhatást írják le a kiredukált dinamikában. Egy nyílt rendszer esetén többféle módon adhatók meg ezek a Lindblad-mátrixok, mivel különböző képpen megadhatjuk a kölcsönhatást vagy a környezetet. A dolgozatban ezt a (20)-as alakot használtam mind a három vizsgált rendszer esetén.

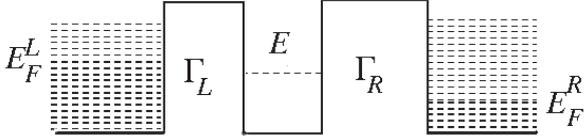
3. A kvantum dotok

3.1. A rendszer leírása

A kvantum dot egy olyan elrendezés, amelybe egyszerre csak egy elektron léphet be vagy ki, alagút-effektussal. Az egyenkénti belépés a Coulomb-blokád [13] következménye. Ez azt jelenti, hogy az elektronok közti Coulomb-taszítást kihasználva, és a rendszert kis kapacitásra, kis méretre beállítva, addig nem léphet be elektron a dotba, amíg egy másik ott tartózkodik. A rendszer kapacitása és mérete fogja szabályozni azt, hogy milyen energiaszintek lehetnek, és ha már nem létezik olyan energiaszint, amit az adott alacsony hőmérsékleten egy második elektron betölthet a Coulomb-taszítás ellenére, akkor beszélhetünk kvantum dotról. A rendszer kis kapacitását és méretét nanotechnológiai eszközök biztosítják. A dot szerkezetében, a kontaktusokkal (elektron-tartályokkal) kapcsolatban annyit kell elmondani, hogy fémes vezetőből kell készülniük. A tartályokban egy adott energiaszintig minden szintet betöltött, ezért alacsony hőmérsékleten valósítható meg a rendszer, a mi esetünkben $T \rightarrow 0$. Mivel a dot kölcsönhatásban van a tartályokkal, ezért a dotra vetített (redukált) sűrűségmátrix egyenleteit határozom meg. Az elképzelés az, hogy amit vizsgálunk, az egy több állapotú rendszer, ami kölcsönhatásban van a környezettel, és ez okozza a dekoherenciát [14],[15]. "Kitrészelem" a teljes rendszer sűrűségmátrixát a környezetre, és az így kapott redukált sűrűségmátrixot vizsgálom.

A továbbiakban lépésről-lépésre szeretnék eljutni a kettős Q-doton alapuló detektorhoz, ezért megadom majd mind az egy dot, mind a kettős dot Hamilton-operátorát, és a Born-Markov közelítéssel kapott master-egyenletüket. Az irodalomban található egy másik levezetés, ez egy soktestprobléma megközelítés perturbatív eljárással, megoldva a Schrödinger-egyenletet minden állapot bázison [16],[17]. Természetesen a két módszer ekvivalens, mivel a perturbáció második rendjéig megy el mind a kettő, és ugyanazokat a feltevéseket használja, pl. hogy a környezet gyors oszcillációja mellett a részrendszert lassú változás jellemzi. A különbség csak annyi, hogy a mi általunk használt levezetés rövidebb, és könnyebben elmagyarázható.

A kvantum-dot két potenciál gáttal van lezárva, és $T \rightarrow 0$ hőmérsékletű fermion-tartályok csatlakoznak hozzá. A bal tartálynak (ezt l - left index fogja jelölni) a kémiai potenciálja μ_l , a jobbnak μ_r . A dot energiája pedig $E = \hbar\Omega$. Ha ez az energia nagyobb vagy kisebb mint valamelyik kémiai potenciál, attól függően kimegy vagy bejön egy elektron. Ahhoz, hogy meginduljon egy áram a rendszeren át, ahhoz az kell, hogy a $\hbar\Omega$ a μ_l és μ_r közé essen. A $\mu_l > \hbar\Omega > \mu_r$ esetén az áram balról jobbra folyik. Továbbiakban ezt a lehetőséget vizsgáltam.



1. ábra. A kvantum dot vázlatos ábrája, ahol E a dot energiája, E_F^L és E_F^R a bal illetve jobb tartály Fermi-energia szintjei, Γ_L és Γ_R pedig a bal illetve jobb oldali alagutazás időegységre eső valószínűségei.

A kvantum dot rendszerben a teljes Hamilton-operátor:

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{SR}, \\
 \hat{H}_S &= \hbar\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}, \\
 \hat{H}_R &= \hbar\sum_l\omega_l\hat{b}_l^\dagger\hat{b}_l + \hbar\sum_r\omega_r\hat{b}_r^\dagger\hat{b}_r, \\
 \hat{H}_{SR} &= \hbar\sum_l(\lambda_l^*\hat{b}_l^\dagger\hat{a} + \lambda_l\hat{a}^\dagger\hat{b}_l) + \hbar\sum_r(\lambda_r^*\hat{b}_r^\dagger\hat{a} + \lambda_r\hat{a}^\dagger\hat{b}_r),
 \end{aligned} \tag{21}$$

ahol

- \hat{a}^\dagger és \hat{a} a dot,
- \hat{b}_l^\dagger , \hat{b}_l a bal tartály,
- \hat{b}_r^\dagger , \hat{b}_r a jobb tartály fermionikus keltő-eltűntető operátorai,
- λ_l^* és λ_l a bal oldali tartály és a dot közti alagutazás frekvencia dimenziójú együttthatói,
- λ_r^* és λ_r a jobb oldali tartály és a dot közti alagutazás frekvencia dimenziójú együttthatói.

A master-egyenlet kölcsönhatási-képben (lásd A.2 appendix) [18]:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t Tr_R \left[\hat{H}_{SR}(t), [\hat{H}_{SR}(t'), \hat{\rho}(t)\hat{R}_0] \right] dt', \tag{22}$$

ahol

- \hat{H}_{SR} a kölcsönhatás Hamilton-operátora (21),
- $\hat{\rho}$ az S rendszer,
- \hat{R}_0 az R környezet sűrűségmátrixa a kezdeti állapotban.

A számolást Dirac-reprezentációban kell elvégezni, és ezért a Hamilton-operátorból a kölcsönhatási részre van szükségünk, és egy kicsit átalakítva, ez nem más mint:

$$\hat{H}_{SR} = \hbar \hat{a}^\dagger \hat{A} + \hbar \hat{A}^\dagger \hat{a}, \quad (23)$$

ahol

- $\hat{A} = \sum_l \lambda_l \hat{b}_l + \sum_r \lambda_r \hat{b}_r,$
- $\hat{A}^\dagger = \sum_l \lambda_l^* \hat{b}_l^\dagger + \sum_r \lambda_r^* \hat{b}_r^\dagger.$

Az A.3 appendixben található számolás alapján adódnak a következő differenciálegyenletek:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{00}(t) &= \Gamma^+ \rho_{11}(t) - \Gamma^- \rho_{00}(t), \\ \dot{\rho}_{11}(t) &= \Gamma^- \rho_{00}(t) - \Gamma^+ \rho_{11}(t), \\ \dot{\rho}_{01}(t) &= \left(-i\bar{\Omega} - \frac{\Gamma^+ + \Gamma^-}{2} \right) \rho_{01}(t), \\ \dot{\rho}_{10}(t) &= \left(+i\bar{\Omega} - \frac{\Gamma^+ + \Gamma^-}{2} \right) \rho_{10}(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Az irodalomban *Bloch-egyenletek*-nek hívják őket [16]. A $|0\rangle$ az üres dot, míg a $|1\rangle$ a betöltött dotot jelenti. Jelölések:

- $\Gamma_l^- = 2\pi g_l(\Omega) |\lambda_l(\Omega)|^2 f_l^h(\Omega),$
- $\Gamma_r^- = 2\pi g_r(\Omega) |\lambda_r(\Omega)|^2 f_r^h(\Omega),$
- $\Delta_l^- = P \int \frac{g_l(\omega_l) |\lambda_l(\omega_l)|^2 f_l^h(\omega_l)}{\Omega - \omega_l} d\omega_l,$
- $\Delta_r^- = P \int \frac{g_r(\omega_r) |\lambda_r(\omega_r)|^2 f_r^h(\omega_r)}{\Omega - \omega_r} d\omega_r,$
- $\Gamma_l^+ = 2\pi g_l(\Omega) |\lambda_l(\Omega)|^2 f_l^e(\Omega),$
- $\Gamma_r^+ = 2\pi g_r(\Omega) |\lambda_r(\Omega)|^2 f_r^e(\Omega),$
- $\Delta_l^+ = P \int \frac{g_l(\omega_l) |\lambda_l(\omega_l)|^2 f_l^e(\omega_l)}{\Omega - \omega_l} d\omega_l,$

- $\Delta_r^\pm = P \int \frac{g_r(\omega_r) |\lambda_r(\omega_r)|^2 f_r^e(\omega_r)}{\Omega - \omega_r} d\omega_r,$
- $\Gamma^\pm = \Gamma_l^\pm + \Gamma_r^\pm,$
- $\Delta^\pm = \Delta_l^\pm + \Delta_r^\pm,$
- $\bar{\Omega} = \Omega + \Delta^- + \Delta^+,$

és, g_l és g_r a bal-, illetve jobboldali tartályok állapotsűrűsége; f^e, f^h a megfelelő tartály elektron illetve lyuk Fermi-Dirac eloszlása, P főértékintegrál. A $\lambda_l(\Omega), \lambda_r(\Omega), \lambda_l(\omega_l)$ és $\lambda_r(\omega_r)$ függvényekről érdemes megjegyezni, hogy a λ -ák indexei már csak azt jelölik, hogy ez a jobb vagy bal oldalra vonatkozik, amíg a kezdeti Hamilton-operátorban függtek ezektől az indexektől. Itt leegyszerűsítettük a modellt, mert azt feltételezzük, hogy ezek az alagutazási frekvenciák valahogyan függenek a tartályok állapotainak frekvenciáitól. Ezt a feltételezést használom az A.3 appendixben is.

A Γ^\pm -k az energiamegőrzéssel kapcsolatos reális átmeneteknek, míg a Δ^\pm -k a Lamb-eltolódások, a virtuális átmeneteknek felelnek meg. Ezért $\bar{\Omega}$ nem más, mint az Ω frekvencia renormálva a Lamb-eltolódásokkal.

Ha a hőmérséklet zérus, akkor f^e és f^h lépcsősfüggvények. Ilyenkor, ha pl. úgy állítjuk be a rendszert, hogy csak balról jobbra folyhat az áram, vagyis amint említettem ennek a fejezetnek az elején $\mu_l > \hbar\Omega > \mu_r$, akkor a következő váltózáások lesznek:

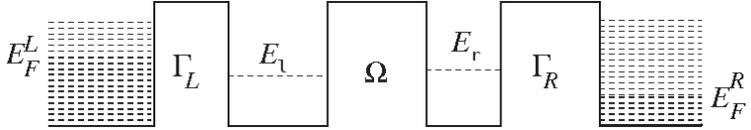
$$\Gamma^+ = \Gamma_l^+ \quad \Gamma^- = \Gamma_r^-, \quad (25)$$

és így a képletek:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{00}(t) &= \Gamma_l^+ \rho_{11}(t) - \Gamma_r^- \rho_{00}(t), \\ \dot{\rho}_{11}(t) &= \Gamma_r^- \rho_{00}(t) - \Gamma_l^+ \rho_{11}(t), \\ \dot{\rho}_{01}(t) &= \left(-i\bar{\Omega} - \frac{\Gamma_l^+ + \Gamma_r^-}{2} \right) \rho_{01}(t), \\ \dot{\rho}_{10}(t) &= \left(+i\bar{\Omega} - \frac{\Gamma_l^+ + \Gamma_r^-}{2} \right) \rho_{10}(t). \end{aligned} \quad (26)$$

Ez a lépés a továbbiakban természetes módon értendő annyira, hogy érvényeségi körre ki fog terjedni a 3.2, 4.3, 4.4 fejezetekre is.

A kettős kvantum dot egy olyan rendszer, amelyben két dot van egymás mellé helyezve, és közöttük egy potenciálgát található. A másik két végük pedig a tartályokkal van kapcsolatban. A potenciálgáton történő koherens alagutazásnak rezonánsnak kell lennie. A kísérletek már megmutatták, hogy a belső koherencia megmarad egészen addig, amíg az elektron nem ér el a



2. ábra. A kettős kvantum dot vázlatos ábrája, ahol E_l a bal oldali dot, E_r a jobb oldali dot energiája, és Ω a két dot közötti rezonáns alagutazás frekvenciája, E_F^L és E_F^R a bal illetve jobb tartály Fermi-energia szintjei, Γ_L és Γ_R pedig a bal illetve jobb oldali alagutazás időegységre eső valószínűségei.

dekoheráló kontaktusokhoz.

Ha nem nézzük, hogy mi van a rendszer belsejében, akkor az egyenleteink a kölcsönhatásra vonatkozóan hasonlóak lesznek a (26)-hoz. A különbség a Schrödinger-képben adódik, így elég ezt megoldani. A Hamilton-operátor hasonló a (21)-hoz, de kiegészül a két dot közötti rezonáns alagutazás következtében még egy taggal:

$$\begin{aligned}
\hat{H} = & E_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + E_r \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r + \hbar \sum_l \omega_l \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l + \hbar \sum_r \omega_r \hat{b}_r^\dagger \hat{b}_r \\
& + \hbar \sum_l (\lambda_l^* \hat{b}_l^\dagger \hat{a}_l + \lambda_l \hat{a}_l^\dagger \hat{b}_l) + \hbar \sum_r (\lambda_r^* \hat{b}_r^\dagger \hat{a}_r + \lambda_r \hat{a}_r^\dagger \hat{b}_r) \\
& + \hbar \Omega (\hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r + \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_l).
\end{aligned} \tag{27}$$

Ebben az esetben most már 4 bázisállapotunk van:

$$\begin{aligned}
|a\rangle &= |00\rangle, & |b\rangle &= |10\rangle, \\
|c\rangle &= |01\rangle, & |d\rangle &= |11\rangle.
\end{aligned} \tag{28}$$

Az a állapot jelenti, hogy üres mindkét dot, a b , hogy első betöltött és a második üres, a c , hogy az első üres és a második betöltött, a d pedig, hogy mindkettő betöltött. Az új jelenség b és c állapotok közötti Rabi-oszcilláció, amit b és c bázison ez a Hamilton-operátor ír le:

$$H = \begin{bmatrix} E_l & \hbar\Omega \\ \hbar\Omega & E_r \end{bmatrix}, \tag{29}$$

ahol

- E_l a b állapot sajátértéke,
- E_r a c állapot sajátértéke,
- Ω a két dot közötti rezonáns alagutazás frekvenciája.

Az egy elektront tartalmazó kettős dot sűrűségoperátorának mozgásegyenlete a tartályokkal való csatolás nélkül:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho], \quad (30)$$

ahol

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{bb} & \rho_{bc} \\ \rho_{cb} & \rho_{cc} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Helyettesítsük be a (29)-t és a (31)-t a (30)-as egyenletbe:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} \left(\begin{bmatrix} E_l & \hbar\Omega \\ \hbar\Omega & E_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{bb} & \rho_{bc} \\ \rho_{cb} & \rho_{cc} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_{bb} & \rho_{bc} \\ \rho_{cb} & \rho_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_l & \hbar\Omega \\ \hbar\Omega & E_r \end{bmatrix} \right). \quad (32)$$

Egyszerűsítve:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} \begin{pmatrix} \hbar\Omega(\rho_{cb} - \rho_{bc}) & (E_l - E_r)\rho_{bc} + \hbar\Omega(\rho_{cc} - \rho_{bb}) \\ \hbar\Omega(\rho_{bb} - \rho_{cc}) + (E_r - E_l)\rho_{cb} & \hbar\Omega(\rho_{bc} - \rho_{cb}) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Bevezetve a:

$$\delta = \frac{E_l - E_r}{\hbar}, \quad (34)$$

ezzel a ρ -ra felírt (33) egyenlet így írható:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{bb} &= -i\Omega(\rho_{cb} - \rho_{bc}), \\ \dot{\rho}_{bc} &= -i(\delta\rho_{bc} - \Omega(\rho_{bb} - \rho_{cc})), \\ \dot{\rho}_{cb} &= +i(\delta\rho_{cb} + \Omega(\rho_{cc} - \rho_{bb})), \\ \dot{\rho}_{cc} &= -i\Omega(\rho_{bc} - \rho_{cb}). \end{aligned} \quad (35)$$

Még mielőtt továbbmennénk, szükségünk van egy megjegyzésre: tudjuk, hogy 4 bázisvektor van, ezért a Hamilton-operátor 4x4-es mátrix, aminek a H 2x2-es mátrix, amivel az előbb számoltunk, az pont a közepén van. Tehát feltehető a kérdés, hogy akkor milyen differenciálegyenletek írják le a sűrűségmátrix egyéb komponenseit. Itt most megmutatom, hogyan is néz ki pl. ρ_{ab} Schrödinger-képben számolva:

$$\dot{\rho}_{ab} = -i\frac{E_l}{\hbar}\rho_{ab} + i\Omega(\rho_{aa} - \rho_{bb}). \quad (36)$$

Azért van jogunk ezeket elhanyagolni, mert nem csatolódnak a diagonális elemeket leíró differenciálegyenlet-rendszerhez. A rendszeren átfolyó áram, illetve annak zajának a meghatározására csak a diagonális elemek időbeli fejlődésére van szükségünk, mivel az áram operátor olyan, hogy ezeket az elemeket választja ki.

Ahhoz, hogy megkapjuk a végső egyenleteket, most tegyük hozzá a tartályokkal való csatolást, a részletes számolás nélkül a (26) mintájára. Ez alapján jól látható, hogy a ρ_{bb} exponenciálisan tart 1-hez, ha bejön balról egy elektron a $|a\rangle$ állapotban, vagy kimegy jobbról egy másik a $|d\rangle$ -ben. Viszont ugyanakkor ρ_{cc} exponenciálisan csökken, ha elektron bejön vagy kimegy a $|c\rangle$ állapotban. A most említett érvek és az A.3 appendix fejezete alapján az egyenletek a következők lesznek:

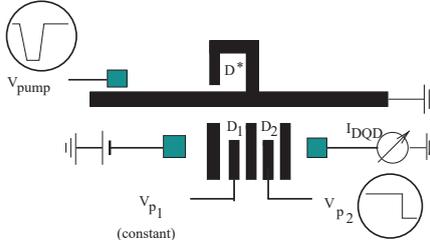
$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{aa} &= -\Gamma_l \rho_{aa} + \Gamma_r \rho_{cc}, \\
\dot{\rho}_{bb} &= -i\Omega(\rho_{cb} - \rho_{bc}) + \Gamma_l \rho_{aa} + \Gamma_r \rho_{dd}, \\
\dot{\rho}_{bc} &= -i\delta \rho_{bc} + i\Omega(\rho_{bb} - \rho_{cc}) - \frac{\Gamma_l + \Gamma_r}{2} \rho_{bc}, \\
\dot{\rho}_{cb} &= +i\delta \rho_{cb} + i\Omega(\rho_{cc} - \rho_{bb}) - \frac{\Gamma_l + \Gamma_r}{2} \rho_{cb}, \\
\dot{\rho}_{cc} &= -i\Omega(\rho_{bc} - \rho_{cb}) - \Gamma_r \rho_{cc} - \Gamma_l \rho_{cc}, \\
\dot{\rho}_{dd} &= -\Gamma_r \rho_{dd} + \Gamma_l \rho_{cc}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Ezeket az egyenleteket vártuk, mivel ezzel igazoltuk a módszerünk helyességét, és megtalálhatók az irodalomban [16].

3.2. A kettős Q-doton alapuló töltés-detektor

Mezoszkópikus rendszerekben az elektronok alagutazás során érzékenyek a külső elektromos térre. Ilyenkor a rendszer áramát potenciál-gáttal kontrollálják, amelyek nagysága a Fermi-szint közvetlen közelébe esik. Ezért ezeket a rendszereket használhatjuk töltés-detektornak. Általában egy mezoszkópikus csapdában levő töltés, Coulomb-csatolva van egy Q-pont kontaktushoz, vagy egy Q-dothoz [19], [20]. Ezt az elrendezést hívjuk SET-nek (single-electron transistor) és ilyenkor az érzékenység következtében egvéni elektronokat is detektálhatunk. A qubit kiolvasására egy ilyen töltés detektort terveztek [21]. Ennek a detektornak az esetében kérdés az információ kiolvasásának hatásfoka, amit szintén vizsgáltak [22].

Mi a kettős Q-dotot (DQD) választottuk töltés detektálásra, mivel ez a rendszer „immunisabb” a külső zajokra mint az előbbieken felsoroltak [23]. A művelet a koherens interdot alagutazáson múlik, ami a Rabi-frekvenciával történik, és éles határok lesznek az áram-feszültség karakterisztikában [24],



3. ábra. Kettős Q-doton (DQD) alapuló elektron-detektor. A detektálandó elektront a V_{pump} feszültséggel pumpáljuk be a D^* csapdába, és ki; a csapdában való tartózkodás meg fog jelenni a DQD-n átfolyó áramban. A csapda Coulomb-kölcsönhatásban van a D_1 első dottal a DQD-ben, állandó V_{p1} potenciál mellett ami az energia szinteket szabályozza; V_{p2} potenciált, ami a D_2 második dothoz tartozik, azt idő-kapuzásra használják.

[25]. A kísérletekben ezeket a berendezéseket rádió-frekvencián működtetik [26], ezzel elkerülik az alacsony frekvenciás jeleket, ahol megjelenik az $1/f$ zaj, amit nem lehet kiszűrni és az eredete sem ismert eléggé, míg a magas frekvenciák esetében megjelenő sűrétzajt könnyebb elméletileg leírni.

Mint, ahogy az 3. ábra mutatja, a csapda az első dot mellé van rakva, így ez a két rendszer Coulomb-kölcsönhatásban lesz egymással. Ennek a detektornak egyik fontos előfeltétele a gyors időbeli vezérlés. Ezt a gyors idő-vezérlést már kísérletben vizsgálták [27], igaz, nem erre az elrendezésre, de így is feltételezzük ennek lehetséges megvalósítását a mi detektorunkra. A mi esetünkben azt jelenti, hogy szinkronizálni kellene a V_{pump} és a második dot potenciáljának modulációját. Az idő és az energia skáláját a Rabi-frekvencia határozza meg ami $\approx 10^{10}$ Hz. Egy tipikus fém kontaktusokkal rendelkező DQD-t, ami GaAs/AlGaAs-ból készül, azt ez a frekvencia jellemzi [24]. Ahhoz, hogy ez a koherencia megmaradjon, az alagutazás idejét ns -ra kell állítani a kapu-feszültségekkel.

Az előző részekben ismertett markovi master-egyenlet segítségével fogom kiszámolni a detektor jelét és zajspektrumát. A rendszeren átfolyó áramot a Ramo-Shockley-tétel segítségével fogom kiszámolni [28]. A tétel úgy szól, hogy a lassú folyamatban (alagutazás) felhalmozódó Q töltés a jól vezető kontaktusokban gyorsan leárnnyékolódik. Az alagutazás maga rövid idő alatt történik, de a kvantummechanikai valószínűség eloszlásának időbeli változása lassú. Ha I_{be} , és I_{ki} -vel jelölöm a rendszerbe bemenő illetve kijövő áramot, és

ha az áram balról jobbra folyik, akkor balról a leárnnyékolt összárám:

$$I_{be} - \frac{\dot{Q}}{2} = I_{be} - \frac{I_{be} - I_{ki}}{2}, \quad (38)$$

jobbról meg:

$$I_{ki} + \frac{\dot{Q}}{2} = I_{ki} + \frac{I_{be} - I_{ki}}{2}. \quad (39)$$

A kívül mért összárámra mindkettőből adódik:

$$I = \frac{I_{be} + I_{ki}}{2}. \quad (40)$$

Így definiálható az áram, mint a kontaktusok betöltésének változása. Más effektus is lehetne egy áram meghatározásánál, mint például dipól korrekciók, de a Ramo-Shockley-tétel igazolja, hogy a szimmetrikus leárnnyékolás dominál egy ilyen két kontaktusú berendezésnél.

A zajspektrumot a Mac-Donald formulával számolom ki [29] (lásd A.8 appendix), ami a Wiener-Khinchin-tétel egy vált ozata korrelációs függvényekre. A formula megmondja, hogy ha egy fizikai mennyiséget tudok csak mérni, de érdekel ennek a mennyiségnek az időderiváltjának a zajspektruma, akkor hogyan kell ezt számolni. Két példát említenék a Mac-Donald cikkből: az egyik esetben tudom mérni a koordinátát, de érdekel a sebesség korrelációs függvényének zajspektruma (Brown-mozgás); tudom mérni a töltést, de érdekel az áram korrelációs függvényének zajspektruma. Ha az olvasóban felmerül a kérdés, hogy mi a klasszikus, és a kvantumos formula, akkor a választ megtalálhatja az A.8 appendix-ben.

A 3. ábrán látható rendszer Hamilton-operát ora elég sok tagban hasonlít a (27)-hez, de figyelembe kell venni a csapdát, és azt a kontaktust, amelyiknek előfeszítését változtatva, a csapdába ki-be pumpáljuk az elektronokat. A pumpának a kölcsönhatásban lesz szerepe, ugyanis ez a környezet Hamilton operátorához ad majd járulékokat, akárcsak a pumpa tartalya (V_{pump}):

$$\begin{aligned} \hat{H} = & E_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + E_r \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r + \hbar \sum_l \omega_l \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l + \hbar \sum_r \omega_r \hat{b}_r^\dagger \hat{b}_r \\ & + \hbar \sum_l (\lambda_l^* \hat{b}_l^\dagger \hat{a}_l + \lambda_l \hat{a}_l^\dagger \hat{b}_l) + \hbar \sum_r (\lambda_r^* \hat{b}_r^\dagger \hat{a}_r + \lambda_r \hat{a}_r^\dagger \hat{b}_r) \\ & + \hbar \Omega (\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_r + \hat{a}_l \hat{a}_r) + V \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l \hat{c}^\dagger \hat{c} + E_c \hat{c}^\dagger \hat{c} \\ & + \hbar \sum_p \omega_p \hat{d}_p^\dagger \hat{d}_p + \hbar \sum_p (\lambda_p^* \hat{d}_p^\dagger \hat{c} + \lambda_p \hat{c}^\dagger \hat{d}_p), \end{aligned} \quad (41)$$

ahol

- \hat{c}^\dagger és \hat{c} a csapda fermionikus keltő-eltüntető operátorai,
- \hat{d}_p^\dagger és \hat{d}_p a pumpa fermionikus keltő-eltüntető operátorai,
- V az első dot, és a csapda kölcsönhatási energiája,
- λ_p^* és λ_p a pumpa és a csapda közti alagutazás frekvencia dimenziójú együtthatói,
- E_t a csapda energia szintje.

A bázis vektorok száma most 8 lehetne, a kettős dot alapján, de mivel az interdot Coulomb-taszítása sokkal nagyobb a belső csatolás energiájánál ($\approx 10^3 \hbar \Omega$), ezért nem lehet betöltve mindkét dot. A [24] cikkeknek megfelelő geometriájú elrendezéseknél ez a helyzet áll elő. A kettős dot leírását azért hagytam 4 bázisban, mert a jövőben készülhetnek olyan geometriák amelyeknél a Coulomb-taszítás kicsi lesz, és mindkét dot betöltött lehet. Végül a 6 bázis vektor:

$$\begin{aligned}
|a\rangle &= |000\rangle, & |b\rangle &= |100\rangle, \\
|c\rangle &= |010\rangle, & |d\rangle &= |001\rangle, \\
|e\rangle &= |101\rangle, & |f\rangle &= |011\rangle.
\end{aligned} \tag{42}$$

A bázisok értelmezése: a , d üres dotok, üres illetve betöltött csapda esetén; b , e első dot betöltött, a második üres, üres illetve betöltött csapda esetén; c , f első dot üres, a második betöltött, üres illetve betöltött csapda esetén.

