

Doktori értekezés

A spinor Bose-gáz sztatikus és dinamikai tulajdonságainak vizsgálata mágneses térben

Kis-Szabó Krisztián

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar
Fizika Doktori Iskola

Témavezető: Dr. Szépfalusy Péter
az MTA rendes tagja, professzor emeritusz

Doktori iskola vezetője: Dr. Horváth Zalán
az MTA rendes tagja, egyetemi tanár
Doktori program vezetője: Dr. Kürti Jenő
az MTA doktora, egyetemi tanár

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék
2009. március 7.

Tartalomjegyzék

1. A Bose-gázok vizsgálatának főbb fejezetei	1
1.1. Előzmények	1
1.2. Skalár Bose-kondenzátumok	3
1.2.1. Bozonok mágneses csapdában	3
1.2.2. A skalár Bose-gáz Hamilton-operátora	5
1.2.3. Az alapállapot vizsgálata	5
1.2.4. Kollektív gerjesztések a skalár kondenzátumokban	6
1.3. Spinor ($S=1$) Bose-kondenzátumok	7
1.3.1. A spinor Bose gáz effektív Hamilton operátora	8
1.3.2. A mágneses térbe helyezett spinor Bose-gáz alapállapota	12
2. Az mágneses térbe helyezett spinor Bose gáz fizikájának alapjai	15
2.1. Hamilton-operátor	15
2.2. A Green-függvények és a korrelációs függvények	17
2.3. A véges hőmérsékletű perturbációs számítás alapjai a spinor Bose gázban	20
2.4. A kémiai potenciál meghatározása	24
3. Az állapotegyenlet, poláris és ferromágneses fázisok	27
3.1. Kondenzált fázis	27
3.2. Poláris kölcsönhatás esete	30
3.2.1. Kvantum-fázisátalakulás zérus hőmérsékletű határesetben	34
3.3. Ferromágneses kölcsönhatás esete	39

3.3.1.	Fázisátalakulás rögzített intenzív változók mellett	39
3.3.2.	Fázisátalakulás rögzített részecskesűrűség mellett	45
3.3.3.	Bose–Einstein kondenzáció és mágneses fázisátalakulás különböző erősségű spin kölcsönhatás mellett	48
4.	A Green- és korrelációs függvények szerkezete	51
4.1.	A Green- és korrelációs függvények csoportosítása	51
4.2.	Általánosított Hugenoltz–Pines tétel	65
4.3.	Összegszabályok	68
4.4.	Az önkonzisztens RPA-közelítés általános elemei	70
4.5.	Poláris kölcsönhatás esete, P2 fázis	73
4.6.	Ferromágneses kölcsönhatás esete	79
4.7.	Szimmetrikus fázis	84
5.	Kollektív gerjesztések RPA-közelítésben	85
5.1.	Poláris kölcsönhatás esete, P2 fázis	87
5.1.1.	Sűrűséghullám, spinsűrűséghullám és kvadrupolár-spinhullám módus	89
5.1.2.	Spinhullám módus	94
5.2.	Ferromágneses kölcsönhatás esete	100
5.2.1.	Sűrűséghullám és spinsűrűséghullám módus	102
5.2.2.	Spinhullám módus	106
5.2.3.	Kvadrupolár-spinhullám módus	107
5.3.	Poláris kölcsönhatás esete, P1 fázis	108
	Összefoglalás	109
	Függelék	111
A.	Bogoliubov-közelítés	111
A.1.	Poláris kölcsönhatás esete, P2 fázis	112
A.2.	Ferromágneses kölcsönhatás esete	118

A.3. Kollektív gerjesztések Bogoliubov-közelítésben	121
Köszönetnyilvánítás	123

1. fejezet

A Bose-gázok vizsgálatának főbb fejezetei

A Bose-rendszer egy olyan kvantummechanikai soktestrendszer, amelyben az egyes részecskék spinje a Planck-állandó (\hbar) egész számú többszörösével egyezik meg. Ebben a rendszerben alacsony hőmérsékleten egy fázisátalakulás mehet végbe, amelyet Bose–Einstein kondenzációnak nevezünk.

1.1. Előzmények

A Bose-rendszerek vizsgálatának kezdete 1924-re vezethető vissza, amikor is megjelent Bose cikke [1]. Ebben egy új típusú statisztikát vezetett be és annak segítségével származtatta a Planck által felállított sugárzási törvényt. Bose statisztikáját Einstein általánosította a tömeggel rendelkező részecskékre [2]. Einstein abból indult ki, hogy ha a részecskék hullám természetűek is rendelkeznek, akkor rájuk alkalmazható a fotonstatisztika, pontosabban annak általánosított változata. Az új statisztika—amely a két megalapozójáról Bose–Einstein statisztika nevet kapta—alapjaiban magában hordozza egy fázisátalakulás lehetőségét. E fázisátalakulás lényege az, hogy rögzített N részecskeszámú rendszerben létezik egy T_c átalakulási hőmérséklet, amely alatt termodinamikai határesetben a részecskék véges N_0/N

hányada foglalja el a legalacsonyabb energiájú állapotot. Einstein cikkét akkoriban erős kritikák érték, amelyek csak a mikroszkópikus elmélet kidolgozása után szűntek meg.

Nyitott kérdés maradt, hogy milyen módon változik a jelenség a részecskék közötti kölcsönhatás következtében. Amikor felfedezték a ${}^4\text{He}$ szuperfolyékonyságát (1938), akkor F. London azzal a feltételezéssel élt, hogy a szuperfolyékonyság hátterében egy Bose–Einstein kondenzáció áll [3, 4]. (A szuperfolyékonyság vizsgálatának magyar vonatkozása is van. Tisza László egy kvalitatív modellt állított fel a szuperfolyékonyságra. Ez az ún. kétfolyadék modell [5].)

L.D. Landau dolgozott ki először olyan elméletet, amely kvantitatívan is helyes eredményeket adott. Ez a fenomenologikus modell, amely ugyan nem beszél a szuperfolyékonyság mikroszkópikus eredetéről (nem beszél kondenzációról) mégis jól alkalmazható a kölcsönható kvantumfolyadékok elméletében. Szintén Landau volt az, aki bevezette az elemi gerjesztések fogalmát az elméleti fizikába.

A mikroszkópikus elmélet és a Landau-féle fenomenologikus modell kapcsolatának tisztázásában Bogoliubov és Beliaev munkássága játszott jelentős szerepet [6, 7]. Beliaev névéhez fűződik a zérus hőmérsékletű Green-függvényes technika kidolgozása a szimmetriasértő fázisra. Munkájuk jelenti a híg Bose-gázok leírásának kezdetét, amely a mai napig is egy nagyon aktív kutatási terület. A ${}^4\text{He}$ -folyadék kapcsán meg kell említenünk, hogy az általa kidolgozott elmélet nem alkalmazható a ${}^4\text{He}$ -folyadék igen nagy sűrűsége és az atomok közötti viszonylag erős kölcsönhatás miatt¹, mégis bepillantást enged a szuperfolyékonyság mögött rejlő fizikába.

Az alacsony hőmérsékletű Bose-rendszerek vizsgálatának egy jelentős akadálya az volt, hogy a kondenzátumokat kísérletileg nagyon sokáig nem sikerült meggyőzően kimutatni. A várhatóan nagyon alacsony átalakulási hőmérséklet elérése olyan technikai feltételeket kívánt meg, amelyek csak az 1990-es évek közepére váltak elérhetővé, amikor is 1995-ben mágneses csapdában létrehozták az első Bose–Einstein kondenzátumot. Manapság a kondenzátumok csapdázására a következő módszereket használják:

¹A ${}^4\text{He}$ -folyadék esetén még zérus hőmérsékleten is csak a teljes rendszer mintegy 10%-át teszi ki a kondenzátum.

- Mágneses csapda

A kondenzátumot olyan erősségű mágneses térbe helyezik, hogy a részecskék spinjeinek irányát a tér rögzíti, a belső szabadsági fokuk „kifagy”. Ezáltal a kondenzátumot egy skalár hullámfüggvénnyel írhatjuk le.

- Optikai csapda

A kondenzátum részecskéinek spinjei lényegében szabadok. A kondenzátum annyi komponensű hullámfüggvény lesz, ahány komponensű a rendszerben jelenlévő atomok spinjének megfelelő spinor. A belső szabadsági fok megjelenése a rendszer sokkal szívesebb viselkedéséhez vezet.

1.2. Skalár Bose-kondenzátumok

A skalár kondenzátumok előállítását a lézeres hűtési technikák megjelenése tette lehetővé. Ezzel a módszerrel az addig elérhető hőmérsékletek drasztikus csökkenését érték el és így a híg gázok ultrahideg rendszerét sikerült létrehozni, amelyben végbemehet a Bose–Einstein kondenzáció [8, 9, 10]. Ezután mind a kísérlet, mind az elmélet terén intenzív fejlődés indult meg.

Az elméleti vonal fejlődését az tette lehetővé, hogy a híg Bose-gázokban a kölcsönhatás gyenge (ellentétben a már említett ^4He -folyadékkal) és a térelméleti perturbációsszámítás eredményei nagyon jól alkalmazhatóak. Természetesen a kísérlet és az elmélet egymástól elválaszthatatlanul fejlődött és fejlődik most is.

1.2.1. Bozonok mágneses csapdában

A csapdázási folyamat első fázisában a gázmintát egy magnetooptikai csapdába vezetik be, amely egy anti-Helmholtz tekercspárból áll (ez egy kvadrupól mágneses teret jelent). A csapdához tartozik három, egymással szembe fordított lézernyaláb pár is, ahol az egyes párok ellentétesen cirkulárisan polárosak és kevéssel az atomi átmenet alá vannak hangolva [11, 12]. A csapdában a mágneses tér kifelé lineárisan növekszik, így az egyes hiperfinom

szintek Zeeman-energiáinak különbsége is lineárisan növekszik a csapda közepétől kifelé. A lézernyalábok cirkuláris polarizációjának következtében–kiválasztási szabályok miatt–egy atom mindig csak az ellenkező irányban haladó lézerrel jön rezonanciába, így sebessége csökken egy ideig. Ha a csapda közepén is kölcsönhatnak az atomok a lézerrel, akkor sebességük nőhet. A nagyobb hatásfokú hűtési eredmény eléréséhez azt kell megoldani, hogy a csapda közepén levő atomok ne hassanak kölcsön a lézerekkel. Ez könnyen megoldható ugyanis a lézerhűtéshez az atomokat mindig a megfelelő hiperfinom szinten kell tartani, amit egy pumpáló lézerrel érnek el és a lézert a csapda közepén egyszerűen kitakarják. Ezzel az eljárással alacsonyabb hőmérséklet és nagyobb sűrűség érhető el. A következő lépésben az atomokat átrakják egy tisztán mágneses csapdába. Azonban a hőmérsékletük még mindig magasabb (néhány μK), sűrűségük kisebb ($\approx 10^{11} cm^{-3}$), mint ami a Bose-kondenzációhoz szükséges. A további hűtéshez a párolgatásos hűtés mechanizmusát használják fel [13]. Ennek lényege leegyszerűsítve az, hogy a gyors atomokat kilöki a csapdából és megvárják, amíg a rendszer újra termalizálódik. Ezt a szelektív kilökést egy rádiófrekvenciás gerjesztéssel érik el, ahol is a gerjesztő frekvencia a csapda szélénél lévő (nagyobb energiájú) részecskék Zeeman-átmenetére van hangolva, így azok spinje átfordul. Ennek következtében a mágneses tér éppen taszítólag hat rájuk és így távoznak a csapdából.

Ezzel a csapdázási technikával sikerült elérni jóval a Bose-kondenzáció kritikus hőmérséklete alatti hőmérsékleteket is és megfigyelni véges kondenzátumokat. A JILA² kísérletében kb. 2000 ^{87}Rb atomot sikerült csapdázni. A kondenzátumot $170nK$ -n és $2,6 \cdot 10^{12} cm^{-3}$ sűrűségnél észlelték. Az MIT³-n végzett kísérletben $5 \cdot 10^5$ db ^{23}Na atomot kondenzáltak $2\mu K$ hőmérsékleten és $10^{14} cm^{-3}$ sűrűséggel.

²Joint Institute for Laboratory Astrophysics

³Massachusetts Institute of Technology

1.2.2. A skalár Bose-gáz Hamilton-operátora

A skalár Bose-gáz vizsgálata harmonikus oszcillátor külső potenciálban ⁴ egy viszonylag könnyen elvégezhető feladat. Az ideális gáz közelítés az átalakulási hőmérséklet közelében jó közelítést ad, mert a rendszer sűrűsége kicsi. Az alacsonyabb hőmérsékletek esetén viszont nem tekinthetünk el a részecskék közötti kölcsönhatástól, amely igen bonyolult is lehet. Ha a rendszer sűrűsége kicsi, akkor a részecskék ritkán találkoznak és a kölcsönhatás jól megadható a kétrészecskés s -hullámú szórás vizsgálatával. A potenciál Born-közelítésben:

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = V_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.1)$$

ahol $V_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M}$ és a az s -hullámú szórási hossz, M a részecskék tömege, \mathbf{r} és \mathbf{r}' az egyes részecskék helyvektora.

Ekkor a rendszer Hamilton-operátora a másodkvantált formalizmusban [14]:

$$\mathcal{H} = \int d^3r \left[\Psi^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + U(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} V_0 \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) \right], \quad (1.2)$$

ahol $U(\mathbf{r})$ a külső potenciál, $\Psi(\mathbf{r})$ pedig bozonikus téroperátor, azaz eleget tesz a

$$[\Psi(\mathbf{r}), \Psi^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.3)$$

felcserélési relációnak.

1.2.3. Az alapállapot vizsgálata

Az alapállapot meghatározása az átlagtérelmélet keretein belül könnyen elvégezhető. Legyen a téroperátor átlagértéke $\langle \Psi(\mathbf{r}) \rangle = \Phi(\mathbf{r})$. Mivel feltételezzük, hogy a rendszer alapállapotában Bose-kondenzált, ezért $\Phi(\mathbf{r}) \neq 0$ és nem lesz más, mint a kondenzátum makroszkopikus hullámfüggvénye. Szemléletesebb ehelyett a $\Psi_0(\mathbf{r}) = n^{-\frac{1}{2}} \Phi(\mathbf{r})$ -t használni, ahol $\Psi_0(\mathbf{r})$ normája 1. Az energiát rögzített n részecske sűrűség mellett kell minimalizálni, azaz

⁴A mágneses csapda potenciálja jól közelíthető a harmonikus oszcillátor potenciállal.

$\delta(\langle \mathcal{H} \rangle - \mu n) = 0$ variációs számítási feladatot kell elvégezni. A megoldás az ún. időfüggetlen Gross-Pitaevskii egyenlet:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + U(\mathbf{r}) + nV_0|\Psi_0(\mathbf{r})|^2 \right\} \Psi_0(\mathbf{r}) = \mu\Psi_0(\mathbf{r}), \quad (1.4)$$

amely nem más, mint egy nem-lineáris Schrödinger-egyenlet Ψ_0 -ra. Ez az egyenlet analitikusan nem oldható meg egzaktul. Nagy részecskeszám mellett az ún. Thomas-Fermi közelítés [15, 16, 17] alkalmazható, amely elhanyagolja a kinetikus energia kifejezését és egy egyszerű algebrai egyenletre vezet. A Gross-Pitaevskii egyenletet vizsgálata leginkább numerikus módszerekkel történik.

1.2.4. Kollektív gerjesztések a skalár kondenzátumokban

Az elemi gerjesztések vizsgálatának a Bose-rendszereknél is nagy jelentősége van. Ennek oka az, hogy a rendszer alacsony hőmérsékleti viselkedése és termodinamikája jól jellemezhető az ún. kvázirészecske képpel. Ennek alap gondolata az, hogy a bonyolult rendszer alacsonyan fekvő energiaszintjeit megkaphatjuk egy $\varepsilon(\mathbf{k}) = \hbar\omega(\mathbf{k})$ spektrumú ideális gáz összenergiájaként. Ez az ideális gáz tulajdonképpen nem más, mint a nem-kölcsönható kvázirészecskék gáza. A fenti spektrum természetesen rendszerről rendszerre változik, de az adott rendszerre történő meghatározása alapvető fontosságú a rendszer termodinamikai viselkedésének szempontjából.

A gerjesztések spektrumát a (1.2) Hamilton-operátorral leírt rendszer Heisenberg-képbeli téroperátorának mozgásegyenletét felhasználva kaphatjuk meg:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + U(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}, t) + V_0\Psi^\dagger(\mathbf{r}, t)\Psi(\mathbf{r}, t)\Psi(\mathbf{r}, t). \quad (1.5)$$

A gerjesztések meghatározásához a $\Psi(\mathbf{r}, t)$ téroperátort felbontjuk a $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) + \delta\Psi(\mathbf{r}, t)$ alakra, ahol $\langle \Psi(\mathbf{r}, t) \rangle = \Phi(\mathbf{r}, t)$ (nem zérus) és $\delta\Psi(\mathbf{r}, t)$ írja le a fluktuációkat (átlagértéke zérus). Legyen $\Psi_0(\mathbf{r}, t) = n_0^{-\frac{1}{2}}\Phi(\mathbf{r}, t)$, ahol n_0 a kondenzált részecskék sűrűsége.

Ha a téroperátort beírjuk a mozgásegyenletbe és a fluktuációkat elhanyagoljuk:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + U(\mathbf{r}) + n_0 V_0 |\Psi_0(\mathbf{r}, t)|^2 \right\} \Psi_0(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_0(\mathbf{r}, t). \quad (1.6)$$

Ez az ún. időfüggő Gross-Pitaevskii egyenlet⁵. A kollektív gerjesztések a mozgás egyenlet vizsgálatával adhatóak meg. Amennyiben a külső perturbáció amplitúdója kicsi, akkor elegendő az egyenlet lineáris válaszát vizsgálni [18, 19]. A kísérleti eredményeket tekintve a numerikus eredmények igen jól illeszkednek azokra [20, 21, 22], továbbá a nagy részecskeszám mellett alkalmazható Thomas-Fermi közelítés analitikus kifejezése [23] szintén jól illeszkedik a mért adatokra.

Véges hőmérsékleten figyelembe kell venni a csillapodást is a gerjesztésekben. Ennek oka, hogy véges hőmérsékleten a részecskék nem kondenzált állapotban levő hányada számot tevő. Ezen atomok alkotta termikus felhő befolyásolja a kondenzátum gerjesztéseinek spektrumát, sőt egyes gerjesztések közvetlenül csak a termikus felhőhöz kapcsolódnak [24, 25, 26, 27, 28].

1.3. Spinor (S=1) Bose-kondenzátumok

Az optikai csapdák megjelenésével [29] lehetőség nyílt arra, hogy olyan kondenzátumokat állítsanak elő, amelyben az atomok spinje szabad, azaz belső szabadsági fokuk megjelenik [30, 31, 32]. Ezen rendszerek viselkedése még bonyolultabb [31, 33, 34, 35, 36], amelyet a mágneses tér jelenléte még színesebbé tesz [37, 38, 39, 35, 40]. Az optikai csapdába zárt kondenzátumban a sűrűség hullám módusok mellett megjelennek a különféle spinhullám módusok is.

Az optikai csapdázás a következő módon történik. Először az atomokat mágneses csapdába zárják. Ezután történik az optikai csapda kialakítása. Ennek során egy az – infravörös tartományhoz közeli – lézersugarat egy egymódusú optikai szálon a kondenzá-

⁵ Ennek a stacionárius megoldása a $\Psi_0(\mathbf{r}, t) = \Psi_0(\mathbf{r})e^{-i\frac{\hbar}{M}t}$, amelyet beírva (1.6)-be megkapható az időfüggetlen Gross-Pitaevskii egyenlet.

tumhoz vezetnek, majd annak hossz tengelye mentén a csapda közepére fókuszálják. Ezután a mágneses csapdát kikapcsolják [29], így a lézersugár egy optikai dipólcsapdaként a kondenzátumot csapdázza [41, 42, 43].

1.3.1. A spinor Bose gáz effektív Hamilton operátora

Az 1-es spinű részecskéket tartalmazó Bose gáz hullámfüggvénye egy három komponensű spinor. Ha az \hat{F}_z operátor sajátvektoraiból építjük fel a spin szabadsági fokhoz tartozó tér bázisát, akkor a hullámfüggvény a következő alakú lesz:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \Psi_+(\mathbf{r}) \\ \Psi_0(\mathbf{r}) \\ \Psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Ebben a reprezentációban a spinoperátorok

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

és a megfelelő léptetőoperátorok

$$F_+ = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_- = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

ahol $F_+ = F_x + iF_y$ és $F_- = F_x - iF_y$. A rendszert egy V térfogatú dobozba helyezzük el, periódikus határfeltételeket kötünk ki és homogénnek tesszük fel⁶. Erre a rendszerre kapcsolunk egy homogén, állandó B nagyságú és z irányú mágneses teret. A rendszer homogenitásából következően az impulzus, mint kvantumszám jellemzi a rendszert.

Definiáljuk az $\Psi_r(\mathbf{k})$ és $\Psi_r^\dagger(\mathbf{k})$ téroperátorokat a következő módon:

$$\Psi_r(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} a_r(\mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \chi_r^{(1)}, \quad (1.10)$$

$$\Psi_r^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} a_r^\dagger(\mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \chi_r^{(1)\dagger}, \quad (1.11)$$

ahol \mathbf{k} a keletkező illetve eltűnő részecske hullámszámvektora, r a részecske z irányú spinvetülete és $\chi_r^{(1)}$ ($r = +, 0, -$) az F_z sajátvektorai. Az $a_r(\mathbf{k})$ és $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ operátorok bozon keltő operátorok, azaz teljesítik a

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{r,s} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (1.12a)$$

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')] = 0, \quad (1.12b)$$

$$[a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = 0. \quad (1.12c)$$

kommutációs relációkat és ezzel összhangban a téroperátorok a

$$[\Psi_r(\mathbf{r}), \Psi_s^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta_{r,s} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.13a)$$

$$[\Psi_r(\mathbf{r}), \Psi_s(\mathbf{r}')] = 0, \quad (1.13b)$$

$$[\Psi_r^\dagger(\mathbf{r}), \Psi_s^\dagger(\mathbf{r}')] = 0. \quad (1.13c)$$

⁶Valójában az optikai csapda nem homogén, de elegendően nagy kondenzátumok mellett ez jó közelítés. Tulajdonképpen arról van szó, hogy a kondenzátumon végzett mérések lokálisak, általában a kondenzátum közepén történnek, ahol a sűrűség lassan változik, így a mérés közelítőleg homogén közegben történik.

A kétrészecske potenciált közelítsük a következő módon [31]:

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = [c_n + c_s \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.14)$$

A mágneses térhez kapcsolódó egyrészecske operátor

$$U_m(\mathbf{r}) = -\mathbf{m}\mathbf{B}, \quad (1.15)$$

ahol $\mathbf{m} = \frac{g\mu_B \hat{\mathbf{S}}}{\hbar}$ és $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$; g a giromágneses faktor, μ_B a Bohr-magneton, $\hat{\mathbf{S}} = \hbar\hat{\mathbf{F}}$ a spinoperátor, $\hat{\mathbf{z}}$ a z -irányú egységvektor és B a mágneses tér nagysága.

A rendszerre kapcsolt külső mágneses teret a következő módon kell figyelembe vennünk: A mágnesezettség megmaradó mennyiség, a hozzá tartozó Lagrange-multiplikátort jelöljük μ_m -mel. Fizikailag ez azt jelenti, hogy ha a mintát egy adott mágnesezettséggel preparálják, akkor a homogén mágneses tér hatását a Lagrange-multiplikátor kompenzálja az adott mágnesezettségnek megfelelően. A Hamilton-operátorban nem csak a homogén mágneses tér, hanem a mágnesezettséghez tartozó Lagrange-multiplikátor együttesen jelenik meg [34, 44]. A továbbiakban az átláthatóság kedvéért a multiplikátort beleolvastjuk a mágneses térbe.

A másik lehetőség a mágneses tér figyelembevételére az, hogy a mintát zérus mágnesezettséggel preparálják és ráadnak egy kicsi, helytől lineárisan függő mágneses teret. A rendszer mágnesezettsége globálisan rögzített, de a kis gradiensnek köszönhetően lokálisan nem marad meg, így lehetőség nyílik a mágneses tér hatásának vizsgálatára egy lokálisan homogén rendszerben.

A két esetet vizsgálva könnyen látható, hogy mágneses teret formálisan ugyanazzal a kifejezéssel vehetjük figyelembe a Hamilton-operátorban, csak azt kell észben tartanunk, hogy mikor beszélünk a mágneses tér és a Lagrange-multiplikátor összegéről illetve a mágneses tér gradienséből származó lokális mágneses térről.

A fentiek figyelembe vételével a másodkvantált formalizmusban a nagykanonikus Hamil-

ton-operátor

$$\mathcal{H} = \int d^3r \left\{ \Psi_r^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta - \mu + U(\mathbf{r}) \right] \Psi_r(\mathbf{r}) - \hbar\omega_L \Psi_r^\dagger(\mathbf{r}) (F_z)_{rs} \Psi_s(\mathbf{r}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Psi_r^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{r'}^\dagger(\mathbf{r}) V_{r's'}^{rs} \Psi_{s'}(\mathbf{r}) \Psi_s(\mathbf{r}) \right\}, \quad (1.16)$$

ahol μ a kémiai potenciál, $\omega_L = \frac{g\mu_B B}{\hbar}$ a Larmor-frekvencia, míg

$$V_{rs}^{r's'} = c_n \delta_{rs} \delta_{r's'} + c_s(\mathbf{F})_{rs}(\mathbf{F})_{r's'} \quad (1.17)$$

a kétrészecske kölcsönhatást írja le.

Homogén rendszer esetén, amikor a csapdapotenciált elhagyjuk, az impulzus jó kvantumszám. A Hamilton-operátor ekkor felírható a (1.12) definiált keltő és eltüntető operátorokkal:

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} (\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu) a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) - \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_L (\hat{F}_z)_{rs} a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}) \\ + \frac{1}{2V} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \\ \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4}} a_{r'}^\dagger(\mathbf{k}_1) a_r^\dagger(\mathbf{k}_2) V_{rs}^{r's'} a_s(\mathbf{k}_3) a_{s'}(\mathbf{k}_4), \quad (1.18)$$

ahol $\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ a kinetikus energia.

A fenti Hamilton-operátor invariáns lesz a következő mértéktranszformációra:

$$a_{\pm} \rightarrow a_{\pm} e^{i\varphi_{\pm}} \quad (1.19a)$$

$$a_0 \rightarrow a_0 e^{i\frac{1}{2}(\varphi_+ + \varphi_-)}. \quad (1.19b)$$

Ez ekvivalens lesz a

$$a_r \rightarrow a_r e^{i(\phi + r\varphi)} \quad (1.20)$$

mértéktranszformációval, ahol $\phi = (\varphi_+ + \varphi_-)/2$ és $\varphi = (\varphi_+ - \varphi_-)/2$. Ha $\varphi = 0$, akkor a mértéktranszformáció a részecskeszám megmaradását, ha $\phi = 0$, akkor a mágnesezettség

z irányú komponensének megmaradását írja le.

1.3.2. A mágneses térbe helyezett spinor Bose-gáz alapállapota

Vizsgáljuk (1.16) Hamilton-operátorral leírt rendszer alapállapotát átlagértékközelítésben. Ekkor egy képet kaphatunk a rendszer alaptulajdonságairól. Legyen

$$\langle \Psi(\mathbf{r}) \rangle = \sqrt{n_c(\mathbf{r})} \zeta_r, \quad (1.21)$$

ahol $n_c(\mathbf{r}) = N_c(\mathbf{r})/V$ a kondenzátum sűrűsége és ζ_r az alapállapotú spinor. Ekkor a (1.16) Hamilton-operátor várható értéke átlagértékközelítésben⁷:

$$H = \int d^3r \left(\frac{\hbar^2}{2M} (\nabla \sqrt{n_c})^2 + \frac{\hbar^2}{2M} (\nabla \zeta_r^\dagger) (\nabla \zeta_r) n_c - (\mu - U(\mathbf{r})) n_c - \hbar\omega_L \langle \mathbf{F} \rangle n_c + \frac{n_c^2}{2} (c_n + c_s \langle \mathbf{F} \rangle^2) \right), \quad (1.22)$$

ahol $\langle \mathbf{F} \rangle = \zeta_r^\dagger \mathbf{F}_{rs} \zeta_s$.

Homogén esetet vizsgálva

$$H = \int d^3r \left(-\mu n_c - \hbar\omega_L \langle \mathbf{F} \rangle n_c + \frac{n_c^2}{2} (c_n + c_s \langle \mathbf{F} \rangle^2) \right). \quad (1.23)$$

Ezt a kifejezést kell minimalizálni $n_c(\mathbf{r})$ és $\zeta_r(\langle \mathbf{F} \rangle)$ szerint. A megoldás függ a c_s paraméter előjelétől. Ennek megfelelően két eset lehetséges:

- Ha $c_s > 0$, akkor $\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c}$ minimalizálja az energiát⁸. Ez az eset egy mágneses térbe helyezett antiferromágneshoz hasonló viselkedést mutat. Ha a kondenzátumunk véges, akkor ez egy mágneses tértől lineárisan függő mágnesezettséget eredményez. Ezt nevezzük *poláris* esetnek.
- Ha $c_s < 0$, akkor $|\langle \mathbf{F} \rangle| = 1$. Ebben az esetben a kondenzátum mágnesezettsége

⁷Ez valójában nem más, mint a Bogoliubov-közelítés

⁸Mivel $\langle \mathbf{F} \rangle \leq 1$, ezért $\hbar\omega_L \leq c_s n_c$ szükséges.

nem függ a mágneses tértől, azaz mágneses tér hiánya esetén a rendszernek spontán mágnesezettsége van. Ezt nevezzük *ferromágneses* esetnek.

A fenti várhatóértékek nem definiálják egyértelműen a kondenzátum spinorának alakját, mert egy globális mértéktranszformációval és a spinor spintérbeli forgatásával ugyanazt a várhatóértéket kapjuk meg, azaz egy ekvivalens állapotot. Vezessük be az \mathcal{U} transzformációt a következő módon:

$$\mathcal{U}(\Theta, \alpha, \beta, \gamma) = e^{i\Theta} e^{iF_x \alpha} e^{iF_y \beta} e^{iF_z \gamma}, \quad (1.24)$$

ahol a Θ paraméter jellemzi a rendszer globális $U(1)$ szimmetriáját és α, β, γ az Euler-szögeknek megfelelő spintérbeli forgatásokat. Ekkor könnyedén belátható, hogy a $\zeta' = \mathcal{U}\zeta$ spinorok mind a poláris, mind a ferromágneses fázisban leírják az összes lehetséges spinort.

2. fejezet

Az mágneses térbe helyezett spinor Bose gáz fizikájának alapjai

2.1. Hamilton-operátor

A 1. fejezetben felírtuk a rendszer Hamilton-operátorát (1.18). A Bose–Einstein kondenzáció hőmérséklete (T_{BEC}) felett nincsenek anomális várhatóértékek, minden téroperátor várhatóértéke zérus. Továbbiakban ezt szimmetrikus fázisnak nevezzük.

Ha a rendszerben Bose–Einstein kondenzátum van jelen (szimmetriasértő fázis), akkor az azt jelenti, hogy a legalacsonyabb energiájú állapot(ok)ban makroszkópicusan sok részecske van jelen és egyes téroperátoroknak zérustól különböző várhatóértéke lesz, azaz

$$\langle a_r(0) \rangle = \sqrt{N_c} \zeta_r, \quad (2.1a)$$

$$\langle a_r^\dagger(0) \rangle = \sqrt{N_c} \zeta_r^\dagger, \quad (2.1b)$$

ahol N_c a kondenzátumban levő részecskék száma és ζ_r egy normált spinor. Jelöljük n_c -vel a kondenzátum részecskesűrűségét: $n_c = \frac{N_c}{V}$.

Ezen anomális várhatóértékek kezelésére vezessük be az alábbi kanonikus transzformá-

ciót:

$$\bar{b}_r(\mathbf{k}) = a_r(\mathbf{k}) - \delta_{\mathbf{k},0} \sqrt{N_c} \zeta_r, \quad (2.2a)$$

$$b_r^\dagger(\mathbf{k}) = a_r^\dagger(\mathbf{k}) - \delta_{\mathbf{k},0} \sqrt{N_c} \zeta_r^\dagger. \quad (2.2b)$$

A transzformáció előnye az, hogy minden keltő és eltüntető operátor várhatóértéke zérus lesz, azaz $\langle b_r(\mathbf{k}) \rangle = 0$ és $\langle b_r^\dagger(\mathbf{k}) \rangle = 0$, ahol az átlagolás a nagykanonikus sokaság felett értendő. Egyszerűen belátható, hogy az újonnan bevezetett operátorok is eleget tesznek a (1.12) felcserélési relációknak. A kanonikus transzformációt végrehajtva a Hamilton-operátor (2.3) kifejezését kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{\mathbf{k}} (e_{\mathbf{k}} - \mu_0) b_r^\dagger(\mathbf{k}) b_r(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}} [(\mu_0 - \mu) \delta_{rs} - \hbar \omega_L (F_z)_{rs}] b_r^\dagger(\mathbf{k}) b_s(\mathbf{k}) \\ & - (\mu \delta_{rs} + \hbar \omega_L (F_z)_{rs}) \sqrt{N_c} (\zeta_r^\dagger b_s(0) + \zeta_s b_r^\dagger(0)) + \frac{1}{2V} \sum b_{r'}^\dagger(\mathbf{k}_1) b_r^\dagger(\mathbf{k}_2) V_{rs}^{r's'} b_s(\mathbf{k}_3) b_{s'}(\mathbf{k}_4) \\ & + \frac{\sqrt{N_c}}{2V} \sum b_{r'}^\dagger(\mathbf{k}_1) b_r^\dagger(\mathbf{k}_2) V_{rs}^{r's'} b_s(\mathbf{k}_3) \zeta_{s'} \delta_{\mathbf{k}_4,0} + \frac{\sqrt{N_c}}{2V} \sum b_{r'}^\dagger(\mathbf{k}_1) b_r^\dagger(\mathbf{k}_2) V_{rs}^{r's'} \zeta_s \delta_{\mathbf{k}_3,0} b_{s'}(\mathbf{k}_4) \\ & + \frac{\sqrt{N_c}}{2V} \sum b_{r'}^\dagger(\mathbf{k}_1) \zeta_r^\dagger \delta_{\mathbf{k}_2,0} V_{rs}^{r's'} b_s(\mathbf{k}_3) b_{s'}(\mathbf{k}_4) + \frac{\sqrt{N_c}}{2V} \sum \zeta_r^\dagger \delta_{\mathbf{k}_1,0} b_r^\dagger(\mathbf{k}_2) V_{rs}^{r's'} b_s(\mathbf{k}_3) b_{s'}(\mathbf{k}_4) \\ & + \frac{N_c}{2V} \sum b_{r'}^\dagger(\mathbf{k}_1) b_r^\dagger(\mathbf{k}_2) V_{rs}^{r's'} \zeta_s \delta_{\mathbf{k}_3,0} \zeta_{s'} \delta_{\mathbf{k}_4,0} + \frac{N_c}{2V} \sum b_{r'}^\dagger(\mathbf{k}_1) \zeta_r^\dagger \delta_{\mathbf{k}_2,0} V_{rs}^{r's'} b_s(\mathbf{k}_3) \zeta_{s'} \delta_{\mathbf{k}_4,0} \\ & + \frac{N_c}{2V} \sum \zeta_{r'}^\dagger \delta_{\mathbf{k}_1,0} b_{r'}^\dagger(\mathbf{k}_2) V_{rs}^{r's'} b_s(\mathbf{k}_3) \zeta_{s'} \delta_{\mathbf{k}_4,0} + \frac{N_c}{2V} \sum b_{r'}^\dagger(\mathbf{k}_1) \zeta_r^\dagger \delta_{\mathbf{k}_2,0} V_{rs}^{r's'} \zeta_s \delta_{\mathbf{k}_3,0} b_{s'}(\mathbf{k}_4) \\ & + \frac{N_c}{2V} \sum \zeta_{r'}^\dagger \delta_{\mathbf{k}_1,0} b_{r'}^\dagger(\mathbf{k}_2) V_{rs}^{r's'} \zeta_s \delta_{\mathbf{k}_3,0} b_{s'}(\mathbf{k}_4) + \frac{N_c}{2V} \sum \zeta_{r'}^\dagger \delta_{\mathbf{k}_1,0} \zeta_r^\dagger \delta_{\mathbf{k}_2,0} V_{rs}^{r's'} b_s(\mathbf{k}_3) b_{s'}(\mathbf{k}_4) \\ & + \frac{N_c^{\frac{3}{2}}}{2V} \zeta_{r'}^\dagger \zeta_r^\dagger V_{rs}^{r's'} \zeta_s b_{s'}(0) + \frac{N_c^{\frac{3}{2}}}{2V} \zeta_{r'}^\dagger \zeta_r^\dagger V_{rs}^{r's'} b_s(0) \zeta_{s'} + \frac{N_c^{\frac{3}{2}}}{2V} \zeta_r^\dagger b_r^\dagger(0) V_{rs}^{r's'} \zeta_s \zeta_{s'} \\ & + \frac{N_c^{\frac{3}{2}}}{2V} b_{r'}^\dagger(0) \zeta_r^\dagger V_{rs}^{r's'} \zeta_s \zeta_{s'} + \frac{N_c^2}{2} \zeta_{r'}^\dagger \zeta_r^\dagger V_{rs}^{r's'} \zeta_s \zeta_{s'} - \hbar \omega_L N_c \zeta_r^\dagger (F_z)_{rs} \zeta_s - \mu N_c \end{aligned} \quad (2.3)$$

Itt hozzáadtuk illetve kivontuk a $\sum_{\mathbf{k}} \mu_0 b_r^\dagger(\mathbf{k}) b_r(\mathbf{k})$ tagot, ahol μ_0 egy olyan szabad gáz kémiai potenciálja, amelynek a kondenzációs hőmérséklete megegyezik a mágneses térbe helyezett kölcsönható gáz kondenzációs hőmérsékletével. Ezzel elkerülhetjük, hogy a két-részecske kölcsönhatás okozta pozitív kémiai potenciál (ahogy azt a későbbiekben látni

fogjuk) szingularitást okozzon a perturbálatlan propagátorokban.