Az előző részben tárgyalt rendszerek alapján, és alkalmazva a markovii master-egyenlet leírást, és fölhasználva az A.3 függelékét, a következő egyenletek adódnak: amikor a csapdába bepumpáljuk az elektront:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{aa} &= -\Gamma_l \rho_{aa} + \Gamma_r \rho_{cc} - \Gamma_t \rho_{aa}, \\
\dot{\rho}_{bb} &= -2\Omega \text{Im}(\rho_{bc}) + \Gamma_l \rho_{aa} - \Gamma_t \rho_{bb}, \\
\dot{\rho}_{bc} &= -i(\delta \rho_{bc} - \Omega(\rho_{bb} - \rho_{cc})) - \frac{\Gamma_r}{2} \rho_{bc} - \Gamma_t \rho_{bc}, \\
\dot{\rho}_{cc} &= 2\Omega \text{Im}(\rho_{bc}) - \Gamma_r \rho_{cc} - \Gamma_t \rho_{cc}, \\
\dot{\rho}_{dd} &= -\Gamma_l \rho_{dd} + \Gamma_r \rho_{ff} + \Gamma_t \rho_{aa}, \\
\dot{\rho}_{ee} &= -2\Omega \text{Im}(\rho_{ef}) + \Gamma_l \rho_{dd} + \Gamma_t \rho_{bb}, \\
\dot{\rho}_{ef} &= -i((\delta + \nu) \rho_{ef} - \Omega(\rho_{ee} - \rho_{ff})) - \frac{\Gamma_r}{2} \rho_{ef} + \Gamma_t \rho_{bc}, \\
\dot{\rho}_{ff} &= 2\Omega \text{Im}(\rho_{ef}) - \Gamma_r \rho_{ff} + \Gamma_t \rho_{cc}.
\end{aligned} \tag{43}$$

és amikor kipumpáljuk:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{aa} &= -\Gamma_l \rho_{aa} + \Gamma_r \rho_{cc} + \Gamma_t \rho_{dd}, \\
\dot{\rho}_{bb} &= -2\Omega \text{Im}(\rho_{bc}) + \Gamma_l \rho_{aa} + \Gamma_t \rho_{ee}, \\
\dot{\rho}_{bc} &= -i(\delta \rho_{bc} - \Omega(\rho_{bb} - \rho_{cc})) - \frac{\Gamma_r}{2} \rho_{bc} + \Gamma_t \rho_{ef}, \\
\dot{\rho}_{cc} &= 2\Omega \text{Im}(\rho_{bc}) - \Gamma_r \rho_{cc} + \Gamma_t \rho_{ff}, \\
\dot{\rho}_{dd} &= -\Gamma_l \rho_{dd} + \Gamma_r \rho_{ff} - \Gamma_t \rho_{dd}, \\
\dot{\rho}_{ee} &= -2\Omega \text{Im}(\rho_{ef}) + \Gamma_l \rho_{dd} - \Gamma_t \rho_{ee}, \\
\dot{\rho}_{ef} &= -i((\delta + \nu) \rho_{ef} - \Omega(\rho_{ee} - \rho_{ff})) - \frac{\Gamma_r}{2} \rho_{ef} - \Gamma_t \rho_{ef}, \\
\dot{\rho}_{ff} &= 2\Omega \text{Im}(\rho_{ef}) - \Gamma_r \rho_{ff} - \Gamma_t \rho_{ff}.
\end{aligned} \tag{44}$$

Ahhoz, hogy minél kevesebb egyenletünk legyen, kihasználtam a ρ önadjungáltóságát, azaz $\rho_{cb}^* = \rho_{bc}$ és $\rho_{fe}^* = \rho_{ef}$.

- $\Gamma_t = 2\pi g_p(E_t/\hbar) |\lambda_p(E_t/\hbar)|^2 (f_p^h(E_t/\hbar) \text{ vagy } f_p^e(E_t/\hbar))$
attól függően, hogy ki- vagy bepumpálás történik,
- $\nu = V/\hbar$,
- $\delta = \frac{E_l - E_r}{\hbar}$.

A g_p a pumpa állapotsűrűsége, f_p^e , f_p^h pedig a pumpa elektron illetve lyuk Fermi-Dirac eloszlása.

Mivel a rendszeren általában az átalagutazott elektronok N számát mérik, azaz töltést, ezért áttérek az N -felbontott technikára ami a kettős dothoz hasonló (lásd A.6 appendix). Ebben az esetben a rendszer árama a Ramo-Shockley-tétel alapján a következő képpen írható le (az egységnyi töltés $e = 1$ minden esetben):

$$I(t) = \frac{1}{2} \dot{N} = \frac{1}{2} \sum_N N \dot{p}_N(t), \tag{45}$$

ahol

$$p_N(t) = \sum_i \rho_{ii}^{[N]}(t) = \underline{v} \cdot [\underline{x}_N(t) + \underline{y}_N(t)], \tag{46}$$

az alábbi jelöléssel

$$\underline{x}_N \equiv (\rho_{aa}^{[N]}, \rho_{bb}^{[N]}, \rho_{bc}^{[N]}, \rho_{cb}^{[N]}, \rho_{cc}^{[N]})^T, \tag{47a}$$

$$\underline{y}_N \equiv (\rho_{dd}^{[N]}, \rho_{ee}^{[N]}, \rho_{ef}^{[N]}, \rho_{fe}^{[N]}, \rho_{ff}^{[N]})^T, \tag{47b}$$

és

$$\underline{v} = (1, 1, 0, 0, 1)^T. \tag{48}$$

Az x_N , y_N vektorokat a már megadott master-egyenlet határozza meg az N -felbontott esetben. Az egyenletek így alakulnak:

$$\dot{\underline{x}}_N = \mathbf{A} \underline{x}_N + \mathbf{B} \underline{x}_{N-1} + \Gamma_t \underline{z}_N, \quad (49a)$$

$$\dot{\underline{y}}_N = (\mathbf{A} + \mathbf{K}) \underline{y}_N + \mathbf{B} \underline{y}_{N-1} - \Gamma_t \underline{z}_N, \quad (49b)$$

ahol

$$\underline{z}_N = \begin{cases} -\underline{x}_N & \text{bepumpálás,} \\ \underline{y}_N & \text{kipumpálás,} \end{cases} \quad (50)$$

és bevezettük ezeket a mátrixokat:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\Gamma_l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\Omega & -i\Omega & 0 \\ 0 & i\Omega & -i\delta - \Gamma_r/2 & 0 & -i\Omega \\ 0 & -i\Omega & 0 & i\delta - \Gamma_r/2 & i\Omega \\ 0 & 0 & -i\Omega & i\Omega & -\Gamma_r \end{pmatrix}, \quad (51a)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_r \\ \Gamma_l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (51b)$$

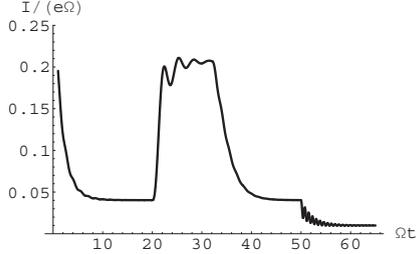
Ezeket az egyenleteket mi közöltük először az irodalomban [30], és mivel már a kezünkben van a sűrűségmátrix mozgásegyenlete, amiből kiszámolhatunk minden számunkra érdekes mennyiséget, ezért áttérek a következő alfejezetre.

3.3. Eredmények

Itt az előző alfejezetben tárgyalt detektor áramát, és annak zajspektrumát fogom kiszámolni. A sűrűségmátrix dinamikáját (49) egyenlet írja le. Az eredmények megtalálhatók a [30] cikkben.

Az áram kiszámolásához a (45) egyenletre van szükségünk. A stacionárius áram meghatározása már megtörtént mind egy dotra [31], mind két dotra [16]. Először a $\rho_{ij} = \sum_N \rho_{ij}^{[N]}$ felösszegzést elvégezzük az (49) egyenleten, majd a bal oldalát nullává tesszük, és megoldjuk az egyenletrendszert. Figyelembe vesszük, hogy $t \rightarrow \infty$ -ben a bepumpálásnál

$$\rho_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in [a, b, c], \quad (52)$$



4. ábra. A detektor jele, mint az idő függvénye (54)-ből, a (43) és (44) egyenletek numerikus megoldása alapján. A paraméterek $\Gamma/\Omega = 2/3$ ($\Gamma_l = \Gamma_r = \Gamma$), $\Gamma_T/\Omega = 1$. A csapda és a dot közti csatolás $\nu/\Omega = 10/3$ [erős csatolás; lásd (57)], amit az elrendezés rögzít. A DQD legfontosabb paramétere $\delta = -11/3$ a magas töltésérzékenység elérése érdekében. A töltést $\Omega t = 20$ időpillanatban pumpáljuk be a csapdába és $\Omega t = 32$ -ben pumpáljuk ki; a detektort $\Omega t = 50$ -ben zárjuk le úgy, hogy akkor a $\delta = -8$ -ra változik.

ezek a mátrixelemek eltűnnek, mert a végtelenben már csak a betöltött csapda van, és az üres csapdának megfelelő sűrűségmátrix-elemek exponenciálisan lecsengenek. Az üres csapda esetén más mátrixelemek tűnnek el:

$$\rho_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in [d, e, f]. \quad (53)$$

A (45) egyenlet így alakul a stacionárius esetben:

$$I(t) = \frac{1}{2} \dot{N} = \frac{1}{2} \sum_N N \dot{p}_N(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\Gamma_l \rho_{aa} + \Gamma_r \rho_{cc}), \\ \frac{1}{2}(\Gamma_l \rho_{dd} + \Gamma_r \rho_{ff}). \end{cases} \quad (54)$$

Az így kapott stacionárius sűrűségmátrixot behelyettesítjük a (54) egyenletbe. Az eredmény:

$$I_{stac} = \frac{\Gamma/3}{\frac{1 + \alpha/3}{1 - \alpha^2} + \frac{1 - \alpha}{12} \left(\frac{\Gamma}{\Omega}\right)^2 + \frac{1/3}{1 - \alpha} \left(\frac{\tilde{\delta}}{\Omega}\right)^2}, \quad (55)$$

ahol

$$\bar{\delta} = \begin{cases} \delta & \text{üres csapdára,} \\ \delta + \nu & \text{betöltött csapdára;} \end{cases} \quad (56)$$

bevezetve az asszimmetria paramétert $\alpha = (\Gamma_l - \Gamma_r)/(\Gamma_l + \Gamma_r)$ és az átlagot: $\Gamma = (\Gamma_l + \Gamma_r)/2$.

A detektor által leadott elektromos jel, a betöltött illetve az üres csapda estén mért áram közti különbség. Mint az (55) egyenleten is látszik, a nagy asszimmetria lecsökkenti az áramot. Ezért a továbbiakban a teljesen szimmetrikus esetet vizsgálom: $\alpha = 0$. Továbbá, a δ egy valódi kísérleti paraméter (lásd (44) alatt), amit könnyen lehet változtatni. Ugyanakkor a ν -csatolásnak csak akkor van hatása az áramra, ha az összemérhető a

$$\Delta = \sqrt{3\Omega^2 + \Gamma^2/4}, \quad (57)$$

kombinációval.

Ahhoz, hogy erős jelet kapjunk, a következő összefüggést kell érvényben legyen: $\delta = -\nu$. A kísérleti referencia ezen állításra: Hayashi és munkatársai cikke [24]. Mivel a ν a csapda és a dot közti Coulomb-csatolás, ezért ez is nagyon függ a geometriai elrendezéstől.

Egy valódi mérésnél, amikor megmérjük az áramot, a mérés bizonyos ideig tart, vagyis egy ablakszerű részt láttunk a jelből. Ilyenkor a zajspektrum ismerete fontos, mivel csak bizonyos frekvenciák kerülnek bele ebbe az ablakba. A következőkben ennek a kérdésnek a megválaszolásával foglalkozom a stacionárius állapotban. Az már ismertté vált az irodalomban, hogy ha egy pontkontaktussal próbálok letapogatni a két állapotú csapdát, akkor a stacionárius esetben sörét zajról beszélünk, amit a Schottky-formula ír le [32]:

$$S(\omega) = 2I, \quad (58)$$

ahol I a kontakt uson átfolyó stacionárius áram. Ha nem pontkontaktust használunk, hanem kvantum dotokat, akkor megmarad ez a sörétzaj, de új függvények jelennek meg, amelyek nagy frekvenciákra zérussá válnak. Az az eset is felmerülhet, hogy a töltés időfüggő a csapdában, de ez egy nagyon bonyolult detektor jelhez vezetne. Mi egyszerűen állandónak vettük.

A McDonald-formula segítségével határozom meg a zajspektrumot (lásd A.8 appendix) [29]:

$$S(\omega) = 2\omega \int_0^\infty d\tau \left(\frac{d}{d\tau} Q^2(\tau) \right) \sin(\omega\tau). \quad (59)$$

$Q(\tau)$ az összes töltés ami áthaladt a kettős doton τ idő alatt, és a (45)-s egyenlet által meghatározott áram időintegrálja:

$$\frac{d}{dt} Q^2(t) = \frac{1}{4} \sum_0^\infty N^2 \dot{p}_N(t) - 2I_{stac}^2 t. \quad (60)$$

A probléma arra redukálódott, hogy meg kell oldani a differenciálegyenlet-rendszereket, és a kapott eredményt behelyettesítve a McDonald-formulába megkapom a zajspektrumot. Ez előre megadott paraméter értékek mellett numerikusan kiszámolható. Mivel viszont a paraméterek függvényében érdemes tanulmányozni a rendszert, ezért dolgoztam ki az A.4 appendixben található módszert, ami a Laplace-transzformációra épül. A Fourier- és a Laplace-transzformáció egymással összefügg.

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt, \quad (61)$$

$$L(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt, \quad (62)$$

$$F(\omega) = \frac{L(-i\omega) - L(i\omega)}{2i}. \quad (63)$$

Az (59),(60),(61),(62),(63) eredményeket felhasználva a következő képlet adódik:

$$S(\omega) = \omega \frac{1}{4i} [M(-i\omega) - M(i\omega)], \quad (64)$$

ahol

$$M(z) = \int_0^{\infty} dt e^{-zt} \sum_0^{\infty} N^2 \dot{p}_N(t), \quad (65)$$

és felhasználtuk, hogy a (60) jobb oldalának második tagja nem ad járulékot az $S(\omega)$ spektrumba. Az (49) egyenletet Laplace-transzformálva egy egyenletrendszert kapunk, amit megoldva megkapjuk az $M(z)$ függvényt. A részletek megtalálhatók az A.4 appendixben.

A kezdeti feltételek:

$$\rho_{ij}^{[N]}(0) = \rho_{ij}^{stac} \delta_{N0}. \quad (66)$$

Elvégezve egy mátrix-sorozat felösszegzését N -ben 0-tól ∞ -ig:

$$M(z) = z\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{C} + \mathbf{C}^2}{(\mathbf{I} - \mathbf{C})^3} (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0(0). \quad (67)$$

A $\mathbf{C} = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$, és a δ paraméter az \mathbf{A} mátrixban [[lásd (51)] ki van cserélve a $\bar{\delta}$ -ra [(56)], hogy mind az üres, mind a betöltött csapda esetét le lehessen írni. A mátrix invertálást analitikusan el lehet végezni, és így a következő skálázott egyenlet adódik:

$$S(\omega | \Gamma, \bar{\delta}, \Omega) = \Omega s \left(\frac{\omega}{\Omega} \middle| \frac{\Gamma}{\Omega}, \frac{\bar{\delta}}{\Omega} \right), \quad (68)$$

ahol $s(x|y, z) = u(x, y, z)/v(x, y, z)$, valamint

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) = & 4y (16x^8 + 8x^6 (7y^2 - 4(4 + z^2))) \\
& + x^4 (57y^4 + 16(4 + z^2)^2 - 8y^2 (46 + 11z^2)) \\
& + 2y^4 (y^4 + 8y^2(-1 + z^2) + 16(5 + 6z^2 + z^4)) \\
& + x^2 y^2 (19y^4 - 4y^2(37 + 10z^2) \\
& + 16(44 + 23z^2 + 3z^4)), \tag{69}
\end{aligned}$$

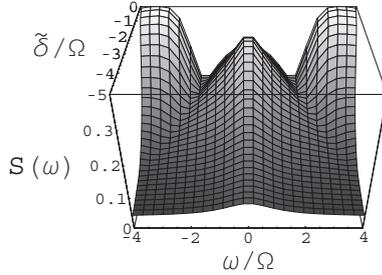
és

$$\begin{aligned}
v(x, y, z) = & 16x^8 + y^4 ((y^2 + 4(3 + z^2))^2 + 8x^6 (5y^2 \\
& - 4(4 + z^2)) + x^4 (33y^4 + 16(4 + z^2)^2 - 8y^2 \\
& (32 + 7z^2)) + 2x^2 y^2 (5y^4 + y^2(20 - 8z^2) \\
& + 16(20 + 9z^2 + z^4)). \tag{70}
\end{aligned}$$

Az eredmények a 5. ábrán láthatók. A legérdekesebb tulajdonság, hogy ω tengelyen a 2Ω frekvencia környékén megjelenik egy mélyedés, és úgy szintén a -2Ω -nál is. Ez a frekvencia a csillapítatlan Rabi-oszcilláció. A horpadás rezonancia feltételek mellett jól látható, amikor $\tilde{\delta} \approx 0$, és ez egy éles jelnek felel meg. A Rabi-oszcilláció azt jelenti, hogy az elektron a két dot között oda-vissza oszcillál, ez egy kölcsönhatás mentes rendszerben csúcst jelent a zajspektrumban. Ebben a rendszerben az inkoherens alagutazások tolják el a csúcsokat ebből a helyzetből, amik beleolvadnak a sörétzajba, de a horpadás jelzi, hogy ott vannak mégis a spektrumban. A nagy frekvenciáknál megjelenik a jellegzetes sörétzaj, ami abból generálódik, hogy az elektronok ki-be alagutaznak a kettős dotba. Az (49) egyenlet N -felbontott alakja teszi lehetővé, hogy ez a modelltől kijöjjön.

A detektor legfontosabb feladata, hogy a kettős doton átfolyó áram nagyságából megtudjuk, hogy üres vagy betöltött csapdánk van. A nyitott illetve a zárt detektor stacionárius áramának különbsége az a mennyiség, ami ezt megadja. A zajspektrum ismerete pedig segít ezeknek a jeleknek a pontos detektálásánál. A kapott eredmények alapján elmondható, hogy ez a fajta modell betekintést ad abba, hogy miként is lehetne a DQD-t töltés-detektornak használni. Az $1/f$ zaj rádiófrekvenciás műveletekkel kiszűrhető a rendszerből. A megalósítás és a jelek kimérésének nagy hátráltatója lehet a külső elektronika. Egy jó RC idejű külső berendezés, alul-áteresztő szűrővel meg tudná szűrni ezeket a kis zajjal terhelt éles jeleket.

Végül megemlítem, hogy ennek a töltés-detektornak a tanulmányozása azért volt motiváló, mert témavezetőm, Geszti Tamás, lehetőséget látott abban, hogy így megfigyelhető lenne a hullámfüggvény kollapszusa. Ehhez két



5. ábra. Kettős doton alapuló töltés detektor zajspektruma, mint a relatív frekvencia ω/Ω függvénye. A dot előfeszítése $\tilde{\delta}/\Omega$ [lásd (56)]; és az alagutazási valószínűségek $\Gamma/\Omega = 1.2$ ($\Gamma_l = \Gamma_r = \Gamma$).

ilyen detektorra lenne szükség, amelyek korrelációját mérném, különböző módon időkapuzva őket. A rendszer előnye lehet a foton-detektorhoz képest, hogy a töltés-detektorok sokkal lassabban működnek, ezért képesek lehetnek a mérési folyamat időfelbontására. Ezeknek a rendszereknek másik nagy előnye, hogy a geometriai elrendezésükben dinamikusan fejlődnek, biztosítva más struktúrák kutatását, melyek éles jellel és kis zajjal rendelkezhetnek mint az általunk vizsgált detektor.

4. A folytonos mérés alkalmazása a Q-dotokon

4.1. A folytonos Q-mérés

A folytonos Q-mérés azt jelenti, hogy időben folytonosan mérünk egy \hat{A} mennyiséget egy Q-rendszeren. Ez úgy történhet, hogy $1/\Delta t$ frekvenciával Q-mérést hajtok végre, és aztán később veszem a végtelen frekvencia határértékét. Ezen konstrukció jól használható, amikor nagyon életlen méréseket végzünk [33]. Ezeknek a méréseknek a σ hibája megfelelő arányban kell legyen a frekvenciával, hogy a folytonos határesetben a

$$g = \lim_{\Delta t \rightarrow 0, \sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t \sigma^2}, \quad (71)$$

véges legyen, amit egyébként a folytonos mérés erősségének is nevezzünk.

Ezt a típusú dinamikát a nem-projektív mérésből építjük fel. Az általánosított projektorokról már volt szó, és őket egy véges számú halmazzal indexeltük, de most egy olyan index halmazt kell vennünk, ami folytonos (pl. \mathbb{R} a valós számok halmaza). Természetesen sok lehetőség van, de nekünk a folytonos mérés konstrukciójához, a következő általánosított projektorra van szükség:

$$\hat{\Pi}_{\bar{A}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(\bar{A} - \hat{A})^2}{2\sigma^2} \right], \quad -\infty \leq \bar{A} \leq \infty, \quad (72)$$

ahol \bar{A} az indexhalmaz eleme ami most éppen maga a \mathbb{R} .

$$p_{\bar{A}} = \text{Tr} \left(\hat{\Pi}_{\bar{A}} \hat{\rho} \right), \quad \int p_{\bar{A}} d\bar{A} = 1. \quad (73)$$

A $p_{\bar{A}}$ megmondja, hogy milyen valószínűséggel mérhetjük ki a $\hat{\Pi}_{\bar{A}}$ -t. Azonkívül szükségünk van a $d\bar{A}$ mértékre, amivel normalizálhatjuk ezeket a valószínűségeket.

Az $1/\Delta t$ intervallumban pillanatszerűen történik a mérés, és a nem-szelektív (lásd 2.3 fejezet) változása az állapotnak a

$$\hat{\rho}(t + \Delta t) = \int \hat{\Pi}_{\bar{A}}^{1/2} \hat{\rho}(t) \hat{\Pi}_{\bar{A}}^{1/2} d\bar{A}, \quad (74)$$

alakot veszi fel. Ebből egy irreverzibilis master-egyenlet adódik:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{g}{8} \left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{\rho} \right] \right]. \quad (75)$$

A szelektív mérés (lásd 2.3 fejezet) esetén, Ito-féle sztochasztikus differenciálegyenletes leírást használnak [72]:

$$d\hat{\rho} = -\frac{g}{8} \left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{\rho} \right] \right] dt + \frac{\sqrt{g}}{2} \left(\hat{A} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{A} - 2(\hat{A} \hat{\rho}) \right) dW. \quad (76)$$

Ha a (76) egyenletet kiátlagoljuk az összes megfigyelt értékre, és kihasználjuk, hogy a $\hat{\rho}$ és a dW statisztikailag függetlenek, akkor megkapjuk az (75) egyenletet. Természetesen ez az átlagolás a nem-szelektivitást jelenti.

Ha a rendszerünknek saját dinamikája is van, és alkalmazzuk a folytonos mérés elméletét, akkor a:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{g}{8} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{\rho}]], \quad (77)$$

mozgásegyenlet adódik. A mérés hatása nélkül az

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}, \quad (78)$$

unitér operátor fejleszti a rendszert. Az egyenletek levezetése megtalálható az A.7 appendixben, illetve a sztochasztikus leírás mód támaszkodik [34] cikkre, és az ottani hivatkozásokra.

4.2. Alkalmazás Q-dotokon

A mérés visszahatása a mért objektumra már egy jól ismert probléma kör. Ennek alkalmazása a nanoszerkezetekben az elmúlt egy évtizedben vált intenzív kutatási területé. Coulomb-csatolt pontkontaktusok, egy elektron tranzisztorok vagy DQD-k voltak azok az elrendezések, amelyekkel vizsgálták ezt a visszahatást [17],[35]. Az előző fejezet is egy ilyen visszahatást írt le. Ugyanakkor a folytonos mérés elméletét is használták már [36],[37]. De mindegyik módszer a rendszeren áthaladó N töltést tekintette mérendő mennyiségnek. Ezen elméletek esetében, az I áramot, a $\langle dN/dt \rangle$ sztochasztikus átlag határozta meg. A többi esetben az előző fejezetben látottak alapján kell kiszámolni a rendszeren átfolyó áramot. Ezzel szemben mi egy árammérővel szeretnénk megmérni a rendszeren átfolyó áramot, így a mérendő mennyiségünk $\hat{A} = \hat{I}$. Ennek következtében a mérés erősségét jelző paraméter

$$g = (\Delta t)^{-1}(\Delta I)^{-2}, \quad (79)$$

ahol a Δt az árammérő időfelbontása (inverz sáv szélesség) és ΔI a statisztikai hibája annak, hogy Δt idő alatt a rendszeren átfolyó áramot mérem. Az előzőekben láttuk a folytonos mérés konstrukcióját, ahol a mérés erősségének megvolt a maga definíciója (71). Mivel itt egy teljesen hétköznapi árammérővel van dolgunk, ezért egy jó időfelbontás és statisztikai hiba esetén lesz a detektált rendszer számára a folytonos mérés hatása érvényes. Természetesen, ez függ a detektált rendszer karakterisztikus frekvenciájától.

Egy közepesen jó árammérő esetén, aminek már az adatait meg lehet a világhálón találni, a következő tulajdonságai vannak: a pontossága $pA \approx$

10^7 elektron/ s -t is eléri, és a sávszélessége 10^4 Hz. Ekkor a $g = 10^{-10}$ s, és a dotok Rabi-frekvenciája pedig $\Omega \approx 10^{10}$ Hz. Ez azt jelenti, hogy a visszahatásnak komoly jelentősége van a belső koherens dinamikára. Ezért használható ez az elmélet a Q-dotok esetében. Továbbá a már megismert kettős kommutátor erősen gátolja a belső koherens mozgást, aminek a hatására a mért mennyiség lecsökken, ezt hívjuk kvantum Zénón-effektusnak (QZE) [38].

A dotok mozgásegyenletéről tudjuk az A.3 appendix alapján, hogy Lindblad alakú és ennek a bázisok alapján kifejtett alakja megtalálható három rendszer esetén is az előző fejezetben. Ezt a Born-Markov közelítéssel kaptuk, és rövid formába írva:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \mathcal{L}\hat{\rho}, \quad (80)$$

ahol \mathcal{L} a Liouville szuperoperátor.

Ugyanakkor feltételezve, hogy a tartályok dinamikája sokkal gyorsabb a dotokénál, és az árammérés erősségénél: $\tau_r \ll \Omega^{-1} \approx g$,

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \mathcal{L}\hat{\rho} - \frac{g}{8} [\hat{I}, [\hat{I}, \hat{\rho}]] = \mathcal{L}'\hat{\rho}, \quad (81)$$

adódik. Mivel a folytonos mérés alkalmazása a tartályok kiátlagolása után lép érvénybe, ezért \hat{I} a markovi áramoperátora a rendszernek. Ennek kiszámolása röviden:

$$Tr_S(\hat{I}\hat{\rho}) = Tr_{S+R}(\hat{Q}\hat{\chi}), \quad (82)$$

$$\hat{Q} = \left(\sum_r \hat{b}_r^\dagger \hat{b}_r - \sum_l \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \right) / 2, \quad (83)$$

ahol

- \hat{Q} a töltés operátora mindenfajta dot rendszer esetén (a rendszeren áthaladt töltés),
- $\hat{\rho}$ a dot rendszer sűrűségmátrixa,
- $\hat{\chi}$ a dot rendszer + tartályok sűrűségmátrixa Dirac-képpen,
- $\hat{b}_{l,r}^\dagger, \hat{b}_{l,r}$ a bal, illetve jobb tartályok kelt δ -eltűntető operátorai,
- S -dot rendszer, R -tartály rendszer.

Ennek a markovi áramoperátornak a kiszámolása támaszkodik az A.5 appendixre, és a [39],[40] cikkekre.

A szelektív mérés sztochasztikus leírása alapján tudjuk, hogy a detektált áram fluktuálni fog:

$$I(t) - \langle I(t) \rangle = \gamma\xi(t). \quad (84)$$

Itt a $\xi(t)$ egy fehér zaj a Born-Markovi dinamika időskáláján (a kiátlagolt S rendszer időskáláján, de a teljes $S + R$ rendszeren viszont nem feltétlenül). A tartályok szempontjából nézve pedig egy jól meghatározott fluktuáló függvény. A fehér zaj amplitúdója pedig

$$\gamma = 1/\sqrt{g}, \quad (85)$$

alakban függ össze a mérés erősségével.

A stacionárius megoldást az

$$\mathcal{L}'\hat{\rho}_\infty = 0, \quad (86)$$

egyenlet adja meg. Ebből következően a stacionárius áram pedig:

$$I_\infty = \langle I(t) \rangle_\infty = \langle \hat{I} \rangle_{\hat{\rho}_\infty} = Tr(\hat{I}\hat{\rho}_\infty), \quad (87)$$

ahol $\langle \cdot \rangle_\infty$ a detektált áram sztochasztikus átlaga a $\hat{\rho}_\infty$ állapotban. A két egyenlőség megtévesztő lehet, de az A.7 appendix alapján tudjuk, hogy a sztochasztikus és a nem-szelektív eset, ekvivalens leírás módokat jelent.

A markovi áram Heisenberg képbeli mozgásegyenlete $t > 0$ -ra:

$$\frac{d\hat{I}(t)}{dt} = (\mathcal{L}')\hat{I}(t), \quad \hat{I}(0) = \hat{I}. \quad (88)$$

A folytonos mérés esetében a stacionárius korrelációs függvénye a fluktuáló áramnak:

$$\begin{aligned} \langle I(t)I(0) \rangle_\infty - \langle I(t) \rangle_\infty \langle I(0) \rangle_\infty \\ = \frac{1}{2} \langle \{\hat{I}(|t|), \hat{I}\} \rangle_{\hat{\rho}_\infty} - I_\infty^2 + \gamma^2 \delta(t). \end{aligned} \quad (89)$$

A nem szinguláris rész egyszerűen adódik: $\langle I(t)I(0) \rangle_\infty = \frac{1}{2} \langle \{\hat{I}(|t|), \hat{I}\} \rangle_{\hat{\rho}_\infty}$ minden kvantum-rendszerre. A mi rendszereinkben a folytonos mérés következtében a detektornak van saját zaja, amit a (84) egyenlet ír le, és ezért megjelenik az extra $\delta(t)$ tag a korrelációs függvényben. Az antikommutátor használata a Heisenberg képben leírt markovi áramra szükséges, mivel a rendszer nem klasszikus, hanem kvantumos, továbbá az A.8 appendix MacDonaldd formulájára vonatkozó részben részletesebben tárgyalom a klasszikus és kvantumos korrelációs függvények kiszámítása közti különbséget. A zajspektrumot a (89) korrelációs függvény Fourier-transzformáltjaként kapom meg:

$$S(\omega) = 2 \left(\int \langle I(t)I(0) \rangle_\infty e^{i\omega t} dt - 2\pi I_\infty^2 \delta(\omega) \right), \quad (90)$$

és nagy frekvenciák esetén csak a fehér zaj konstans háttére marad:

$$S(\infty) = 2\gamma^2 = 2/g. \quad (91)$$

Mint a töltés-detektorról szóló 3.3 fejezetben láttuk, kell léteznie a zajspekt-rumban a sörétzajnak. Ebben az alfejezetben ezt nem tárgyaltam, de a követ-kező két alfejezet utolsó részében szó lesz az \mathcal{L}' szuperoperátor N -felbontott kiterjesztéséről.