Ha szimmetrikus fázisban van a rendszer, akkor a kondenzált részecskék száma zérus lesz és visszakapjuk az eredeti Hamilton-operátort, de a pozitív kémiai potenciál okozta probléma tovább is fennáll, így a $\sum_{\mathbf{k}} \mu b_r^\dagger(\mathbf{k}) b_r(\mathbf{k})$ kifejezést továbbra is le kell választanunk.

2.2. A Green-függvények és a korrelációs függvények

Az elemi gerjesztések meghatározásának egyik lehetséges módszere a Green- és korrelációs függvények vizsgálata. Defináljuk a Green-függvényeket a szimmetriasértő fázisban a következő módon

$$\mathcal{G}_{\gamma\delta}^{rs}(\mathbf{k}, \tau) = - \left\langle T_r [b_r^\gamma(\mathbf{k}, \tau) b_s^{\delta\dagger}(\mathbf{k}, 0)] \right\rangle, \quad (2.4)$$

ahol

$$b_r^\gamma(\mathbf{k}) = \begin{cases} b_r(\mathbf{k}) & , \text{ ha } \gamma = 1 \\ b_r^\dagger(-\mathbf{k}) & , \text{ ha } \gamma = -1 \end{cases}. \quad (2.5)$$

A görög indexek bevezetésével a normális és az anomális Green-függvények egyszerűen megkülönböztethetők. Mind a görög, mind a latin indexek esetén használjuk az automatikus összegzést a kétszer előforduló indexre. Innentől kezdve τ az imaginárius idő és T_τ a τ szerint rendező operátor. Mivel a Hamilton-operátor tartalmaz olyan tagokat, amelyek csak két keltő vagy eltüntető operátorból állnak, ezért szimmetriasértő anomális Green-függvények (amelyekre $\gamma\delta = -1$) fellépnek. A (2.4) kifejezés nem más, mint az általánosítása a skalár rendszerben fellépő anomális és normális Green-függvényeknek. A Green-függvények definíciója fenntartható a szimmetrikus fázisban is, ahol $N_c = 0$ és $b_r(\mathbf{k}) = a_r(\mathbf{k})$, $b_r^\dagger(\mathbf{k}) = a_r^\dagger(\mathbf{k})$. Ekkor az anomális Green-függvények azonosan zérusok lesznek.

Az (2.4) egyenletben szereplő propagátorok periodikusak τ szerint $\beta\hbar$ periódussal, így Fourier-sorba fejthetők.

$$\mathcal{G}_{\gamma\delta}^{rs}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{1}{\beta\hbar} \int_0^{\beta\hbar} d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_{\gamma\delta}^{rs}(\mathbf{k}, \tau), \quad (2.6)$$

ahol $\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta\hbar}$ jelenti a diszkrét Matsubara-frekvenciákat bozonok esetén. A $\mathcal{G}_{\gamma\delta}^{rs}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ Green-függvények analitikus folytatásainak pólusaiból megkaphatóak az egyrészecske elemi gerjesztések spektrumai. A későbbiekben végig homogén rendszerben dolgozunk, ezért célszerű egységnyi térfogatban számolni, ami azt jelenti, hogy a részecskeszám, mágnesezettség stb. helyett a megfelelő sűrűségeket használhatjuk.

newline A rendszer kollektív gerjesztései a korrelációs függvények pólusainak vizsgálatából kaphatjuk meg. A következő operátorok korrelációs függvényeit fogjuk vizsgálni:

$$n(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{q}} a_r^\dagger(\mathbf{q}) a_r(\mathbf{k} + \mathbf{q}), \quad (2.7a)$$

$$\mathcal{F}_z(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{q}} a_r^\dagger(\mathbf{q}) (F_z)_{rs} a_s(\mathbf{k} + \mathbf{q}), \quad (2.7b)$$

$$\mathcal{F}_\pm(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{q}} a_r^\dagger(\mathbf{q}) (F_\pm)_{rs} a_s(\mathbf{k} + \mathbf{q}), \quad (2.7c)$$

$$\mathcal{F}_\pm^Q(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{q}} a_r^\dagger(\mathbf{q}) (F_\pm^2)_{rs} a_s(\mathbf{k} + \mathbf{q}), \quad (2.7d)$$

$$\sigma_{rs}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{q}} a_r^\dagger(\mathbf{q}) a_s(\mathbf{k} + \mathbf{q}), \quad (2.7e)$$

ahol $n(\mathbf{k})$ a részecskesűrűség-operátor, $\mathcal{F}_z(\mathbf{k})$ a spin z komponensének sűrűség operátora, $\mathcal{F}_\pm(\mathbf{k})$ a spint ± 1 -el változtató sűrűségoperátor, $\mathcal{F}_\pm^Q(\mathbf{k})$ a spint ± 2 -vel változtató sűrűségoperátor, $\sigma_{rs}(\mathbf{k})$ az általánosított sűrűségoperátor, amelyből az előző operátorok felépíthetők. Az egyes kollektív gerjesztések a megfelelő korrelációs függvények analitikus folytatásainak pólusaiból kaphatóak meg. Definiáljuk ($\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ esetén) mind a szimmetrikus, mind a szimmetriasértő fázisban a következő korrelációs függvényeket:

$$D_{nn}(\mathbf{k}, \tau) = -\langle T_\tau [n(\mathbf{k}, \tau), n^\dagger(\mathbf{k}, 0)] \rangle, \quad (2.8a)$$

$$D_{nz}(\mathbf{k}, \tau) = -\langle T_\tau [n(\mathbf{k}, \tau), \mathcal{F}_z^\dagger(\mathbf{k}, 0)] \rangle, \quad (2.8b)$$

$$D_{nQ}(\mathbf{k}, \tau) = -\langle T_\tau [n(\mathbf{k}, \tau), \mathcal{F}_+^{Q\dagger}(\mathbf{k}, 0)] \rangle, \quad (2.8c)$$

$$D_{n-Q}(\mathbf{k}, \tau) = -\langle T_\tau [n(\mathbf{k}, \tau), \mathcal{F}_-^{Q\dagger}(\mathbf{k}, 0)] \rangle, \quad (2.8d)$$

$$D_{zz}(\mathbf{k}, \tau) = -\langle T_\tau [\mathcal{F}_z(\mathbf{k}, \tau), \mathcal{F}_z^\dagger(\mathbf{k}, 0)] \rangle, \quad (2.8e)$$

$$D_{zQ}(\mathbf{k}, \tau) = -\langle T_\tau [\mathcal{F}_z(\mathbf{k}, \tau), \mathcal{F}_+^{Q\dagger}(\mathbf{k}, 0)] \rangle, \quad (2.8f)$$

$$D_{z-Q}(\mathbf{k}, \tau) = -\langle T_\tau [\mathcal{F}_z(\mathbf{k}, \tau), \mathcal{F}_-^{Q\dagger}(\mathbf{k}, 0)] \rangle, \quad (2.8g)$$

$$D_{++}(\mathbf{k}, \tau) = -\langle T_\tau [\mathcal{F}_+(\mathbf{k}, \tau), \mathcal{F}_+^\dagger(\mathbf{k}, 0)] \rangle, \quad (2.8h)$$

$$D_{+-}(\mathbf{k}, \tau) = -\langle T_\tau [\mathcal{F}_+(\mathbf{k}, \tau), \mathcal{F}_-^\dagger(\mathbf{k}, 0)] \rangle, \quad (2.8i)$$

$$D_{--}(\mathbf{k}, \tau) = -\langle T_\tau [\mathcal{F}_-(\mathbf{k}, \tau), \mathcal{F}_-^\dagger(\mathbf{k}, 0)] \rangle, \quad (2.8j)$$

$$D_{QQ}(\mathbf{k}, \tau) = -\langle T_\tau [\mathcal{F}_+^Q(\mathbf{k}, \tau), \mathcal{F}_+^{Q\dagger}(\mathbf{k}, 0)] \rangle, \quad (2.8k)$$

$$D_{Q-Q}(\mathbf{k}, \tau) = -\langle T_\tau [\mathcal{F}_+^Q(\mathbf{k}, \tau), \mathcal{F}_-^{Q\dagger}(\mathbf{k}, 0)] \rangle, \quad (2.8l)$$

$$D_{-Q-Q}(\mathbf{k}, \tau) = -\langle T_\tau [\mathcal{F}_-^Q(\mathbf{k}, \tau), \mathcal{F}_-^{Q\dagger}(\mathbf{k}, 0)] \rangle. \quad (2.8m)$$

Továbbá igaz, hogy $n^\dagger(\mathbf{k}) = n(-\mathbf{k})$, $\mathcal{F}_z^\dagger(\mathbf{k}) = \mathcal{F}_z(-\mathbf{k})$, $\mathcal{F}_\pm^\dagger(\mathbf{k}) = \mathcal{F}_\mp(-\mathbf{k})$ és $\mathcal{F}_\pm^{Q\dagger}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}_\mp^Q(-\mathbf{k})$. Bevezethetünk egy általánosított korrelációs függvényt is

$$D_{r'r'}^{sr}(\mathbf{k}, \tau) = -\langle T_\tau [\sigma_{rs}(\mathbf{k}, \tau) \sigma_{s'r'}(-\mathbf{k}, 0)] \rangle, \quad (2.9)$$

amelyből a fentebb definiált korrelációs függvények könnyen megalkothatóak:

$$D_{nn}(\mathbf{k}, \tau) = \sum_{r,s} D_{ss}^{rr}(\mathbf{k}, \tau), \quad (2.10a)$$

$$D_{nz}(\mathbf{k}, \tau) = \sum_{r,s} s D_{ss}^{rr}(\mathbf{k}, \tau), \quad (2.10b)$$

$$D_{nQ}(\mathbf{k}, \tau) = 2 \sum_r D_{+-}^{rr}(\mathbf{k}, \tau), \quad (2.10c)$$

$$D_{n-Q}(\mathbf{k}, \tau) = 2 \sum_r D_{-+}^{rr}(\mathbf{k}, \tau), \quad (2.10d)$$

$$D_{zz}(\mathbf{k}, \tau) = \sum_{r,s} rs D_{ss}^{rr}(\mathbf{k}, \tau), \quad (2.10e)$$

$$D_{zQ}(\mathbf{k}, \tau) = 2 \sum_r r D_{+-}^{rr}(\mathbf{k}, \tau), \quad (2.10f)$$

$$D_{z-Q}(\mathbf{k}, \tau) = 2 \sum_r r D_{-+}^{rr}(\mathbf{k}, \tau), \quad (2.10g)$$

$$D_{++}(\mathbf{k}, \tau) = 2 \left[D_{+0}^{0+}(\mathbf{k}, \tau) + D_0^{0+}(\mathbf{k}, \tau) + D_{+0}^{-0}(\mathbf{k}, \tau) + D_0^{-0}(\mathbf{k}, \tau) \right], \quad (2.10h)$$

$$D_{+-}(\mathbf{k}, \tau) = 2 \left[D_{+0}^{0+}(\mathbf{k}, \tau) + D_{-0}^{0+}(\mathbf{k}, \tau) + D_{+0}^{-0}(\mathbf{k}, \tau) + D_{-0}^{-0}(\mathbf{k}, \tau) \right], \quad (2.10i)$$

$$D_{--}(\mathbf{k}, \tau) = 2 \left[D_{+0}^{+0}(\mathbf{k}, \tau) + D_{-0}^{+0}(\mathbf{k}, \tau) + D_{+0}^{0-}(\mathbf{k}, \tau) + D_{-0}^{0-}(\mathbf{k}, \tau) \right], \quad (2.10j)$$

$$D_{QQ}(\mathbf{k}, \tau) = 4 D_{+-}^{-+}(\mathbf{k}, \tau), \quad (2.10k)$$

$$D_{Q-Q}(\mathbf{k}, \tau) = 4 D_{-+}^{-+}(\mathbf{k}, \tau), \quad (2.10l)$$

$$D_{-Q-Q}(\mathbf{k}, \tau) = 4 D_{-+}^{+-}(\mathbf{k}, \tau). \quad (2.10m)$$

Ezen függvények szintén periodikusak τ szerint $\beta\hbar$ periódussal és a Green-függvényeknél bevezetett módon definiálhatjuk a Fourier-transzformáltjaikat.

2.3. A véges hőmérsékletű perturbációs számítás alapjai a spinor Bose gázban

Ezen fejezetben megmutatjuk, hogy hogyan határozhatóak meg a Green- és korrelációs függvények a perturbációs számítás tetszőleges rendjében a Feynman-diagramok segítségével. Ehhez segítségül hívjuk a zérus mágneses térben kidolgozott dielektromos formalizmus ([45] és a benne megtalálható hivatkozások) eredményeit.

A Green- és korrelációs függvények különböző operátorkifejezések várható értékei. Ezeket az átlagokat a (2.3) Hamilton-operátor által meghatározott nagykanonikus sokaság

$$-\mathcal{G}_{(0)\gamma\delta}^{rs}(\mathbf{k}, i\omega_n) : \frac{r \quad s}{\gamma \quad \delta}, \quad -\mathcal{G}_{(0)1,1}^{rs}(\mathbf{k}, i\omega_n) : \overleftarrow{r \quad s}, \quad -\mathcal{G}_{(0)-1,-1}^{rs}(\mathbf{k}, i\omega_n) : \overrightarrow{r \quad s}.$$

2.1. ábra. A szabad Green-függvény grafikus reprezentálása

$$\begin{aligned} -\mathcal{G}_{\gamma\delta}^{rs}(\mathbf{k}, i\omega_n) : \frac{r \quad s}{\gamma \quad \delta}, \quad -\mathcal{G}_{1,1}^{rs}(\mathbf{k}, i\omega_n) : \overleftarrow{\overleftarrow{r \quad s}}, \quad -\mathcal{G}_{1,-1}^{rs}(\mathbf{k}, i\omega_n) : \overleftarrow{\overrightarrow{r \quad s}}, \\ -\mathcal{G}_{-1,1}^{rs}(\mathbf{k}, i\omega_n) : \overrightarrow{\overleftarrow{r \quad s}}, \quad -\mathcal{G}_{-1,-1}^{rs}(\mathbf{k}, i\omega_n) : \overrightarrow{\overrightarrow{r \quad s}}. \end{aligned}$$

2.2. ábra. A teljes Green-függvény grafikus reprezentálása

felett számoljuk ki. A perturbációszámítás segítségével a várhatóértékek számolása visszavezethető a nem-kölcsönható rendszer által meghatározott nagykanonikus sokaság felett vett átlagolásra.

A nem-kölcsönható rendszer Hamilton-operátora:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} (e_{\mathbf{k}} - \mu_0) b_r^\dagger(\mathbf{k}) b_r(\mathbf{k}). \quad (2.11)$$

Ez a teljes Hamilton-operátor (2.3) első tagja. Követve a szabad skalár rendszer esetén alkalmazott eljárást [14], az 1-es spinnel rendelkező szabad rendszer Green-függvénye

$$\mathcal{G}_{(0)\gamma\delta}^{rs} = \frac{\delta_{rs} \delta_{\gamma\delta}}{\gamma i\omega_n - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} - \mu_0)}. \quad (2.12)$$

Grafikusan ezt egy vonallal jelöljük és nyilat teszünk a vonalra, ha a görög indexet rögzítjük (2.1. ábra), míg a teljes Green-függvényt dupla vonallal fogjuk jelölni és két nyilat teszünk rá, ha a görög indexeket rögzítjük (2.2. ábra).

Vizsgáljuk meg a (2.3) Hamilton-operátor további kifejezéseit! Nézzük először azokat, amelyekben szerepel a kétrészecske kölcsönhatás. Ezek abban különböznek egymástól, hogy a szórási folyamatban hány darab kondenzált részecske vesz részt. Leolvashatjuk, hogy a kétrészecske kölcsönhatásból

- 4 operátort tartalmaz 1 kifejezés,
- 3 operátort tartalmaz 4 kifejezés,
- 2 operátort tartalmaz 6 kifejezés,
- 1 operátort tartalmaz 4 kifejezés.

Ezeket a kifejezéseket grafikusan a 2.3. ábrával szemléltethetjük, ahol a kondenzált részecskét egy körrel reprezentáljuk.

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{c} \leftarrow r' s' \\ | \\ \leftarrow r s \end{array} & \begin{array}{c} \leftarrow r' s' \\ | \\ \leftarrow r s \end{array} & \begin{array}{c} \circ \circ \\ | \\ \leftarrow r s \end{array} & \begin{array}{c} \circ \circ \\ | \\ \leftarrow r s \\ | \\ \circ \end{array} \\
 (-\hbar^{-1})V_{rs}^{r's'}, & (-\hbar^{-1})\sqrt{N_c}V_{rs}^{r's'}\zeta_{s'}, & (-\hbar^{-1})N_c c_{sr'}^\dagger V_{rs}^{r's'}\zeta_{s'}, & (-\hbar^{-1})N_c^{3/2}c_{sr'}^\dagger c_{sr'}^\dagger V_{rs}^{r's'}\zeta_{s'}.
 \end{array}$$

2.3. ábra. A kétrészecske kölcsönhatás Feynman diagramjai, amelyek a kölcsönhatásban résztvevő kondenzátumok számában különböznek (0,1,2,3)

A megmaradt kifejezések közül egyikben egy operátor, míg a másikban két operátor szerepel (2.4. ábra).