4.3. Folytonos Q-mérés egy doton

Az eredmények tárgyalása előtt megadom viszonyítási céljából az egy dot Hamilton-operátorát (lásd a 3.1 fejezetet):

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \hbar\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\sum_l\omega_l\hat{b}_l^\dagger\hat{b}_l + \hbar\sum_r\omega_r\hat{b}_r^\dagger\hat{b}_r \\ & + \hbar\sum_l(\lambda_l^*\hat{b}_l^\dagger\hat{a} + \lambda_l\hat{a}^\dagger\hat{b}_l) + \hbar\sum_r(\lambda_r^*\hat{b}_r^\dagger\hat{a} + \lambda_r\hat{a}^\dagger\hat{b}_r). \end{aligned} \quad (92)$$

A $|0\rangle$ az üres dot, míg a $|1\rangle$ a betöltött dotot jelenti. Mivel az áram bal-ról jobbra folyik a rendszerben, és a hőmérséklet $T = 0$, alábbi jelöléseket vezettem be:

$$\begin{aligned} \Gamma_l &= \Gamma_l^-, \quad \Gamma_l^+ = 0, \\ \Gamma_r &= \Gamma_r^+, \quad \Gamma_r^- = 0. \end{aligned} \quad (93)$$

Az (24) egyenleteket, az új jelöléssel Lindblad-alakban adom meg:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \mathcal{L}\hat{\rho} \equiv \Gamma_l(\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \frac{1}{2}\{\hat{a}\hat{a}^\dagger, \hat{\rho}\}) + \Gamma_r(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}\}) - i\Omega[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}], \quad (94)$$

ahol $\hat{a} = |0\rangle\langle 1|$.

Az A.5 appendix alapján a markovi áramra adódik:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma} &= \frac{\Gamma_l(\hat{\Gamma} - \hat{n}) + \Gamma_r\hat{n}}{2} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Gamma_l & 0 \\ 0 & \Gamma_r \end{pmatrix}, \\ \hat{n} &= |1\rangle\langle 1|. \end{aligned} \quad (95)$$

Ezek alapján (81) így alakul:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{00}(t) &= \Gamma_r\rho_{11}(t) - \Gamma_l\rho_{00}(t), \\ \dot{\rho}_{11}(t) &= \Gamma_l\rho_{00}(t) - \Gamma_r\rho_{11}(t), \\ \dot{\rho}_{01}(t) &= \left(-i\Omega - \frac{\Gamma_r + \Gamma_l}{2} - \frac{g(\Gamma_l - \Gamma_r)^2}{32}\right)\rho_{01}(t), \\ \dot{\rho}_{10}(t) &= \left(+i\Omega - \frac{\Gamma_r + \Gamma_l}{2} - \frac{g(\Gamma_l - \Gamma_r)^2}{32}\right)\rho_{10}(t). \end{aligned} \quad (96)$$

Mint látható az egy dot esetében, nincs hatása az árammérőnek a rendszerre, mivel a főátló elemei játszanak szerepet az áram illetve a spektrum kiszámolásában, és a nem-diagonálisok nem csatolódnak ezekhez. A stacionárius állapot:

$$\rho_\infty = \frac{1}{\Gamma} \begin{pmatrix} \Gamma_r & 0 \\ 0 & \Gamma_l \end{pmatrix}, \quad (97)$$

és a stacionárius áram:

$$I_\infty = Tr(\hat{I}\hat{\rho}_\infty) = \frac{\Gamma_l\Gamma_r}{\Gamma}, \quad (98)$$

ahol $\Gamma = \Gamma_l + \Gamma_r$.

Mielőtt áttérnék a korrelációs függvény meghatározására, szükségünk van egy operátorok terén értelmezett szuperoperátor adjungáltjára. Természetesen az operátorok tere most olyan, hogy mindegyik operátor véges dimenziós Hilbert-téren értelmezett. Legyen $\mathcal{L} : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})$, ahol $B(\mathcal{H})$ a \mathcal{H} Hilbert téren értelmezett összes korlátos operátor tere. Ha a \mathcal{H} véges dimenziós, akkor az alábbi skalárszorzatot kell értelmezni:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle &: B(\mathcal{H}) \times B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}, \\ \langle A, B \rangle &= Tr(A^\dagger B) \quad \forall A^\dagger, B \in B(\mathcal{H}). \end{aligned} \quad (99)$$

Az adjungálás definíciója:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^\dagger y \rangle. \quad (100)$$

Mi önadjungált operátorokkal (A, B) foglalkoztunk, így pedig adódik:

$$Tr((\mathcal{L}^\dagger A) B) = Tr(A (\mathcal{L} B)). \quad (101)$$

Felhasználva ezt a korrelációs függvény esetében:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \{\hat{I}(|t\rangle), \hat{I}\} \rangle_{\hat{\rho}_\infty} &= Re \left[Tr \left(\left(e^{\mathcal{L}^\dagger |t| \hat{I}} \hat{I} \hat{\rho}_\infty \right) \right) \right] \\ &= Re \left[Tr \left(\hat{I} e^{\mathcal{L} |t|} \left(\hat{I} \hat{\rho}_\infty \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (102)$$

és tudva az alábbi összefüggéseket:

$$\mathcal{L}' \cdot = \mathcal{L} \cdot - \frac{g}{8} \left[\hat{I}, \left[\hat{I}, \cdot \right] \right], \quad (103)$$

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = \mathcal{L}'^\dagger \hat{I}, \quad (104)$$

ahol az \mathcal{L}' . művelet a (96) differenciálegyenlet-rendszer. A $e^{\mathcal{L}'|t|}(\hat{\rho}_\infty)$ azt jelenti, hogy ezt a differenciálegyenlet-rendszert az $\hat{\rho}_\infty$ kezdeti feltétellel megoldjuk. Ezeket felhasználva, egy dot esetében a stacionárius korrelációs függvény:

$$\langle I(t)I(0) \rangle_\infty = I_\infty \frac{(\Gamma_l - \Gamma_r)^2}{4\Gamma} e^{-\Gamma|t|} + I_\infty^2 + \gamma^2 \delta(t). \quad (105)$$

A zajspektrum pedig a (90) alapján:

$$S(\omega) = I_\infty \frac{(\Gamma_l - \Gamma_r)^2}{\Gamma^2 + \omega^2} + 2\gamma^2. \quad (106)$$

Látható, hogy ebben a zajspektrumban nincsen benne a sörétzaj, hanem csak az árammérő zajának konstans háttere. Könnyen láttható, hogy ha a detektor javul, akkor a mérés erőssége g csökken, de a γ nő és hatalmas zajt visz be a rendszerbe. De, ha a g nő akkor eléri valahol azt az értéket, ahol össze mérhető a sörétzajjal. Ha sörétzajt akarunk a modellünkben kapni, akkor az N -felbontott kiterjesztés kell elvégezni a mozgásegyenleten. Az A.6 appendixre támaszkodva, a duplakommutátoros rész marad a mozgásegyenletben. Ilyenkor a stacionárius áramra ugyanaz adódik, viszont a zajspektrum (ilyen típusú számolások egy dotra [31]):

$$S(\omega) = I_\infty \frac{(\Gamma_l - \Gamma_r)^2}{\Gamma^2 + \omega^2} + 2I_\infty + 2\gamma^2. \quad (107)$$

Minden esetben az elemi e töltést egynek vettem. Elmondható, hogy egy dot esetében a folytonos mérés ezen elmélete addig érvényes, ameddig $2\gamma^2$ már nagyságrendileg összehasonlítható a sörétzajjal. A kiterjesztett egyenleteket részletesen még nem vizsgálták.

4.4. Folytonos Q-mérés a kettős doton

Az itt leírt eredmények megtalálhatók a [41] cikkben. Az előző 4.3 alfejezet struktúráját követve, ismétlésként megadom a kettős dot Hamilton-operátorát:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & E_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + E_r \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r + \hbar \sum_l \omega_l \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l + \hbar \sum_r \omega_r \hat{b}_r^\dagger \hat{b}_r \\ & + \hbar \sum_l (\lambda_l^* \hat{b}_l^\dagger \hat{a}_l + \lambda_l \hat{a}_l^\dagger \hat{b}_l) + \hbar \sum_r (\lambda_r^* \hat{b}_r^\dagger \hat{a}_r + \lambda_r \hat{a}_r^\dagger \hat{b}_r) \\ & + \hbar \Omega (\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_r + \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_l). \end{aligned} \quad (108)$$

Az interdot elektron tasztítás miatt 3 állapot marad:

$$\begin{aligned} |a\rangle &= |00\rangle, & |b\rangle &= |10\rangle, \\ |c\rangle &= |01\rangle. \end{aligned} \quad (109)$$

Az áram ebben az esetben is balról jobbra folyik és $T = 0$, tehát a Fermi-féle arany szabálynak megfelelő alagutazási valószínűségek:

$$\begin{aligned}\Gamma_l &= \Gamma_l^-, \quad \Gamma_l^+ = 0, \\ \Gamma_r &= \Gamma_r^+, \quad \Gamma_r^- = 0.\end{aligned}\tag{110}$$

A kettős kvantum dot (DQD) mozgásegyenletének Lindblad-alakja:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\rho}}{dt} &= \mathcal{L}\hat{\rho} \equiv -i[\hat{H}_0, \hat{\rho}] + \\ &+ \Gamma_l(\hat{a}_l^\dagger \hat{\rho} \hat{a}_l - \frac{1}{2}\{\hat{a}_l \hat{a}_l^\dagger, \hat{\rho}\}) + \Gamma_r(\hat{a}_r \hat{\rho} \hat{a}_r^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r, \hat{\rho}\}),\end{aligned}\tag{111}$$

ahol

- $\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\delta(\hat{n}_l - \hat{n}_r) + \Omega(\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_r + H.C.)$ a DQD Hamilton-operátora (tartály és kölcsönhatás nélkül),
- $\delta = \frac{E_l - E_r}{\hbar}$,
- $\hat{a}_l = |00\rangle\langle 10|$ és $\hat{a}_r = |00\rangle\langle 01|$,
- $\hat{n}_l = |10\rangle\langle 10|$, $\hat{n}_r = |01\rangle\langle 01|$, $\hat{n} = \hat{n}_l + \hat{n}_r = \hat{1} - |00\rangle\langle 00|$.

A markovi áramra adódik (lásd A.5 appendix):

$$\hat{\mathbf{i}} = \frac{\Gamma_l(\hat{1} - \hat{n}) + \Gamma_r \hat{n}_r}{2} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Gamma_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_r \end{pmatrix}.\tag{112}$$

Ezek alapján (81) így alakul:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{aa} &= -\Gamma_l \rho_{aa} + \Gamma_r \rho_{cc}, \\ \dot{\rho}_{bb} &= -i\Omega(\rho_{cb} - \rho_{bc}) + \Gamma_l \rho_{aa}, \\ \dot{\rho}_{bc} &= -i\delta \rho_{bc} + i\Omega(\rho_{bb} - \rho_{cc}) - \frac{\Gamma_r + x}{2} \rho_{bc}, \\ \dot{\rho}_{cb} &= +i\delta \rho_{cb} + i\Omega(\rho_{cc} - \rho_{bb}) - \frac{\Gamma_r + x}{2} \rho_{cb}, \\ \dot{\rho}_{cc} &= -i\Omega(\rho_{bc} - \rho_{cb}) - \Gamma_r \rho_{cc},\end{aligned}\tag{113}$$

és $x = \frac{g\Gamma_r^2}{16}$.

A stacionárius állapot:

$$\rho_\infty = \begin{pmatrix} \rho_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{bb} & \rho_{bc} \\ 0 & \rho_{cb} & \rho_{cc} \end{pmatrix},\tag{114}$$

ahol

$$\begin{aligned}
\rho_{aa} &= \frac{\Omega^2 \Gamma_r (1+y)}{\delta^2 \Gamma_l + (1+y) [\Omega^2 (2\Gamma_l + \Gamma_r) + \frac{1}{4} \Gamma_l \Gamma_r^2 (1+y)]}, \\
\rho_{bb} &= \frac{\Gamma_l [\delta^2 + (1+y) (\Omega^2 + \frac{1}{4} \Gamma_r^2 (1+y))]}{\delta^2 \Gamma_l + (1+y) [\Omega^2 (2\Gamma_l + \Gamma_r) + \frac{1}{4} \Gamma_l \Gamma_r^2 (1+y)]}, \\
\rho_{cc} &= \frac{\Omega^2 \Gamma_l (1+y)}{\delta^2 \Gamma_l + (1+y) [\Omega^2 (2\Gamma_l + \Gamma_r) + \frac{1}{4} \Gamma_l \Gamma_r^2 (1+y)]}, \\
\rho_{bc} &= \frac{\delta \Omega \Gamma_l}{\delta^2 \Gamma_l + (1+y) [\Omega^2 (2\Gamma_l + \Gamma_r) + \frac{1}{4} \Gamma_l \Gamma_r^2 (1+y)]} + \\
&\quad i \frac{\frac{1}{2} \Omega \Gamma_r \Gamma_l}{\delta^2 \Gamma_l + (1+y) [\Omega^2 (2\Gamma_l + \Gamma_r) + \frac{1}{4} \Gamma_l \Gamma_r^2 (1+y)]} = \rho_{cb}^*.
\end{aligned} \tag{115}$$

Míg a stacionárius áram:

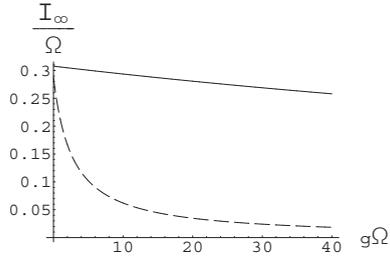
$$\begin{aligned}
I_\infty &= Tr \left(\hat{\Gamma} \hat{\rho}_\infty \right) = \\
&= \frac{\Omega^2 \Gamma_r \Gamma_l (1+y)}{\delta^2 \Gamma_l + (1+y) [\Omega^2 (2\Gamma_l + \Gamma_r) + \frac{1}{4} \Gamma_l \Gamma_r^2 (1+y)]},
\end{aligned} \tag{116}$$

ahol $y = \frac{g \Gamma_r}{4\Gamma_l}$.

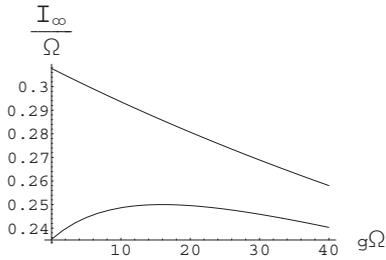
Az áram formulája, mint látható, tartalmazza a QZE-t, mert ha a g paraméterrel tartók a végtelenhez, akkor az áram lecsökken: ha $g \rightarrow \infty$ akkor $I_\infty \rightarrow 0$ (4. ábra). Ugyanakkor, mint már az egy dot leírásánál említettem, az elmélet határa ott van, ahol a sörétzaj összehasonlítható az árammérték konstans háttérzajával. Ilyen feltétel mellett tapasztalható egy 3%-os áram lecsökkenés a szimmetrikus esetben, és 30%-os a aszimmetrikusban. Viszont a kettős dot állapotérének nem szimmetrikus volta miatt, azaz hogy mivel a interdot Coulomb-taszítás miatt hiányzik a $|1, 1\rangle$ állapot, ezért a másik oldalra súlyozott aszimmetria nincs hatással az áram lecsökkenésére (csak a $\Gamma_r > \Gamma_l$ eset). A két dot energiája ezekben az esetekben egyenlő volt. Tudjuk, hogy a folytonos mérés a két dot közti koherens alagutazást próbálja meg elmosni, ezért ha van előfeszítés a DQD-ben, azaz $\delta \neq 0$, új effektus figyelhetünk meg. Mint ahogy az 5. ábrán látható, megjelenik az úgymond "anti-Zénón"-effektus. Van egy olyan intervallum, ahol a mérés hatására az áram elkezd nőni.

A stacionárius korrelációs függvényt ugyanúgy számoljuk, mint az egy dot esetében:

$$\frac{1}{2} \langle \{ \hat{\Gamma}(|t|), \hat{\Gamma} \} \rangle_{\hat{\rho}_\infty} = Re \left[Tr \left(\hat{\Gamma} e^{\mathcal{L}'|t|} \left(\hat{\Gamma} \hat{\rho}_\infty \right) \right) \right], \tag{117}$$



6. ábra. A mért stacionárius áram $\delta = 0$ mellett, mint a csatolás g erősségének függvénye: szimmetrikus esetben $\Gamma_l = \Gamma_r = \Omega$ (folytonos vonal), és aszimmetrikus esetben $\Gamma_r = 5\Gamma_l = \Omega$ (szagatott vonal). A sörétzaj és a detektor zajja $g\Omega = 6.7$ értéknél egyenlőek.



7. ábra. A mért stacionárius áram, mint a csatolás g erősségének függvénye. $\delta = 0$ (egyenes vonal), és $\delta/\Omega = 1$ (görbe vonal). A sörétzaj és a detektor zajja $g\Omega = 6.7$ értéknél egyenlőek. $\Gamma_l = \Gamma_r = \Omega$ mindkét esetben.

ahol az \mathcal{L}' művelet a (113) differenciálegyenlet-rendszer. A $e^{\mathcal{L}'|t|}(\hat{\mathbb{I}}\hat{\rho}_\infty)$ azt jelenti, hogy ezt a differenciálegyenlet-rendszert az $\hat{\mathbb{I}}\hat{\rho}_\infty$ kezdeti feltétellel megoldjuk. Továbbá, az eredmények könnyebb interpretálása érdekében a $\delta = 0$ paraméterérték esetét tárgyalom.

Ilyenkor meg kell határozni a differenciálegyenlet sajátértékeit. Formálisan a karakterisztikus egyenlet:

$$|\mathcal{L}' + \lambda| = 0. \quad (118)$$

Ennek az egyenletnek van egy zérus gyöke, és a másik három gyök a következő egyenletet elégíti ki a $\Gamma_l = \Gamma_r = \Omega$ esetben:

$$\lambda^3 - \left(\frac{5}{2} + \frac{g\Omega}{32}\right)\Omega\lambda^2 + \left(6 + \frac{g\Omega}{16}\right)\Omega^2\lambda - \left(\frac{13}{2} + \frac{g\Omega}{32}\right)\Omega^3 = 0. \quad (119)$$

A polinomnak van egy pozitív gyöke $\lambda = \Delta_0$, és két komplex konjugált $\lambda = \Delta_1 \pm i\omega_R$, ahol a Δ_1 pozitív. A 0 sajátértékhez tartozó rész a korrelációs függvényből kiesik akkor, amikor levonjuk az I_∞^2 -t, így a következő zajspektrum adódik:

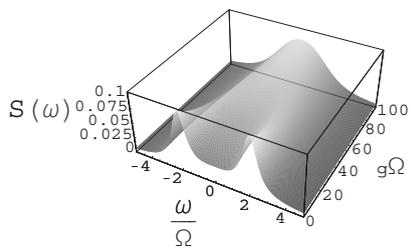
$$S(\omega) = 2\frac{R_0}{\omega^2 + \Delta_0^2} + 2\frac{R_1 + \omega R'_1}{(\omega - \omega_R)^2 + \Delta_1^2} + 2\frac{R_1 - \omega R'_1}{(\omega + \omega_R)^2 + \Delta_1^2} + 2\gamma^2. \quad (120)$$

Az ismeretlen tagok (R_0 , R_1 , R'_1) nagyon bonyolult függvényei a $\Gamma_l, \Gamma_r, \Omega, g$ paramétereknek. Az előző fejezetben megadott spektrum[(69),(70) képletek] is ilyen alakra hozható, de a fizikai tartalma más: ott szerepel a sörétzaj, itt pedig a folytonos mérés visszahatása. Ha itt is elvégezzük az N -felbontott kiterjesztést (lásd A.6 appendix) akkor egy olyan differenciálegyenlet-rendszer adódik, amit még nem vizsgáltunk, és akkor valójában megjelenik a sörétzaj az elméletben. A $g\Omega$ kis értékei mellett, elvégezve egy egyszerű sorfejtést, ahol a sor konvergenciasugara elég nagy, kapjuk(a többi paraméter egységnyi nagyságú az Ω -hoz képest):

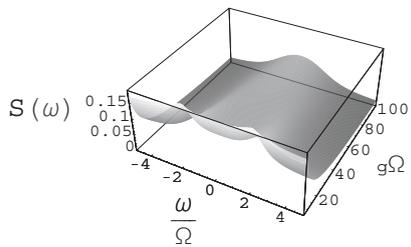
$$\begin{aligned} \omega_R/2\Omega &= 1.025 + 0.002g\Omega + \mathcal{O}(g\Omega)^2, \\ \Delta_1/\Omega &= 0.52 + 0.014g\Omega + \mathcal{O}(g\Omega)^2. \end{aligned} \quad (121)$$

Könnyen látható, hogy $\omega_R \approx 2\Omega$ a Rabi-frekvencia környékén található.

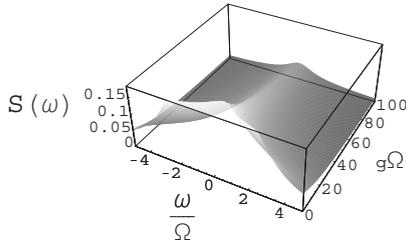
Mint ahogy a spektrum ábrákon látható, három csúcs van. Egy a nulla frekvencia körül, és kettő a plusz-mínusz Rabi-frekvencia körül. Az ábrák jól mutatják, hogy a mérés erősségének növelésével, a Rabi-frekvencia körüli csúcsok lassan eltűnnek, és végül egyetlen Lorentz-görbe marad a nulla frekvenciánál. Amint a 7. ábrán jól látható, hogy ha ott van a konstans háttér, akkor a g paraméter kis értékeinél olyan nagy zaj lesz, hogy gyakorlatilag az



8. ábra. A kettős doton mért áram zajspektruma, mint a detektor g csatolásának függvénye, a $2\gamma^2$ háttér nélkül.



9. ábra. A kettős doton mért áram zajspektruma, mint a detektor g csatolásának függvénye, a $2\gamma^2$ háttérrel.



10. ábra. Aszimmetrikus kettős doton mért áram zajspektruma, mint a detektor g csatolásának függvénye. A $2\gamma^2$ háttérrel nem adtuk hozzá. Az aszimmetria mértéke $\Gamma_r = 4\Gamma_l$, $\Gamma_l/\Omega = 1$

ezen ülő csúcsok elmosódnak. Viszont g nagy értékeire csak a nulla frekvenciánál marad egy csúcs. Mivel az áramnál is jól látható volt, hogy az egyik típusú aszimmetria milyen hatást ér el, ezért ezt a zajban is megvizsgáltam a 8. ábrán, és a várt eredményt kapjuk, a Rabi-frekvencia körüli csúcsok hamar eltűnnek.

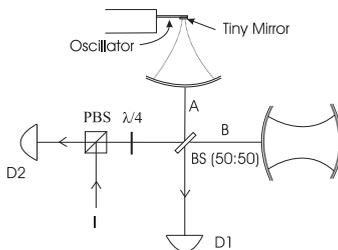
A vizsgált rendszerben megjelent a QZE a mérés erősségének változtatásával. A rendszeren átfolyó áram megváltozott, ugyanekkor a spektrumban a koherens mozgásnak megfelelő csúcsok lecsökkentek vagy megszűntek. Mivel a QZE definíciója az, hogy a mérés gátolja a belső koherens mozgást, ezt itt most sikerült bizonyítani. Fontos megjegyzés, hogy az egy dotnál ezt nem láthattuk, mivel ott nem volt koherens mozgás. Ezután kimérjük a mennyiségeinket, és gyakorlatilag ez egy pontot jelent az áram 6. és 7. ábráin, és egy görbét a spektrumon. Hangsúlyozni kell azt, hogy ebből az elméletből nem jött ki a sörétzaj, tehát ahol a két konstans háttér zaj összemérhető, ott van az elmélet hattára. Onnan érvénybe lép az N -felbontott technika, aminek az alkalmazása jövőbeli célunk.

5. A rezgő tükör Q-mechanikai vizsgálata

5.1. Előzmények

A makroszkopikus testek kvantummechanikai tulajdonságait, és ezen belül azt, hogy szuperpozíciós állapotban is lehetnek, ezt már Schrödinger is felvetette 1935-ben [44]. Sajnos nehezen detektálható a kvantum-interferencia, mivel a környezet dekoherenciát visz be a vizsgált rendszerbe [14]. Javaslatok vannak arra, hogyan csináljunk és detektáljunk makroszkopikus szuperpozíciót különböző rendszerekben [45, 46, 47], és történtek kísérletek szupravezetőkben [48] és a fullerén molekulával [5]. Hosszú távon ezek a kísérletek azt célozzák meg, hogy létezik-e egy nem konvencionális gravitációs [50] vagy nem-környezeti dekoherencia [49], ami a hullámfüggvény spontán kollapszusához vezet. Komoly problémát okoz, hogy a C_{60} -nál nagyobb molekulára nem sikerült forrást előállítani a kísérleti körülmények között. Az új ötlet az, hogy vegyünk egy magas jósági tényezővel rendelkező üregrezonátort, amibe helyezünk be egy tükröt. Ez a tükör kölcsönhat a fotonnal, és a foton tulajdonságaiból indirekt módon lehetne következtetni a tükör kvantummechanikai tulajdonságaira. A kezdeti úttörő próbálkozások mind kísérleti [51] és elméleti [52] szempontból nem hoztak sikereket. Ezek után jelent meg az a javaslat [53], ami megoldást jelenthet. Mi is ezt a rendszert vizsgáltuk.

A 11. ábrán látható berendezés alapján elmondható, hogy a foton szuperpo-



11. ábra. A javaslat [53] egy Michelson interferométer, melynek mindkét karja egy magas jósági tényezőjű üreg. Az A kar végén található az a tükör, ami egy mikromechanikai oszcillátorhoz van csatolva. Ha a foton az A karban van, akkor fénynyomással hat a rezgő tükrökre, ha nem, akkor nem történik semmi. A $D1$ és $D2$ detektorok mérik ki a foton interferencia láthatóságát. A polarizáló nyálábbosztó és a $\lambda/4$ forgatás azért kell, hogy a forrásból jövő foton ne kerüljön egyből a detektorokba.

ziciós állapotba kerül a két karban, és ha a fénynyomás hatására összefonódik a tükörrel, akkor a tükör is szuperpozíciós állapotba kerülhet. Két rendszert összefonódottnak tekintünk, ha a teljes rendszer állapota nem írható fel a két részrendszer állapotainak bármilyen tenzorszorzat kombinációjaként.

Természetesen kísérletileg azért nehéz egyelőre egy ilyen rendszer megvalósítása, mert a fotont életben kell tartani a tükör egy periódusnyi idejére, és meg kell őrizni a tükör koherenciáját, ami nagyon alacsony hőmérsékletű hűtést igényel.

A rendszer dekoherencia nélküli leírását fogom első lépésben tárgyalni. Ha a tükör periódusideje hosszabb, mint a foton periódusideje a rezonátorban, és a tükör lengési amplitúdója sokkal kisebb, mint a rezonátor hossza, akkor a rendszer Hamilton-operátora [52]:

$$\hat{H} = \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_m\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hbar g\hat{a}^\dagger\hat{a}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \quad (122)$$

ahol ω_c a foton frekvenciája az üres rezonátorban, aminek a hossza L , \hat{a} a foton eltüntető operátora, ω_m és \hat{b} a fonon frekvenciája és az eltüntető operátora. A fonon a tükör tömegközépponti mozgásának a gerjesztéseit írja le. A csatolási állandó $g = \frac{\omega_c}{L}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}}$, ahol m a tükör tömege.

A tükör és a foton csatolásának Hamilton-operátora a következő egyszerű számítással adható meg. Ha egy ω_c frekvenciájú rezgés van egy L hosszúságú üregben, akkor ha $L + x$ -re változik az üreg hossza, a rezgés frekvenciája $\omega_c\frac{L}{L+x}$ lesz. Mivel az x sokkal kisebb mint L , ezért:

$$\frac{L}{L+x} \simeq 1 - \frac{x}{L}. \quad (123)$$

A kvantálás után pedig:

$$\hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a}\left(1 - \frac{\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_m M}}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)}{L}\right). \quad (124)$$

Innen már könnyen belátható a megadott Hamilton-operátor.

A foton kezdeti feltétele legyen az, hogy szuperpozíciós állapotban van A és B karban, a tükör pedig egy koherens állapotban: $|\beta\rangle = e^{-|\beta|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ [55, 56], ahol $|n\rangle$ a harmonikus oszcillátor sajátállapota. Ebben az esetben a teljes rendszer kezdeti állapota:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |0\rangle_B) |\beta\rangle. \quad (125)$$

A rendszer állapota t idő múlva az alábbi alakot ölti [54]:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_m t} (|0\rangle_A |1\rangle_B |\beta e^{-i\omega_m t}\rangle + e^{i\kappa^2(\omega_m t - \sin \omega_m t)} |1\rangle_A |0\rangle_B |\beta e^{-i\omega_m t} + \kappa(1 - e^{-i\omega_m t})\rangle), \quad (126)$$

ahol

$$\kappa = g/\omega_m. \quad (127)$$

Mint látható, a κ paraméter mondja meg, hogy a tükör mennyire fog kitérni.

A detektorok a foton interferenciaképeének láthatóságát mérik. Ezt a mennyiséget a fotonra redukált sűrűségmátrix (ez egy 2×2 mátrix) nem-diagonális elemének kétszeres abszolút értéke adja meg [57]. A (126) egyenlet alapján a nem-diagonális elem:

$$\rho_{OD} = \frac{1}{2} e^{-\kappa^2(1 - \cos \omega_m t)} e^{i\kappa^2(\omega_m t - \sin \omega_m t) + i\kappa \text{Im}[\beta(1 - e^{-i\omega_m t})]}, \quad (128)$$

ahol Im a imaginárius részt jelenti. Az első tényező az abszolút értéke az egész kifejezésnek, ami a $t = \pi/\omega_m$ időpillanatban lesz a legkisebb, és ilyenkor van a tükörnek maximális kitérése. A második rész az a fázis, ami függ a tükör kezdeti állapotától. Ha nincs dekoherencia a rendszerben, akkor egy teljes $t = 2\pi/\omega_m$ periódus után a rendszer a

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |1\rangle_B + e^{i\kappa^2 2\pi} |1\rangle_A |0\rangle_B) |\beta\rangle, \quad (129)$$

állapotba kerül, amikor nincs összefonódás a tükör és a foton között. Ilyenkor detektálható a teljes interferencia. Ha viszont a tükörnek van környezete, akkor az emlékszik arra, hogy mi történt egy teljes periódus alatt, így az összefonódva marad a fotonnal, aminek az interferencia képe nem lesz maximálisan éles. Ez az alapja annak, hogy dekoherenciát detektáljunk. A mi munkánk és a következő fejezet erről fog szólni.

Még egyetlen fontos tényező van, ami érdemes tárgyalni a dekoherencia mentes esetben, mégpedig a hőmérséklet. Azaz a gyakorlatban ez a tükör egy termikus egyensúlyban levő test. Ez úgy írható le, mint a $|\beta\rangle$ koherens állapotok keveréke egy Gaussi súllyal: $(1/\pi\bar{n})e^{-|\beta|^2/\bar{n}}$, ahol $\bar{n} = 1/(e^{\hbar\omega_m/kT} - 1)$ a termikus gerjesztések átlagos száma. Ahhoz, hogy meghatározzuk az interferencia kép láthatóságát t pillanatban, adott kezdeti termikus állapottal, az alábbi módon átlagoljuk ki a sűrűségmátrix nem-diagonális elemét:

$$\nu(t) = \left| \int P_T(\beta, \beta^*) Tr_m \rho_{OD}(\beta, \beta^*) d^2\beta \right|, \quad (130)$$

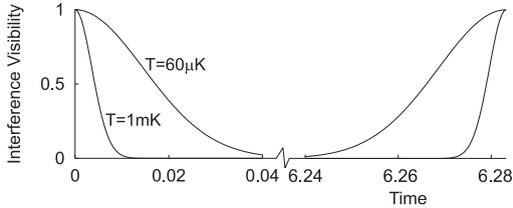
ahol a $\nu(t)$ az interferencia láthatóságának függvénye és a Gaussi súly:

$$P_T(\beta, \beta^*) = e^{-|\beta|^2/\bar{n}}/(\pi\bar{n}). \quad (131)$$

A $Tr_m \rho_{OD}(\beta, \beta^*)$ nem más mint a (128) kifejezés, és elvégezve az integrálást adódik:

$$\nu(t) = \frac{1}{2} e^{-\kappa^2(2\bar{n}+1)(1-\cos\omega_m t)} e^{i\kappa^2(\omega_m t - \sin\omega_m t)}. \quad (132)$$

A nem-diagonális elem most a $1/(\kappa\omega_m\sqrt{\bar{n}})$ időskálán csökken, még akkor is, ha $\kappa \sim 1$, ami a kísérleti megvalósítás határát súrolja és \bar{n} egy közepes hőmérsékletnek felel meg, pl. 1 mK. Viszont továbbra is a visszatérések ideje ugyanaz [46] a $t = 2\pi/\omega_m$ -ben, amikor a tükrök szétfonódik a fotontól. A (128) egyenlet fázisa már független a kezdeti tükrök állapottól a kiátlagolás után, és ezért a kiátlagolásnak nincs hatása az interferencia láthatóságának csökkenésére. Ez nagyon jól látható a 12. ábrán, aminek a két szélét kell figyelni. Egyetlen fontos kitétel van, mégpedig hogy $\kappa^2 \gtrsim 1$ ami azt jelenti, hogy a



12. ábra. A foton interferencia láthatóságának [53] időfejlődése a rezgő tükrök egy periódusa alatt $\kappa = 1$, $T = 1\text{mK}$ és $T = 60\mu\text{K}$ paraméter értékek mellett. Az idő $1/\omega_m$ egységeken van mérve ($\omega_m = 2\pi \times 500$ Hz). A láthatóság csökken, majd visszatér egy teljes periódus után. A csúcsok szélessége $1/\sqrt{T}$ -vel arányos.

foton alatal közölt impulzus-átadás nagyobb kell legyen, mint a tükrök kvantummechanikai impulzusának a határozatlansági relációból adódó szórása. Legyen N annak a száma, hogy a foton az rezonátorban hányszor fordul a tükrök egy rezgési periodusa alatt, ami a $2NL/c = 2\pi/\omega_m$ alakba írható, akkor ez a feltétel:

$$\frac{2\hbar N^3 L}{\pi c m \lambda^2} \gtrsim 1, \quad (133)$$

ahol λ a fény hullámhossza. Az (133) egyenletben nem minden paraméter független egymástól, mert N függ a tükrök méretétől, tömegétől, a fény hullámhosszától és a rezonátor jósági tényezőjétől. Továbbá kényes kérdés a

tükör szélessége, mivel ha túl keskeny, akkor diffrakció is könnyen létrejöhet. A kísérletre az alábbi javaslatot tették [53]: az N legyen 10^{10} nagyságrendű, a fény λ hullámhossza 630 nm, a rezonátor L hossza 5cm és $\omega_m = 2\pi \times 500$ Hz. A tükör mérete $10 \times 10 \times 10 \mu m$, és így a tömeg 5×10^{-12} kg. A tükörök anyaga szilícium, amit SiO_2 vagy SiO_2/Ta_2O_5 anyaggal kell bevonni. Ezeket pedig egy nagy jóságú tényezőjű rezonátorba kell helyezni [4].

Az egész fejezetben csak javaslatot említettem, mivel a kísérlet egyes részei habár működnek, egészében még meg nem oldott feladat ez. Ennek ellenére megkezdődött a dekoherenciát leíró modell kutatása. Mi is ezzel foglalkoztunk, és az eredmények a következő fejezetben találhatóak.

5.2. Eredmények

A dekoherenciát leíró egyszerű modellt az [58] cikkek vizsgálták. Habár a gravitációs dekoherenciát leíró új tag az állapot mozgásegyenletében megjelent, sem a tükör sűrűláadási mechanizmusával, sem a hőmérséklettel nem foglalkoztak. A mi munkánk erről szól, és az alábbiakban közölt eredmények az [62] cikkben megtalálhatóak. Az előző fejezet alapján a foton interferencia képének láthatóságát kell kiszámolni: $\nu(t) = 2|\text{Tr}_m \hat{\rho}_{OD}(t)|$, ahol $\hat{\rho}_{OD} = {}_A \langle 1|_B \langle 0|\hat{\rho}|0\rangle_A |1\rangle_B$ a teljes sűrűségmátrix $\hat{\rho}$ (tükör-foton rendszer) nem-diagonális eleme, a $|0\rangle_j$ és $|1\rangle_j$ állapotok pedig leírják, hogy 0 vagy 1 foton van az interferométernek a $j = A, B$ karjában.

$\hat{\rho}_{OD}$ dinamikájára az [58] cikkek megadnak egy master-egyenletet, ami koordináta általi dekoherenciát ír le D_{pp} erősséggel. A γ sűrűláadás bevezetésére, a magas hőmérsékletű markovi master-egyenlet használjuk azaz a Caldeira-Leggett-modellt [60]. Röviden elmondva, azt vizsgáljuk, hogy egy harmonikus oszcillátor lineáris koordináta kölesönhatásban van egy nagy rendszer sok kis oszcillátorával. Az egész rendszer Hamilton-operátora:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} + \hat{x} \sum_k C_k \hat{R}_k + \sum_k \left[\frac{\hat{P}_k^2}{2M} + \frac{M\omega_k^2 \hat{R}_k^2}{2} \right]. \quad (134)$$

Elvégezve a közelítéseket és $\hbar = 1$ választással (minden további képletre érvényes)

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}, \hat{\rho} \right] - D_{pp}^T[\hat{x}, \hat{\rho}] - i \frac{\gamma}{2} [\hat{x}, \{\hat{p}, \hat{\rho}\}], \quad (135)$$

ahol $D_{pp}^T = Mk_B T \gamma$.

Ez a formula helyes magas hőmérsékleten, de a mi általunk vizsgált rendszer

ennél sokkal hidegebb. Ilyenkor be kell vezetni az impulzus általi dekoherenciát D_{qq} erősséggel. Ennek a Lindblad-alak miatt kell ott lennie, és a Dekkermátrix alapján [59] a D_{qq} elméleti minimuma a $\gamma^2/16D_{pp}$ és így őrződik meg a sűrűségmátrix pozitivitása.

$$D_{pp} = D_{pp}^T + D_{pp}^{nonenv}, \quad (136)$$

ahol D_{pp}^{nonenv} az univerzális dekoherencia modellek paramétere [49], [50]. Ez a D_{qq} korrekció nagyon fontos alacsony hőmérsékleteken, mivel D_{pp}^T lineárisan függ a hőmérséklettől. Ezek után a tükör és a foton sűrűségmátrixának nem-diagonális része a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}_{OD}}{\partial t} = & -i\hat{H}^A \hat{\rho}_{OD} + i\hat{\rho}_{OD} \hat{H}^B - D_{pp}[\hat{x}, [\hat{x}, \hat{\rho}_{OD}]] \\ & - i\frac{\gamma}{2}[\hat{x}, \{\hat{p}, \hat{\rho}_{OD}\}] - D_{qq}[\hat{p}, [\hat{p}, \hat{\rho}_{OD}]], \end{aligned} \quad (137)$$

egyenlet szerint fejlődik.

- $\hat{H}^B = \frac{m\omega_m^2}{2}\hat{x}^2 + \frac{1}{2m}\hat{p}^2$,
- $\hat{H}^A = \hat{H}^B - \omega_c \hat{x} \cdot \hat{L}$.

A tükör alapállapotú hullámfüggvényének szélessége $\sigma = 1/\sqrt{2M\omega_m}$. A mechanikai oszcillátor jószágú tényezője $Q_m^{-1} = \gamma/\omega_m$. Vezessük be a következő dimenziótlan paramétereket: a $\kappa = (\omega_c/\omega_m)(\sigma/L)$ foton-tükör csatolási állandót, a $\Lambda = (\sigma^2/\omega_m)D_{pp}$ dekoherencia erősséget és a $\chi = D_{qq}/(\omega_m\sigma^2)$ kombinációt. Használva ezeket, és az időt az $\omega_m^{-1} = 1$ egységekben mérve, a dimenziótlan master-egyenletre adódik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}_{OD}}{\partial t} = & -i\sigma^2[\hat{p}^2, \hat{\rho}_{OD}] - \frac{i}{4}\sigma^{-2}[\hat{x}^2, \hat{\rho}_{OD}] + i\kappa\sigma^{-1}\hat{x}\hat{\rho}_{OD} \\ & - \Lambda\sigma^{-2}[\hat{x}, [\hat{x}, \hat{\rho}_{OD}]] - \frac{i}{2}Q_m^{-1}[\hat{x}, \{\hat{p}, \hat{\rho}_{OD}\}] \\ & - \chi\sigma^2[\hat{p}, [\hat{p}, \hat{\rho}_{OD}]]. \end{aligned} \quad (138)$$

Ezt az egyenletet analitikusan meg lehet oldani az alábbi Tr összefüggéssel [61]:

$$\tilde{\rho}_{OD}(k, \Delta) = \text{Tr}_m(\hat{\rho}_{OD} \exp i(\sigma^{-1}k\hat{x} + \sigma\Delta\hat{p})), \quad (139)$$

ahol k, Δ dimenziótlan Fourier váltóozók [63]. Használva ezt a reprezentációt a (138) egyenlet alakja így alakul:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}_{OD}(k, \Delta)}{\partial t} = & 2k\frac{\partial}{\partial \Delta}\tilde{\rho}_{OD} - \frac{1}{2}\Delta\frac{\partial}{\partial k}\tilde{\rho}_{OD} - \Lambda\Delta^2\tilde{\rho}_{OD} \\ & + \kappa\left(\frac{\partial}{\partial k} + i\frac{\Delta}{2}\right)\tilde{\rho}_{OD} - Q_m^{-1}\Delta\frac{\partial}{\partial \Delta}\tilde{\rho}_{OD} - \chi k^2\tilde{\rho}_{OD}. \end{aligned} \quad (140)$$

A további lépések megtétele előtt érdemes megemlíteni, hogy egy Fourier-transzformáció után Wigner-függvényt $\rho_{OD}(x, p)$ kapunk. Ekkor a (138) master-egyenletből egy Fokker-Planck parciális differenciálegyenlet jön ki $\rho_{OD}(x, p)$ -ra, ami analitikusan megoldható [63]. A most elvégzett művelet pedig egy $\tilde{\rho}_{OD}(k, \Delta)$ kettős Fourier-transzformált Wigner-függvényt ad. Az előző fejezetben tárgyalt kezdeti feltétellel indítsuk el a rendszert, ahol a tükkör $|\alpha_0\rangle$ koherens állapotból indul, ilyenkor a megoldást a következő alakban keressük:

$$\tilde{\rho}_{OD}(k, \Delta) = \frac{1}{2} e^{-[c_1 k^2 + c_2 k \Delta + c_3 \Delta^2 + i c_4 k + i c_5 \Delta + c_6]}, \quad (141)$$

és az ehhez tartozó kezdeti feltételek:

$$\begin{aligned} c_1(0) &= \frac{1}{2}, & c_2(0) &= 0, & c_3(0) &= \frac{1}{8}, \\ c_4(0) &= -2\text{Re}[\alpha_0], & c_5(0) &= -\text{Im}[\alpha_0], & c_6(0) &= 0. \end{aligned} \quad (142)$$

A (140) egyenlet időben megőrzi a (141) alakot, az együtthatókra pedig ekkor egy lineáris differenciálegyenlet érvényes:

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= 2c_2 + \chi, \\ \dot{c}_2 &= 4c_3 - c_1 - Q_m^{-1} c_2, \\ \dot{c}_3 &= -\frac{1}{2} c_2 - 2Q_m^{-1} c_3 + \Lambda, \\ \dot{c}_4 &= 2c_5 - 2i\kappa c_1, \\ \dot{c}_5 &= -\frac{1}{2} c_4 - \kappa \left(i c_2 + \frac{1}{2} \right) - Q_m^{-1} c_5, \\ \dot{c}_6 &= i\kappa c_4. \end{aligned} \quad (143)$$

Ezekből az egyenletekből, az interferencia képének láthatóságára $\nu(t) = \text{Tr}_m \rho_{OD}(t) = e^{-\alpha(t)}$ adódik. Vegyük a (143) differenciálegyenlet-rendszer Laplace-transzformáltját és azt kapjuk, hogy:

$$c_6(t) = \kappa^2 f_1(t) - i\kappa \text{Re}[\alpha_0] f_2(t) - i\kappa \text{Im}[\alpha_0] f_3(t), \quad (144)$$

ahol

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sum \text{Res} \left[\frac{L_{1u}(z)}{L_{1d}(z)} \exp[zt] \right], \\ f_2(t) &= \sum \text{Res} \left[L_2(z) \exp[zt] \right], \\ f_3(t) &= \sum \text{Res} \left[L_3(z) \exp[zt] \right], \end{aligned} \quad (145)$$

és:

$$\begin{aligned}
L_{1u}(z) = & \left(Q_m^{-3} (2\chi + z) + \frac{5}{2} Q_m^{-2} z (2\chi + z) \right. \\
& + 2Q_m^{-1} \left(4\Lambda + \frac{z}{2} (1 + 4\chi z + 2z^2) \right) \\
& + z \left(12\Lambda + \frac{1}{2} (4z + z^3 + 2\chi (1 + z^2)) \right) \\
& \left. - \frac{i}{2} (Q_m^{-1} + z) (4 + z (2Q_m^{-1} + z)) \right), \tag{146}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{1d}(z) = & \frac{1}{2} z^2 (Q_m^{-1} + z) (1 + z (Q_m^{-1} + z)) \\
& (4 + z (2Q_m^{-1} + z)), \tag{147}
\end{aligned}$$

$$L_2(z) = \frac{Q_m^{-1} + z}{z (1 + z (Q_m^{-1} + z))}, \tag{148}$$

$$L_3(z) = (z (1 + z (Q_m^{-1} + z)))^{-1}.$$

Ezután pedig kiátlagolunk a tükör kezdeti termikus egyensúlyi állapotára [64]:

$$\nu(t) = \left| \int P_T(\alpha_0, \alpha_0^*) Tr_m \rho_{OD}(\alpha_0, \alpha_0^*) d^2\alpha_0 \right|, \tag{149}$$

ahol $P_T(\alpha_0, \alpha_0^*) = e^{-|\alpha_0|^2/\langle n \rangle} / (\pi \langle n \rangle)$, és $\langle n \rangle = (\exp(\hbar\omega_m/k_B T) - 1)^{-1}$. A láthatóság függvényére az alábbi alak adódik:

$$\nu(t) = \left| e^{-\kappa^2 (f_1(t) + \langle n \rangle (f_2^2(t) + f_3^2(t)))} \right|. \tag{150}$$

Amit kaptunk az egy nagyon bonyolult kifejezés, de a szemléltetés érdekében egyszerűsíthetünk ha feltételezzük, hogy a mechanikai oszcillátor jóságátényezője nagyon magas: $Q_m^{-1} \ll 1$. A Q_m^{-1} paraméter szerint sorfejthetjük, a még nem inverz Laplace-transzformált képleteket. Ami magasabb hatványú, mint a lineáris függés ezen paraméter szerint, azt elhanyagoljuk. Ezt az egyszerűsítést használva és bevezetve a $\tilde{\omega}_m = \sqrt{\omega_m^2 - (\gamma/2)^2}$ csillapított oszcillátor frekvenciát, az alábbi végeredményt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\nu(t) = & \exp \left\{ -(\bar{n} + 1/2) \kappa^2 \left[1 + e^{-\gamma t} - 2e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\tilde{\omega}_m t) \right] \right\} \\
& \times \exp \left(-6\kappa^2 \Lambda \left\{ \tilde{\omega}_m t \left[\frac{1 - e^{-\gamma t}}{3\gamma t} \left(1 + \frac{\chi}{4\Lambda} \right) + \frac{2}{3} \right] \right. \right. \\
& - \frac{4}{3} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\tilde{\omega}_m t) \\
& \left. \left. + \frac{1}{6} e^{-\gamma t} \sin(2\tilde{\omega}_m t) \left(1 - \frac{\chi}{4\Lambda} \right) \right\} \right). \tag{151}
\end{aligned}$$

Ha a dekoherencia tagokkal tartanánk nullához, akkor tökéletesen visszakapjuk az előző fejezetben kapott eredményt, vagy ha az általunk bevezetett dekoherencia tagokat, a γ súrlódást, és χ -t nullává tesszük, akkor az [58] cikkek eredményéhez jutunk.

A következőkben a rezgőtükör első visszatérése érdekel minket, amikor szétfonódik egymástól a tükör és a foton. A további visszatérések sajnos az erős dekoherencia miatt már gyakorlatilag nullához tartanak. A csillapított tükör egy periódusnyi ideje után $t_1 = 2\pi/\tilde{\omega}_m$. Ha ezen idő alatt a mechanikai súrlódás elhanyagolható, akkor (151) leegyszerűsödik:

$$\nu(t_1 = 2\pi/\tilde{\omega}_m) = \exp\{-\pi\kappa^2(12\Lambda + \chi)\}. \quad (152)$$

Magas hőmérséklet esetén χ elhanyagolható, amíg $\Lambda = \Lambda_T + \Lambda_{nonenv}$ alakban írható, ahol az első tag a környezet által okozott dekoherencia $D_{pp}^T = Mk_B T \gamma$, ami klasszikusan az impulzus diffúzióknak felel meg:

$$\Lambda_T = (k_B T / 2\hbar\omega_m) Q_m^{-1}. \quad (153)$$

A Λ_{nonenv} tag hordozza magában a gravitációs vagy nem-környezeti dekoherenciát. Az a kérdés, hogy ez mennyire hasonlítható össze a termikus dekoherenciával. A [53] javaslat alapján: $\omega_m = 3 \times 10^3 s^{-1}$, $T = 2 \times 10^{-3} K$, és $Q_m = 10^5$, azt kapjuk, hogy $\Lambda_T \approx 0.5$. A nem-környezeti dekoherencia nagyságát megbecsülő modellek: Ghirardi-Rimini-Weber, Diósi Lajos által javasolt „Quantum Mechanics with Universal Position Localization” (QMUPL) vagy „Continuous Spontaneous Localization” (CSL) [49], [50] amelyeket szeretnénk tesztelni a [53] javaslat alapján. $\Lambda_{CSL} \approx 0.2 \times 10^{-8}$ nagyságú [58], a gravitációs dekoherencia viszont Diósi Lajos és Roger Penrose javaslatát alapján $\Lambda_{GR} = (\sigma^2/\omega_m) Gm^2/R^3 \approx 10^{-14}$, ahol G a gravitációs állandó és R a tükör mérete. Mivel Λ_{CSL} a legnagyobb paraméter a javasolt modellek között, ezért a mechanizmus megfigyelésére nincs esély.

Nem szabad elfelejtsük azt, hogy ezek a kísérletek két lépcsőben történnek. Az első és legfontosabb lépés, hogy lássunk kvantummechanikai effektust, és [53] által javasolt elrendezés valóban összefonódást hozzon létre a tükör és a foton között. Ha a hőmérséklet körülbelül mK és a tükör rezgési frekvenciája pedig kHz nagyságrendbe esik, akkor $\bar{n} \sim 10^5$ ami azt jelenti, hogy a rendszer továbbra is a magas hőmérsékleti tartományban van; ennek következtében a hőmérséklet könnyen elmoshatja a kvantumos jelenségeket, ami igazolódik is a (151) egyenletekben. Ebben a tartományban a χ paraméter nem játszik szerepet, ugyanakkor a Bose-Einstein statisztika pedig sorbafejthető, és visszaférve mindenhova a \hbar -t, a termikus dekoherenciát okozó tagra adódik:

$$\kappa^2 \Lambda_T = \frac{k_B T}{4M\omega_m^2 L^2} \frac{\omega_c^2}{\omega_m^2} Q_m^{-1}, \quad \kappa^2 \bar{n} = \frac{k_B T \omega_c^2}{2M\omega_m^4 L^2}, \quad (154)$$

ami nem tartalmazza a \hbar -t, azaz teljesen klasszikus eredményt kaptunk. Az első mennyiség az interferencia láthatóságának csökkenéséért felel, a második pedig megadja a visszatérések termikus szélességét. Ha $\kappa^2 \bar{n} \gg 1$ magas hőmérsékleten, akkor a tükrök egy rezgési periódusa alatt már nincs detektálható visszatérés. A hőmérséklet okozta keskenyedést a [53] cikk is megjegyzi, mint az egész kimérhetőségnek egy fontos paramétere.

A klasszikusság azért válik jelentőssé, mert már (154) alapján kiesik a \hbar . Tudjuk, hogy a kvantálás úgy történik, hogy a Poisson-zárójeleket felcseréljük a kommutátorokra, viszont a megoldási módszer ugyanazokat az egyenleteket adja mindkét esetre. Ilyenkor a klasszikust a kvantumostól csakis a \hbar -t tartalmazó paraméterek választják szét. Ezt a magas hőmérsékleti rendszert, akár egy klasszikus fény-tükrörendszerrel is leírhatjuk, és a kölcsönhatásból pedig egyszerűen a klasszikus fénynyomás lesz.

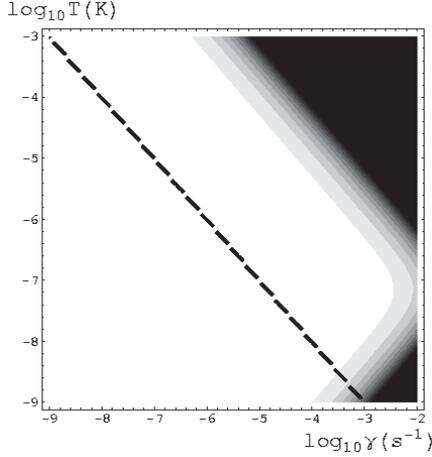
Ahhoz, hogy tényleg kvantumós jelenségeket detektáljunk, ezért a tükrök termikus gerjesztéseinek átlagos \bar{n} száma kis szám kell legyen, legalább 5 és 10 között. Ezt elérhetjük úgy, hogy GHz-es oszcillátort használunk [65]. Sajnos a tükrök frekvenciája nem lehet ilyen magas, mert ilyenkor kemény tükröt kapunk ami ellenáll a foton „rúgásának”, ezt már az előző fejezetben említettem a κ paraméter tárgyalásánál. Ha $\kappa < 1$, akkor a foton rúgása nem elég ahhoz, hogy egy szuperpozíciós állapotba lökje a tükrök tömegközéppont i hullámfüggvényét és összefonódás sem jön létre. Ez egy ördögi kört hoz létre, mivel lágy azaz alacsony frekvenciás tükröre van szükség kvantum-effektus detektálhatóságának érdekében, de ez ugyanakkor nehezen hűthető le alapállapotba, ekkor viszont maradunk a magas hőmérsékleti tartományban, ami meg ellene dolgozik a kvantummechanikának ebben a rendszerben.

Az a lehetőség marad, hogy a lágy tükröt le kell hűteni a $k_B T / \hbar \omega_m \approx \mathcal{O}(10)$ tartományba, ez egy μK -es hőmérsékletet jelent, ami felmerült már a javaslatban, ekkor viszont a D_{qq} tag kap szerepet [59] a dinamikában a pozitív leképezés megőrzése érdekében (137), és mérhetővé válna. Ennek a tagnak nincs klasszikus magyarázata, ez egy tisztán kvantummechanikai jelenségre vezet. A D_{qq} paraméternek az értéke a Dekker-mátrix alapján:

$$D_{qq} = \lambda \gamma^2 / 16 D_{pp}^T, \quad (155)$$

ahol $\lambda \gtrsim 1$ egy szám, amit a kísérletben kell kimérni. Értéke jelenleg nem ismert. A $\lambda = 1$ esetben kapjuk meg azt az elméleti határt amikor (137) még teljesen pozitív leképezést ad az alacsony hőmérsékletű esetben. Értékeljük ki a $1 + \chi / 4\Lambda_T$ kifejezést a (151) képletben, és a \hbar mentes klasszikus eredményhez, a (154) bal oldali tagjához az alábbi kvantumós korrekciókat kapjuk:

$$\frac{k_B T}{4 M \omega_m^2 L^2} \frac{\omega_c^2}{\omega_m^2} Q_m^{-1} [1 + \lambda (\hbar \omega_m / 4 k_B T)^2], \quad (156)$$



13. ábra. Az interferencia láthatósága az első visszatérés idejében (fehér a jól, fekete a rosszul detektálható rész), mint a T hőmérséklet és a γ súrlódás függvénye, felhasználva a (152), (153), (156) egyenleteket. A felső jobb sarok a jelenlegi lehetőségek tartománya; a szagatott vonal alatt a CSL dekoherencia már látható. A jobb alsó sarokban visszatér a fekete tartomány, ami az impulzus kettős kommutátorának hatása, ami koordinátát a diffúzióknak felel meg a Fokker-Planck egyenletben [59], továbbá $\kappa = 1$ és $\lambda = 1$.

ami már mérhető lenne a μK tartományban.

Az alkalmazott módszer jól megvilágítja a dekoherencia jelenségét, de ne felejtjük el, hogy a termikus dekoherencia tagokat egy olyan közelítés esetén kaptuk, ami magas hőmérsékletnek felel meg, és a harmadik tagot pedig matematikai okokból (Lindblad-alak) kellett melléjük helyezni. Könnyen lehet, hogy ezen a közepesen alacsony hőmérsékleti skálán ($k_B T / \hbar \omega_m \approx \mathcal{O}(10)$) egy teljesebb modellt kellene vizsgálni. A módszer megmutatja, hogy a javasolt kísérlet még nem elég jó ahhoz, hogy végső céljaként gravitációs dekoherenciát kimérjen, sőt a kvantumosság kérdése is könnyen probléma lehet, a jelenlegi hőmérsékleti skálán. Továbbá a koordináta diffúzióját leíró dekoherencia tag kimérése is érdekes eredmény lenne, mivel ez a Lindblad-alak miatt került a modellbe, és nem egy Hamilton-rendszerből vezetjük le.