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} s \\ \circ \blacktriangle \\ \leftarrow r \end{array} & \begin{array}{c} r \quad s \\ \leftarrow \blacktriangle \leftarrow \end{array} \\
 (-\hbar^{-1})\sqrt{N_c}\zeta_r^\dagger[-\mu\delta_{rs}-\hbar\omega_L(F_z)_{rs}], & (-\hbar^{-1})[(\mu_0-\mu)\delta_{rs}-\hbar\omega_L(F_z)_{rs}].
 \end{array}$$

2.4. ábra. Kétrészecske kölcsönhatást nem tartalmazó diagramok

A Green-függvényt a Dyson–Beliaev egyenletből (2.5. ábra) határozhatjuk meg:

$$\mathcal{G}_{\gamma\delta}^{rs}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \mathcal{G}_{(0)\gamma\delta}^{rs}(\mathbf{k}, i\omega_n) + \mathcal{G}_{(0)\gamma\rho}^{rr'}(\mathbf{k}, i\omega_n)\Sigma_{\rho\sigma}^{r's'}(\mathbf{k}, i\omega_n)\mathcal{G}_{\sigma\delta}^{s's}(\mathbf{k}, i\omega_n), \quad (2.13)$$

ahol bevezettük a $\Sigma_{\gamma\delta}^{rs}$ sajátenergiát. A sajátenergiák olyan diagramok összességei, amelyek irreducibilisek, azaz nem esnek szét, ha elvágunk bennük egy egyrészecske vonalat.

$$\begin{aligned}
\frac{r}{\gamma} \frac{s}{\delta} &= \frac{r}{\gamma} \frac{s}{\delta} + \frac{r}{\gamma} \frac{s}{\delta} \\
-\mathcal{G}_{\gamma\delta}^{rs} &= -\mathcal{G}_{(0)\gamma\delta}^{rs} + (-\mathcal{G}_{(0)\gamma\rho}^{rr'}) (-\Sigma_{\rho\sigma}^{s'}) (-\mathcal{G}_{\sigma\delta}^{s's}) \\
\begin{array}{c} \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \end{array} &= \begin{array}{c} \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \end{array} + \begin{array}{c} \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \end{array} \\
-\mathcal{G}_{11}^{rs} &= -\mathcal{G}_{(0)11}^{rs} + (-\mathcal{G}_{(0)11}^{rr'}) (-\Sigma_{11}^{s'}) (-\mathcal{G}_{11}^{s's}) + (-\mathcal{G}_{(0)11}^{rr'}) (-\Sigma_{1,-1}^{s'}) (-\mathcal{G}_{-1,1}^{s's}) \\
\begin{array}{c} \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \end{array} &= \begin{array}{c} \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \end{array} + \begin{array}{c} \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \\ \leftarrow r \quad s \rightarrow \end{array} \\
-\mathcal{G}_{-1,1}^{rs} &= (-\mathcal{G}_{(0)-1,-1}^{rr'}) (-\Sigma_{-1,1}^{s'}) (-\mathcal{G}_{11}^{s's}) + (-\mathcal{G}_{(0)-1,-1}^{rr'}) (-\Sigma_{-1,-1}^{s'}) (-\mathcal{G}_{-1,1}^{s's})
\end{aligned}$$

2.5. ábra. A Dyson–Beliaev egyenletek grafikus szemléltetése

Hasonlóan járhatunk el a korrelációs függvények esetén is. Bevezetjük a $\Pi_{r's'}^{sr}$ ún. polarizációkat. Ezek diagramok összességei, amelyek properek, azaz nem esnek szét, ha elvágunk bennük egy kölcsönhatási vonalat. A korrelációs függvényeket a (2.14) egyenletből számolhatjuk ki.

$$D_{r's'}^{sr}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \hbar \Pi_{r's'}^{sr}(\mathbf{k}, i\omega_n) + \hbar \Pi_{ab}^{sr}(\mathbf{k}, i\omega_n) V_{cd}^{ba} D_{r's'}^{dc}(\mathbf{k}, i\omega_n). \quad (2.14)$$

Ezt az egyenlet grafikusan az 2.6. ábrával szemléltethető, ahol az általánosított korrelációs függvényeket fehér poligonnal és a proper részeket szürke poligonnal ábrázoljuk.

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} r \quad r' \\ \diagdown \quad \diagup \\ s \quad s' \end{array} &= \begin{array}{c} r \quad r' \\ \diagdown \quad \diagup \\ s \quad s' \end{array} + \begin{array}{c} r \quad a \\ \diagdown \quad \diagup \\ s \quad b \end{array} \begin{array}{c} c \quad r' \\ \diagdown \quad \diagup \\ d \quad s' \end{array} \\
-D_{r's'}^{sr} &= -\hbar \Pi_{r's'}^{sr} + (-\hbar \Pi_{ab}^{sr}) (-\hbar^{-1} V_{cd}^{ba}) (-D_{r's'}^{dc})
\end{aligned}$$

2.6. ábra. Az általánosított korrelációs függvényeket meghatározó egyenlet grafikus szemléltetése

Szimmetrikus fázisban $\langle a_r(\mathbf{k}) \rangle = 0$ minden \mathbf{k} -ra. Ebben az esetben a sajátenergia, definíció szerint irreducibilis, egyben proper is; a polarizáció, amely definíció szerint proper, egyben irreducibilis is. Szimmetriasértő fázisban (Bose–Einstein kondenzátum) anomális

átlagok jelennek meg ($\langle a_r(\mathbf{0}) \rangle \neq 0$), a sajátenergia többé nem proper és a polarizáció többé nem irreducibilis. Mind a sajátenergia, mind a polarizáció két részre bontható fel:

$$\Sigma_{\gamma\delta}^{r,s} = \tilde{\Sigma}_{\gamma\delta}^{rs} + M_{\gamma\delta}^{rs}, \quad (2.15a)$$

$$\Pi_{r's'}^{s,r} = \Pi_{r's'}^{(r)sr} + \Pi_{r's'}^{(s)sr}, \quad (2.15b)$$

ahol $\tilde{\Sigma}$ jelöli a proper és M az improper sajátenergiákat, míg $\Pi^{(r)}$ a reguláris (irreducibilis) és $\Pi^{(s)}$ a szinguláris (reducibilis) polarizációt. A sajátenergia és a polarizáció (2.15a) és (2.15b) egyenletek szerinti felbontása a dielektromos formalizmusban játszik fontos szerepet.

2.4. A kémiai potenciál meghatározása

A kémiai potenciált és a kondenzátum spinorát együtt határozzák meg a $\langle b_r(\mathbf{k}) \rangle = \langle b_r^\dagger(\mathbf{k}) \rangle = 0$ és a teljes részecskesűrűséget megadó $n = n_c + n_T$ (n_T a nem kondenzált részecskék sűrűsége) egyenletek. Alkalmazva a perturbációs számítás technikáját a (2.16) egyenlethez jutunk, amelyben a Green-függvények meghatározásához hasonló módon elvégezhető egy felbontás:

$$\langle b_r^\dagger(0,0) \rangle = \Sigma_{0\delta}^s(0,0) \mathcal{G}_{\delta\gamma}^{sr}(0,0), \quad (2.16)$$

ahol $\Sigma_{0\delta}^s$ olyan diagramok összessége, amelynek egy bemenő vagy kimenő vonala van ($\gamma = 1$ vagy $\gamma = -1$). Kihasználva a Green-függvények szimmetriatulajdonságait a $\langle b_r(\mathbf{k}) \rangle =$

$$\langle b_r^\dagger(0) \rangle = \frac{-1}{\hbar} \sqrt{N_c} \zeta_s^\dagger (-\mu \delta_{s's} - \hbar \omega_L (F_z)_{s's}) (-\mathcal{G}_{(0)1,1}^{sr}) + \frac{-1}{\hbar} N_c^{3/2} \zeta_r^\dagger \zeta_{r'}^\dagger V_{rs}^{r's'} \zeta_{s'} (-\mathcal{G}_{(0)1,1}^{sr}) + \dots$$

2.7. ábra. A kémiai potenciált és a kondenzátum spinorát meghatározó perturbációs sor

$\langle b_r^\dagger(\mathbf{k}) \rangle = 0$ konzisztencia kitétel ekvivalens lesz a

$$\Sigma_{0\delta}^s(0, 0) = 0 \quad (2.17)$$

feltétellel.

3. fejezet

Az állapotegyenlet, poláris és ferromágneses fázisok

Az állapotegyenlet a rendszer termodinamikai mennyiségei között teremt kapcsolatot. A következőkben egy átlagtérközelítés keretein belül írjuk fel a rendszer állapotegyenletét illetve határozzuk meg az egyes mennyiségek egymástól való függését. Látni fogjuk, hogy ez a feladat még ebben az egyszerű esetben is többnyire csak numerikusan végezhető el.

3.1. Kondenzált fázis

A Bogoliubov-közelítés eredményeit a Függelékben találhatjuk meg. Itt meghatároztuk a gerjesztési spektrumokat, amelyek azonban csak $T = 0$ K-n érvényesek. Véges hőmérsékleten megjelennek az energiaspektrumokban az egyes gerjesztésekhez tartozó csillapodások is. A véges hőmérséklet figyelembe vétele a perturbációs számításban azt jelenti, hogy figyelembe kell venni olyan diagramokat is, amelyek az perturbációs számítás első vagy annál magasabb rendjeiben jelennek meg. Ezek közül most a Hartree-tagot egy önkonzisztens felírásban vesszük hozzá a már eddig is használt diagramokhoz. A Fock tagot elhanyagoljuk, mert az már a skalár rendszerben is erős elsőrendű fázisátalakulást okoz a Bose-Einstein kondenzációban, amelyet a kísérletek azonban nem igazolnak.

A sajátenergia diagramjai Hartree-közelítésben a 3.1. ábrán láthatóak, ahol a Hartree-tagokat úgy kapjuk meg, hogy a kétrészecske kölcsönhatást reprezentáló vertex egyik pontjába befutó illetve kifutó vonalakat összekötjük. A 3.1. ábráról leolvasható, hogy

$$\tilde{\Sigma}_{\alpha\gamma}^{rs} = \hbar^{-1}[(\mu_0 - \mu)\delta_{rs} - \hbar\omega_L(F_z)_{rs} + n_c\zeta_r^\dagger V_{rs}^{r's'} \zeta_{s'} + H^{s'r'} V_{rs}^{r's'}] \delta_{\alpha\gamma}, \quad (3.1a)$$

$$\tilde{\Sigma}_{01}^s = \hbar^{-1}[-(\mu\delta_{rs} + \hbar\omega_L(F_z)_{rs})\zeta_r^\dagger + n_c\zeta_{s'}^\dagger V_{rs}^{r's'} \zeta_{s'}^\dagger + \zeta_r^\dagger H^{s'r'} V_{rs}^{r's'}] n_c^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1b)$$

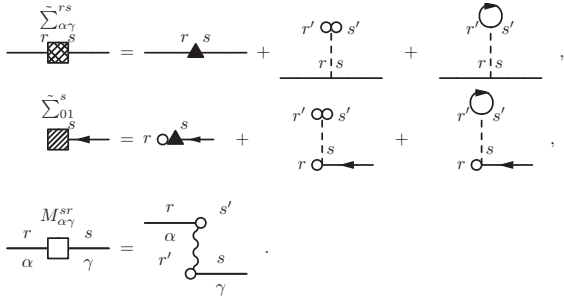
ahol bevezettük a H^{sr} Hartree-kifejezést:

$$H^{sr} = \lim_{\eta=0} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta\hbar} \sum_{\nu_n} [-\tilde{G}_{11}^{sr}(\mathbf{q}, i\nu_n) e^{i\nu_n\eta}]. \quad (3.2)$$

Könnyen belátható, hogy a diagonális tagokban ($s = r$) a Hartree-kifejezés nem más, mint a termikus (nem kondenzált) részecskék sűrűsége. Jelölje n'_r a termikus atomok sűrűségét. Ekkor $n'_r = H^{rr}$, ahol r a spinoperátor z komponensének a sajátértékét jelöli. Induljunk ki a rendszer teljes részecskesűrűségét és teljes mágnesezettségét megadó egyenletekből:

$$n = n_{c,+} + n_{c,-} + n'_+ + n'_0 + n'_-, \quad (3.3a)$$

$$m = n_{c,+} - n_{c,-} + n'_+ - n'_-, \quad (3.3b)$$



3.1. ábra. A proper és improper sajátenergiák Hartree-közelítésben

ahol $n_{c,r}$ a kondenzált atomok sűrűsége és n'_r a termikus atomok sűrűsége r spinvetülettel (emlékeztetőül: $n_{c,0} = 0$). A nem-kondenzált atomok sűrűségét a Hartree-kifejezés adja meg, azaz

$$n'_r = H^{rr} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} n'_{\mathbf{k},r}, \quad (3.4)$$

ahol

$$n'_{\mathbf{k},r} = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_{\mathbf{k},r}} - 1}. \quad (3.5)$$

A 3.2 kifejezést megnézve könnyen belátható, hogy

$$\epsilon_{\mathbf{k},r} = \epsilon_{\mathbf{k}} + \hbar \tilde{\Sigma}_{11}^{rr}. \quad (3.6)$$

A termodinamikai határesetben a (3.4) egyenletben az összegzés integrállá írható át, majd az integrált elvégezve a termikus atomok sűrűsége

$$n'_r = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{(2\pi)^2 \lambda^3} F\left(\frac{3}{2}, \beta \hbar \tilde{\Sigma}_{11}^{rr}\right), \quad (3.7)$$

ahol $\Gamma(s)$ a gamma-függvény, $\lambda = \hbar/\sqrt{2Mk_B T}$ a termikus hullámhossz és $F(s, \gamma)$ a Bose-Einstein integrál s paraméterrel, γ argumentummal [46].

Kondenzátum jelenlétében még egy egyenletünk van, amely a kémiai potenciált határozza meg:

$$\Sigma_{01}^r = 0. \quad (3.8)$$

A fenti egyenletek egy zárt, önkonzisztens egyenletrendszer határoznak meg n , m , n_0 , T , B , μ mennyiségekre és ezek közül hármat rögzítve a másik három megadható.

3.2. Poláris kölcsönhatás esete

Poláris kölcsönhatás esetében $c_s > 0$ a spinort $\zeta_r = \begin{pmatrix} \zeta_+ \\ 0 \\ \zeta_- \end{pmatrix}$ alakban keresve a (2.17)

konzisztencia feltételt és a $\zeta_+^2 + \zeta_-^2 = 1$ feltételt kielégítve

$$\mu = c_n n, \quad (3.9a)$$

$$\zeta_{\pm} = \left[\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\hbar\omega_L - c_s(n'_+ - n'_-)}{c_s n_c} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.9b)$$

ahol $n = n_c + n'_+ + n'_0 + n'_-$ a teljes részecskesűrűség. Ezeket felhasználva megkaphatjuk a proper sajátenergiákat és Green-függvényeket [lásd 4.1 fejezet]:

$$\tilde{\Sigma}_{\alpha\gamma}^{rs} = \hbar^{-1} \mu_0 \delta_{rs} \delta_{\alpha\delta}, \quad (3.10)$$

$$\tilde{G}_{\alpha\gamma}^{rs} = \frac{\delta_{rs} \delta_{\alpha\gamma}}{\alpha i \omega_n - \hbar^{-1} e_{\mathbf{k}}}. \quad (3.11)$$

Mivel az összes proper Green-függvény megegyezik, ezért

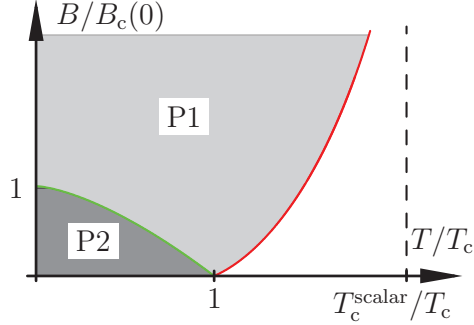
$$n'_+ = n'_0 = n'_-, \quad (3.12)$$

és a spinor

$$\zeta_{\pm} = \left[\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

alakra redukálódik. Ez éppen megegyezik a Bogoliubov-közelítésben használt spinorral, azzal a lényeges különbséggel, hogy n_c a hőmérséklettől függ.

Keressük az állapotegyenlet megoldását rögzített intenzív változók mellett [47]. Ekkor a μ, B, T függvényében határozzuk meg az n, m, n_0 mennyiségeket. Ez csak akkor igaz, ha rögzített hőmérséklet mellett elég kicsi a mágneses tér vagy rögzített mágneses tér mellett elég alacsony hőmérsékleten vagyunk. Ha ez nem teljesül, akkor $\zeta_- = 0$ valósul meg, azaz ferromágneses fázisban lesz a rendszer a pozitív c_s spinfüggő kölcsönhatási állandó ellenére



3.2. ábra. Az antiferromágneses spinor Bose-gáz fázisdiagramja átlagtérközelítésben

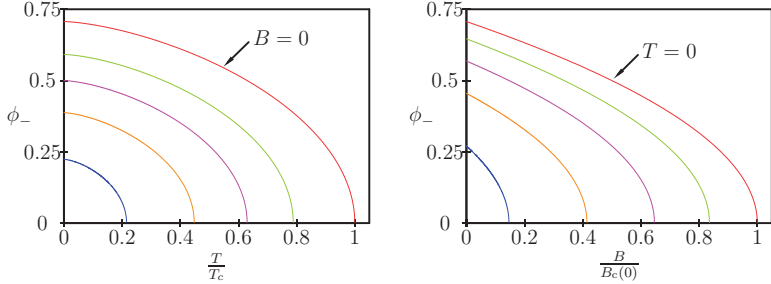
is. Jelöljük P1-el illetve P2-vel azon fázisait a poláris kölcsönhatás esetének, amikor egy illetve két nem zérus komponense van a spinornak. A rendszer fázisdiagramja a 3.2. ábrán látható. A piros vonaltól balra eső tartományban a rendszer Bose-kondenzátummal rendelkezik. A sötét szürke szín jelzi a két kondenzátum komponenssel rendelkező tartományt, amelyet a zöld vonal választ el a egy kondenzátum komponenssel rendelkező tartománytól (világos szürke szín). A zölddel húzott vonal egy kritikus vonal, amely egyenletét úgy kapjuk meg, hogy a (3.13)-be $\zeta_- = 0$ -t helyettesítünk be.