6. Az eredmények összefoglalása

A dolgozatban megvizsgáltam: a kettős doton alapuló elektron-detektort, a kettős dotot abban az esetben, amikor az árammérő a folytonos kvantum mérés következtében visszahat rá, és a rezgő tükröt. A három rendszer közös leírása a teljesen pozitív leképezések Lindblad-alakjával történt. Ez az alak Markovi dinamikát ír le, és biztosítja a rendszer sűrűségmátrixának a pozitivitását. A vizsgált rendszereket úgy modelleztük, hogy ezek mindig kölcsönhatásban voltak valamilyen környezettel. Ez a környezet a vezetékek elektronjaiból áll (fermionok) a Q-dotok esetében, viszont a tükrőnél a nanomechanikai oszcillátor befogásának termikus gerjesztéseiből (bozonok). Aztán kiátlagoltuk a környezetre és beláttuk, hogy a mozgásegyenlet Lindblad-alakú.

A Q-dotok esetében létezett egy soktestprobléma módszereket használó leírás, de nekünk, alkalmazva a master-egyenletet és utána az N -felbontott technikát, sikerült az eddig ismert eredményeket rövidebb úton megkapni. Miután a módszerünk helyességét beláttuk az egy doton és a kettős doton, utána alkalmaztuk a kettős doton alapuló elektron-detektora is. Kidolgoztunk egy olyan módszert, amivel analitikus kifejezéseket kaphatunk a rendszeren átfolyó áramra illetve az áram zajspektrumára. A stacionárius áram meghatározására használtuk a Ramo-Shockley-tételt, a zajszámlálás esetében pedig a MacDonald-formulát. A kapott eredményeket vizsgáltuk és igazoltuk, hogy a kettős kvantum-dot mint mérő berendezés sokkal érzékenyebb, mint előtte vizsgált társai az egy dot vagy a kvantum pontkontaktus. A két dot közti előfeszítés illetve a köztük levő rezonáns alagutazási frekvencia jelentenek továbbá hangolható paramétereket az eddig vizsgált rendszerekhez képest. Ezek az extra paraméterek azok, amelyek optimalizálásával érzékenyebbé tehetjük a detektorunkat.

A folytonos kvantum mérés elméletét alkalmaztuk egy dotra illetve kettős dotra. A folytonos mérést nem környezeti dinamikából vezettük le, hanem az általánosított projektorok révén. Erről a dinamikáról beláttuk, hogy Lindblad-alakú. Az egy dotot illetve a kettős dotot most az N -felbontott technika nélkül vizsgáltuk. Kiszámoltuk a kiredukált rendszerek markovi áram operátorát. Ezt az operátort pedig alkalmaztuk a folytonos mérés elméletében. Kiszámoltuk mindkét rendszer esetében a stacionárius áramot, és a áram zajspektrumát. A kvantum Zénón-effektus azon állítását, hogy a mérés gátolja a belső koherens mozgást igazoltuk. Az egy dot esetében nem láttunk effektust, a kettős dotnál viszont igen. Igazoltuk, hogy az N -felbontott technika nélkül az elméletből nem jön ki a sörétzaj. Továbbá igazoltuk, hogy a zajspektrumban egy konstans háttér jelent meg, ami a mérés erősségének a függvénye.

A nagy molekulák interferenciának kérdésére megoldhatatlan problémát

jelentett, hogy a C_{60} -nál nagyobb molekulára nem sikerült forrást készíteni. Erre érkezett megoldásként a Marshall és munkatársai által javasolt kísérlet. Ezt a rezgőtükros rendszert vizsgáltuk. A dekoherenciát leíró Caldeira-Leggett modellt ki kell terjeszteni az alacsony hőmérséklet miatt, mert csak így biztosítható a Lindblad-alak. Ezt a kiterjesztett modellt vizsgáltuk ebben a rendszerben. Az interferencia láthatóságát vizsgáltuk, mint a súrlódás és a hőmérséklet függvényét. Azt találtuk, hogy a jelenlegi kísérleti hőmérséklet mellett a kvantumosság kimutatása is probléma lehet. Továbbá vizsgáltuk, hogy az univerzális dekoherencia modelleket milyen paraméterek mellett lehet ellenőrizni.

A. Appendix

A.1. Teljesen pozitív leképezések

Ennek a fejezetnek a lényege, hogy áttekintést adjon a teljesen pozitív leképezések matematikai háttéréről. Nem fogok bizonyításokat megadni, mert nem ezek a dolgozat céljai és eredményei.

A véges dimenziós mátrixok közötti teljesen pozitív leképezést a Choi-tétel jellemzi. A tétel megadása előtt előkészítő lépéseket kell megtennünk. $\mathcal{C}^{n \times n}$ jelölje az $n \times n$ -es mátrixok \mathcal{C}^* algebráját. Egy $\mathcal{X} \in \mathcal{C}^{n \times n}$ pozitívnek vagy pozitív szemidefinitnek hívjuk, ha \mathcal{X} hermitikus, és a spektruma pozitív, vagy nemnegatív. További egyszerűség kedvéért jelöljük: pozitív ha $\mathcal{X} > 0$, és pozitív szemidefinit ha $\mathcal{X} \geq 0$. Egy $\Phi : \mathcal{C}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{C}^{m \times m}$ lineáris leképezést pozitív leképezésnek hívjuk, ha $\Phi(\mathcal{X}) \geq 0$, minden $\mathcal{X} \geq 0$ -ra. Mint a fenti mondatban már észrevehetõ, pozitívot írtam a pozitív szemidefinit helyett, ez azért van mert a szakma ezt így nevezte el, habár mégis a mátrixok tulajdonságainál ez két elkülönült fogalom. Továbbá a pozitív leképezés alatt a fenti definíciót értem. Ez az átnevezés természetesen a fizikában tökéletesen jó, hiszen nálunk a sűrűségmátrixok terén történik leképezés, és ott tényleg az a feltétel, hogy a mátrix spektruma ne tartalmazzon negatív sajátértéket. Vezessük be továbbá az alábbi kiterjesztett leképezést:

$$\mathcal{I}_k \otimes \Phi : \mathcal{C}^{k \times k} \otimes \mathcal{C}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{C}^{k \times k} \otimes \mathcal{C}^{m \times m}, \quad (157)$$

ami alatt az értjük, hogy:

$$(\mathcal{I}_k \otimes \Phi)(\mathcal{M} \otimes \mathcal{X}) = \mathcal{M} \otimes \Phi(\mathcal{X}). \quad (158)$$

A $\mathcal{C}^{k \times k} \otimes \mathcal{C}^{n \times n}$ egy általános elem, felírható mint egy $k \times k$ mátrix, aminek az elemei mátrixok.

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{11} & \dots & \mathcal{X}_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{X}_{k1} & \dots & \mathcal{X}_{kk} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^{k \times k} \otimes \mathcal{C}^{n \times n}. \quad (159)$$

Szemléletesen a kiterjesztett leképezés pedig:

$$(\mathcal{I}_k \otimes \Phi) \begin{pmatrix} \mathcal{X}_{11} & \dots & \mathcal{X}_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{X}_{k1} & \dots & \mathcal{X}_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(\mathcal{X}_{11}) & \dots & \Phi(\mathcal{X}_{1k}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \Phi(\mathcal{X}_{k1}) & \dots & \Phi(\mathcal{X}_{kk}) \end{pmatrix}. \quad (160)$$

Azt mondjuk, hogy a Φ k -pozitív, ha $\mathcal{I}_k \otimes \Phi$ pozitív leképezés, és teljesen pozitív ha ez minden k -ra igaz.

Most nézzünk ellenpéldát is: pl. a transzponálás \mathcal{T} mint leképezés nem 2-pozitív. Vegyünk egy pozitív definit elemet a $\mathcal{C}^{2 \times 2} \otimes \mathcal{C}^{2 \times 2}$ térből:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (161)$$

Végezzük el a $\mathcal{I}_2 \otimes \mathcal{T}$ műveletet:

$$(\mathcal{I}_2 \otimes \mathcal{T}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (162)$$

Olyan elemet kaptunk, ami már nem pozitív definit.

Ezek után kimondhatjuk Choi-tételét [70]: Legyen

$$\Phi : \mathcal{C}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{C}^{m \times m} \quad (163)$$

egy pozitív leképezés. Az alábbi állítások ekvivalensek:

- Φ n -pozitív,
- A $(\mathcal{I}_n \otimes \Phi)(E_{ij})_{ij} = (\Phi(E_{ij}))_{ij} \in \mathcal{C}^{nm \times nm}$ mátrix pozitív definit, ahol $E_{ij} \in \mathcal{C}^{n \times n}$ és az ij -dik elem 1, a többi 0 ebben a mátrixban,
- Φ teljesen pozitív.

A bizonyítással nem foglalkozom, de van benne egy konstrukció, amit érdemes megemlíteni. Az első lépésben bontsuk fel spektrálisan az alábbi mátrixot úgy, hogy a sajátértékeit olvasszuk be a sajátvektorokba.

$$(\Phi(E_{ij}))_{ij} = \sum_{i=1}^{nm} v_i v_i^*. \quad (164)$$

Erről az nm dimenziós térről tudjuk:

$$\mathcal{C}^{nm} = \oplus_{i=1}^n \mathcal{C}^m. \quad (165)$$

Legyen $P_i \in \mathcal{C}^{nm \times nm}$ ami a \mathcal{C}^m vektortér i -dik elemén hat. Ekkor írható, hogy:

$$\Phi(E_{lm}) = P_l (\Phi(E_{ij}))_{ij} P_m = \sum_{i=1}^{nm} P_l v_i (v_i P_m)^*. \quad (166)$$

Mivel tudjuk, hogy v_i az nm dimenziójú vektortér egy eleme, amibe bele van értelmezve az előbb felbontott mátrix sajátértékei, ezért megkonstruálunk egy olyan mátrixot, ami a \mathcal{C}^n vektortér elemi bázisai és a v_i között kapcsolatot teremt.

$$M_i e_l = P_l v_i, \quad (167)$$

ez után pedig írhatjuk, hogy:

$$\Phi(E_{lm}) = \sum_{i=1}^{nm} P_l v_i (v_i P_m)^* = \sum_{i=1}^{nm} M_i e_l e_m^* M_i^* = \sum_{i=1}^{nm} M_i E_{lm} M_i^*. \quad (168)$$

A linearitás miatt pedig:

$$\Phi(A) = \sum_{i=1}^{nm} M_i A M_i^*, \quad (169)$$

ahol $A, M_i \in \mathcal{C}^{n \times n}$ és a $*$ pedig az algebra involúciója. Tehát a konstrukció megadja a Kraus-alakot, és minden teljesen pozitív leképezés felírható ilyen alakban, nem szükségszerűen egyedi módon. Az involúció pedig a kvantummechanikai alkalmazásban nem más mint az adjungálás.

Ha ezekhez a leképezésekhez hozzárendelünk egy folytonos paramétert, mondjuk a fizikában az időt, akkor beszélünk dinamikai leképezésről. Minden rögzített időpillanatban az előbbieken elmondottak érvényesek. Továbbá a $\Phi_t = e^{t\mathcal{L}}$ alak egy félcsoportot alkot. Ha ez a félcsoport Gaussi akkor, kapjuk az általam használt dinamikák Lindblad-alakját [10]. A Gaussi félcsoport esetében gondoljunk a diffúziós folyamat generátorára amiből adódik a Fokker-Planck egyenlet. Ezt a generátort ki kell terjeszteni: $\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_n$, ahol \mathcal{I}_n a $\mathcal{C}^{n \times n}$ egységeleme; ilyen módon alkalmazhatók a teljesen pozitív leképezések definíciói és tételai. A folytonosság vizsgálat is egy fontos tényező a teljesen pozitív leképezések esetében, ezzel itt nem foglalkozom csak megadok egy referenciát [71].

A.2. A master-egyenlet

Ez a fejezet a master-egyenlet levezetését célozza meg a Born-Markov közelítésben, és Geszti Tamás könyvének [73] E . függelékére épül. A környezettel való összefonódásból eredő dekoherencia legelterjedtebb elméleti tárgyalásmódja a master-egyenlet. Ezt a módszert alkalmazom mind a Q-dotok, mind a rezgő tükrök tárgyalásánál. A levezetés:

S (system) = részrendszer és R (réservoir = (hő-)tartály) = környezet
 együttes sűrűségmátrixának mozgásegyenlete,
 visszavetítve a részrendszerre = trészelve a környezetre

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{SR}, \quad (170)$$

S+R sűrűségoperátora $\hat{\chi}(t)$,
 S sűrűségoperátora $\hat{\rho}(t) = Tr_R[\hat{\chi}(t)]$,

$$\frac{d\hat{\chi}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\chi}]. \quad (171)$$

Használjuk a kölcsönhatási-képet:

$$\hat{\chi}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_R)t} \hat{\chi}(t) e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_R)t}, \quad (172)$$

$$\frac{d\hat{\chi}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_{SR}(t), \hat{\chi}(t)], \quad (173)$$

ahol

$$\hat{H}_{SR}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_R)t} \hat{H}_{SR} e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_R)t}. \quad (174)$$

Az egyenlet megoldását $\hat{H}_{SR}(t)$ hatványai szerinti sorfejtés alakjában keressük, és a második rendnél megállunk (Born-közelítés). Ez gyenge dekoherenciának felel meg, ami magától a természetben nem fordul elő, csak a gondosan végrehajtott (nagyvákuum, alacsony hőmérséklet, tiszta anyagok) kísérletekben, amelyek célja koherens kvantum-rendszerek közel unitér fejlődésének megfigyelése, és esetleges kvantum-informatikai alkalmazása.

A Born-közelítés elegáns módja az, hogy egy kétlépéses iterációval magát az egyenletet hozzuk olyan alakra, hogy a Born-közelítés már triviális legyen:

$$\frac{d\hat{\chi}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_{SR}(t), \hat{\chi}(t)], \quad (175)$$

1. idő szerint integrálva 0-tól t-ig, alakítsuk a differenciálegyenletet integrálegyenletté:

$$\hat{\chi}(t) = \hat{\chi}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [\hat{H}_{SR}(t'), \hat{\chi}(t')], \quad (176)$$

2. ezt helyettesítsük be az eredeti egyenlet jobboldalára:

$$\frac{d\hat{\chi}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{SR}(t), \hat{\chi}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\hat{H}_{SR}(t), [\hat{H}_{SR}(t'), \hat{\chi}(t')]]. \quad (177)$$

Most jön a Born-közelítés következő lépése: a jobboldalon $\hat{\chi}(t')$ -t közelítsük a kölcsönhatás nélküli időfejlődésével. Ez lényegesen függ a kezdeti sűrűségmátrixtól (mint minden irreverzibilis folyamatnál): ha a kezdeti állapot korrelálatlan

$$\hat{\chi}(0) = \hat{\chi}(0) = \hat{\rho}(0)\hat{R}_0, \quad (178)$$

és \hat{R}_0 a környezetnek olyan (termikus egyensúlyi) állapota, amely a részrendszer \hat{H}_{SR} perturbáló hatása nélkül időben nem változna, akkor a Born-közelítésnek az felel meg, hogy \hat{R}_0 időfejlődését elhanyagoljuk:

$$\hat{\chi}(t) \approx \hat{\rho}(t)\hat{R}_0. \quad (179)$$

Helyettesítsük ezt be a (177) egyenletbe, és trészeljünk a környezetre, hogy zárt egyenletet kapjunk $\hat{\rho}(t)$ -re:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left(Tr_R[\hat{H}_{SR}(t), \hat{R}_0] \right) \hat{\rho}(0) - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_R \left[\hat{H}_{SR}(t), [\hat{H}_{SR}(t'), \hat{\rho}(t')\hat{R}_0] \right]. \quad (180)$$

A jobboldal első tagjában szereplő trészelt kommutátor általában eltűnik, így a következő eredményt kapjuk:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_R \left[\hat{H}_{SR}(t), [\hat{H}_{SR}(t'), \hat{\rho}(t')\hat{R}_0] \right]. \quad (181)$$

Ez már egy master-egyenlet, vagyis a folyamatot vezérlő (master) $\hat{\rho}(t)$ komponens fejlődését leíró egyenlet. Ezt azonban még tovább szokás közelíteni: ez a lépés a markovi közelítés. Ez azt jelenti, hogy $\hat{\rho}$ fejlődését a gyenge \hat{H}_{SR}^2 -hez tartozó lassú időskála határozza meg, viszont a különböző időkből vett $\hat{H}_{SR}(t)$ faktorok az erős \hat{H}_S , \hat{H}_R -eknek megfelelő (174) időfejlődés szerint gyorsan pörögnek, és fáziskeveredéssel gyorsan elhalnak, ahogy t és t' eltávolodik egymástól. Ezért az időintegrálokból $\hat{\rho}(t)$ kiemelhető, és a t' szerinti integrálást 0 helyett $-\infty$ -tól indíthatjuk, úgyis csak a t -hez közeli vége ad

járolékot. Egyszerűen a csatolás sokkal gyorsabban pörög, mit a részrendszer állapota:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t dt' Tr_R \left[\hat{H}_{SR}(t), [\hat{H}_{SR}(t'), \hat{\rho}(t) \hat{R}_0] \right]. \quad (182)$$

Ez az általános eredmény, ezt kell alkalmazni konkrét rendszerekre.

A.3. Master-egyenlet lineáris kölcsönhatás esetén

Ebben a fejezetben szeretném a master-egyenletet egy általános lineáris kölcsönhatásra megoldani. Nem fogom megadni az operátorok ábrázolását azaz a mátrix alakjukat, mert ebben a fejezetben nem fizikai, hanem matematikai tartalomra fogok törekedni.

Vegyük egy általános lineáris kölcsönhatást leíró Hamilton-operátort:

$$\hat{H}_{SR} = \sum_i (\hbar \hat{a}_i^\dagger \hat{A}_i + \hbar \hat{A}_i^\dagger \hat{a}_i), \quad (183)$$

- $\hat{A}_i, \hat{A}_i^\dagger$ i típusú részecske tűnik el, vagy keletkezik a környezetben, ebbe beleértjük a kölcsönhatás erősségét is,
- $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$ i típusú részecske tűnik el, vagy keletkezik a rendszerben.

A típusról csak annyit szeretnék mondani, hogy ebbe beleértjük azt is, például hogy az első vagy a második dotban jelenik-e meg. Azaz ha két elektronnal történik ez, akkor is különböző típusúnak tekintem őket. A master-egyenlet (182), a kölcsönhatási-képletben $\tilde{\rho}$ elhagyásával:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t Tr_R \left[\hat{H}_{SR}(t), [\hat{H}_{SR}(t'), \hat{\rho}(t) \hat{R}_0] \right] dt', \quad (184)$$

ahol

- \hat{H}_{SR} a kölcsönhatás Hamilton-operátora,
- $\hat{\rho}$ az S rendszer,
- \hat{R}_0 az R környezet sűrűségmátrixa kezdeti állapotban.

Még mielőtt elkezdeném a számolásokat, csak annyit szeretnék hozzáfűzni, hogy az izgalmas rész a duplakommutálásnál van, és ezzel foglalkozom a továbbiakban.

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = 0, \quad i \neq j. \quad (185)$$

Az $\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger, \hat{A}_i, \hat{A}_i^\dagger$ operátorok a $t = 0$ -ban a szokásos módon kommutálnak, vagy antikommutálnak. A (184) integrandusa:

$$\begin{aligned} & Tr_R \left[\hat{H}_{SR}(t), [\hat{H}_{SR}(t'), \hat{\rho}(t) \hat{R}_0] \right] = \\ & = \hbar^2 Tr_R \left[\sum_i \hat{B}_i(t), \sum_i \left(\hat{B}_i(t') \hat{\rho}(t) \hat{R}_0 - \hat{\rho}(t) \hat{R}_0 \hat{B}_i(t') \right) \right], \end{aligned} \quad (186)$$

bevezetve

$$\hat{B}_i(t) = \hat{a}_i^\dagger(t)\hat{A}_i(t) + \hat{A}_i^\dagger(t)\hat{a}_i(t). \quad (187)$$

Aztán leoszthatok \hbar^2 -el a master-egyenlet alapján. Most kifejtve a dupla-kommutálást kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} &= Tr_R \sum_{i,j} \left(\hat{B}_i(t)\hat{B}_j(t')\hat{\rho}(t)\hat{R}_0 - \hat{B}_i(t)\hat{\rho}(t)\hat{R}_0\hat{B}_j(t') \right. \\ &\quad \left. - \hat{B}_j(t')\hat{\rho}(t)\hat{R}_0\hat{B}_i(t) + \hat{\rho}(t)\hat{R}_0\hat{B}_j(t')\hat{B}_i(t) \right). \end{aligned} \quad (188)$$

A Tr_R -en belül ciklikusan permutálhatjuk a környezethez kapcsolódó operátorokat. A következő lépésben kiemelek egy olyan tagot a szummázásból amelyben $i \neq j$.

$$\begin{aligned} &\hat{B}_i(t)\hat{B}_j(t')\hat{\rho}(t)\hat{R}_0 - \hat{B}_i(t)\hat{\rho}(t)\hat{R}_0\hat{B}_j(t') \\ &\quad - \hat{B}_j(t')\hat{\rho}(t)\hat{R}_0\hat{B}_i(t) + \hat{\rho}(t)\hat{R}_0\hat{B}_j(t')\hat{B}_i(t) = \\ &= \left(\hat{a}_i^\dagger(t)\hat{A}_i(t) + \hat{A}_i^\dagger(t)\hat{a}_i(t) \right) \left(\hat{a}_j^\dagger(t')\hat{A}_j(t') + \hat{A}_j^\dagger(t')\hat{a}_j(t') \right) \hat{\rho}(t)\hat{R}_0 \\ &\quad - \left(\hat{a}_i^\dagger(t)\hat{A}_i(t) + \hat{A}_i^\dagger(t)\hat{a}_i(t) \right) \hat{\rho}(t)\hat{R}_0 \left(\hat{a}_j^\dagger(t')\hat{A}_j(t') + \hat{A}_j^\dagger(t')\hat{a}_j(t') \right) \\ &\quad - \left(\hat{a}_j^\dagger(t')\hat{A}_j(t') + \hat{A}_j^\dagger(t')\hat{a}_j(t') \right) \hat{\rho}(t)\hat{R}_0 \left(\hat{a}_i^\dagger(t)\hat{A}_i(t) + \hat{A}_i^\dagger(t)\hat{a}_i(t) \right) \\ &\quad + \hat{\rho}(t)\hat{R}_0 \left(\hat{a}_j^\dagger(t')\hat{A}_j(t') + \hat{A}_j^\dagger(t')\hat{a}_j(t') \right) \left(\hat{a}_i^\dagger(t)\hat{A}_i(t) + \hat{A}_i^\dagger(t)\hat{a}_i(t) \right). \end{aligned} \quad (189)$$

Elvégezve a Tr_R műveletet, akkor nyolc darab átlag keletkezik. Ezeket a következő rövidítéssel fogom ellátni.

- $C_1^{i,j} = \langle \hat{A}_i(t)\hat{A}_j(t') \rangle$, $C_5^{i,j} = \langle \hat{A}_j(t')\hat{A}_i(t) \rangle$,
- $C_2^{i,j} = \langle \hat{A}_i^\dagger(t)\hat{A}_j(t') \rangle$, $C_6^{i,j} = \langle \hat{A}_j^\dagger(t')\hat{A}_i(t) \rangle$,
- $C_3^{i,j} = \langle \hat{A}_i(t)\hat{A}_j^\dagger(t') \rangle$, $C_7^{i,j} = \langle \hat{A}_j(t')\hat{A}_i^\dagger(t) \rangle$,
- $C_4^{i,j} = \langle \hat{A}_i^\dagger(t)\hat{A}_j^\dagger(t') \rangle$, $C_8^{i,j} = \langle \hat{A}_j^\dagger(t')\hat{A}_i^\dagger(t) \rangle$.

Mivel már említettem, hogy minden A kommutál egymással, kivéve az azonos indexűek keltő és eltüntető operátorait, ezek után a (189) így írható:

$$\begin{aligned} &C_1^{i,j} \left(\hat{a}_i^\dagger(t)\hat{a}_j^\dagger(t')\hat{\rho}(t) - \hat{a}_i^\dagger(t)\hat{\rho}(t)\hat{a}_j^\dagger(t') - \hat{a}_j^\dagger(t')\hat{\rho}(t)\hat{a}_i^\dagger(t) + \hat{\rho}(t)\hat{a}_j^\dagger(t')\hat{a}_i^\dagger(t) \right) \\ &+ C_2^{i,j} \left(\hat{a}_i(t)\hat{a}_j^\dagger(t')\hat{\rho}(t) - \hat{a}_i(t)\hat{\rho}(t)\hat{a}_j^\dagger(t') - \hat{a}_j^\dagger(t')\hat{\rho}(t)\hat{a}_i(t) + \hat{\rho}(t)\hat{a}_j^\dagger(t')\hat{a}_i(t) \right) \\ &+ C_3^{i,j} \left(\hat{a}_i^\dagger(t)\hat{a}_j(t')\hat{\rho}(t) - \hat{a}_i^\dagger(t)\hat{\rho}(t)\hat{a}_j(t') - \hat{a}_j(t')\hat{\rho}(t)\hat{a}_i^\dagger(t) + \hat{\rho}(t)\hat{a}_j(t')\hat{a}_i^\dagger(t) \right) \\ &+ C_4^{i,j} \left(\hat{a}_i(t)\hat{a}_j(t')\hat{\rho}(t) - \hat{a}_i(t)\hat{\rho}(t)\hat{a}_j(t') - \hat{a}_j(t')\hat{\rho}(t)\hat{a}_i(t) + \hat{\rho}(t)\hat{a}_j(t')\hat{a}_i(t) \right). \end{aligned} \quad (190)$$

Most ezután írjuk fel a master-egyenlet megoldását:

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\rho}}{dt} = & - \int_{-\infty}^t \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \left[C_1^{i,j} \left(\hat{a}_i^\dagger(t) \hat{a}_j^\dagger(t') \hat{\rho}(t) - \hat{a}_i^\dagger(t) \hat{\rho}(t) \hat{a}_j^\dagger(t') - \hat{a}_j^\dagger(t') \hat{\rho}(t) \hat{a}_i^\dagger(t) \right. \right. \\
& + \hat{\rho}(t) \hat{a}_j^\dagger(t') \hat{a}_i^\dagger(t) \left. \right) + C_2^{i,j} \left(\hat{a}_i(t) \hat{a}_j^\dagger(t') \hat{\rho}(t) - \hat{a}_i(t) \hat{\rho}(t) \hat{a}_j^\dagger(t') - \hat{a}_j^\dagger(t') \hat{\rho}(t) \hat{a}_i(t) \right. \\
& + \hat{\rho}(t) \hat{a}_j^\dagger(t') \hat{a}_i(t) \left. \right) + C_3^{i,j} \left(\hat{a}_i^\dagger(t) \hat{a}_j(t') \hat{\rho}(t) - \hat{a}_i^\dagger(t) \hat{\rho}(t) \hat{a}_j(t') - \hat{a}_j(t') \hat{\rho}(t) \hat{a}_i^\dagger(t) \right. \\
& + \hat{\rho}(t) \hat{a}_j(t') \hat{a}_i^\dagger(t) \left. \right) + C_4^{i,j} \left(\hat{a}_i(t) \hat{a}_j(t') \hat{\rho}(t) - \hat{a}_i(t) \hat{\rho}(t) \hat{a}_j(t') - \hat{a}_j(t') \hat{\rho}(t) \hat{a}_i(t) \right. \\
& + \hat{\rho}(t) \hat{a}_j(t') \hat{a}_i(t) \left. \right) \left. \right] + \sum_i \left[C_1^{i,i} \left(\hat{a}_i^\dagger(t) \hat{a}_i^\dagger(t') \hat{\rho}(t) - \hat{a}_i^\dagger(t') \hat{\rho}(t) \hat{a}_i^\dagger(t) \right) \right. \\
& + C_5^{i,i} \left(-\hat{a}_i^\dagger(t) \hat{\rho}(t) \hat{a}_i^\dagger(t') + \hat{\rho}(t) \hat{a}_i^\dagger(t') \hat{a}_i^\dagger(t) \right) \\
& + C_2^{i,i} \left(\hat{a}_i(t) \hat{a}_i^\dagger(t') \hat{\rho}(t) - \hat{a}_i^\dagger(t') \hat{\rho}(t) \hat{a}_i(t) \right) \\
& + C_6^{i,i} \left(-\hat{a}_i(t) \hat{\rho}(t) \hat{a}_i^\dagger(t') + \hat{\rho}(t) \hat{a}_i^\dagger(t') \hat{a}_i(t) \right) \\
& + C_3^{i,i} \left(\hat{a}_i^\dagger(t) \hat{a}_i(t') \hat{\rho}(t) - \hat{a}_i(t') \hat{\rho}(t) \hat{a}_i^\dagger(t) \right) \\
& + C_7^{i,i} \left(-\hat{a}_i^\dagger(t) \hat{\rho}(t) \hat{a}_i(t') + \hat{\rho}(t) \hat{a}_i(t') \hat{a}_i^\dagger(t) \right) \\
& + C_4^{i,i} \left(\hat{a}_i(t) \hat{a}_i(t') \hat{\rho}(t) - \hat{a}_i(t') \hat{\rho}(t) \hat{a}_i(t) \right) \\
& \left. + C_8^{i,i} \left(-\hat{a}_i(t) \hat{\rho}(t) \hat{a}_i(t') + \hat{\rho}(t) \hat{a}_i(t') \hat{a}_i(t) \right) \right] dt'.
\end{aligned} \tag{191}$$

Ebben a dolgozatban olyan rendszereket vizsgáltam, ahol a következő feltételek voltak:

- A környezet az olyan tartályoknak felelt meg, amelyek nem szupraveze-tők voltak, hanem normál állapotúak. Ennek a következménye az, hogy $C_1^{i,i} = C_5^{i,i} = C_4^{i,i} = C_8^{i,i} = 0$,
- A környezet harmonikus oszcillátorok koherens állapotaiból is állhat, ekkor $C_{1,5}^{i,i} \neq 0$ és $C_{4,8}^{i,i} \neq 0$,
- Az i, j típusú részecskéket tartalmazó tartályok teljesen szeparáltak voltak egymástól, ezért $C_{1,5}^{i,j} = C_{2,6}^{i,j} = C_{3,7}^{i,j} = C_{4,8}^{i,j} = 0$, ahol $i \neq j$.

Tekintsük most az egy dot speciális esetét:

$$\hat{H}_{SR} = \hbar \hat{a}^\dagger \hat{A} + \hbar \hat{A}^\dagger \hat{a}, \tag{192}$$

- $\hat{A} = \sum_l \lambda_l \hat{b}_l + \sum_r \lambda_r \hat{b}_r,$
- $\hat{A}^\dagger = \sum_l \lambda_l^* \hat{b}_l^\dagger + \sum_r \lambda_r^* \hat{b}_r^\dagger.$

Mielőtt beírnám ezt a master-egyenletbe felírom az operátorok időbeli változását a kölcsönhatási-képpen:

$$\begin{aligned}
\hat{a}(t) &= \hat{a}e^{-i\Omega t}, \hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger e^{i\Omega t}, \\
\hat{\hat{A}}(t) &= \sum_l \lambda_l \hat{b}_l e^{-i\omega_l t} + \sum_r \lambda_r \hat{b}_r e^{-i\omega_r t}, \\
\hat{\hat{A}}^\dagger(t) &= \sum_l \lambda_l^* \hat{b}_l^\dagger e^{i\omega_l t} + \sum_r \lambda_r^* \hat{b}_r^\dagger e^{i\omega_r t}.
\end{aligned} \tag{193}$$

Tegyük fel, hogy a tartályok nem hatnak kölcsön, és normál állapotúak. Az előbbieik alapján az látható, hogy két típus létezik, hogy az egyik tartályban keletkezik, vagy eltűnik az elektron vagy a másikban. Szerencsére most olyan a Hamilton-operátor kölcsönhatási része, hogy a két típusból csinálhatunk egyet. Egy index van, amit már ki se írok, és mivel a tartályok normál állapotúak ezért a $C_1 = C_4 = 0$. A maradék 8 tagba (191) behelyettesítve a (193)-t a következő egyenlet adódott:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\rho}}(t) &= - \int_{-\infty}^t \langle \hat{A}(t) \hat{A}^\dagger(t') \rangle e^{-i\Omega(t'-t)} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} \\
&\quad - \langle \hat{A}^\dagger(t') \hat{A}(t) \rangle e^{-i\Omega(t'-t)} \hat{a}^\dagger \hat{\rho} \hat{a} \\
&\quad + \langle \hat{A}^\dagger(t) \hat{A}(t') \rangle e^{-i\Omega(t-t')} \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\rho} \\
&\quad - \langle \hat{A}(t') \hat{A}^\dagger(t) \rangle e^{-i\Omega(t-t')} \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \\
&\quad + \langle \hat{A}(t') \hat{A}^\dagger(t) \rangle e^{-i\Omega(t-t')} \hat{\rho} \hat{a} \hat{a}^\dagger \\
&\quad - \langle \hat{A}^\dagger(t) \hat{A}(t') \rangle e^{-i\Omega(t-t')} \hat{a}^\dagger \hat{\rho} \hat{a} \\
&\quad + \langle \hat{A}^\dagger(t') \hat{A}(t) \rangle e^{-i\Omega(t'-t)} \hat{\rho} \hat{a} \hat{a}^\dagger \\
&\quad - \langle \hat{A}(t) \hat{A}^\dagger(t') \rangle e^{-i\Omega(t'-t)} \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger dt'.
\end{aligned} \tag{194}$$

A rendszerünkben csak két állapot lehetséges (a bázisok): van elektron a dotban, vagy nincs. $|1\rangle$ -gyel jelöltem a betöltött állapotot, és $|0\rangle$ -val az üreset. Továbbá ismerjük a keltő és az eltüntető operátorok alakját ilyen ábrázolásban, így ki tudjuk számolni pl. a $\rho a^\dagger a$ típusú mátrixszorzatokat, amiből 6 db van. Egyet most kiszámolok, a többi meg ehhez hasonlóan megy.

$$a^\dagger a \rho = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} \\ \rho_{01} & \rho_{00} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{195}$$

ez alapján a többi:

$$aa^\dagger \rho = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \rho_{01} & \rho_{00} \end{bmatrix}, \quad \rho aa^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & \rho_{10} \\ 0 & \rho_{00} \end{bmatrix}, \quad (196)$$

$$\rho a^\dagger a = \begin{bmatrix} \rho_{11} & 0 \\ \rho_{01} & 0 \end{bmatrix}, \quad a^\dagger \rho a = \begin{bmatrix} \rho_{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (197)$$

$$a \rho a^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_{11} \end{bmatrix}. \quad (198)$$

Ahhoz, hogy megkapjuk a sűrűségmátrixra az egyenleteket, még egyfajta számolást kell elvégezni, mégpedig a $\langle \hat{A}(t) \hat{A}^\dagger(t') \rangle$ típusú átlagokat kellene valahogy meghatározni az integrálással és az exponenciális taggal együtt. Ezekből négy fajta van, de ide csak az egyikre vonatkozó számolásokat írunk le, mert onnan már analóg módon következik a többi végeredménye. Mielőtt nekifognék a részletek leírásának, előtte még megadok egy pár képletet, amik felhasználásra kerülnek.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t e^{\pm i(\omega - \Omega)(t-t')} dt' \stackrel{\tau=t-t'}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{\pm i(\omega - \Omega)\tau - \epsilon\tau} d\tau \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pm i(\omega - \Omega) + \epsilon}{(\omega - \Omega)^2 + \epsilon^2} \\ &= \pi \delta(\omega - \Omega) \pm iP \frac{1}{\omega - \Omega}. \end{aligned} \quad (199)$$

Mivel elektronok vannak a rendszerben, és a bal meg jobb oldali tartályok normál állapotúak és nem érintkeznek, ezért termikus egyensúlyban:

$$\begin{aligned} \langle \hat{b}_i \hat{b}_j \rangle &= \langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j^\dagger \rangle = 0, \\ \langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \rangle &= \frac{\delta_{ij}}{e^{\beta(\hbar\omega_i - \mu_i)} + 1} = f_i^e, \\ \langle \hat{b}_i \hat{b}_j^\dagger \rangle &= \frac{\delta_{ij}}{e^{\beta(\mu_i - \hbar\omega_i)} + 1} = f_i^h, \end{aligned} \quad (200)$$

ahol

- e-elektron,
- h-hole (lyuk),
- $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

Számoljuk ki a következőt:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t \langle \hat{A}(t) \hat{A}^\dagger(t') \rangle e^{-i\Omega(t'-t)} dt' = \\ & \int_{-\infty}^t \langle \hat{A}_l \hat{A}_l^\dagger \rangle e^{i(\omega_l - \Omega)(t'-t)} dt' + \int_{-\infty}^t \langle \hat{A}_r \hat{A}_r^\dagger \rangle e^{i(\omega_r - \Omega)(t'-t)} dt' =, \end{aligned} \quad (201)$$

az előbb felhasználtam a (193)-t és a (200) egy részét, ami a nem megegyező indexes képletek voltak, és továbbá alkalmazom a többi (200)-beli képletet így azt kapom, hogy:

$$\begin{aligned} & = \int_{-\infty}^t \sum_l |\lambda_l(\omega_l)|^2 f_l^h e^{i(\omega_l - \Omega)(t'-t)} dt' + \\ & \int_{-\infty}^t \sum_r |\lambda_r(\omega_r)|^2 f_r^h e^{i(\omega_r - \Omega)(t'-t)} dt' =, \end{aligned} \quad (202)$$

(199) figyelembe vételével kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} & = \sum_l |\lambda_l(\omega_l)|^2 f_l^h (\pi \delta(\omega_l - \Omega) - iP \frac{1}{\omega_l - \Omega}) + \\ & \sum_r |\lambda_r(\omega_r)|^2 f_r^h (\pi \delta(\omega_r - \Omega) - iP \frac{1}{\omega_r - \Omega}) =, \end{aligned} \quad (203)$$

a következő lépésben pedig a szummákat integrállá alakítjuk, így figyelembe kell vennünk a tartályok állapotossűrűségét:

$$\begin{aligned} & = \int |\lambda_l(\omega_l)|^2 f_l^h g_l(\omega_l) d\omega_l (\pi \delta(\omega_l - \Omega) - iP \frac{1}{\omega_l - \Omega}) + \\ & \int |\lambda_r(\omega_r)|^2 f_r^h g_r(\omega_r) d\omega_r (\pi \delta(\omega_r - \Omega) - iP \frac{1}{\omega_r - \Omega}). \end{aligned} \quad (204)$$

Elvégezve az integrálást, és még beolvastva a főérték disztribúció előtti műnszt a végeredménybe, a következőt kaptam:

$$\int_{-\infty}^t \langle \hat{A}(t) \hat{A}^+(t') \rangle e^{-i\Omega(t'-t)} dt' = \frac{\Gamma_l^-}{2} + \frac{\Gamma_r^-}{2} + i\Delta_l^- + i\Delta_r^-, \quad (205)$$

- $\Gamma_l^- = 2\pi g_l(\Omega) |\lambda_l(\Omega)|^2 f_l^h(\Omega)$,
- $\Gamma_r^- = 2\pi g_r(\Omega) |\lambda_r(\Omega)|^2 f_r^h(\Omega)$,
- $\Delta_l^- = P \int \frac{g_l(\omega_l) |\lambda_l(\omega_l)|^2 f_l^h(\omega_l)}{\Omega - \omega_l} d\omega_l$,
- $\Delta_r^- = P \int \frac{g_r(\omega_r) |\lambda_r(\omega_r)|^2 f_r^h(\omega_r)}{\Omega - \omega_r} d\omega_r$.

Ezt tudva, felírom a másik három tag végeredményét:

$$\int_{-\infty}^t \langle \hat{A}^\dagger(t') \hat{A}(t') \rangle e^{+i\Omega(t'-t)} dt' = \frac{\Gamma_l^+}{2} + \frac{\Gamma_r^+}{2} - i\Delta_l^+ - i\Delta_r^+, \quad (206)$$

$$\int_{-\infty}^t \langle \hat{A}^\dagger(t') \hat{A}(t) \rangle e^{-i\Omega(t'-t)} dt' = \frac{\Gamma_l^+}{2} + \frac{\Gamma_r^+}{2} + i\Delta_l^+ + i\Delta_r^+, \quad (207)$$

$$\int_{-\infty}^t \langle \hat{A}(t') \hat{A}^\dagger(t) \rangle e^{+i\Omega(t'-t)} dt' = \frac{\Gamma_l^-}{2} + \frac{\Gamma_r^-}{2} - i\Delta_l^- - i\Delta_r^-, \quad (208)$$

- $\Gamma_l^+ = 2\pi g_l(\Omega) |\lambda_l(\Omega)|^2 f_l^e(\Omega)$,
- $\Gamma_r^+ = 2\pi g_r(\Omega) |\lambda_r(\Omega)|^2 f_r^e(\Omega)$,
- $\Delta_l^+ = P \int \frac{g_l(\omega_l) |\lambda_l(\omega_l)|^2 f_l^e(\omega_l)}{\Omega - \omega_l} d\omega_l$,
- $\Delta_r^+ = P \int \frac{g_r(\omega_r) |\lambda_r(\omega_r)|^2 f_r^e(\omega_r)}{\Omega - \omega_r} d\omega_r$.

Most, hogy már mindent ismerünk, csak be kell helyettesíteni (194)-be, és megkapjuk hogy:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}}_{00}(t) &= \Gamma^+ \tilde{\rho}_{11}(t) - \Gamma^- \tilde{\rho}_{00}(t), \\ \dot{\tilde{\rho}}_{11}(t) &= \Gamma^- \tilde{\rho}_{00}(t) - \Gamma^+ \tilde{\rho}_{11}(t), \\ \dot{\tilde{\rho}}_{01}(t) &= \left(-i(\Delta^+ + \Delta^-) - \frac{\Gamma^+ + \Gamma^-}{2} \right) \tilde{\rho}_{01}(t), \\ \dot{\tilde{\rho}}_{10}(t) &= \left(+i(\Delta^+ + \Delta^-) - \frac{\Gamma^+ + \Gamma^-}{2} \right) \tilde{\rho}_{10}(t), \end{aligned} \quad (209)$$

- $\Gamma^\pm = \Gamma_l^\pm + \Gamma_r^\pm$,
- $\Delta^\pm = \Delta_l^\pm + \Delta_r^\pm$.

Eddig a kölcsönhatási reprezentációban dolgoztunk, még át kell térni Schrödinger-reprezentációba. Schrödinger-képpen a sűrűségmátrixra vonatkozó mozgásegyenlet a kölcsönhatások nélkül:

$$\dot{\rho} = -i\Omega [a^\dagger a, \rho]. \quad (210)$$

Már meghatároztam az $a^\dagger a \rho$ és a $\rho a^\dagger a$ mátrixszorzatokat, ezért egyszerűen egy új mennyiséget definiálva, mégpedig a:

$$\bar{\Omega} = \Omega + \Delta^- + \Delta^+ = \frac{E_1 - E_2}{\hbar}, \quad (211)$$

E_2 és E_1 nem más mint a Hamilton-operátor üres, illetve betöltött saját állapotaihoz tartozó sajátértékek. Vagyis az $|1\rangle, |0\rangle$ bázisban, a H_0 mátrixot a \bar{H}_0 -ra változtatják a Δ^\pm Lamb-eltolódások:

$$\begin{aligned} H_0 &= \hbar\Omega a^\dagger a = \hbar \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{H}_0, \\ \bar{H}_0 &= \hbar \begin{bmatrix} \Omega + \Delta^- & 0 \\ 0 & -\Delta^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (212)$$

így adódnak a következő differenciálegyenletek:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{00}(t) &= \Gamma^+ \rho_{11}(t) - \Gamma^- \rho_{00}(t), \\ \dot{\rho}_{11}(t) &= \Gamma^- \rho_{00}(t) - \Gamma^+ \rho_{11}(t), \\ \dot{\rho}_{01}(t) &= \left(-i\bar{\Omega} - \frac{\Gamma^+ + \Gamma^-}{2} \right) \rho_{01}(t), \\ \dot{\rho}_{10}(t) &= \left(+i\bar{\Omega} - \frac{\Gamma^+ + \Gamma^-}{2} \right) \rho_{10}(t). \end{aligned} \quad (213)$$

Ezek azok az összefüggések, amiket ki akartunk számolni és az irodalomban a nevük *Bloch-egyenletek*.

Most felhasználva a (194) és a (208) között történt összes számolást, és jelölést kapom az egy dotnál bonyolultabb esetekre, hogy:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_S, \hat{\rho}] + \\ &\sum_i \left(-\frac{\Gamma_i^+}{2} \left(\hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger - 2\hat{a}_i^\dagger \hat{\rho} \hat{a}_i \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Gamma_i^-}{2} \left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - 2\hat{a}_i \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger \right) \right. \\ &\quad \left. - i\Delta_i^- [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i, \hat{\rho}] + i\Delta_i^+ [\hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger, \rho] \right), \end{aligned} \quad (214)$$

- $\Gamma_i^+ = 2\pi g_i(\Omega_i) |\lambda_i(\Omega_i)|^2 f_i^e(\Omega_i)$,
- $\Gamma_i^- = 2\pi g_i(\Omega_i) |\lambda_i(\Omega_i)|^2 f_i^h(\Omega_i)$,
- $\Delta_i^+ = P \int \frac{g_i(\omega_i) |\lambda_i(\omega_i)|^2 f_i^e(\omega_i)}{\Omega_i - \omega_i} d\omega_i$,
- $\Delta_i^- = P \int \frac{g_i(\omega_i) |\lambda_i(\omega_i)|^2 f_i^h(\omega_i)}{\Omega_i - \omega_i} d\omega_i$,
- f_i , i típusú részecske Fermi-Dirac eloszlása,
- f_i^h , i típusú részecske hiányának Fermi-Dirac eloszlása.

Ez a képlet írja le a Q-dotos rendszereket. A végső képletlen felismerhető a Lindblad-struktúra. Az (214) alkalmazása az általam vizsgált Q-dot rendszerekben az alábbi jelölésekkel. Kettős dot:

- $i \in [l, r]$,
- bal oldali dot $\hat{a}_l, \hat{a}_l^\dagger$,
- jobb oldali dot $\hat{a}_r, \hat{a}_r^\dagger$,

Kettős dothoz csatolt töltés csapda:

- $\hat{a}_i \in [\hat{a}_l, \hat{a}_r, \hat{c}]$,
- bal oldali dot $\hat{a}_l, \hat{a}_l^\dagger$,
- jobb oldali dot $\hat{a}_r, \hat{a}_r^\dagger$,
- a csapda \hat{c}, \hat{c}^\dagger .

Ezen eredmények felhasználásával kaptam meg azokat a differenciálegyenleteket amelyek a 3.1, 3.2, 4.2, 4.3, 4.4 fejezetekben találhatóak.

A.4. Korrelációs függvény meghatározása

Ebben a fejezetben szeretnék egy matematikai konstrukciót megadni, hogy ki tudjuk számolni a zajspektrumot az N -felbontott kiterjesztés esetén.

$$P_N(t) = \text{Tr} \rho^{[N]}. \quad (215)$$

Ez a valószínűség adja meg, hogy hány alagutazás történt. Mivel egyértelmű dinamika írja le, hogy mi a kapcsolat a $\rho^{[N]}$ és $\rho^{[N-1]}$ között, ami nem más, mint egy differenciálegyenlet-rendszer, ezért a $\rho^{[N]}(t)$ nem más, mint egy Markov-lánc.

További lépések megtétele előtt szeretném megadni a Laplace-t transzformáció definícióját, és egy két fontos képletet, amit használni fogok a továbbiakban [42].

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt, \quad (216)$$

Ez akkor lehetséges, ha létezik az α valós szám úgy, hogy

$$\begin{cases} |f(t)| < C e^{\alpha t} & t \geq 0, \\ f(t) = 0 & t < 0. \end{cases}$$

A Laplace-transzformáció után kapott függvény a $\text{Re}[z] > \alpha$ félsíkon analitikus. Az inverz transzformáció segítségével visszakapjuk az $f(t)$ függvényt.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z) e^{zt} dz \quad (\gamma > \alpha), \quad (217)$$

Cauchy- és reziduum-tétel segítségével számítható az integrál.

A mi esetünkben egy csatolt differenciálegyenlet-rendszer írja le rendszer időbeli változását. A differenciálegyenlet-rendszer minden tagját berakhatjuk egy $\underline{x}_N(t)$ vektorba. Így a következőképpen alakulnak az egyenletek.

$$\dot{\underline{x}}_N(t) = \underline{A} \underline{x}_N(t) + \underline{B} \underline{x}_{N-1}(t). \quad (218)$$

Mivel a sűrűségmátrix főátlóbeli elemei is benne vannak ebben a vektorban, ezért létezik egy olyan \underline{v} vektor, hogy

$$P_N(t) = \underline{v} \underline{x}_N(t). \quad (219)$$

A vektoros formába írt differenciálegyenlet-rendszerre alkalmazhatjuk a Laplace-transzformációt. Mivel deriválunk az idő szerint, ezért meg kell adnom még

egy fontos képletet:

$$\int_0^{\infty} \dot{f}(t)e^{-zt} dt = -f(0) + zF(z). \quad (220)$$

Ezt felhasználva, az egyenletrendszer a következő alakot ölti:

$$-x_N(0) + zX_N(z) = \underline{A} X_N(z) + \underline{B} X_{N-1}(z). \quad (221)$$

Amit tudunk a kezdeti értékekről az, hogy:

$$\begin{cases} x_N(0) = \underline{k}, & \underline{v} \underline{k} = 1 & N = 0, \\ \underline{x}_N(0) = \underline{0} & & N \neq 0. \end{cases}$$

Az $N \neq 0$ esetben haladok tovább.

$$z\underline{X}_N(z) = \underline{A} \underline{X}_N(z) + \underline{B} \underline{X}_{N-1}(z), \quad (222)$$

$$\underline{X}_N(z) = \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} \underline{B} \underline{X}_{N-1}(z). \quad (223)$$

Elnevezem a

$$\frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} \underline{B} = \underline{C}, \quad (224)$$

mátrixnak, akkor egy sorozatot kapok:

$$\underline{X}_N(z) = \underline{C} \underline{X}_{N-1}(z), \quad (225)$$

ahonnan

$$\underline{X}_N(z) = \underline{C}^N \underline{X}_0(z). \quad (226)$$

Most foglalkozhatunk a $N = 0$ esettel is. Ez egy speciális egyenletrendszer mivel nem létezik a $\underline{X}_{-1}(z)$ vektor.

$$-x_0(0) + zX_0(z) = \underline{A} X_0(z), \quad (227)$$

$$X_0(z) = \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} x_0(0). \quad (228)$$

Végül ez a képlet adódik:

$$\underline{X}_N(z) = \underline{C}^N \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} x_0(0). \quad (229)$$

Ezek után az a kérdés marad nyitva, hogy mi köze van ennek a $\dot{P}_N(t)$ -hez. Mivel ebből számoljuk ki a rendszeren átfolyó áramot, és ebből szeretném az áram korrelációs függvényét is meghatározni.

$$\begin{aligned} P_N(t) &= \underline{v} \underline{x}_N(t), \\ \dot{P}_N(t) &= \underline{v} \underline{\dot{x}}_N(t). \end{aligned} \quad (230)$$

A Laplace-transzformáció után szintén két esetünk van. Először a $N \neq 0$ esetet vizsgálom:

$$zP_N(z) = z\underline{v} \underline{X}_N(z). \quad (231)$$

Az $N = 0$ esetben pedig:

$$-P_0(0) + zP_0(z) = -\underline{v} \underline{x}_0(0) + z\underline{v} \underline{X}_0(z). \quad (232)$$

Az áram képletét már ismerjük.

$$I(t) = \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} N \dot{P}_N(t), \quad (233)$$

ahol az elemi töltés $e = 1$. Most Laplace-transzformáljuk az egész képletet, és az $N = 0$ tag kiesik a szummázásból, ugyanakkor felhasználva az (232) egyenletet is, a következő adódik:

$$I(z) = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} N z \underline{v} \underline{X}_N(z). \quad (234)$$

Mivel ismerjük $\underline{X}_N(z)$ -t ezért kifejtethetjük a felösszegzést:

$$I(z) = \frac{1}{2} z \underline{v} \lim_{N \rightarrow \infty} (\underline{C} + 2\underline{C}^2 + \dots + N \underline{C}^N) \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} \underline{x}_0(0). \quad (235)$$

Ahhoz, hogy meg tudjuk határozni a sorozatot, fel kell használni a geometriai sor felösszegzését. Mivel nem geometriai sor, ezért át kell alakítani azzá.

$$\begin{aligned} S(x) &= x + 2x^2 + \dots + nx^n \\ &= x \frac{d}{dx} x (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}). \end{aligned} \quad (236)$$

A zárójelben levő tag az egy geometriai sor, aminek tudjuk az eredményét.

$$\begin{aligned} S(x) &= x \frac{d}{dx} x \frac{1-x^n}{1-x} \\ &= \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}. \end{aligned} \quad (237)$$

Ahhoz, hogy tovább tudjunk lépni, még szükségünk van egy összefüggésre.

$$\sum_0^{\infty} P_N(t) = 1. \quad (238)$$

Ezt Laplace-transzformálva:

$$\sum_0^{\infty} v \underline{X}_N(z) = \frac{1}{z}, \quad (239)$$

$$v \lim_{N \rightarrow \infty} (\underline{I} + \underline{C} + 2\underline{C}^2 + \dots + N\underline{C}^N) \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} x_0(0) = \frac{1}{z}. \quad (240)$$

Ezt formálisan írva, és figyelembe véve, hogy $(\underline{I} - \underline{C})^{-1}$ kommutál $\underline{I} - \underline{C}^N$ -el,

$$v \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\underline{I} - \underline{C}^N}{\underline{I} - \underline{C}} \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} x_0(0) = \frac{1}{z}. \quad (241)$$

Az általam vizsgált rendszerekben, kiszámoltam a *Mathematica* program segítségével a következőt:

$$v \frac{\underline{I}}{\underline{I} - \underline{C}} \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} x_0(0) = \frac{1}{z}. \quad (242)$$

Ezt az eredményt úgy kaptam meg, hogy a paramétereknek nem adtam értéket.

Behelyettesítve (242)-t (241)-ba azt kapom, hogy:

$$v \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\underline{C}^N}{\underline{I} - \underline{C}} \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} x_0(0) = 0. \quad (243)$$

A fizikai események szemszögéből nézve azt jelenti, hogy végtelen számú alagutazás után beáll a stacionárius állapot. Ilyenkor teljesen független a kezdőfeltételtől az alagutazás valószínűség eloszlása.

A fenti állítás rövid bizonyítását adnám meg:

$$\frac{\underline{C}^N}{\underline{I} - \underline{C}} \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} = \frac{1}{z \underline{I} - (\underline{A} + \underline{B})} \frac{\underline{B}^N}{(z \underline{I} - \underline{A})^N}. \quad (244)$$

Következő fontos állításokra van szükségünk (bizonyítás nélkül):

- a $\lim_{N \rightarrow \infty}$ egyenértékű azzal, hogy a $t \rightarrow \infty$, azaz a rendszer a stacionárius állapotot a fele halad (lásd Q-dotok),

- az \underline{A} mátrixnak negatív elemei vannak (lásd Q-dotok),
- definiáljuk az $f(z) \prec g(z)$ relációt, ami megmondja, hogy a $f(z)$ függvény inverz Laplace-transzformáltja nagyobb a $t \rightarrow \infty$ -ben, mint a $g(z)$ inverz Laplace-transzformáltja,
- például $\frac{1}{z+a} \prec \frac{1}{z}$, mert $e^{-at} \leq 1$, ahol $t \in [0, \infty)$.

A fenti állításokat alkalmazva:

$$v \frac{1}{z \underline{I} - (\underline{A} + \underline{B})} \frac{\underline{B}^N}{(z \underline{I} - \underline{A})^N} x_0(0) \prec \frac{1}{z} \frac{b^N}{(z+a)^N}. \quad (245)$$

Egyetlen feladat maradt, mégpedig megmutatni, hogy a jobb oldalon álló függvénynek $N \rightarrow \infty$ -ben, az inverz Laplace-transzformáltja = 0. Használjuk a reziduum-tételt:

$$Res \left(\frac{1}{z} \frac{b^N}{(z+a)^N} e^{zt} \right) = \frac{b^N}{a^N} + \frac{1}{(N-1)!} b^N \left(\frac{d}{dz} \right)^{N-1} \frac{1}{z} e^{zt} \Big|_{z=-a}. \quad (246)$$

Az e^{zt} sorbafejtethető, és mivel a Taylor-sorának a konvergencia sugara végtelen, ezért ezzel nem kell vigyáznunk.

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^{N-1} \left(\frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots \right) \Big|_{z=-a} = \frac{(-1)^{N-1} (N-1)!}{(-a)^N} + \frac{1}{N!} + \frac{-a}{N(N+1)!} + \dots \quad (247)$$

Összegezve az eredményeket:

$$Res \left(\frac{1}{z} \frac{b^N}{(z+a)^N} e^{zt} \right) = \frac{b^N}{a^N} + \frac{(-1)^{N-1} b^N}{(-a)^N} + \frac{1}{N!} + \frac{-a}{(N+1)!} + \dots \quad (248)$$

A jobb oldalon az első két tag kiejti egymást, és mivel az a egy véges szám, ezért $N \rightarrow \infty$ -re az egész jobb oldal 0-vá válik. Ezt a szemléletes bizonyítást ugyanezzel a módszerrel kell alkalmazni a továbbiakban.