- P2 fázis:

A P2 fázisban az állapotegyenlet megoldása egyszerű. A (3.8) feltétel $\mu = c_n n$ egyenletre vezet, ahonnan a részeckesűrűség $n = \frac{\mu}{c_n}$. Felhasználva azt, hogy a spinvetület minden irányában ugyanakkora a termikus atomok sűrűsége a (3.7) kifejezés azt eredményezi, hogy $n'_+ = n'_0 = n'_- = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\zeta(\frac{3}{2})}{(2\pi)^2\lambda^3}$, ahol $\zeta(\frac{3}{2})$ a Riemann-féle ζ -függvény és $\zeta(\frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}, 0)$. A fentiekből következik, hogy a mágnesezettséghez csak a kondenzátum ad járulékot és a mágnesezettség, $m = \frac{\hbar\omega_L}{c_s}$. A kondenzátum sűrűsége

$$n_c = n - 3n'_+ = n - \frac{3\Gamma(\frac{3}{2})\zeta(\frac{3}{2})(2Mk_B)^{\frac{3}{2}}}{4\pi^2\hbar^3} T^{\frac{3}{2}}. \quad (3.14)$$

Ez a kifejezés természetesen csak a P2-P1 fázishatárig érvényes. A P2 fázisbeli kon-



3.3. ábra. (a) A rendparaméter függése a hőmérséklettől a $B/B_c(0) = 0, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ értékeire. A mágneses tér jobbról balra növekszik az egyes görbéknek megfelelően. (b) A rendparaméter függése a mágneses tértől a $T/T_c = 0, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ értékeire. A hőmérséklet jobbról balra növekszik az egyes görbéknek megfelelően.

denzátumsűrűség ismeretében a fázishatár egyenlete

$$\frac{B_c(T)}{B_c(0)} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad (3.15)$$

ahol $B_c(0) = c_s n / (g\mu_B)$ a kritikus mágneses tér nagysága $T = 0$ K-n és $T_c = (4\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} \hbar^2 / (3\Gamma(\frac{3}{2}) \zeta(\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}} 2Mk_B)$ a kritikus hőmérséklet $B = 0$ mellett.

A P2 fázisban a rendparaméter : $\phi_- = \sqrt{n_c} \zeta_-$. A rendparaméter viselkedését vizsgálva láthatjuk, hogy az egy folytonos fázisátalakulással eltűnik a P2-P1 határán. Ez azt jelenti, hogy tartozik hozzá egy lágy gerjesztési módus és ez egy kvadrupolár spinhullámnak felel meg. Erről a későbbiekben a 5. fejezetben részletesen szót ejtünk. A 3.3. (a) és 3.3.(b) ábrák mutatják a rendparaméter hőmérséklet illetve mágneses tér függését különböző nagyságú mágneses terek illetve hőmérsékletek mellett.

- P1 fázis

A P1 fázisban az állapotegyenletet numerikusan tudjuk csak kezelni. Kondenzátum csak a + spinvetület irányában lesz: $n_{c,+} = n_c$. A P1 fázis tulajdonképpen egy ferromágneses fázis, így a proper sajátenergiák kifejezéseit (3.25) adja meg, azaz $n_{c,+} \neq n_{c,0} \neq n_{c,-}$ és a (3.10) egyenletek nem lesznek igazak, egyes proper Green-

függvények gapet fognak tartalmazni. A proper sajátenergiák explicite csak m -től függenek. Ez azt jelenti, hogy a mágnesezettség megadásához egyetlen egyenletet kell megoldani, a részecskesűrűség és a kondenzátumsűrűség a mágnesezettség ismeretében már megadható. Annak ellenére, hogy a P1 fázis egy ferromágneses fázis lényeges különbség van a ferromágneses kölcsönhatás esetéhez képest. Látni fogjuk a 3.3. fejezetben, hogy ferromágneses kölcsönhatás esetében a Bose–Einstein kondenzációt megelőzheti egy mágneses átalakulás. A P1 fázisban azonban a $\hbar\omega_L > c_s n_c$ feltétel már egy akkora nagyságú mágneses teret jelent, hogy mágneses átalakulás nem megy végbe.

- Szimmetrikus fázis

Szimmetrikus fázisban $n_c = 0$, így a (3.8) azonosan teljesül, anomális sajátenergiák nem léteznek kondenzátum jelenléte nélkül. A proper sajátenergiák megegyeznek a sajátenergiákkal:

$$\tilde{\Sigma}_{11}^{++} = \Sigma_{11}^{++} = c_n n - \mu + c_s m - \hbar\omega_L, \quad (3.16a)$$

$$\tilde{\Sigma}_{11}^{00} = \Sigma_{11}^{00} = c_n n - \mu, \quad (3.16b)$$

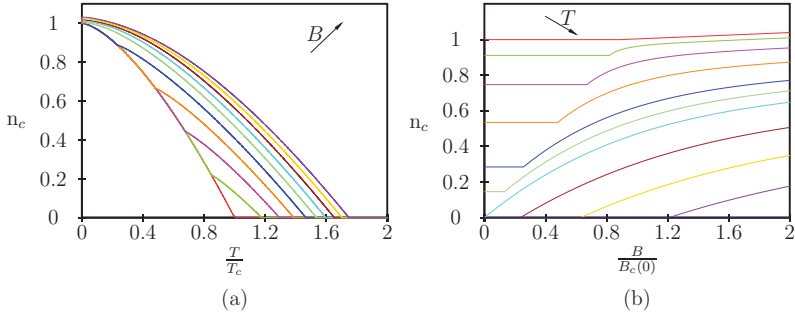
$$\tilde{\Sigma}_{11}^{--} = \Sigma_{11}^{--} = c_n n - \mu - c_s m + \hbar\omega_L. \quad (3.16c)$$

Ezek ismeretében a könnyedén felírható az állapotegyenlet. Az egyenleteket a részecskesűrűsége és a mágnesezettségre kell megoldani.

Megoldva az állapotegyenletet az összes fázisban felrajzolhatjuk az egyes mennyiségek függését az intenzív paraméterek függvényében. Rögzített kémiai potenciál mellett a kondenzátumsűrűség, a részecskesűrűség és a mágnesezettség láthatóak a 3.4., 3.5. és 3.6. ábrákon a hőmérséklet függvényében különböző mágneses tér illetve a mágneses tér függvényében különböző hőmérséklet értékek mellett.

A 3.4.(b) ábrán jól látható, hogy a P2 fázisban a kondenzátumsűrűség független a mágneses tértől, amely azt is jelenti, hogy a 3.4.(a) ábrán az egyes görbék együtt haladnak a hőmérséklet változtatásával mindaddig, amíg el nem érik az adott mágneses tér mellett a

P2-P1 fázisátalakulás hőmérsékletét. Hasonlóan az előzőekhez a 3.6.(a) ábra azt mutatja, hogy a P2 fázisban a mágnesezettség független a hőmérséklettől, csak a mágneses tér nagysága határozza meg a P2-P1 fázis határát, a 3.6.(b) ábrán az egyes hőmérséklet értékekhez tartozó görbék együtt haladnak a mágneses tér változtatásával a P2-P1 fázis határát. A 3.5. (a) és (b) ábrákon jól látszik, hogy a P2 fázisban a részecskesűrűség független mind a hőmérséklettől, mind a mágneses tértől.

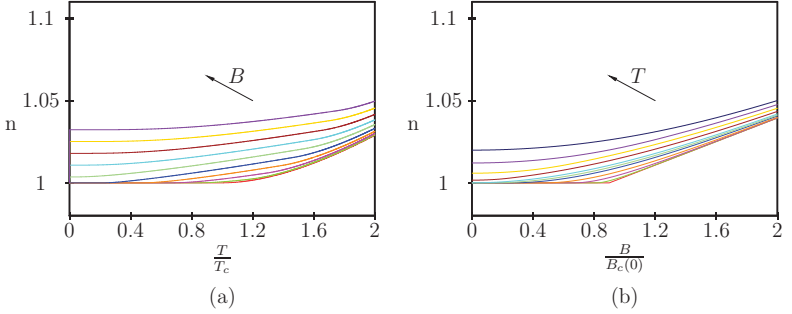


3.4. ábra. (a) A kondenzátumsűrűség függése a hőmérséklettől a $B/B_c(0) = 0.01, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.8$ értékeire. A mágneses tér a nyíl irányába növekszik az egyes görbéknek megfelelően. (b) A kondenzátumsűrűség függése a mágneses tértől a $T/T_c = 0.01, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 1.0, 1.2, 1.4, 1.8$ értékeire. A hőmérséklet a nyíl irányába növekszik az egyes görbéknek megfelelően

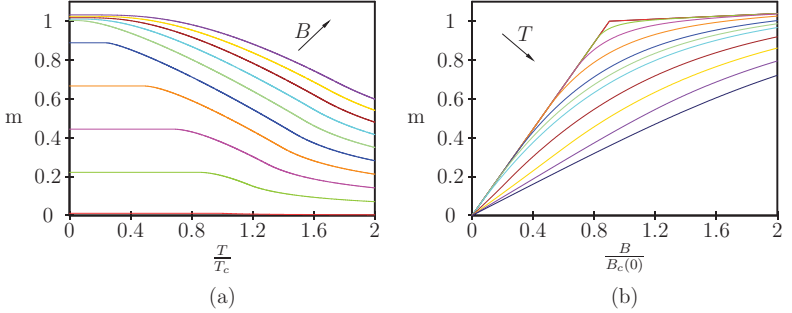
3.2.1. Kvantum-fázisátalakulás zérus hőmérsékletű határesetben

Az előzőekben az átlagtérközelítés keretein belül tárgyaltuk a P2-P1 fázisátalakulást és megadtuk a kritikus vonal egyenletét is. Lehetőség van az egyes közelítéseken túl a fázisátalakulás tulajdonságainak általános vizsgálatára is. Szükségünk lesz a Green-függvények és sajátenergiák tulajdonságaira. Ezzel bővebben a 4. fejezetben foglalkozunk, most csak a kvantum-fázisátalakulás vizsgálatához elengedhetetlenül szükséges kifejezéseket írjuk fel.

Induljunk ki a P1 fázisból! P1 fázisban a $-$ spinvetület irányában nincsenek kondenzált atomok ($n_{c,-} = 0$). Ez azt jelenti, hogy az egyik folytonos szimmetria, amely a P2 fázisban



3.5. ábra. (a) A részecskesűrűség függése a hőmérséklettől a $B/B_c(0) = 0.01, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.8$ értékeire. A mágneses tér a nyíl irányába növekszik az egyes görbéknek megfelelően (b) A részecskesűrűség függése a mágneses tértől a $T/T_c = 0.01, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 1.0, 1.2, 1.4, 1.8$ értékeire. A hőmérséklet a nyíl irányába növekszik az egyes görbéknek megfelelően



3.6. ábra. (a) A mágneszettség függése a hőmérséklettől a $B/B_c(0) = 0.01, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.8$ értékeire. A mágneses tér a nyíl irányába növekszik az egyes görbéknek megfelelően (b) A mágneszettség függése a mágneses tértől a $T/T_c = 0.01, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 1.0, 1.2, 1.4, 1.8$ értékeire. A hőmérséklet a nyíl irányába növekszik az egyes görbéknek megfelelően

sérült, helyre áll és csak egy Goldstone-módus létezik. Továbbá $n_{c,-} = 0$ azt is eredményezi, hogy $\Sigma_{\alpha\gamma}^{+-} = \Sigma_{\alpha\gamma}^{-+} = 0$, azaz a P2 fázisban összekapcsolódó $\mathcal{G}_{\alpha\gamma}^{++}$, $\mathcal{G}_{\alpha\gamma}^{--}$ Green-függvények már nem kapcsolódnak össze.

A megmaradó Goldstone módus a $\mathcal{G}_{\alpha\gamma}^{++}$ Green-függvények spektrumában jelenik meg és a (4.40) Hugenholtz–Pines tétel biztosítja annak gapmentességét [lásd 4.2 fejezet]. A ϕ_- rendparaméter dinamikáját a \mathcal{G}_{11}^{--} Green-függvény írja le, amely a P1 fázisban a következő alakot ölti általánosan:

$$\mathcal{G}_{11}^{--}(\mathbf{k}, i\omega_n) = [i\omega_n - \hbar^{-1}e_{\mathbf{k}} - \Sigma_{11}^{--}]^{-1}, \quad (3.17)$$

ahol felhasználtuk, hogy $\Sigma_{1-1}^{--} = 0$ a közelítés tetszőleges rendjében.¹ A (3.17) egyenletben szereplő Green-függvényből jövő gerjesztés energiagapet tartalmaz, amely eltűnik a P2–P1 fázishatáron. A kritikus vonal egyenlete megadható, ha $\Sigma_{11}^{--}(\mathbf{0}, 0) = 0$ egyenletet megoldjuk ω_L -re, amelyből a $B_c = B_c(T)$ összefüggés (a közelítések nagy részében csak numerikusan) kiszámolható.

A fenti feltételt $T = 0$ K -n egy kvantum fázisátalakulást jelent és egy crossover figyelhető meg a klasszikus és a kvantum fázisátalakulás között a $T \rightarrow 0$ határesetben [48, 47]. Jelölje ϕ_s a shift exponens, amelyet a $B_c(T) = B_c(0) - wT^{1/\phi_s}$ egyenlet segítségével definiálunk [49]. Vezessük be továbbá az $x = T/[B - B_c(0)]^{\phi_s}$ változót, amely a kritikus vonalon az x_c értéket veszi fel. Ekkor a szingularitás vezető rendjében

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{11}^{--}(\mathbf{0}, 0) &= \frac{C(T)}{|x - x_c|^\gamma} & T > 0, \\ &= \frac{Q}{|B - B_c(0)|^{\gamma\phi_s}} & T = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Belátható, hogy ha a crossover skálázás érvényes, akkor ϕ_s megegyezik a megszokott módon bevezetett ϕ crossover exponenssel (ez akkor áll fenn, ha $C(T) \sim T^{-\gamma/\phi}$). Átlagtérképzéltésben a shift exponensre $\phi_s = 2/3$ adódik (lásd (3.15) egyenlet).

A fenti gondolatmenet érvényességi határát az szabja meg, hogy elegendően alacsony hőmérsékleten kell lenni ahhoz, hogy a termikus energia kisebb legyen, mint az energia-

¹Ez utóbbi könnyen belátható, mert Σ_{1-1}^{--} -ben mindig kell lennie legalább egy olyan kétrészesce kölcsönhatást tartalmazó diagramnak, amelyben a kölcsönhatási vertex két befutó vonalán kondenzátum van, míg a két kifutó vonalának spinvetülete $r' = s' = -$. Ez azt jelenti, hogy a Σ_{1-1}^{--} kifejezésében kell lennie V_{-s}^{-j} kölcsönhatási tagnak. Ez csak V_{--} esetén ad zérustól különböző járulékot, de a $-$ spinvetület irányában nincsen kondenzátum.

gap. Ekkor exponenciálisan kis korrekciókat kell hozzávenni a zérus hőmérsékletű határesethez.

Átlagtérközelítésben meghatározhatjuk a γ illetve a γ_0 értékeit. A P1 fázisban

$$\mathcal{G}_{11}^{--}(\mathbf{k}, i\omega_n) = [i\omega_n - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} - 2c_s m + 2\hbar\omega_L)]^{-1}. \quad (3.19)$$

Ebből egy kis számolás után [lásd (3.21), (3.22), (3.23a), (3.23b)] $\gamma = 2$ és $\gamma_0 = 1$ adódik, továbbá $C(T) \sim T^{-1}$. Defináljuk az η , η_0 , ν és a ν_0 kritikus exponenseket a következő módon:

$$\text{a kritikus vonalon : } \mathcal{G}_{11}^{--}(\mathbf{k}, 0) \sim k^{2-\eta}, \quad (3.20a)$$

$$\text{a kvantum kritikus pontban : } \mathcal{G}_{11}^{--}(\mathbf{k}, 0) \sim k^{2-\eta_0}; \quad (3.20b)$$

$$T > 0\text{-ra : } \xi \sim \frac{1}{|x - x_c|^\nu}, \quad (3.20c)$$

$$T = 0\text{-ra : } \xi \sim \frac{1}{|B - B_c(0)|^{\nu_0}}, \quad (3.20d)$$

ahol ξ a korrelációs hosszát jelöli. Átlagtérközelítésünkben $\eta = \eta_0 = 0$, $\nu = 1$ és $\nu_0 = 1/2^2$.

A 5. fejezetben részletesen tárgyaljuk, hogy a \mathcal{G}_{11}^{--} diszperziós relációja parabolikus és tartalmaz egy gapet. Ez a gap $T > 0$ -ra νz illetve $T = 0$ esetén $\nu_0 z$ exponenssel tűnik el a fázishatárhoz közeledve. Itt z a dinamikai skála exponens, átlagtérközelítésünkben $z = 2$. Fentebb felírtuk a $G_{11}^{--}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ kifejezését, amely nevezője az $i\omega_n = 0$, $\mathbf{k} = 0$ határesetben éppen a gappal egyezik meg. Átlagtérközelítésben a gap $\Sigma_{11}^{--}(\mathbf{0}, 0) = 2(g\mu_B B - c_s m)$. Adott T hőmérsékleten és μ kémiai potenciál mellett a kritikus vonalon

$$B_c(T, \mu) = c_s m(B_c, T, \mu). \quad (3.21)$$

Fejtsük Taylor-sorba másodrendig a mágnesezettséget a mágneses tér szerint a kritikus

²Általában $\nu = 1/2$.

mágneses tér közelében:

$$m(B, T, \mu) = m(B_c, T, \mu) + \left(\frac{\partial m}{\partial B} \right)_{B=B_c} (B - B_c) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 m}{\partial B^2} \right)_{B=B_c} (B - B_c)^2 + \mathcal{O}((B - B_c)^3). \quad (3.22)$$

A P1→P2 fázisátalakulás folytonos átalakulás, $T > 0$ esetén a mágnesezettség és a szuszceptibilitás, $\chi = \left(\frac{\partial m}{\partial b} \right)_{T, \mu}$ is folytonosan megy át, míg $T = 0$ esetén a mágnesezettség folytonosan megy át és a szuszceptibilitás ugrik. A P1 fázisban a szuszceptibilitás a kritikus pontban $\chi_c = g\mu_B/c_s$ $T > 0$ -ra és $\chi_c = g\mu_B/(c_n + c_s)$ $T = 0$ -ra. Felhasználva a mágnesezettség sorfejtését a gap a következő alakba megy át:

$$\Sigma_{11}^{--}(\mathbf{0}, 0) = 2(g\mu_B B - c_s m) = -c_s \chi'_c (B - B_c)^2 + \mathcal{O}((B - B_c)^3) \quad T > 0 \quad \text{esetén,} \quad (3.23a)$$

$$\Sigma_{11}^{--}(\mathbf{0}, 0) = 2(g\mu_B B - c_s m) = -2 \frac{c_s}{c_n + c_s} g\mu_B (B - B_c) + \mathcal{O}((B - B_c)^2) \quad T = 0 \quad \text{esetén.} \quad (3.23b)$$

A fentiekből leolvashatóak a gap exponensek.