Visszatérve az áram meghatározására, azaz a (235) képlethez, azt kapom:

$$I(z) = \frac{1}{2} z v \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\underline{C} - (N+1) \underline{C}^{N+1} + N \underline{C}^{N+2}}{(\underline{I} - \underline{C})^2} \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} x_0(0). \quad (249)$$

Itt megjelenik két olyan tag $-(N+1) \underline{C}^{N+1}$ és $N \underline{C}^{N+2}$, amelyekről az előbbi állítás alapján elmondhatjuk, hogy egyenlők nullával.

$$z v \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{- (N+1) \underline{C}^{N+1} + N \underline{C}^{N+2}}{(\underline{I} - \underline{C})^2} \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} x_0(0) = 0. \quad (250)$$

Figyelembe véve az előbbi megfontolásokat, a következő végeredmény adódik:

$$I(z) = \frac{1}{2} z \underline{v} \frac{\underline{C}}{(\underline{I} - \underline{C})^2} \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} x_0(0). \quad (251)$$

Felmerül a kérdés, hogyan számoljunk második momentumot.

$$\overline{N^2}(t) = \sum_0^{\infty} N^2 P_N(t). \quad (252)$$

Mivel a stacionárius áram zajspektrumának kiszámításához felhasználtam a *MacDonalds*-formulát, ezért valójában a második momentum időderiváltjának meghatározása lenne a cél.

$$\frac{d}{dt} \overline{N^2}(t) = \sum_0^{\infty} N^2 \dot{P}_N(t). \quad (253)$$

Végrehajtom a Laplace-transzformációt. A második momentum időderiváltjának transzformáltját elnevezem $M(z)$ -nek, és használom a (232) képletben található eredményt.

$$M(z) = \sum_1^{\infty} N^2 z \underline{v} \underline{X}_N(z), \quad (254)$$

$$M(z) = z \underline{v} \lim_{N \rightarrow \infty} (\underline{C} + 4 \underline{C}^2 + \dots + N^2 \underline{C}^N) \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} x_0(0). \quad (255)$$

A megjelenő sort a már megismert módon számolom ki.

$$\begin{aligned} S(x) &= x + 4x^2 + \dots + n^2 x^n \\ &= x \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} x (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) \\ &= x \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} x \frac{1 - x^n}{1 - x} \\ &= \frac{x + x^2 - (n+1)^2 x^{n+1} + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+2} - n^2 x^{n+3}}{(1-x)^3}. \end{aligned} \quad (256)$$

Ezt behelyettesítem (255)-be, és formálisan figyelembe véve, hogy $x = \frac{\underline{C}}{\underline{I}}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -(n^2 + 2n + 1)x^{n+1} + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+2} - n^2 x^{n+3} = 0, \quad (257)$$

a végeredmény a következő lett:

$$M(z) = z \underline{v} \frac{\underline{C} + \underline{C}^2}{(\underline{I} - \underline{C})^3} \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} x_0(0). \quad (258)$$

Végül szeretnék ebben a fejezetben az áram-áram korrelációs függvényének meghatározásáról írni nem stacionárius esetben. Természetesen itt is felhasználom az aktuális fejezetben eddig elért eredményeket.

$$\begin{aligned} C(t, t') &= \langle I(t)I(t') \rangle - \langle I(t) \rangle \langle I(t') \rangle \\ &= \sum_{N, N'}^{\infty} NN' \dot{P}_{N, N'}(t, t') - \sum_0^{\infty} n \dot{P}_N(t) \sum_0^{\infty} N' \dot{P}_{N'}(t'). \end{aligned} \quad (259)$$

A $P_{N, N'}(t, t')$ annak a valószínűségét adja meg, hogy a folyamat során a t, t' időkbén az N, N' alagutazások történnek. Mivel a valószínűségek mögött egy konkrét dinamika áll, ezért ez az egész egy Markov-folyamat. Ilyen esetben még elvégezhető egy egyszerűsítés [43].

$$\dot{P}_{N, N'}(t, t') = \dot{P}(N, t | N', t') \dot{P}_{N'}(t'). \quad (260)$$

A $P(N, t | N', t')$ annak a valószínűsége, hogy a folyamat során a t időpillanatban az N -dik alagutazás történik, ha korábban a t' időben az N' -dik alagutazás történt. Mivel itt nem egy klasszikus folyamatról van szó, hanem egy kvantum eseményről, ezért úgy kell érteni, hogy az adott t időpillanat körül vett időátlagolás során az adott N -dik alagutazás megtörténésének valószínűségi súlya legnagyobb a többi alagutazás valószínűségi súlyához képest.

Mielőtt továbbmennék, kötelességemnek érzem, hogy tisztázzak még három fontos ténytet. Az első, hogy a közös eloszlás deriváltját írtam a fenti képletekbe ami nem más csak formalitás, mivel ezzel szeretem volna jelezni, hogy áram-áram nem pedig a rendszeren áthaladt töltés-töltés korrelációs függvényt szeretnék számolni. A második az, hogy nem írtam ki az elemi töltéstől való függést. A megfelelő fejezetekben (A.8.3.3) ezt majd tárgyalni fogom. Utolsó fontos tény: ezek a rendszerek úgy vannak beállítva, hogy irányított folyamatról beszélhetünk, azaz balról jönnek be az elektronok, jobbra mennek ki, és soha nem változik meg ez az irány.

$$C(t, t') = \sum_{N, N'}^{\infty} NN' \dot{P}(N, t | N', t') \dot{P}_{N'}(t') - \sum_0^{\infty} n \dot{P}_N(t) \sum_0^{\infty} N' \dot{P}_{N'}(t'). \quad (261)$$

A t idő változóban végzek egy Laplace-transzformációt.

$$\mathcal{L}(\dot{P}(N, t | N', t')) = z \underline{v} \underline{C}^{N-N'} \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} x_{N'}(t'), \quad (262)$$

$$C(z, t') = \sum_{N'=0}^{\infty} N' \sum_{N=N'}^{\infty} N z \underline{v} \underline{C}^{N-N'} \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} \underline{x}_{N'}(t') \dot{P}_{N'}(t') \quad (263)$$

$$- < I(z) > < I(t') >,$$

$$S(x) = n + (n+1)x + (n+2)x^2 + \dots + (n+p)x^p$$

$$= n(1 + x + x^2 + \dots + x^p) + (x + 2x^2 + \dots + px^p)$$

$$= n \frac{1-x^{p+1}}{1-x} + x \frac{d}{dx} x \frac{1-x^p}{1-x} \quad (264)$$

$$= n \frac{1-x^{p+1}}{1-x} + \frac{x - (p+1)x^{p+1} + px^{p+2}}{(1-x)^2}.$$

A kapott eredményt behelyettesítem a korrelációs függvénybe.

$$C(z, t') = z \underline{v} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\underline{I} - \underline{C}^N}{\underline{I} - \underline{C}} \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} \underline{x}_{N'}(t') \sum_{N'=0}^{\infty} N'^2 \dot{P}_{N'}(t')$$

$$+ z \underline{v} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\underline{C} - (N+1)\underline{C}^{N+1} + N\underline{C}^{N+2}}{(\underline{I} - \underline{C})^2} \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} \underline{x}_{N'}(t') \sum_{N'=0}^{\infty} N' \dot{P}_{N'}(t')$$

$$- < I(z) > < I(t') > . \quad (265)$$

Felhasználva a $n \rightarrow \infty$ elvégzése után kapott eredményeket, ez a végeredmény adódik:

$$C(z, t') = z \underline{v} \frac{\underline{I}}{\underline{I} - \underline{C}} \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} \underline{x}_{N'}(t') \sum_{N'=0}^{\infty} N'^2 \dot{P}_{N'}(t')$$

$$+ z \underline{v} \frac{\underline{C}}{(\underline{I} - \underline{C})^2} \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} \underline{x}_{N'}(t') < I(t') > \quad (266)$$

$$- < I(z) > < I(t') > .$$

Szeretnék egy másik rövid bizonyítást adni arra, hogy miért is lesz a geometriai sor végeredménye az, amit már bizonyítottam. Az alábbi eredmények nem jelentősek, de mivel hasonlítanak a Dyson-féle felösszegzéshez is, ezért írom le őket.

Mivel tudjuk, hogy az inverz Laplace-transzformáció után véges eredményt kapunk, ezért írhatom azt, hogy:

$$z \underline{v} \lim_{N \rightarrow \infty} (\underline{I} + \underline{C} + \underline{C}^2 + \dots + \underline{C}^N) \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} \underline{x}_0(0) = \quad (267)$$

$$= z \underline{v} (\underline{I} + \underline{C} \lim_{N \rightarrow \infty} (\underline{I} + \underline{C} + \underline{C}^2 + \dots + \underline{C}^N)) \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} \underline{x}_0(0).$$

Röviden fogalmazva ez a következőt jelenti (Dyson-szerű):

$$A = y + xA. \quad (268)$$

Ez alapján tehát a végeredmény:

$$\begin{aligned} & z v \lim_{N \rightarrow \infty} (\underline{I} + \underline{C} + \underline{C}^2 + \dots + \underline{C}^N) \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} x_0(0) = \\ & = z v \frac{\underline{I}}{\underline{I} - \underline{C}} \frac{1}{z \underline{I} - \underline{A}} x_0(0). \end{aligned} \quad (269)$$

A.5. A markovi áram kiszámolása

A módszert lényegében az egy dotra fogom megmutatni. Ez elegendő ahhoz, hogy analóg módon következzen belőle a többi Q-dot rendszer markovi árama. Az egy dot Hamilton-operátora:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{SR}, \\ \hat{H}_{SR} &= a^\dagger(\hat{A}_l + \hat{A}_r) + H.C., \\ \hat{A}_{l/r} &= \sum_{l/r} \lambda_{l/r} \hat{b}_{l/r},\end{aligned}\tag{270}$$

ahol l/r az l vagy r jelöli.

A \hat{I} markovi áram operátor kiszámolása támaszkodik a [39] és a [40] cikkekre.

$$Tr_S(\hat{I}\hat{\rho}) = Tr_{S+R}(\hat{Q}\hat{\chi}).\tag{271}$$

A töltés-operátor ebben a rendszerben(a kettős dot esetében is ugyanez):

$$\hat{Q} = \left(\sum_r \hat{b}_r^\dagger \hat{b}_r - \sum_l \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l\right)/2,\tag{272}$$

a Dirac(kölcsönhatási)- és a Schrödinger-képben ugyanaz az alakja. A teljes rendszer állapotának mozgásegyenlete(Dirac-képben) a Born-Markov közelítés után:

$$\dot{\hat{\chi}} = -i[\hat{H}_{SR}(t), \hat{\chi}(0)] - \int_{-\infty}^t dt' [\hat{H}_{SR}(t), [\hat{H}_{SR}(t'), \hat{\chi}(t)]].\tag{273}$$

A dot és a tartályok a kölcsönhatás ellenére végig korrelálatlan állapotban maradnak(Born-közelítés része):

$$\hat{\chi}(t) = \hat{\rho}(t)\hat{R}_0,\tag{274}$$

ahol \hat{R}_0 a tartály egyensúlyi állapotának sűrűségmátrixa, és a Born-közelítés alapján pedig a kezdeti állapota is egyben, továbbá $T \rightarrow 0$ a rendszer hőmérséklete, és a két tartály szeparált: $\hat{R}_0 = \hat{R}_{0l} \otimes \hat{R}_{0r}$.

$$Tr_{S+R} \left(\hat{Q} \left(-i[\hat{H}_{SR}(t), \hat{\chi}(0)] \right) \right) = 0,\tag{275}$$

mert Tr_R alatt mindig egymás mellett három fermion operátor van (Pauli-elv).

A mozgásegyenletnek második része ad így csak járulékat:

$$Tr_S(\hat{I}\hat{\rho}) = - \int_{-\infty}^t dt' Tr_{S+R} \left(\hat{Q}[\hat{H}_{SR}(t), [\hat{H}_{SR}(t'), \hat{\chi}(t)]] \right).\tag{276}$$

Ez pedig így alakítható át:

$$\begin{aligned} Tr_{S+R} \left(\hat{Q} \left[\hat{H}_{SR}(t), [\hat{H}_{SR}(t'), \hat{\chi}(t)] \right] \right) = \\ Tr_{S+R} \left(\left[[\hat{Q}, \hat{H}_{SR}(t)], \hat{H}_{SR}(t') \right] \hat{\chi}(t) \right), \end{aligned} \quad (277)$$

Számoljuk ki a fenti egyenletben a kommutátorokat:

$$2[\hat{Q}, \hat{H}_{SR}] = (\hat{A}_r^\dagger - \hat{A}_l^\dagger)\hat{a} - (\hat{A}_r - \hat{A}_l)\hat{a}^\dagger, \quad (278)$$

és ezt behelyettesítve a következő kommutátorba:

$$\begin{aligned} 2 \left[[\hat{Q}, \hat{H}_{SR}(t)], \hat{H}_{SR}(t') \right] = & \hat{A}_l^\dagger(t)\hat{A}_r(t')\hat{a}(t)\hat{a}^\dagger(t') \\ & - \hat{A}_l^\dagger(t)\hat{A}_l(t')\hat{a}(t)\hat{a}^\dagger(t') - \hat{A}_r(t)\hat{A}_r^\dagger(t')\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t') \\ & + \hat{A}_l(t)\hat{A}_l^\dagger(t')\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t') - \hat{A}_r(t')\hat{A}_r^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(t')\hat{a}(t) \\ & + \hat{A}_l(t')\hat{A}_l^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) + \hat{A}_r^\dagger(t')\hat{A}_r(t)\hat{a}(t')\hat{a}^\dagger(t) \\ & - \hat{A}_l^\dagger(t')\hat{A}_l(t)\hat{a}(t')\hat{a}^\dagger(t). \end{aligned} \quad (279)$$

A (278) és (279) egyenletek alapján vannak még más tagok is, de azok a Tr_R művelet után kiesnek, és használva az \hat{R}_0 sűrűségmátrix tulajdonságait, A Dirac-képben az operátorok időfejlődése:

$$\begin{aligned} \hat{a}(t) = \hat{a}e^{-i\Omega t}, \hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger e^{i\Omega t}, \\ \hat{A}_l(t) = \sum_l \lambda_l \hat{b}_l e^{-i\omega_l t}, \hat{A}_r(t) = \sum_r \lambda_r \hat{b}_r e^{-i\omega_r t}, \\ \hat{A}_l^\dagger(t) = \sum_l \lambda_l^* \hat{b}_l^\dagger e^{i\omega_l t}, \hat{A}_r^\dagger = \sum_r \lambda_r^* \hat{b}_r^\dagger e^{i\omega_r t}. \end{aligned} \quad (280)$$

Négy típusú integrál van amit ki kell számolni. Ezeket már megadtam az appendix adott fejezetében (A.3):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t Tr_R \left(\hat{A}_{l/r}(t)\hat{A}_{l/r}^\dagger(t') \right) e^{-i\Omega(t'-t)} dt' \\ & = \frac{\Gamma_{l/r}^-}{2} + i\Delta_{l/r}^-, \\ & \int_{-\infty}^t Tr_R \left(\hat{A}_{l/r}^\dagger(t)\hat{A}_{l/r}(t') \right) e^{+i\Omega(t'-t)} dt' \\ & = \frac{\Gamma_{l/r}^+}{2} - i\Delta_{l/r}^+, \end{aligned} \quad (281)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^t Tr_R \left(\hat{A}_{l/r}^\dagger(t') \hat{A}_{l/r}(t) \right) e^{-i\Omega(t'-t)} dt' \\
&= \frac{\Gamma_{l/r}^+}{2} + i\Delta_{l/r}^+, \\
& \int_{-\infty}^t Tr_R \left(\hat{A}_{l/r}(t') \hat{A}_{l/r}^\dagger(t) \right) e^{+i\Omega(t'-t)} dt' \\
&= \frac{\Gamma_{l/r}^-}{2} - i\Delta_{l/r}^-.
\end{aligned} \tag{282}$$

A Γ -k és Δ -k függése a tartály állapot-sűrűségétől és egyéb más paramérektől, ennek a tárgyalása megtalálható szintén az appendix megfelelő fejezetében (A.3).

Az egyenletek így alakulnak az integrálás elvégzése után:

$$\begin{aligned}
Tr_S(2\hat{I}\hat{\rho}) &= -Tr_S \left(\left(\frac{\Gamma_l^+}{2} + i\Delta_r^+ \right) \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - \right. \\
& \left(\frac{\Gamma_l^+}{2} + i\Delta_l^+ \right) \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - \left(\frac{\Gamma_r^-}{2} + i\Delta_r^- \right) \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} + \\
& \left(\frac{\Gamma_l^-}{2} + i\Delta_l^- \right) \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \left(\frac{\Gamma_r^-}{2} - i\Delta_r^- \right) \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} + \\
& \left(\frac{\Gamma_l^-}{2} - i\Delta_l^- \right) \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} + \left(\frac{\Gamma_r^+}{2} - i\Delta_r^+ \right) \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - \\
& \left. \left(\frac{\Gamma_l^+}{2} - i\Delta_l^+ \right) \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} \right).
\end{aligned} \tag{283}$$

Innen már csak le kell olvasni az \hat{I} markovi áramot.

$$2\hat{I} = (\Gamma_l^+ - \Gamma_r^+)(1 - \hat{a}^\dagger\hat{a}) + (\Gamma_r^- - \Gamma_l^-)\hat{a}^\dagger\hat{a}. \tag{284}$$

Az egy dot tárgyalásánál, szó volt arról, hogy az áram az balról jobbra folyik. Ilyen esetben $\Gamma_r^+ = \Gamma_l^- = 0$. Ezzel eljutottunk az általam vizsgált rendszer markovi áram operátorához:

$$\hat{I} = (\Gamma_l^+(1 - \hat{a}^\dagger\hat{a}) + \Gamma_r^-\hat{a}^\dagger\hat{a}) / 2. \tag{285}$$

A kettős dot esetében amikor az interdot Coulomb-csatolás kicsi, azaz a $|1, 1\rangle$ állapot is lehetséges, hasonló számolás után:

$$\begin{aligned}
2\hat{I} &= \Gamma_l^+(1 - \hat{a}_l^\dagger\hat{a}_l) - \Gamma_r^+(1 - \hat{a}_r^\dagger\hat{a}_r) \\
&+ \Gamma_r^-\hat{a}_r^\dagger\hat{a}_r - \Gamma_l^-\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_l.
\end{aligned} \tag{286}$$

Itt is az áram balról jobbra folyik, tehát $\Gamma_r^+ = \Gamma_l^- = 0$.

$$\hat{I} = \left(\Gamma_l^+ (1 - \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l) + \Gamma_r^- \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r \right) / 2. \quad (287)$$

Ha viszont az interdó Coulomb-csatolás nagy, ezt vizsgáltam a dolgozat főszövegében, ilyenkor a $|1, 1\rangle$ állapot tiltott, és a jobb illetve a bal oldali dotok kelt ő eltűntető operátorai teljesen más kommutációs relációkat elégítenek ki. Ezek alapján:

$$\begin{aligned} 2\hat{I} = & \Gamma_l^+ (1 - \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l - \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r) - \Gamma_r^+ (1 - \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r - \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l) \\ & + \Gamma_r^- \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r - \Gamma_l^- \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l. \end{aligned} \quad (288)$$

Az áram balról jobbra folyik, tehát $\Gamma_r^+ = \Gamma_l^- = 0$.

$$\hat{I} = \left(\Gamma_l^+ (1 - \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l - \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r) + \Gamma_r^- \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r \right) / 2. \quad (289)$$

Ezt az markovi áram képletet használtam a folytonos mérés dupla kommutátorában. Egyetlen megjegyzés van az utolsó rendszer számolása esetében: arra kell vigyázni, hogy négy operátort kell ábrázolni egy három dimenziójú Hilbert téren.

A.6. N -felbontott módszer

Vezessük be az \hat{N} töltés operátort $|N\rangle$ sajátvektorokkal [74]. A Ramo-Shockley-tételt használtam, ezért egy esemény azt jelenti, hogy egy elektron be- vagy kialagutazott a Q-dot rendszerbe. Ha egy esemény azt jelentené, hogy egy elektron áthaladt az egész rendszeren akkor az N egész számú lenne, de így félegész értékeket vesz fel. A kiterjesztés operátora:

$$\hat{s} = \sum_N |N - 1/2\rangle \langle N|. \quad (290)$$

Ezt most alkalmazzuk az egy dot esetében. Ezt úgy kell értelmezni, hogy az adott Hilbert-teret tenzorszorozzuk a $|N\rangle$ sajátvektorokból álló Hilbert-térrel. Ilyenkor a dot keltő, eltűntető operátorai az alábbiak szerint alakulnak, ha balról jön be az elektron:

$$\hat{a} \rightarrow \hat{a}\hat{s}, \quad \hat{a}^\dagger \rightarrow \hat{a}^\dagger\hat{s}^\dagger. \quad (291)$$

Ha viszont jobbra megy ki, akkor:

$$\hat{a} \rightarrow \hat{a}\hat{s}^\dagger, \quad \hat{a}^\dagger \rightarrow \hat{a}^\dagger\hat{s}. \quad (292)$$

A kiterjesztett master-egyenlet, amikor balról jobbra folyik az áram:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} = & -i\Omega [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}] + \\ & \left(-\frac{\Gamma_l^+}{2} (\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger - 2\hat{s}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a}\hat{s}) \right. \\ & -\frac{\Gamma_r^-}{2} (\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} - 2\hat{s}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{s}) \\ & \left. -i\Delta_r^- [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}] + i\Delta_l^+ [\hat{a}\hat{a}^\dagger, \rho] \right). \end{aligned} \quad (293)$$

Kihasználtam, hogy $\hat{s}^\dagger\hat{s} = \hat{1}$. A $\hat{\rho}^{[N]}$ -et pedig úgy kapjuk meg, hogy:

$$\hat{\rho}^{[N]} = \langle N | \hat{\rho} | N \rangle. \quad (294)$$

Most vizsgáljuk meg az alábbi eseteket:

$$\begin{aligned} \langle N | \hat{s}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a}\hat{s} | N \rangle &= \hat{a}^\dagger\hat{\rho}^{[N-1/2]}\hat{a}, \\ \langle N | \hat{s}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{s} | N \rangle &= \hat{a}\hat{\rho}^{[N-1/2]}\hat{a}^\dagger, \\ \langle N | \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} | N \rangle &= \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}^{[N]}. \end{aligned} \quad (295)$$

Most pedig állítsuk be az N -t egésznek, persze ilyenkor a kapott töltést el kell osztani kettővel. Ez látható a 3.1, 3.2 fejezetekben és ez az átjárás a Q-dot rendszerekben elég egyszerűen adódik. Az egy dot kiterjesztett egyenletei:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{00}^{[N]}(t) &= \Gamma_l^+ \rho_{11}^{[N-1]}(t) - \Gamma_r^- \rho_{00}^{[N]}(t), \\
\dot{\rho}_{11}^{[N]}(t) &= \Gamma_r^- \rho_{00}^{[N-1]}(t) - \Gamma_l^+ \rho_{11}^{[N]}(t), \\
\dot{\rho}_{01}^{[N]}(t) &= \left(-i\bar{\Omega} - \frac{\Gamma_l^+ + \Gamma_r^-}{2} \right) \rho_{01}^{[N]}(t), \\
\dot{\rho}_{10}^{[N]}(t) &= \left(+i\bar{\Omega} - \frac{\Gamma_l^+ + \Gamma_r^-}{2} \right) \rho_{10}^{[N]}(t).
\end{aligned} \tag{296}$$

Az a kérdés maradt, hogy az egy dot markovi árama, és a duplakommutátor hogyan viselkedik. Az

$$\hat{\Gamma} = (\Gamma_l^+(\hat{1} - \hat{a}^\dagger \hat{a}) + \Gamma_r^-\hat{a}^\dagger \hat{a}) / 2, \tag{297}$$

egyenlet igazolja, hogy az áram nem változik a kiterjesztésre, és így:

$$\langle N | -\frac{g}{8} [\hat{\Gamma}, [\hat{\Gamma}, \hat{\rho}]] | N \rangle = -\frac{g}{8} [\hat{\Gamma}, [\hat{\Gamma}, \hat{\rho}^{[N]}]]. \tag{298}$$

A kettős dot esetében pedig a kiterjesztés így néz ki:

$$\hat{a}_l \rightarrow \hat{a}_l \hat{s}, \quad \hat{a}_r \rightarrow \hat{a}_r \hat{s}^\dagger. \tag{299}$$

A kiterjesztett master egyenlet (az áram balról jobbra folyik):

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \mathcal{L}\hat{\rho} &= -i [\hat{H}_S, \hat{\rho}] + \\
&\left(-\frac{\Gamma_l^+}{2} \left(\hat{a}_l \hat{a}_l^\dagger \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{a}_l \hat{a}_l^\dagger - 2\hat{s}^\dagger \hat{a}_l^\dagger \hat{\rho} \hat{a}_l \hat{s} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Gamma_r^-}{2} \left(\hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r - 2\hat{s}^\dagger \hat{a}_r \hat{\rho} \hat{a}_r^\dagger \hat{s} \right) \right. \\
&\quad \left. - i\Delta_r^- [\hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r, \hat{\rho}] + i\Delta_l^+ [\hat{a}_l \hat{a}_l^\dagger, \hat{\rho}] \right).
\end{aligned} \tag{300}$$

Az egy dotnál alkalmazott módszer alapján, egyértelmű a további számolás. De előbb vizsgáljuk meg a markovi áramot a kettős dot rendszerben. A Hilbert tér három dimenziós, az interdot Coulomb-taszítása miatt van egy tiltott állapotunk. Az áram balról jobbra folyik, tehát $\Gamma_r^+ = \Gamma_l^- = 0$.

$$\hat{\Gamma} = \left(\Gamma_l^+(\hat{1} - \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l - \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r) + \Gamma_r^-\hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r \right) / 2. \tag{301}$$

Jól látható, hogy az áram operátor a kiterjesztésre nézve invariáns. Az egy dotnál tanultak alapján, ábrázoljuk a három dimenziós téren a $\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \frac{g}{8} [\hat{\mathbf{I}}, [\hat{\mathbf{I}}, \cdot]]$ szuperoperátort. (113) alapján:

$$\begin{aligned}
\rho_{aa}^{[N]} &= -\Gamma_l \rho_{aa}^{[N]} + \Gamma_r \rho_{cc}^{[N-1]}, \\
\rho_{bb}^{[N]} &= -i\Omega(\rho_{cb}^{[N]} - \rho_{bc}^{[N]}) + \Gamma_l \rho_{aa}^{[N-1]}, \\
\rho_{bc}^{[N]} &= -i\delta \rho_{bc}^{[N]} + i\Omega(\rho_{bb}^{[N]} - \rho_{cc}^{[N]}) - \frac{\Gamma_r + x}{2} \rho_{bc}^{[N]}, \\
\rho_{cb}^{[N]} &= +i\delta \rho_{cb}^{[N]} + i\Omega(\rho_{cc}^{[N]} - \rho_{bb}^{[N]}) - \frac{\Gamma_r + x}{2} \rho_{cb}^{[N]}, \\
\rho_{cc}^{[N]} &= -i\Omega(\rho_{bc}^{[N]} - \rho_{cb}^{[N]}) - \Gamma_r \rho_{cc}^{[N]},
\end{aligned} \tag{302}$$

ahol

- $\Gamma_r^- = \Gamma_r$ és $\Gamma_l^+ = \Gamma_l$,
- $x = \frac{g\Gamma_r^2}{8}$,
- $\hat{H}_S = E_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + E_r \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r + \hbar\Omega(\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_r + \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_l)$ a részrendszer kiterjesztett Hamilt on-operátora.

A fent megadott differenciálegyenlet-rendszer még nem vizsgálták részletesen. Ebből az alakból jön ki a stacionárius zajspektrumba a sörétzaj.

A.7. A folytonos mérés

A nem-projektív mérésből építjük fel a folytonos mérést [72]. A nem-projektív mérést már tárgyaltam 2.3 fejezetben, így támaszkodom az ott elmondottakra. A legfontosabb elem, hogy a mérés időintervallumát felosszuk Δt részekre, és aztán ezekben pillanatszerűen történik egy nem-projektív mérés. A mérés attól folytonos, hogy ezekkel az intervallum részekkel tartunk később a nullához. Ezt a határértéket olyan feltételek mellett lehet elvégezni, hogy a mérés statisztikai hibája σ tartson végtelenhez, és a két mennyiség megfelelő kombinációja adjon ki egy véges számot, mégpedig a mérés erősségét:

$$g = \lim_{\Delta t \rightarrow 0, \sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t \sigma^2}. \quad (303)$$

A folytonos index halmaz esetén, az alábbi általános projektora van szükségünk az elmélet felépítéséhez:

$$\hat{\Pi}_{\bar{A}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(\bar{A} - \hat{A})^2}{2\sigma^2} \right], \quad -\infty \leq \bar{A} \leq \infty. \quad (304)$$

Erről már volt szó a főszövegben (lásd 2.3 fejezet), és még ismétlésként megemlíteném ezen projektorok mérési valószínűségét és normáját:

$$p_{\bar{A}} = \text{Tr} \left(\hat{\Pi}_{\bar{A}} \hat{\rho} \right), \quad \int p_{\bar{A}} d\bar{A} = 1. \quad (305)$$

Helyettesítsük be a mérés erősségét a projektorba:

$$\hat{\Pi}_{\bar{A}} = \sqrt{\frac{g\Delta t}{2\pi}} \exp \left[-\frac{g}{2} \left(\sqrt{\Delta t} \bar{A} - \sqrt{\Delta t} \hat{A} \right)^2 \right]. \quad (306)$$

Tudjuk, hogy a nem-szelektív mérés esetében, az állapot így változik:

$$\hat{\rho}(t + \Delta t) = \int \hat{\Pi}_{\bar{A}}^{1/2} \hat{\rho}(t) \hat{\Pi}_{\bar{A}}^{1/2} d\bar{A}. \quad (307)$$

Bevezetve $a = \sqrt{\Delta t} \bar{A}$:

$$\sqrt{\frac{g}{2\pi}} \int \exp \left[-\frac{g}{4} \left(a - \sqrt{\Delta t} \hat{A} \right)^2 \right] \hat{\rho} \exp \left[-\frac{g}{4} \left(a - \sqrt{\Delta t} \hat{A} \right)^2 \right] da. \quad (308)$$

Fejtsük sorba a kapott eredményt Δt rendig, és használva azt, hogy szimmetrikus és antiszimmetrikus függvény szorzatának integrálja egyenlő nullával, az alábbi eredmény adódik:

$$\hat{\rho}(t + \Delta t) = \hat{\rho}(t) - \frac{g}{8} \left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{\rho}(t) \right] \right] \Delta t. \quad (309)$$

Két fontos matematikai eszközre volt szükség:

- $\hat{A}^2\hat{\rho} - 2\hat{A}\hat{\rho}\hat{A} + \hat{\rho}\hat{A}^2 = [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{\rho}]]$ algebrai összefüggés,
- a $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ függvényre.