Tekintsük azokat az egyeneseket a fázistérben, amelyeket a $[B - B_c(0)]/T = \text{const} > 0$ feltétel határoz meg! Ezek az egyenesek a fázistérben végig a P1 fázisban haladva futnak bele a kvantum kritikus pontba és egy adott egyenesen mentén haladva a crossover skálázás igaz lesz. Ekkor $\mathcal{G}_{11}^{--}(\mathbf{0}, 0) \sim T^{-\nu_0 z} \sim T^{-1}$. A korrekció a vezető szingularitáshoz T -nek gyengébb hatványával megy, esetünkben $T^{-\frac{1}{2}}$ -nel. A P1 fázis ezen egyeneseit tartalmazó részét a $[B - B_c(0)]/T = \text{const} = 0$ egyenes határolja és $\mathcal{G}_{11}^{--}(\mathbf{0}, 0) \sim T^{-\frac{3}{2}}$. Ez egybevág azzal, hogy a P2 és P1 fázis határát megadó görbe érintője vízszintes zérus hőmérsékleten.

3.3. Ferromágneses kölcsönhatás esete

Ferromágneses esetben $c_s < 0$ és a $\zeta_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ spinor kielégíti a (2.17) konzisztencia feltételt $\mu = c_n n + c_s m - \hbar\omega_L$ kémiai potenciál mellett, ahol $n = n_c + n'_+ + n'_0 + n'_-$ a teljes részecskeszám és

$$m = n_c + n'_+ - n'_- \quad (3.24)$$

a rendszer teljes mágnesezettsége. A proper sajátenergiák a (3.1a) egyenletből kaphatóak meg:

$$\tilde{\Sigma}_{\alpha\gamma}^{++} = \hbar^{-1} \mu_0 \delta_{\alpha\gamma}, \quad (3.25a)$$

$$\tilde{\Sigma}_{\alpha\gamma}^{00} = \hbar^{-1} (\mu_0 - c_s m + \hbar\omega_L) \delta_{\alpha\gamma}, \quad (3.25b)$$

$$\tilde{\Sigma}_{\alpha\gamma}^{--} = \hbar^{-1} (\mu_0 - 2c_s m + 2\hbar\omega_L) \delta_{\alpha\gamma}. \quad (3.25c)$$

Ferromágneses kölcsönhatás esetén kétféle módon oldjuk meg az állapotegyenletet. Az egyik esetben az intenzív változókat rögzítjük és oldjuk meg az egyenleteket [50], a másik esetben a részecskesűrűséget rögzítjük le és ezen felül a spinfüggő kölcsönhatás erősségét jellemző paraméter, c_s értékét is változtatjuk [51]. Nyilvánvaló, hogy a két eset ugyanazokat a megoldásokat szolgáltatja, de a második eset azért is érdekes, mert ekvivalens a Bose-Einstein gázok rácsra felírt modelljével [52]. Matematikailag ez azt jelenti, hogy $c_n/c_s \rightarrow \infty$. Továbbá az is igaz, hogy a kémiai potenciál változtatása rögzített intenzív változók esetén összefüggésben áll a c_s kölcsönhatási állandó nagyságának változtatásával rögzített részecskesűrűség mellett.

3.3.1. Fázisátalakulás rögzített intenzív változók mellett

Legyen μ, B, T rögzített [50]! A (3.3) egyenleteket kell megoldanunk az n, m, n_0 mennyiségekre. Formailag ugyanazokat az egyenleteket kell megoldanunk, mint a poláris állapot P1 fázisában, de lényeges, hogy c_s most negatív. A (3.7) kifejezés továbbra is igaz marad,

a proper sajátenergiák Hartree-közelítésben

$$\tilde{\Sigma}_{11}^{++} = \Sigma_{11}^{++} = c_n n - \mu + c_s m + \hbar\omega_L, \quad (3.26a)$$

$$\tilde{\Sigma}_{11}^{00} = \Sigma_{11}^{00} = c_n n - \mu, \quad (3.26b)$$

$$\tilde{\Sigma}_{11}^{--} = \Sigma_{11}^{--} = c_n n - \mu - c_s m + \hbar\omega_L. \quad (3.26c)$$

Könnyen belátható, hogy az állapotegyenlet invariáns a következő skálátranszformációra:

$$\tilde{T} = \gamma T \quad (3.27a)$$

$$\tilde{B} = \gamma B \quad (3.27b)$$

$$\tilde{\mu} = \gamma \mu \quad (3.27c)$$

$$\tilde{n} = \gamma^{\frac{3}{2}} n \quad (3.27d)$$

$$\tilde{m} = \gamma^{\frac{3}{2}} m \quad (3.27e)$$

$$\tilde{c}_n = \gamma^{-\frac{1}{2}} \quad (3.27f)$$

$$\tilde{c}_s = \gamma^{-\frac{1}{2}} \quad (3.27g)$$

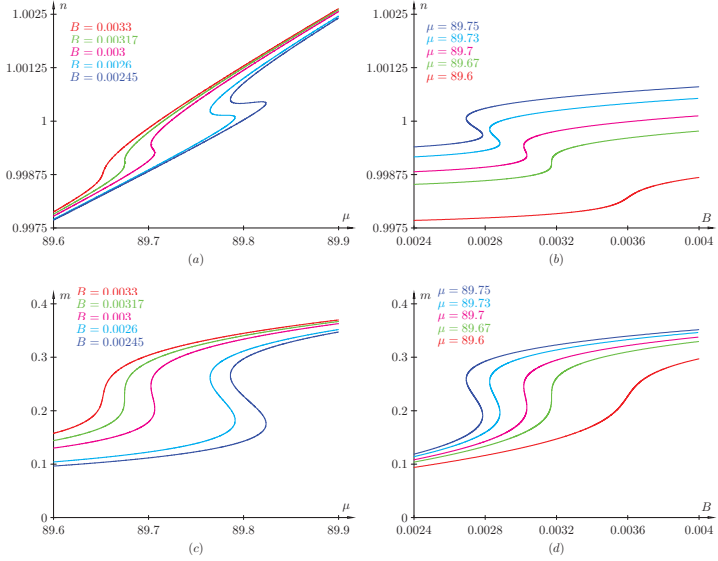
Vezessük be a T_0 hőmérsékleti skálaparamétert a következő módon:

$$T = 1.425 T_0. \quad (3.28)$$

A numerikus faktort úgy választottuk meg, hogy $n = n_{crit}^{(id)}$ vonal a 3.7.(a) ábra közepén haladjon át és

$$n_{crit}^{(id)} = \frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{(2\pi)^2(\lambda_0)^3} \quad (3.29)$$

az ideális spinor Bose–Einstein gáz kritikus sűrűsége zérus mágneses térben, míg λ_0 a T_0 hőmérsékleten vett termikus hullámhossz. A választást a későbbiekben részletesebben is



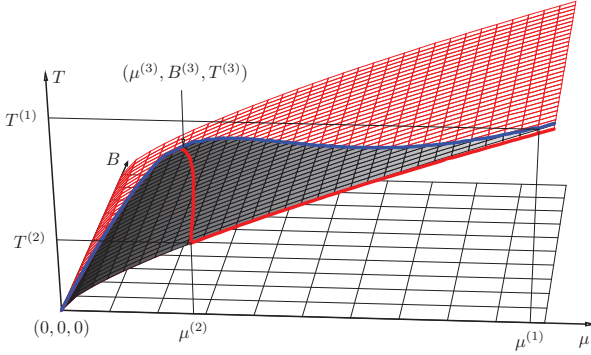
3.7. ábra. Az (a) és (c) ábra mutatja a részecskesűrűség és a mágnesezettség függését a kémiai potenciáltól a mágneses tér néhány értékére, míg a (b) és (d) ugyanezen mennyiségek függését a mágneses tértől a kémiai potenciál néhány értékére. A részecskesűrűség és mágnesezettség $n_{crit}^{(id)}$, a kémiai potenciál $k_B T_0$ és a mágneses tér $k_B T_0 / g \mu_B$ egységekben van megadva.

megindokoljuk. Célszerű bevezetni dimenziótlan kölcsönhatási paramétereket is:

$$\epsilon_n = \frac{c_n n_{crit}^{(id)}}{k_B T_0}, \quad (3.30a)$$

$$\epsilon_s = \frac{|c_s| n_{crit}^{(id)}}{k_B T_0}. \quad (3.30b)$$

Az állapotegyenlet megoldásait az 3.7. ábrán láthatjuk összegezve $\epsilon_n = 90$ és $\epsilon_s = 0.9$ esetén. A 3.7.(a) és 3.7.(c) ábrákon a részecskesűrűség és a mágnesezettség látható a mágneses tér néhány értékére. Relatívan nagy mágneses tér értékekre csak egyetlen megoldás van a részecskesűrűségnek és a mágnesezettségnek a kémiai potenciál egy adott értékére.



3.8. ábra. A ferromágneses spinor Bose gáz fázisdiagramja a (μ, B, T) térben a $c_n/|c_s| \approx 151.5$ értékére. Az egyes mennyiségek a 3.7. ábrán megadott egységekben értendőek.

Csökkentve a mágneses tér értékét egy kritikus pont jelenik meg B_c mágneses térnél és μ_c kémiai potenciálnál. Ha a mágneses tér kisebb a kritikusknál, akkor léteznek a kémiai potenciálnak olyan értékei, amelyekre az állapotegyenlet egynél több megoldást szolgáltat mind a részecskesűrűsége, mind a mágnesezettsége. Ez azt jelenti, hogy egy elsőrendű fázisátalakulás megy végbe. Hasonló következtetésekre juthatunk, ha a megnézzük a 3.7.(b) és 3.7.(d) ábrákat. A mágneses tér és a kémiai potenciál szerepeit felcserélve feltűnik egy kritikus pont, amely megegyezik az előzővel és elsőrendű fázisátalakulás megy végbe, ha a kémiai potenciál nagyobb a kritikus értékénél.

Az állapotegyenletet megoldva a felrajzolható a rendszer fázisdiagramja a (μ, B, T) fázistérben. Ez látható a 3.8. ábrán a $c_n/|c_s| \approx 151.5$ értékére. A mágneses átalakulás elsőrendű a sötétített tartományban és a kék vonal foglalja magába a mágneses kritikus pontokat. A piros felület jelzi a Bose–Einstein kondenzációt, míg a piros vonal tartalmazza a Bose–Einstein kondenzáció trikritikus pontjait. A $(\mu = 0, B = 0, T = 0)$ és a $(\mu = \mu^{(3)}, B = B^{(3)}, T = T^{(3)})$ pontok között a kék és piros vonal együtt fut. A piros vonallal illetve a $(\mu = 0, B = 0, T = 0)$ és $(\mu = \mu^{(2)}, B = 0, T = T^{(2)})$ pontok által meghatározott vonallal határolt tartományban a Bose–Einstein kondenzáció elsőrendű a mágneses átalakulással együtt. Ezen tartományon kívül a két felület elválik egymástól és

a piros jelzi a folytonos Bose–Einstein kondenzációt. A mágneses átalakulásnak is létezik egy trikritikus pontja a $(\mu^{(1)}, B = 0, T^{(1)})$ -ben. A kék vonal $\mu > \mu^{(1)}$ esetén a $B = 0$ síkban van és a folytonos mágneses átalakulás pontjait tartalmazza.

Termodinamikai deriváltak és a stabilitási mátrix

Az állapotegyenlet megoldásával megkaptuk a ferromágneses Bose gáz fázisait, ezek után felmerülhet ezen fázisok stabilitásának kérdése. Koncentráljunk most arra az esetre, amikor nincs Bose–Einstein kondenzátum. Vezessük be a következő mátrixot:

$$\chi = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_{T,B} & \left(\frac{\partial n}{\partial B}\right)_{T,\mu} \\ \left(\frac{\partial m}{\partial \mu}\right)_{T,B} & \left(\frac{\partial m}{\partial B}\right)_{T,\mu} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Ez nem más, mint a szokásos stabilitási vagy szuszeptibilitás mátrix. Egy viszonylag hosszadalmas, de egyértelmű számítással megkaphatjuk az egyes mátrixelemek kifejezéseit:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_{T,B} = \frac{P + Q + R + c_s [(P + R)Q + 4PR]}{[1 + c_n (P + Q + R)] [1 + c_s (P + R)] - c_n c_s (P - R)^2}, \quad (3.32a)$$

$$\left(\frac{\partial n}{\partial B}\right)_{T,\mu} = g\mu_B \frac{P - R}{[1 + c_n (P + Q + R)] [1 + c_s (P + R)] - c_n c_s (P - R)^2}, \quad (3.32b)$$

$$\left(\frac{\partial m}{\partial \mu}\right)_{T,B} = \frac{P - R}{[1 + c_n (P + Q + R)] [1 + c_s (P + R)] - c_n c_s (P - R)^2}, \quad (3.32c)$$

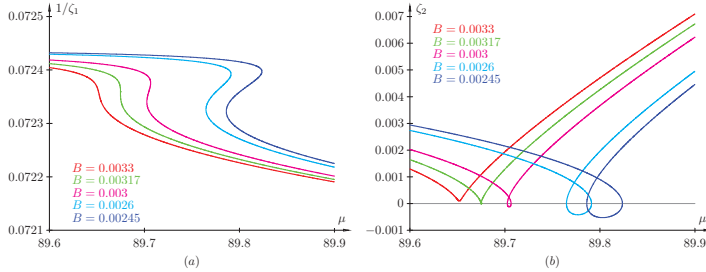
$$\left(\frac{\partial m}{\partial B}\right)_{T,\mu} = g\mu_B \frac{P + R + c_n [(P + R)Q + 4PR]}{[1 + c_n (P + Q + R)] [1 + c_s (P + R)] - c_n c_s (P - R)^2}, \quad (3.32d)$$

ahol

$$P = \frac{\beta\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{(2\pi)^2\lambda^3} F\left(\frac{1}{2}, \beta[c_n n - \mu + (c_s m - g\mu_B B)]\right), \quad (3.33a)$$

$$Q = \frac{\beta\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{(2\pi)^2\lambda^3} F\left(\frac{1}{2}, \beta[c_n n - \mu]\right), \quad (3.33b)$$

$$R = \frac{\beta\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{(2\pi)^2\lambda^3} F\left(\frac{1}{2}, \beta[c_n n - \mu - (c_s m - g\mu_B B)]\right). \quad (3.33c)$$



3.9. ábra. A szuszeptibilitási mátrix inverzének sajátértékei (ζ_1 és ζ_2) a kémiai potenciál függvényében a mágneses tér néhány értékére $c_n/|c_s| \approx 151.5$ mellett.

A stabilitási mátrix szimmetrikus és az elemei valósak, azaz a sajátértékei is valósak lesznek.

Nézzük meg az 3.7.(a) ábrát! Ha a mágneses tér elég nagy, akkor az $n(\mu)$ görbe deriváltja mindig pozitív. B értékét a kritikus értéke, B_c alá csökkentve a görbéknek lesz olyan szakasza, ahol a derivált negatív lesz. Még alacsonyabb mágneses tér értékekre az $n(\mu)$ görbék negatív meredekségű szakaszai pozitív meredekségűbe fordulnak. Ez nem jelenti azt, hogy a kémiai potenciál ezen értékeinél a rendszer stabil lenne, ezt csak a szuszeptibilitás mátrix sajátértékeinek vizsgálatával dönthetjük el, nevezetesen a sajátértékeknek pozitívnak kell lenniük. Jelölje a stabilitási mátrix inverzének sajátértékei ζ_1 és ζ_2 ! A könnyebb áttekinthetőség érdekében a ζ_1 reciprokát és a ζ_2 -t ábráztuk a 3.9. ábrán a 3.7.(a) és (c) ábráknak megfelelő esetben. Az ábrán világosan látszik, hogy hogyan válik a rendszer instabillá. Amikor a mágneses tér eléri a kritikus értékét, akkor a ζ_2 sajátérték nullává válik a kémiai potenciál kritikus értékénél, μ_c -nél. A kritikus mágneses tér alatti értékekre a ζ_2 sajátérték 3 különböző értéket is felvehet, amelyek közül egy negatív, ami a rendszer instabilitását mutatja. A ζ_1 sajátérték mindeközben lassan változik és mindvégig pozitív marad. Az előzőek világosan mutatják, hogy a fázisok stabilitásának meghatározásához nem elegendő csak a termodinamikai deriváltak vizsgálata, hanem a belőlük felépített szuszeptibilitási mátrixot kell tanulmányoznunk. A stabil fázisokat a szokásos módon, a Maxwell-konstrukció segítségével határozhatjuk meg.

3.3.2. Fázisátalakulás rögzített részecskesűrűség mellett

A rögzített részecskesűrűség melletti fázisátalakulást kétféle módon is megfogalmazhatjuk. Az egyik lehetőség, hogy az állapotegyenletet közvetlen oldjuk meg rögzített n, T, B változók mellett n_c, m, μ -re, a másik lehetőség, hogy a rögzített intenzív változók melletti megoldásokra alkalmazzuk a Maxwell-konstrukciót úgy, hogy a részecskesűrűséget előre kikötjük. Természetesen a két megoldás ekvivalens lesz egymással.

Maxwell-konstrukció

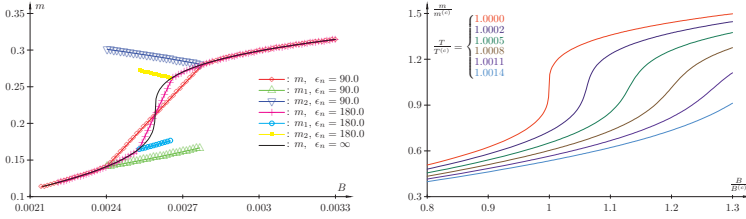
Legyen a továbbiakban a részecskesűrűség adott és változtassuk a mágneses tér értékét! Grafikusan ez azt jelenti, hogy a 3.7.(a) ábrán felrajzolt görbéket elmetsszük egy vízszintes vonallal. Amíg a mágneses tér értéke elég nagy, addig egyetlen fázis létezik, a rendszer homogén és stabil. A mágneses teret csökkentve a rendszer viselkedése n rögzített értéktől függ. Ha n megfelelően nagyobb vagy kisebb $n = n_{crit}^{(id)}$ értékénél, akkor mindvégig stabil pontokon megyünk keresztül. Ellenkező esetben a vízszintes vonal olyan pontokban metszheti el a görbéket, amelyek metastabil vagy instabil állapotokat jelentenek. Fizikailag ez azt jelenti, hogy a rendszer nem lesz homogén többé, két fázis lesz egymással egyensúlyban és n az átlagos részecskesűrűséget jelenti. A Maxwell-konstrukció egy adott mágneses tér értéke mellett megadja a két fázis közös kémiai potenciálját, illetve a két fázis részecskesűrűségét, n_1 -t és n_2 -t. Az átlagos részecskesűrűséget a következő formában írhatjuk fel:

$$n = \alpha n_1 + (1 - \alpha)n_2, \quad (3.34)$$

ami meghatározza az α paramétert. A két fázis részecskesűrűségei n_1 és n_2 , illetve az α paraméter függenek n, B és T rögzített értékeiktől. Jelölje m_1 és m_2 a mágnesezettség értékét az egyes fázisokban. Ekkor az átlagos mágnesezettség:

$$m = \alpha m_1 + (1 - \alpha)m_2. \quad (3.35)$$

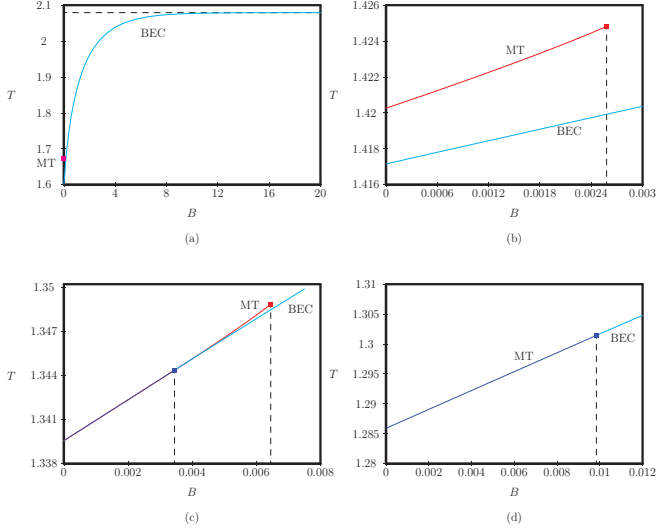
A 3.10. (a) ábrán látható a Maxwell-szerkesztés az ϵ_n néhány értékére $n = n_c^{(id)}$ ese-



3.10. ábra. (a) Az átlagos mágnesezettség a mágneses tér függvényében az ϵ_n néhány értékére $\epsilon_s = 0.9$ esetén. Az átlagos részecskesűrűséget $n = n_{crit}^{(id)}$ -nek választottuk. $\epsilon_n/\epsilon_s = \infty$ esetén a mágnesezettség görbéjének létezik végtelen meredekségű pontja. A mágnesezettséget $n_{crit}^{(id)}$, a mágneses teret $k_B T_0/g\mu_B$ egységekben adtuk meg. A (b) ábra mutatja a mágnesezettség függését a mágneses tértől a hőmérséklet néhány értékére $\epsilon_n/\epsilon_s = \infty$ esetén. $T = T_c$ esetén létezik a mágnesezettség görbéjének végtelen meredekségű pontja.

tén. A szerkesztést elvégezve megkaphatjuk az átlagos mágnesezettség mágneses tértől való függését. Látható, hogy amíg ϵ_n/ϵ_s véges, amely a (3.30) szerint megegyezik c_n/c_s -sel, addig két fázis létezik különböző mágnesezettséggel és az átlagos mágnesezettséget a (3.35) egyenlet adja meg. Az $\epsilon_n/\epsilon_s \rightarrow \infty$ értékre a rendszer homogén marad és az $m - B$ görbének végtelen meredekségű érintője jelenik meg. Ez egy mágneses fázisátalakulást jelent (rögzített részecskesűrűség esetén) $T_c = 1.425 T_0$ kritikus hőmérséklet mellett. Ez indokolta (3.28) egyenletben megadott numerikus faktor megválasztását. A numerikus faktor változtatásával még közelebbi képet kaphatunk a fázisátalakulásról. A 3.10. (b) ábrán az előző feltételek mellett, de különböző T/T_c értékek mellett ábrázoltuk a mágnesezettséget a mágneses tér függvényében. Az egyszerűség kedvéért a Maxwell-konstrukciót nélkülözve az állapotegyenletet közvetlenül oldottuk meg rögzített részecskesűrűség esetén $\epsilon_n/\epsilon_s \rightarrow \infty$ esetén.

Nézzük meg, hogy pontosan hogyan kell az állapotegyenlet a rögzített részecskesűrűség mellett vett megoldását értelmezni. Az előzőekben láttuk, hogy nem elegendő a részecskesűrűséget rögzíteni, hanem az $\epsilon \rightarrow \infty$ feltétel is szükséges. A sajátenergiák (3.26) csak a $c_n n - \mu$ kifejezésektől függenek, azaz az állapotegyenletet is erre a különbségre oldjuk meg. Ez egy szabadságot jelent a kémiai potenciál értékében, amelyet c_n rögzít le és a rögzített intenzív változók melletti megoldás vizsgálata mutatja meg, hogy c_n -nek végtelennek kell



3.11. ábra. A rendszer lehetséges fázisdiagramjai: (a) $\epsilon_s > \epsilon_s^{(1)}$, (b) $\epsilon_s^{(1)} > \epsilon_s > \epsilon_s^{(2)}$, (c) $\epsilon_s^{(2)} > \epsilon_s > \epsilon_s^{(3)}$ és (d) $\epsilon_s^{(3)} > \epsilon_s$. A sötétkék illetve piros vonal jelzi az elsőrendű Bose–Einstein kondenzációt illetve mágneses átalakulást. A (c) és (d) ábrán a sötétkék vonal a piros vonalon halad végig. A világoskék vonal mutatja a folytonos Bose–Einstein kondenzációt, míg a lila pont a folytonos mágneses átalakulást. A hőmérséklet T_0 , a mágneses tér $k_B T_0 / g \mu_B$ egységekben értendő.

lennie. A $c_n/c_s \rightarrow \infty$ esetben a kompresszibilitás eltűnik, ahogy azt a következőkben megmutatjuk és a rendszer viselkedését tisztán a spin szabadsági fokok dinamikája határozza meg. A kompresszibilitás eltűnése nem meglepő, hiszen a rendszer részecskesűrűsége rögzített. Ilyenkor a rendszert úgy képzelhetjük el, hogy az atomok egy rács pontjaiban vannak rögzítve.

3.3.3. Bose–Einstein kondenzáció és mágneses fázisátalakulás különböző erősségű spinkölcsönhatás mellett

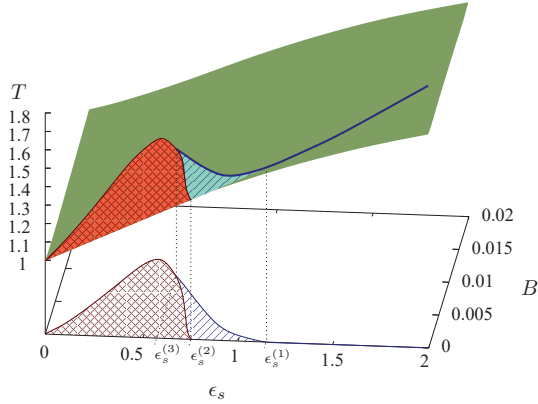
Legyen a részecskesűrűség továbbra is rögzített! Mint korábban említettük, ez megfelel annak, mintha az atomok egy rács pontjaiban lennének elhelyezve és csak a spinek között lenne kölcsönhatás [52]. Változtassuk most meg ennek az erősségét! Ha megoldjuk az állapotegyenletet, akkor (3.30b)-ben definiált ϵ_s változó értékészletét négy részre oszthatjuk fel a mágneses fázisátalakulás és a Bose–Einstein kondenzáció jellege szerint [51].

Az első tartományban, ahol ϵ_s nagyobb, mint egy bizonyos érték ($\epsilon_s > \epsilon_s^{(1)} \approx 1.22$) $B = 0$ mellett egy ferromágneses-paramágneses fázisátalakulás megy végbe $T = T_M$ hőmérsékleten, a Bose–Einstein kondenzáció hőmérséklete (T_{BEC}) felett. Egy ilyen fázisdiagram látható a 3.11.(a) ábrán $\epsilon_s = 1.4$ esetén. Mindkettő fázisátalakulás folytonos és a mágneses átalakulás csak $B = 0$ esetén létezik.

Ha $\epsilon_s < \epsilon_s^{(1)}$, akkor a mágneses átalakulás elsőrendűvé válik $B = 0$ -n, de a Bose–Einstein kondenzáció folytonos marad. Az $(\epsilon_s = \epsilon_s^{(1)}, B = 0, T = T_M)$ pont a mágneses átalakulás trikritikus pontjaként értelmezhető, hiszen elválasztja egymástól az elsőrendű és folytonos fázisátalakulás tartományait. A fázisátalakulás elsőrendűsége viszonylag kis mágneses terek esetén is megmarad, ami azt eredményezi, hogy két különböző mágnessetztségű fázis lesz egymással egyensúlyban. A mágneses átalakulás egy kritikus végpontban megszűnik, amelyet a $(\epsilon_s, B = B_c, T = T_c)$ pont ad meg, ahol B_c a kritikus mágneses tér és T_c a kritikus hőmérséklet az adott ϵ_s -re. Ha $B > B_c$, akkor mágneses átalakulás nem megy végbe.³ A Bose–Einstein kondenzáció folytonos lesz mindaddig, amíg $\epsilon_s > \epsilon_s^{(2)} \approx 0.78$. Egy ilyen fázisdiagram látható $\epsilon_s = 0.9$ esetén a 3.11.(b) ábrán.

Ha ϵ_s kisebbé válik, mint $\epsilon_s^{(2)}$, akkor a Bose–Einstein kondenzáció is elsőrendűvé válik $B = 0$ -n. Azonban $g\mu_B B \gg k_B T_0$ -ra a rendszer úgy viselkedik, mint egy nem-kölcsönható skalár gáz, amelynek az Bose–Einstein kondenzációhoz tartozó átalakulási hőmérséklete $3^{2/3} T_0$. Ez azt jelenti, hogy kell lennie egy kritikus mágneses térnek, $B_c^{(1)}$, amely elvá-

³Ehhez a fázisátalakuláshoz hasonló, azaz a rendparaméterhez kapcsolódó külső tér hatására létrejövő fázisátalakulást mutattak ki ferroelektromos BaTiO₃-ban 1953-ban [53, 54].



3.12. ábra. A rendszer teljes fázisdiagramja rögzített részecskesűrűség mellett a spin-kölcsönhatás erősségét c_s -t változtatva. A hőmérséklet T_0 , a mágneses tér $k_B T_0 / g \mu_B$ egységekben van megadva. A könnyebb áttekinthetőség érdekében a felületek le vannak vetítve a ϵ_s - B síkra. A releváns ϵ_s értékek szintén fel vannak tüntetve.[Lásd 3.11.(a)-(d)]

lasztja egymástól a kis mágneses térbeli elsőrendű és a nagy mágneses térbeli folytonos Bose–Einstein kondenzációt. $B_c^{(1)}$ egy trikritikus pontot fog meghatározni Bose-Einstein kondenzációra nézve. Amíg $\epsilon_s > \epsilon_s^{(3)} \approx 0.62$, addig létezni fog egy $B_c^{(1)}$ -nél nagyobb $B_c^{(2)}$ mágneses tér, amely felett nem lesz mágneses átalakulás. Ez az eset látható a 3.11.(c) ábrán $\epsilon_s = 0.72$ esetén.

Ha $\epsilon_s \leq \epsilon_s^{(3)}$, akkor a két kritikus mágneses tér nagysága megegyezik. A fázisdiagram a 3.11.(d) ábrán látható $\epsilon_s = 0.6$ esetén.

A fenti négy eset tárgyalása után rajzoljuk a rendszer teljes fázisdiagramját a T , B és ϵ_s változók terében! Ez látható a 3.12. ábrán. A zöld felület jelzi a folytonos, míg a piros négyzettrácsos az elsőrendű Bose–Einstein kondenzációt. A piros négyzettrácsos felület benne fekszik a világos kékén vonalazott felületben, amelyek elsőrendű mágneses átalakulások pontjait tartalmazza, a két átalakulási hőmérséklet megegyezik. Amikor a Bose-Einstein kondenzáció folytonossá válik, akkor a világos kék felület finoman a zöld felület felett halad. A vastag kék vonalon a mágneses átalakulás folytonos, az átalakulási

hőmérséklet a Bose-Einstein kondenzáció hőmérséklete felett van és $\epsilon_s > \epsilon_s^{(1)}$ esetén a vonal a $B = 0$ síkban halad. A 3.11. ábrán látható négy eset megkapható, ha elmetsszük a teljes fázisdiagramot a megfelelő ϵ_s értékeknél.

Térjünk ki kicsit részletesebben a $B = 0$ esetre! Ezt az esetet korábban már részletesen tárgyalták a mágneses átlagtér [52] és a Landau elmélet keretében [55]. Az eredményeink csak részben egyeznek meg az ott kapottakkal, nevezetesen ők azt állítják, hogy a mágneses átalakulás hőmérséklete mindig a Bose-Einstein kondenzáció hőmérséklete felett van. Ahogy ezt láttuk fenn, ez csak akkor igaz, ha a Bose-Einstein kondenzáció folytonos. Ha $\epsilon_s < \epsilon_s^{(1)}$, akkor a két (elsőrendű) fázisátalakulás hőmérséklete megegyezik, a két átalakulás egymástól elválaszthatatlanul megy végbe.

Hasonlítsuk össze a 3.8. és 3.12. ábrákat! Látható, hogy nagy hasonlóság van a kettő között a μ és ϵ_s változókat tekintve. Könnyen megérthető ezen viselkedés, ha abból indulunk ki, hogy ferromágneses kölcsönhatás esetében, Bose-Einstein kondenzációval rendelkező fázisban a kémiai potenciál:

$$\mu = (c_n n + c_s m) - g\mu_B B. \quad (3.36)$$

Rögzített részecskesűrűség esetén $c_n \rightarrow \infty$, azaz a kémiai potenciálból a $c_n n$ -nel arányos tag eltűnik, ami megmarad az c_s -sel lesz azonos rendben. A fenti összefüggés a kémiai potenciálra csak kondenzált fázisban áll fenn, de feltételezhetjük, hogy kondenzátum jelenléte nélkül is igaz, hogy $\mu - c_n n \sim \mathcal{O}(c_s)$.

4. fejezet

A Green- és korrelációs függvények szerkezete

4.1. A Green- és korrelációs függvények csoportosítása

A 2.3. fejezetben láttuk, hogy a Green-függvények eleget tesznek az általanosított Dyson–Beliaev egyenletnek (2.13). Az indexek összes lehetséges kiosztását tekintve, ez azt jelenti, hogy 36 db függvényre kell megoldani egy csatolt egyenletrendszert. Felhasználva a (2.17) konzisztencia feltétel által meghatározott ζ_r spinor alakját, az egyenletrendszer mátrixegyenletekre esik szét.

Poláris kölcsönhatás esete:

Poláris kölcsönhatás esetében, P2 fázisban a spinor alakja

$$\zeta_r = \begin{pmatrix} \zeta_+ \\ 0 \\ \zeta_- \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

ahol ζ_{\pm} az adott közelítéstől függ. A spinor ezen választása önkényes, mert a középső komponensét 0-nak választottuk. Nem bizonyítjuk, de belátható, hogy ez mindig megtehető. A nem azonosan zérus Green-függvények közül 16 illetve 4 transzformáló

dik együtt, amelyek az alábbi mátrixokba foglalhatóak össze:

$$\mathcal{G}_{\gamma\delta}^{(1)} := \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{1,1}^{++} & \mathcal{G}_{1,-1}^{++} & \mathcal{G}_{1,1}^{+-} & \mathcal{G}_{1,-1}^{+-} \\ \mathcal{G}_{-1,1}^{++} & \mathcal{G}_{-1,-1}^{++} & \mathcal{G}_{-1,1}^{+-} & \mathcal{G}_{-1,-1}^{+-} \\ \mathcal{G}_{1,1}^{-+} & \mathcal{G}_{1,-1}^{-+} & \mathcal{G}_{1,1}^{--} & \mathcal{G}_{1,-1}^{--} \\ \mathcal{G}_{-1,1}^{-+} & \mathcal{G}_{-1,-1}^{-+} & \mathcal{G}_{-1,1}^{--} & \mathcal{G}_{-1,-1}^{--} \end{bmatrix}_{\gamma\delta} \quad (4.2a)$$

és

$$\mathcal{G}_{\gamma\delta}^{(2)} := \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{1,1}^{00} & \mathcal{G}_{1,-1}^{00} \\ \mathcal{G}_{-1,1}^{00} & \mathcal{G}_{-1,-1}^{00} \end{bmatrix}_{\gamma\delta}. \quad (4.2b)$$

Ferromágneses kölcsönhatás esete:

Ferromágneses esetben a spinor alakja

$$\zeta_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

függetlenül az adott közelítéstől. Nem azonosan zérus Green-függvény 12 van. Ezek közül 3×4 transzformálódik együtt és az alábbi mátrixok adódnak:

$$\mathcal{G}_{\gamma\delta}^{(1)} := \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{1,1}^{++} & \mathcal{G}_{1,-1}^{++} \\ \mathcal{G}_{-1,1}^{++} & \mathcal{G}_{-1,-1}^{++} \end{bmatrix}_{\gamma\delta}, \quad (4.4a)$$

$$\mathcal{G}_{\gamma\delta}^{(2)} := \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{1,1}^{00} & \mathcal{G}_{1,-1}^{00} \\ \mathcal{G}_{-1,1}^{00} & \mathcal{G}_{-1,-1}^{00} \end{bmatrix}_{\gamma\delta}, \quad (4.4b)$$

$$\mathcal{G}_{\gamma\delta}^{(3)} := \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{1,1}^{--} & \mathcal{G}_{1,-1}^{--} \\ \mathcal{G}_{-1,1}^{--} & \mathcal{G}_{-1,-1}^{--} \end{bmatrix}_{\gamma\delta}. \quad (4.4c)$$

Ezek után a (2.13) egyenlet a

$$\underline{\underline{\mathcal{G}}}^{(n)} = \underline{\underline{\mathcal{G}}}_{(0)}^{(n)} + \underline{\underline{\mathcal{G}}}_{(0)}^{(n)} \underline{\underline{\Sigma}}^{(n)} \underline{\underline{\mathcal{G}}}^{(n)} \quad (4.5)$$

egyenletekre esik szét (n összes lehetséges értékére) és a $\underline{\underline{\Sigma}}^{(n)}$ sajátenergia mátrixokat Green-függvények mátrixainak analógiájára vezetjük be mind a poláris, mind a ferromágneses esetben.