A folytonos mérés következtében az állapot mozgásegyenlete:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{g}{8} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{\rho}]]. \quad (310)$$

Ez a nem-szelektív eset, amikor kiátlagolunk az összes lemért állapotra. Ha a szelektív eset érdekel, abban az esetben használatos módszer a sztochasztikus folyamatok bevezetése. Röviden értelmezve a nem-szelektív eset felel meg annak, amikor egy mért operátor várható értékét adjuk meg, míg a szelektív mérés az adott alterekre való vetítést jelent, azaz ennek az operátornak a sajátértékeit.

A szelektív leírásmódnak az első lépése, hogy az \bar{A} folytonos változót lecseréljük egy sztochasztikus változóra. A folytonos mérés ezen egyenleteit először témavezetőm Diósi Lajos vezette le [72]:

$$\bar{A} = \langle \hat{A} \rangle + \frac{1}{\sqrt{g}}\xi, \quad \xi = \frac{\Delta W}{\Delta t}, \quad (311)$$

ami azt jelenti, hogy ez a változó a mért operátor várható körüli fluktuációkat írja le, ahol ξ a standard fehér zaj, W pedig a Wiener-folyamat. A rendszer hullámfüggvénye a nem-projektív mérés során így változik:

$$|\Psi(t + \Delta t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{P_{\bar{A}}}} \hat{\Pi}_{\bar{A}}^{1/2} |\Psi(t)\rangle. \quad (312)$$

Mivel már ismerjük ezt az általánosított projektort, helyettesítsük be:

$$|\Psi(t + \Delta t)\rangle = \exp\left[-\frac{g\Delta t}{4} (\langle \hat{A} \rangle - \hat{A})^2 - \frac{\sqrt{g}}{2} (\langle \hat{A} \rangle - \hat{A}) \Delta W\right] |\Psi(t)\rangle. \quad (313)$$

Az előbb megtanult módszer alapján fejtünk sorba Δt szerint. De mivel ez egy sztochasztikus folyamat, ezért itt a hagyományos számolás helyett bejön az Ito vagy a Stratonovich féle kalkulus. Én most az Ito-szabályokat használom:

- exponenciális sorfejtése Δt , illetve $(\Delta W)^2$ rendig,
- $\Delta t \rightarrow 0$: $\Delta t \rightarrow dt$, $\Delta W \rightarrow dW$ és $(\Delta W)^2 \rightarrow dt$.

A sorfejtés után:

$$|\Psi(t + \Delta t)\rangle = \left[1 - \frac{g}{8} \left(\langle \hat{A} \rangle - \hat{A} \right)^2 dt - \frac{\sqrt{g}}{2} \left(\langle \hat{A} \rangle - \hat{A} \right) dW \right] |\Psi(t)\rangle. \quad (314)$$

Használva az Ito formalizmust:

$$|\Psi(t + \Delta t)\rangle = |\Psi(t)\rangle + d|\Psi\rangle. \quad (315)$$

Az egyenlet az alábbi módon alakul:

$$d|\Psi\rangle = \left[-\frac{g}{8} \left(\langle \hat{A} \rangle - \hat{A} \right)^2 dt - \frac{\sqrt{g}}{2} \left(\langle \hat{A} \rangle - \hat{A} \right) dW \right] |\Psi\rangle. \quad (316)$$

Mint már említettem, hogy más kalkulust használunk a sztochasztikus folyamatoknál, most megadnák egyet aminek a használata lényeges ebben a levezetésben, éspedig az Leibniz-Ito szabályt:

$$d[|\Psi\rangle\langle\Psi|] = d|\Psi\rangle\langle\Psi| + |\Psi\rangle d\langle\Psi| + d|\Psi\rangle d\langle\Psi|. \quad (317)$$

Két függvény szorzatának differenciálja fenti képlet szerint adódik. A sztochasztikus differenciálegyenlet sűrűségmátrixos alakja [72]:

$$d\hat{\rho} = -\frac{g}{8} \left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{\rho} \right] \right] dt + \frac{\sqrt{g}}{2} \left(\hat{A}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{A} - 2\langle\hat{A}\rangle\hat{\rho} \right) dW. \quad (318)$$

Szóval ez a dinamika írja le a szelektív mérést, de ez ekvivalens az előző módszerrel. A nem-szelektivitás onnan jön, hogy a megfigyelő kiátlagol az összes mért értékre. Tegyük meg ezt most mi is, és használjuk:

- a $\hat{\rho}$ és a dW statisztikailag függetlenek, azaz $\ll \hat{\rho}dW \gg = 0$.

Az ismerős végeredmény:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{g}{8} \left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{\rho} \right] \right]. \quad (319)$$

Az eddig tárgyalt esetekben, a rendszerünknek nem volt saját dinamikája. Ha van akkor a rendszerünket időben fejlessze az $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ unitér operátor. A sorfejtés a levezetések során mindig Δt rendig ment, ezért nem szükséges az, hogy a belső dinamikának kommutálnia kell az átalánosított projektorokkal. Az eredmény folytonos mérésre:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}, \hat{\rho} \right] - \frac{g}{8} \left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{\rho} \right] \right]. \quad (320)$$

A levezetések nagyon szemléletesek, ezért kötelességemnek érzem megadni azokat a forrásokat melyek matematikus módon tárgyalják ezeket: [66], [67], [68], [69].

A.8. A Mac-Donald formula

A McDonald-formula segítségével határoztam meg a zajspektrumot. A formula azért hasznos, mert a töltés eloszlás alapján ki lehet számolni az áram-áram korrelációs függvény spektrumát. A *Wiener – Khinchin*-tétel alkalmazásával a bizonyítás (Gesztí Tamás, publikálatlan jegyzet):

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} I_{\omega} e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} I_{\omega'}^* e^{i\omega' t}, \quad (321)$$

$$\langle I(t)I(t') \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle I_{\omega} I_{\omega'}^* \rangle e^{i(\omega' t' - \omega t)}, \quad (322)$$

$$\langle I_{\omega} I_{\omega'}^* \rangle = 2\pi F(\omega) \delta(\omega - \omega'), \quad (323)$$

$$\langle I(t)I(t') \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) e^{i\omega(t'-t)}, \quad (324)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(\int_{-\omega_0 - \Delta\omega}^{-\omega_0} + \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Delta\omega} \right) \frac{d\omega}{2\pi} I_{\omega} e^{-i\omega t} \times \left(\int_{-\omega_0 - \Delta\omega}^{-\omega_0} + \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Delta\omega} \right) \frac{d\omega'}{2\pi} I_{\omega'}^* e^{i\omega' t} \right\rangle = \\ & = \left(\int_{-\omega_0 - \Delta\omega}^{-\omega_0} + \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Delta\omega} \right) \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) = \Delta\nu(F(\omega) + F(-\omega)) = \Delta\nu S(\omega). \end{aligned} \quad (325)$$

Mivel az $F(\omega)$ páros függvény, ezért:

$$S(\omega) = 2F(\omega). \quad (326)$$

A mi esetünkben könnyen meg lehet határozni a rendszeren átfolyó töltés négyzetének átlagát. Ebből a mennyiségből szeretnénk zajspektrumot számolni.

$$\begin{aligned} \overline{Q^2(\tau)} &= \left\langle \int_0^{\tau} I(t) dt \int_0^{\tau} I(t') dt' \right\rangle = \\ &= \int_0^{\tau} dt \int_0^{\tau} dt' \langle I(t)I(t') \rangle = \int_0^{\tau} dt \int_0^{\tau} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) e^{i\omega(t'-t)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) \int_0^{\tau} dt' e^{i\omega t'} \int_0^{\tau} dt e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) \frac{e^{i\omega\tau} - 1}{i\omega} \frac{e^{-i\omega\tau} - 1}{-i\omega} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) \frac{1}{\omega^2} (2 - 2\cos(\omega\tau)), \end{aligned} \quad (327)$$

$$\frac{d}{d\tau}\overline{Q^2(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) \frac{2}{\omega} \sin(\omega\tau). \quad (328)$$

Kihasználva megint, hogy $F(\omega)$ páros, azt kapom, hogy:

$$S(\omega) = 2F(\omega) = 2\omega \int_0^{\infty} d\tau \left(\frac{d}{d\tau}\overline{Q^2(\tau)} \right) \sin(\omega\tau). \quad (329)$$

A (329)-t nevezik az irodalomban McDonald-formulának [29]. Az általam vizsgált rendszerben még a következő összefüggés igaz a stacionárius esetben:

$$\frac{d}{dt}\overline{Q^2(t)} = \sum_0^{\infty} n^2 \dot{P}_n(t) - 2I_{stac}^2 t. \quad (330)$$

Ez a rendszer kvantumos, mivel az N -felbontott kiterjesztés miatt a töltés-operátor diagonális, így nem okoz gondot a klasszikus *Wiener – Khinchin*-tétel alkalmazása. Ha a fluktuációk kvantumosak, mint ahogy a folytonos mérés esetében történt, és nem diagonális operátorunk van, akkor más eljárás szükséges. Kvantumos esetben a $\left\langle \left(\hat{A}(0)\hat{A}(t) + \hat{A}(t)\hat{A}(0) \right) / 2 \right\rangle$ szimmetrizált autokorrelációs függvény harározza meg a zajmérést. Ez annak a következménye, hogy fáziseltolásra érzéketlen a sávszűrő és a detektor, a $+\omega_0$ és a $-\omega_0$ frekvenciákat egyszerre választja ki. A szimmetrizált szorzatnak nem alanyi jogon van fizikai értelme, azaz mert csak így kapunk valós számot, hanem a fenti érvelés alapján. A kísérlet mindenféleképpen valós eredményt ad a teljesítményspektrumra. Tehát az alábbi adódik:

$$S(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \left\langle \left(\hat{A}(0)\hat{A}(t) + \hat{A}(t)\hat{A}(0) \right) / 2 \right\rangle. \quad (331)$$

Ha ebből levonjuk az átlagok szorzatának Fourier-transzformáltját, akkor megkapjuk a zajspektrumot.

A szórás-kísérletekben, ahol az ω_0 és a $-\omega_0$ fizikailag lényegesen különböző, ott már nem-szimmetrizált korrelációs függvényt határozunk meg. A dolgozatban nem ilyen esetekben kellett alkalmaznom a formulákat.

Hivatkozások

- [1] M. Brune *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4887 (1996)
- [2] K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980)
- [3] D.C. Tsui, H.L. Stormer, and A.C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982)
- [4] I. Tittonen *et al.*, Phys. Rev. A **59** 1038 (1999)
- [5] M. Arndt *et al.*, Nature **401**, 680 (1999)
- [6] Lajos Diósi: A Shourt Course in Quantum Information Theory, Lect. Notes Phys. **713**, 69-77 (2007)
- [7] W. F. Stinespring: Proc. Am. Math. Soc **6**, 211 (1955)
- [8] K. Kraus: States, Effects, and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory (Springer, Berlin Heidelberg New York, 1983)
- [9] A. Peres: Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996) és M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki: Phys. Lett. A 223, 1 (1996)
- [10] G. Lindblad: Commun. Math. Phys. **48**, 199 (1976)
- [11] E.C.G. Sudarshan and B. Misra, J. Math. Phys. **18** 756 (1977)
- [12] V. Gorini, A. Kossakowski, E. C. G. Sudarshan: J. Math. Phys. **17**, 821 (1976)
- [13] D.V. Averin and K.K Likharev Mesoscopic Phenomena in Solids, edited by B.L. Altshuler, P.A. Lee, and R.A. Webb (Elsevier, Amsterdam, 1991)
- [14] D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer, J. Kupsch, I.-O. Stamatescu, and H. D. Zeh: Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory (Springer-Verlag, Berlin, 1996)
- [15] M. O. Scully and M. Suhail Zubairy: Quantum Optics (Cambridge University Press, 1997)
- [16] S. A. Gurvitz and Y. S. Prager, Phys. Rev. B **53**, 15932 (1996)
- [17] S. A. Gurvitz, Phys. Rev. B **56**, 15215 (1997)

- [18] H. J. Carmichael: *An Open System Approach to Quantum Optics*, Lect. Notes Phys. (Springer, Berlin, 1993)
- [19] M. Field, C.G. Smith, M. Pepper, D. A. Ritchie, J. E. F. Frost, G. A. C. Jones, and D. G. Hasko, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1311 (1993); E. Buks, R. Schuster, M. Heiblum, D. Mahalu, and V. Umansky, *Nature (London)* **391**, 871 (1998); M. H. Devoret and R. J. Schoelkopf, *Nature (London)* **406**, 1039 (2000)
- [20] Yu. Makhlin, G. Schön, and A. Shnirman, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 357 (2001); N. J. Stone and H. Ahmed, *Appl. Phys. Lett.* **77**, 744 (2000)
- [21] A. N. Korotkov, *Phys. Rev. B* **60**, 5737 (1999); S. Pilgram and M. Büttiker, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 200401 (2002); T. M. Stace and S. D. Barrett, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 136802 (2004); X. Q. Li, W. K. Zhang, P. Cui, J. Shao, Z. Ma, and Y. J. Yan, *Phys. Rev. B* **69**, 085315 (2004); S. A. Gurvitz and G. P. Berman, *Phys. Rev. B* **72**, 073303 (2005)
- [22] A. A. Clerk, S. M. Girvin, and A. D. Stone, *Phys. Rev. B* **67**, 165324 (2003)
- [23] M. Macucci, M. Gattobigio, and G. Iannaccone, *J. Appl. Phys.* **90**, 6428 (2001); R. Brenner, A.R. Hamilton, R.G. Clark, and A.S. Dzurak, *Microelectron. Eng.* **67-68**, 826 (2003); R. Brenner, A. D. Greentree, and A.R. Hamilton, *Appl. Phys. Lett.* **83**, 4640 (2003); R. Brenner, T.M. Buehler, and D.J. Reilly, *J. Appl. Phys.* **97**, 034501 (2005); R. Brenner, T.M. Buehler, and D. J. Reilly, *Microelectron. Eng.* **78-79**, 218 (2005)
- [24] T. Hayashi, T. Fujisawa, H. D. Cheong, Y. H. Jeong, and Y. Hirayama, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 226804 (2003); T. Fujisawa, T. Hayashi, H. D. Cheong, Y. H. Jeong, and Y. Hirayama, *Physica E (Amsterdam)* **21**, 1046 (2004); J. Gorman, E. G. Emiroglu, D. G. Hasko, and D. A. Williams, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 090502 (2005)
- [25] C. Livermore, C. H. Crouch, R. M. Westerwelt, K. L. Campman, and A. C. Gossard, *Science* **274**, 1332 (1996)
- [26] R. J. Schoelkopf, P. Wahlgren, A. A. Kozhevnikov, P. Delsing, and D. E. Prober, *Science* **280**, 1238 (1998); M. H. Devoret and R. J. Schoelkopf, *Nature (London)* **406**, 1039 (2002); A. Aassime, D. Gunnarsson, K. Bladh, and P. Delsing, *Appl. Phys. Lett.* **79**, 4031 (2001)
- [27] Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin, and J. S. Tsai, *Nature (London)* **398**, 786 (1999)

- [28] S. Ramo, Proc. IRE **27**, 584 (1939); W. Shockley, J. Appl. Phys. **9**, 639 (1938)
- [29] D. K. C. MacDonald, Rep. Prog. Phys. **12**, 56 (1948)
- [30] T. Geszti and J. Zs. Bernád, Phys. Rev. B **73** 235343 (2006)
- [31] L. Y. Chen and C. S. Ting, Phys. Rev. B **46**, 4714 (1992)
- [32] R. Ruskov and A. N. Korotkov, Phys. Rev. B **67** 075303 (2003)
- [33] L. Diósi: Weak measurements in quantum mechanics, v4, p276: Encyclopedia of Mathematical Physics eds.: J.-P. Francoise, G.L. Naber, and S.T. Tsou (Elsevier, Oxford, 2006)
- [34] K. Jacobs, D. A. Steck, Contemporary Physics **47** 279 (2006)
- [35] W. Mao, D.V. Averin, R. Ruskov, and A.N. Korotkov, Phys. Rev. Lett. **93**, 056803 (2004); S. Gustavsson, R. Leturcq, B. Simovic, R. Schleser, T. Ihn, P. Studerus, K. Ensslin, D.C. Driscoll, and A.C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **96**, 076605 (2006); R. Ruskov, A.N. Korotkov and A. Mizel, Phys. Rev. Lett. **96**, 200404 (2006); T. Geszti and J.Zs. Bernád, Phys. Rev. B **73**, 235343 (2006); T. Gilad and S.A. Gurvitz, Phys. Rev. Lett. **97**, 116806 (2006); L. Tian, Phys. Rev. Lett. **98**, 153602 (2007); C. Hines, K. Jacobs, and J.B. Wang, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, F609 (2007)
- [36] A.N. Korotkov, Phys.Rev. B **60**, 5737 (1999); **63**, 115403 (2001)
- [37] H.-S. Goan and G.J. Milburn, Phys.Rev. B **64**, 235307 (2001)
- [38] S.A. Gurvitz, L. Fedichkin, D. Mozyrsky, and G.P. Berman, Phys. Rev. Lett. **91**, 066801 (2003); T.M. Stace, and S.D. Barrett, Phys. Rev. Lett. **92**, 136802 (2004); **94**, 069702 (2005); A.A. Clerk and A.D. Stone, Phys. Rev. B **69**, 245303 (2004); D.V. Averin and A.N. Korotkov, Phys. Rev. Lett. **94**, 069701 (2005)
- [39] R. Gebauer and R. Car, Phys. Rev. Lett. **93**, 160404 (2004)
- [40] A. Bodor and L. Diósi, Phys. Rev. A **73**, 064101 (2006)
- [41] J.Zs. Bernád, A. Bodor, L. Diósi, T. Geszti, Phys. Rev. B **77**, 073311 (2008)
- [42] Fodor György: A Laplace-transzformáció műszaki alkalmazása, (Műszaki Kiadó, Budapest, 1966)

- [43] Bevezetés a véletlen folyamatok elméletébe és alkalmazásai (Eötvös Loránd Fizikai Társulat, ELTE Fizikus Diákkör, Budapest, 1979)
- [44] E. Schrödinger, *Die Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935)
- [45] J. Ruostekoski, M. J. Collett, R. Graham, and D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **57**, 511 (1998); J. I. Cirac, M. Lewenstein, K. Molmer, and P. Zoller, *Phys. Rev. A* **57**, 1208 (1998)
- [46] S. Bose, K. Jacobs, and P.L. Knight, *Phys. Rev. A* **59**, 3204 (1999)
- [47] A.D. Armour, M.P. Blencowe, and K.C. Schwab, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 148301 (2002)
- [48] C.H. van der Wal *et al.*, *Science* **290**, 773 (2000); J.R. Friedman, V. Patel, W. Chen, S.K. Tolpygo, and J.E. Lukens, *Nature* **406**, 43 (2000)
- [49] G.C. Ghirardi, A. Rimini and T. Weber, *Phys. Rev. D* **34**, 470 (1986); G.C. Ghirardi, P. Pearle, and A. Rimini, *Phys. Rev. A* **42**, 78 (1990); I.C. Percival, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **447**, 189 (1994); D.I. Fivel, *Phys. Rev. A* **56**, 146 (1997)
- [50] L. Diósi, *Phys. Rev. A* **40**, 1165 (1989); R. Penrose, in A. Fokas *et al.* (Eds.), *Mathematical Physics 2000* (Imperial College, London, 2000); T. Geszti, *Phys. Rev. A* **69**, 032110 (2004)
- [51] A. Dorsel, J. D. McCullen, P. Meystre, E. Vignes, and H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1550 (1983); M. Pinard, C. Fabre, and A. Heidmann, *Phys. Rev. A* **51**, 2443 (1995); P. F. Cohadon, A. Heidmann, and M. Pinard, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3174 (1999); I. Tittonen, G. Breitenbach, T. Kalkbrenner, T. Müller, R. Conradt, S. Schiller, E. Steinsland, N. Blanc, and N. F. de Rooij, *Phys. Rev. A* **59**, 1038 (1999); K. Numata, M. Ando, K. Yamamoto, S. Otsuka, and K. Tsubono, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 260602 (2003); D. Kleckner, W. Marshall, M. J. A. de Dood, K. N. Dinyari, B.-J. Pors, W. T. M. Irvine, and D. Bouwmeester, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 173901 (2006)
- [52] C. K. Law, *Phys. Rev. A* **49**, 433 (1994); **51**, 2537 (1995); S. Mancini, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, *Phys. Rev. A* **55**, 3042 (1997); S. Bose, K. Jacobs, and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **56**, 4175 (1997); **59**, 3204 (1999); K. Jacobs, I. Tittonen, H. M. Wiseman, and S. Schiller, *Phys. Rev. A* **60**, 538 (1999); M. K. Olsen, A. B. Melo, K. Dechoum, and A. Z. Khoury, *Phys. Rev. A* **70**, 043815 (2004)

- [53] W. Marshall, C. Simon, R. Penrose, and D. Bouwmeester, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 130401 (2003)
- [54] S. Mancini, V.I. Man'ko, and P. Tombesi, *Phys. Rev. A* **55**, 3042 (1997); S. Bose, K. Jacobs, and P.L. Knight, *Phys. Rev. A* **56**, 4175 (1997)
- [55] Franz Schwabl: *Quantum Mechanics* (Springer, Berlin Heidelberg New York, 1991)
- [56] D.F. Walls, G.J. Milburn: *Quantum optics* (Springer, Berlin Heidelberg New York, 1994)
- [57] Leslie E. Ballentine: *Quantum Mechanics* (Prentice Hall Advanced Reference Series, 1990)
- [58] S. L. Adler, A. Bassi, and E. Ippoliti, *J. Phys. A* **38**, 2715 (2005); A. Bassi, E. Ippoliti, and S. L. Adler, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 030401 (2005)
- [59] L. Diósi, *Phys. Lett. A* **114**, 451 (1986); *Physica (Amsterdam)* **199 A**, 517 (1993)
- [60] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, *Physica (Amsterdam)* **121 A**, 587 (1983); *Phys. Rev. A* **31**, 1059 (1985)
- [61] W. G. Unruh and W. H. Zurek, *Phys. Rev. D* **40**, 1071 (1989); D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer, J. Kupsch, I.-O. Stamatescu, H. D. Zeh: *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory* (Springer, Berlin, 1996); Appendix A2
- [62] J.Zs. Bernád, L. Diósi, T. Geszti, *Phys. Rev. Lett.* **97** 250404 (2006)
- [63] L. Diósi and C. Kiefer, *J. Phys. A* **35**, 2675 (2002); P. J. Dodd, *Phys. Rev. A* **69**, 052106 (2004)
- [64] M. O. Scully and M. S. Zubairy: *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997)
- [65] A. Gaidarzhy, G. Zolfagharkhani, R. L. Badzey, and P. Mohanty, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 030402 (2005)
- [66] V.P. Belavkin, *Commun. Math. Phys.* **146** 611 (1992)
- [67] R.L. Hudson and K.R. Parthasarathy, *Commun. Math. Phys.* **93** 301 (1984)
- [68] A. Barchielli, G.Lupieri, *J. Math. Phys.* **26** 2222 (1985)

- [69] A. Barchielli, V.P. Belavkin, J. Phys. A. Math. Gen. **24** 1495 (1991)
- [70] M. Choi, Completely Positive Linear Maps on Complex matrices, Linear Algebra and Its Applications, 285-290 (1975)
- [71] V.P. Belavkin, P. Staszewski, Rep. on Math. Phys. **24** 49 (1986)
- [72] L. Diósi, Phys. Lett. **129A** 419-423 (1988)
- [73] Geszti Tamás: Kvantummechanika (Typotex 2007)
- [74] J.Zs. Bernád, A. Bodor, L. Diósi, T. Geszti: unpublished

Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet szeretném kifejezni témavezetőimnek Diósi Lajosnak és Geszti Tamásnak a munka megszületésében nyújtott segítségükért. Köszönöm Cserti Józsefnek és Csordás Andrásnak a hasznos megjegyzéseket. Köszönettel tartozom munkatársamnak Bodor Andrásnak. Hálával tartozom családomnak a lelki támogatásért.

Összefoglaló

A dolgozatban három rendszert vizsgáltam, amelyeknél a dekoherencia vagy irreverzibilitás megjelenése volt a kérdés. A kvantum-dotok azért váltak igazán izgalmas kutatási területé, mert a jövőbeli kvantumszámítógépek építőkövei lehetnek. Tudjuk, hogy ez igazán akkor izgalmas, ha sok Q-dotot tudunk egymás mellé rakni, amelyek megtartják koherens állapotaikat, és össze is vannak fonódva. Mivel ezek a rendszerek kölcsönhatásban vannak a vezetékekkel és egyéb más környezetbeli elektronokkal, könnyen elveszítik a koherens dinamikájukat. Ezt vizsgáltam az első fejezetben, ahol alkalmaztam a master-egyenletet, ami egy olyan modell, ami ezeket a jelenségeket írja le. Mivel a master-egyenlet maga is egy közelítés, ezért ez nem a tökéletes valóságot írja le, hanem inkább a dekoherencia megjelenésének megértésére szolgál. A kettős Q-doton alapuló töltés-detektor esetében meghatároztam a rendszeren átfolyó áramot és a zajspektrumot, abban az esetben, amikor a dekoherencia időskálája abba a tartományba esik, mint a belső dinamika időskálája. A töltés-detektor egyik fajtája a kvantum-mérésnek, de a második fejezetben a folytonos mérést, mint a kvantummechanikai mérés egy másik modelljét vizsgáltam. Itt is ugyanazokat a mennyiségeket számoltam, de míg a töltés-detektornál a mért Q-rendszer egy csapdázott állapotú elektron, addig az utóbbi esetben a rendszeren folyamatosan áram folyt át, és ezt mérte az ampermérő, mint detektor, időben folytonosan. Érdekes eredményt kaptam az egy dot esetében, mivel nem volt hatása a mérésnek a mért áramra nézve. A kettős dot esetében már megjelent a kvantum Zénón-effektus (QZE). Ebben az esetben inkább a folytonos mérés, mint modell alkalmazásának feltételei, és határai voltak a megértés tárgya. A markovi áram kiszámolása volt a kulcsa a dinamikának, ugyanakkor az elméletből nem jött ki első lépésben a sörétzaj, ami miatt ki kellett terjeszteni N -felbontott módon. A detektor zajának konstans háttere viszont érdekesen viselkedett jó detektorok esetén, mert ilyenkor hatalmas zaj került a rendszerbe. A harmadik fejezetben egy olyan kísérleti javaslatot vizsgáltam, ami a mikro és a makrovilág határának feltérképezésére irányul. A kísérlet a sokatmos makroszkopikus test szuperpozíciójának kimutatására irányul. Ha ez sikerülne, akkor a spontán kollapszus modellek dekoherencia paraméterének meghatározása lenne a következő cél. Itt viszont a javaslat alapján, a vizsgálandó testnek(tükör) van hőmérséklete és a felfüggesztésen keresztül környezettel való kölcsönhatása. Ezért alkalmaztam a környezeti dekoherencia modelljét egy matematikai korrekcióval, és ezáltal meg lehetett mondani a hőmérséklet és a mikromechanikai oszcillátor(felfüggesztés) súrlódásának függvényében azokat a határokat ahol szuperpozíciós állapotot, illetve a kollapszust detektálni lehetne.

Conclusions

I analyzed the quantum decoherence and irreversibility in three systems. The quantum dots are a very interesting research area, because they can be the base of the quantum computer. To do this, there are very important conditions: they should not lose their coherence, and they have to be in an entangled state. The problem is the interaction between the system and the environment, and this is the source of the decoherence. I used the master-equation in the first section, which is a good approach to describe this kind of effects. I analyzed a double dot charge detector, and here again the use of the master-equation is the tool to understand the mechanism of the decoherence. I calculated the current, and the noise spectrum of the detector, when the time scale of the decoherence is in the same region as the time scale of the internal dynamics. This is a Q-measurement of the trapped charge, there is another model: the continuous Q-measurement what I use in the second section. Here the system consist of: the single dot, and the double dot. In the model the current flowing through the systems, was detected continuously by an ammeter. I calculated the same quantities, like in the first section namely the stationary current and noise spectrum. For the single dot there was no effect, but for the double Q-dot it was shown the quantum Zeno effect(QZE). Our motivation was to understand the conditions for using the continuous Q-measurement in the Q-dots systems. Calculating the Markovian current was the key to the dynamics, but in the first step the shot noise did not appear in the model, we needed to extend the model by the N -resolved method. The noise of the detector gives us an interesting effect: the good detectors induce a very high constant noise in the measurement. In the third section the system is a proposal to map the borders between the micro and macroworld. Our aim is to detect Q-superposition of big bodies with many atoms. If the Q-superposition can be realized experimentally, then we can try to use it to check the predictions of the spontan collapse models. But in the proposal the body(mirror) is in interaction with its environment and has its own temperature. Here I applied the decoherence model calculated from this kind of environment and using a mathematical correction. So I was able to predict where we can detect superposition, and where spontaneous collapse, depending on the temperature and the friction of the micromechanical oscillator. In all of three systems I used the same mathematical model, the Lindblad form of the completely positive maps.