A (4.5) egy egyszerű mátrixegyenlet, amelynek megoldására kapjuk:

$$\underline{\underline{\mathcal{G}}}^{(n)} = \left[\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\mathcal{G}}}_{(0)}^{(n)} \underline{\underline{\Sigma}}^{(n)} \right]^{-1} \underline{\underline{\mathcal{G}}}_{(0)}^{(n)}. \quad (4.6)$$

A (4.5) egyenlet megoldásának kulcsa a sajátenergiák ismerete. Közelítsük meg egy kicsit más szempontból ezt. Tekintsük a sajátenergiák egy tetszőleges felbontását a következő módon:

$$\Sigma_{\alpha\gamma}^{rs} = \Sigma_{\alpha\gamma}^{(1)rs} + \Sigma_{\alpha\gamma}^{(2)rs}. \quad (4.7)$$

Bevezetve a

$$\mathcal{G}_{\alpha\gamma}^{(1)rs} = \mathcal{G}_{(0)\alpha\gamma}^{rs} + \mathcal{G}_{(0)\alpha\sigma}^{rr'} \Sigma_{\sigma\rho}^{(1)r's'} \mathcal{G}_{\rho\gamma}^{(1)s's} \quad (4.8)$$

propagátort a teljes Green-függvény a következő alakban írható fel:

$$\mathcal{G}_{\alpha\gamma}^{rs} = \mathcal{G}_{\alpha\gamma}^{(1)rs} + \mathcal{G}_{\alpha\sigma}^{(1)rr'} \Sigma_{\sigma\rho}^{(2)r's'} \mathcal{G}_{\rho\gamma}^{s's}. \quad (4.9)$$

Ezen gondolatmenetet alkalmazva a sajátenergia proper illetve improper részekre való felbontásánál kapjuk, hogy

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\gamma}^{rs} = \mathcal{G}_{(0)\alpha\gamma}^{rs} + \mathcal{G}_{(0)\alpha\sigma}^{rr'} \tilde{\Sigma}_{\sigma\rho}^{r's'} \tilde{\mathcal{G}}_{\rho\gamma}^{s's}, \quad (4.10a)$$

$$\mathcal{G}_{\alpha\gamma}^{rs} = \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\gamma}^{rs} + \tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\sigma}^{rr'} M_{\sigma\rho}^{r's'} \mathcal{G}_{\rho\gamma}^{s's}, \quad (4.10b)$$

ahol $\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\gamma}^{rs}$ a proper Green-függvény, azaz nem esik szét, ha elvágunk benne egy kölcsönhatási vonalat. Ezt a szabad Green-függvénytől megkülönböztetve egyetlen megvastagított vonal-

lal jelöljük. A Green-függvények meghatározhatóak közvetlenül a (4.6) egyenletből, de célszerűbb közvetett módon a proper Green-függvényeken keresztül kiszámolni őket, mert a proper Green-függvényeket felhasználjuk a sajátenergiák és polarizációk meghatározásában. A sajátenergiák és a polarizációk diagramjaiban ezek használata tulajdonképpen nem más, mint számos diagram automatikus felösszegzése, így proper Green-függvények és sajátenergiák önkonzisztens módon meghatározzák egymást.

Az általánosított korrelációs függvények elegendő tesznek a (2.14) egyenletnek. Az indexek összes kiosztását tekintve 81 általánosított korrelációs függvény létezik, azaz ennyi függvényre kell megoldani a csatolt egyenletrendszert. Az egyenletrendszer mátrixegyenletekké való szétírása kevésbé egyértelmű, mint a Green-függvények esetén. A spinor alakján kívül figyelembe kell venni a lehetséges proper Green-függvények kifejezéseit is.

Poláris kölcsönhatás esete, P2 fázis:

Nem azonosan zérus általánosított korrelációs függvény 41 van. Ezek közül 25 illetve 16 transzformálódik együtt, így az alábbi mátrixokat vezethetjük be.

$$D_{ab}^{(1)} = \begin{bmatrix} D_{++}^{++} & D_{00}^{++} & D_{--}^{++} & D_{+-}^{++} & D_{-+}^{++} \\ D_{++}^{00} & D_{00}^{00} & D_{--}^{00} & D_{+-}^{00} & D_{-+}^{00} \\ D_{++}^{--} & D_{00}^{--} & D_{--}^{--} & D_{+-}^{--} & D_{-+}^{--} \\ D_{++}^{+-} & D_{00}^{+-} & D_{--}^{+-} & D_{+-}^{+-} & D_{-+}^{+-} \\ D_{++}^{+-} & D_{00}^{+-} & D_{--}^{+-} & D_{+-}^{+-} & D_{-+}^{+-} \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.11a)$$

$$\Pi_{ab}^{(1)} = \begin{bmatrix} \Pi_{++}^{++} & \Pi_{00}^{++} & \Pi_{--}^{++} & \Pi_{+-}^{++} & \Pi_{-+}^{++} \\ \Pi_{++}^{00} & \Pi_{00}^{00} & \Pi_{--}^{00} & \Pi_{+-}^{00} & \Pi_{-+}^{00} \\ \Pi_{++}^{--} & \Pi_{00}^{--} & \Pi_{--}^{--} & \Pi_{+-}^{--} & \Pi_{-+}^{--} \\ \Pi_{++}^{+-} & \Pi_{00}^{+-} & \Pi_{--}^{+-} & \Pi_{+-}^{+-} & \Pi_{-+}^{+-} \\ \Pi_{++}^{+-} & \Pi_{00}^{+-} & \Pi_{--}^{+-} & \Pi_{+-}^{+-} & \Pi_{-+}^{+-} \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.11b)$$

$$C_{ab}^{(1)} = \begin{bmatrix} c_n + c_s & c_n & c_n - c_s & 0 & 0 \\ c_n & c_n & c_n & 0 & 0 \\ c_n - c_s & c_n & c_n + c_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.11c)$$

$$D_{ab}^{(2)} = \begin{bmatrix} D_{+0}^{0+} & D_{0-}^{0+} & D_{0+}^{0+} & D_{-0}^{0+} \\ D_{+0}^{-0} & D_{0-}^{-0} & D_{0+}^{-0} & D_{-0}^{-0} \\ D_{+0}^{+0} & D_{0-}^{+0} & D_{0+}^{+0} & D_{-0}^{+0} \\ D_{+0}^{0-} & D_{0-}^{0-} & D_{0+}^{0-} & D_{-0}^{0-} \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.11d)$$

$$\Pi_{ab}^{(2)} = \begin{bmatrix} \Pi_{+0}^{0+} & \Pi_{0-}^{0+} & \Pi_{0+}^{0+} & \Pi_{-0}^{0+} \\ \Pi_{+0}^{-0} & \Pi_{0-}^{-0} & \Pi_{0+}^{-0} & \Pi_{-0}^{-0} \\ \Pi_{+0}^{+0} & \Pi_{0-}^{+0} & \Pi_{0+}^{+0} & \Pi_{-0}^{+0} \\ \Pi_{+0}^{0-} & \Pi_{0-}^{0-} & \Pi_{0+}^{0-} & \Pi_{-0}^{0-} \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.11e)$$

$$C_{ab}^{(2)} = \begin{bmatrix} c_s & c_s & 0 & 0 \\ c_s & c_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_s & c_s \\ 0 & 0 & c_s & c_s \end{bmatrix}_{ab} \quad (4.11f)$$

Ferromágneses eset:

Nem azonosan zérus általánosított korrelációs függvény 19 van. Közül 1×9 , 2×4 és 2×1 transzformálódik együtt, így az alábbi mátrixokat vezethetjük be.

$$D_{ab}^{(1)} = \begin{bmatrix} D_{++}^{++} & D_{00}^{++} & D_{--}^{++} \\ D_{++}^{00} & D_{00}^{00} & D_{--}^{00} \\ D_{++}^{--} & D_{00}^{--} & D_{--}^{--} \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.12a)$$

$$\Pi_{ab}^{(1)} = \begin{bmatrix} \Pi_{++}^{++} & \Pi_{00}^{++} & \Pi_{--}^{++} \\ \Pi_{++}^{00} & \Pi_{00}^{00} & \Pi_{--}^{00} \\ \Pi_{++}^{--} & \Pi_{00}^{--} & \Pi_{--}^{--} \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.12b)$$

$$C_{ab}^{(1)} = \begin{bmatrix} c_n + c_s & c_n & c_n - c_s \\ c_n & c_n & c_n \\ c_n - c_s & c_n & c_n + c_s \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.12c)$$

$$D_{ab}^{(2)} = \begin{bmatrix} D_{+0}^{0+} & D_{0-}^{0+} \\ D_{+0}^{-0} & D_{0-}^{-0} \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.12d)$$

$$\Pi_{ab}^{(2)} = \begin{bmatrix} \Pi_{+0}^{0+} & \Pi_{0-}^{0+} \\ \Pi_{+0}^{-0} & \Pi_{0-}^{-0} \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.12e)$$

$$C_{ab}^{(2)} = \begin{bmatrix} c_s & c_s \\ c_s & c_s \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.12f)$$

$$D_{ab}^{(3)} = \begin{bmatrix} D_{0+}^{+0} & D_{-0}^{+0} \\ D_{0+}^{0-} & D_{-0}^{0-} \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.12g)$$

$$\Pi_{ab}^{(3)} = \begin{bmatrix} \Pi_{0+}^{+0} & \Pi_{-0}^{+0} \\ \Pi_{0+}^{0-} & \Pi_{-0}^{0-} \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.12h)$$

$$C_{ab}^{(3)} = \begin{bmatrix} c_s & c_s \\ c_s & c_s \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.12i)$$

$$D_{ab}^{(4)} = D_{+-}^{-+}, \quad (4.12j)$$

$$\Pi_{ab}^{(4)} = \Pi_{+-}^{-+}, \quad (4.12k)$$

$$C_{ab}^{(4)} = 0, \quad (4.12l)$$

$$D_{ab}^{(5)} = D_{-+}^{+-}, \quad (4.12m)$$

$$\Pi_{ab}^{(5)} = \Pi_{-+}^{+-}, \quad (4.12n)$$

$$C_{ab}^{(5)} = 0 \quad (4.12o)$$

Ezek után a (2.14) egyenlet

$$\underline{\underline{D}}^{(n)} = \hbar \underline{\underline{\Pi}}^{(n)} + \underline{\underline{\Pi}}^{(n)} \underline{\underline{C}}^{(n)} \underline{\underline{D}}^{(n)}, \quad (4.13a)$$

egyenletekre esik szét n összes lehetséges értékeire. A fent bevezetett mátrixok meghatározásával az általánosított korrelációs függvényeket kaphatjuk meg, azonban minket a fizikailag releváns (sűrűség-, spinsűrűség-, stb.) korrelációs függvények érdekelnek. Ezek egy egyszerű módszerrel megkaphatóak, ha tekintjük az egyes kölcsönhatási mátrixok sajátvektorait és ezekkel jobbról illetve balról megszorozzuk az általánosított korrelációs függvényekhez tartozó mátrixokat. Ekkor egy olyan egyenletrendszert kapunk, amelyben a fizikailag fontos korrelációs-függvények – amelyek az általánosítottok lineárkombinációi – jelennek meg közvetlen.

Poláris kölcsönhatás esete, P2 fázis:

A $C^{(1)}$ mátrixhoz tartozó sajátvektorok:

$$\underline{\underline{\xi}}_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\xi}}_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\xi}}_p = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\xi}_Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\xi}_{-Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Ekkor projektoros felbontásban

$$\underline{C}^{(1)} = 3 c_n \underline{\xi}_n \circ \underline{\xi}_n + 2 c_s \underline{\xi}_z \circ \underline{\xi}_z. \quad (4.15)$$

A $C^{(2)}$ mátrixhoz tartozó sajátvektorok:

$$\begin{aligned} \underline{\xi}_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \underline{\xi}'_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \underline{\xi}_- &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \underline{\xi}'_- &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.16)$$

és a projektoros felbontásban

$$\underline{C}^{(2)} = 2 c_s \underline{\xi}_+ \circ \underline{\xi}_+ + 2 c_s \underline{\xi}_- \circ \underline{\xi}_-. \quad (4.17)$$

A sajátvektorok segítségével könnyen felírhatóak a minket érdeklő korrelációs függvények:

$$D_{nn} = 3 \underline{\xi}_n \underline{D}^{(1)} \underline{\xi}_n, \quad (4.18a)$$

$$D_{nz} = \sqrt{6} \underline{\xi}_n \underline{D}^{(1)} \underline{\xi}_z, \quad (4.18b)$$

$$D_{zz} = 2 \underline{\xi}_z \underline{D}^{(1)} \underline{\xi}_z, \quad (4.18c)$$

$$D_{nQ} = 2 \sqrt{3} \underline{\xi}_{zn} \underline{D}^{(1)} \underline{\xi}_Q, \quad (4.18d)$$

$$D_{zQ} = 2 \sqrt{2} \underline{\xi}_z \underline{D}^{(1)} \underline{\xi}_Q, \quad (4.18e)$$

$$D_{n-Q} = 2 \sqrt{3} \underline{\xi}_{zn} \underline{D}^{(1)} \underline{\xi}_{-Q}, \quad (4.18f)$$

$$D_{z-Q} = 2 \sqrt{2} \underline{\xi}_z \underline{D}^{(1)} \underline{\xi}_{-Q}, \quad (4.18g)$$

$$D_{QQ} = 4 \underline{\xi}_Q \underline{D}^{(1)} \underline{\xi}_Q, \quad (4.18h)$$

$$D_{Q-Q} = 4 \underline{\xi}_Q \underline{D}^{(1)} \underline{\xi}_{-Q}, \quad (4.18i)$$

$$D_{-Q-Q} = 4 \underline{\xi}_{-Q} \underline{D}^{(1)} \underline{\xi}_{-Q}, \quad (4.18j)$$

$$D_{++} = 4 \underline{\xi}_+ \underline{D}^{(2)} \underline{\xi}_+, \quad (4.18k)$$

$$D_{+-} = 4 \underline{\xi}_+ \underline{D}^{(2)} \underline{\xi}_-, \quad (4.18l)$$

$$D_{--} = 4 \underline{\xi}_- \underline{D}^{(2)} \underline{\xi}_-. \quad (4.18m)$$

A jobbról illetve balról való beszorzások után a (4.13) szétesik a következő egyenletrendszerekre:

$\underline{D}^{(1)}$ -ből adódó egyenletek:

$$D_{nn} = \hbar \Pi_{nn} + c_n \Pi_{nn} D_{nn} + c_s \Pi_{nz} D_{nz}, \quad (4.19a)$$

$$D_{nz} = \hbar \Pi_{nz} + c_n \Pi_{nn} D_{nz} + c_s \Pi_{nz} D_{zz}, \quad (4.19b)$$

$$D_{zz} = \hbar \Pi_{zz} + c_n \Pi_{nz} D_{nz} + c_s \Pi_{zz} D_{zz}, \quad (4.19c)$$

$$D_{nQ} = \hbar \Pi_{nQ} + c_n \Pi_{nn} D_{nQ} + c_s \Pi_{nz} D_{zQ}, \quad (4.20a)$$

$$D_{zQ} = \hbar \Pi_{zQ} + c_n \Pi_{nz} D_{nQ} + c_s \Pi_{zz} D_{zQ}, \quad (4.20b)$$

$$D_{n-Q} = \hbar \Pi_{n-Q} + c_n \Pi_{nn} D_{n-Q} + c_s \Pi_{nz} D_{z-Q}, \quad (4.21a)$$

$$D_{z-Q} = \hbar \Pi_{z-Q} + c_n \Pi_{nz} D_{n-Q} + c_s \Pi_{zz} D_{z-Q}. \quad (4.21b)$$

A fennmaradó korrelációs függvények nem lesznek függetlenek:

$$D_{QQ} = \hbar \Pi_{QQ} + c_n \Pi_{nQ} D_{nQ} + c_s \Pi_{zQ} D_{zQ}, \quad (4.22a)$$

$$D_{Q-Q} = \hbar \Pi_{Q-Q} + c_n \Pi_{nQ} D_{n-Q} + c_s \Pi_{zQ} D_{z-Q}, \quad (4.22b)$$

$$D_{-Q-Q} = \hbar \Pi_{-Q-Q} + c_n \Pi_{n-Q} D_{n-Q} + c_s \Pi_{z-Q} D_{z-Q}, \quad (4.22c)$$

ami azt jelenti, hogy a kvadrupolár-spinhullám gerjesztés megegyezik a sűrűség-hullám- és egyben a spinsűrűség-hullám gerjesztéssel is.

$D^{(2)}$ -ből adódó egyenletek:

A spinhullám módust megadó korrelációs függvények mind összekapcsolódnak:

$$D_{+++} = \hbar \Pi_{+++} + \frac{c_s}{2} \Pi_{++} D_{++} + \frac{c_s}{2} \Pi_{+-} D_{+-}, \quad (4.23a)$$

$$D_{+-} = \hbar \Pi_{+-} + \frac{c_s}{2} \Pi_{++} D_{+-} + \frac{c_s}{2} \Pi_{+-} D_{--}, \quad (4.23b)$$

$$D_{--} = \hbar \Pi_{--} + \frac{c_s}{2} \Pi_{+-} D_{+-} + \frac{c_s}{2} \Pi_{--} D_{--}. \quad (4.23c)$$

A fenti egyenletrendszerek megoldásai a következők lesznek:

$$D_{nn} = \hbar \frac{\Pi_{nn} - c_s (\Pi_{nn} \Pi_{zz} - \Pi_{nz}^2)}{(1 - c_n \Pi_{nn}) (1 - c_s \Pi_{zz}) - c_n c_s \Pi_{nz}^2}, \quad (4.24a)$$

$$D_{nz} = \hbar \frac{\Pi_{nz}}{(1 - c_n \Pi_{nn}) (1 - c_s \Pi_{zz}) - c_n c_s \Pi_{nz}^2}, \quad (4.24b)$$

$$D_{zz} = \hbar \frac{\Pi_{zz} - c_n (\Pi_{zz} \Pi_{nn} - \Pi_{nz}^2)}{(1 - c_n \Pi_{nn}) (1 - c_s \Pi_{zz}) - c_n c_s \Pi_{nz}^2}, \quad (4.24c)$$

$$D_{nQ} = \hbar \frac{\Pi_{nQ} - c_s (\Pi_{nQ} \Pi_{zz} - \Pi_{nz} \Pi_{zQ})}{(1 - c_n \Pi_{nn}) (1 - c_s \Pi_{zz}) - c_n c_s \Pi_{nz}^2}, \quad (4.24d)$$

$$D_{zQ} = \hbar \frac{\Pi_{zQ} - c_n (\Pi_{zQ} \Pi_{nn} - \Pi_{nz} \Pi_{nQ})}{(1 - c_n \Pi_{nn}) (1 - c_s \Pi_{zz}) - c_n c_s \Pi_{nz}^2}, \quad (4.24e)$$

$$D_{n-Q} = \hbar \frac{\Pi_{n-Q} - c_s (\Pi_{n-Q} \Pi_{zz} - \Pi_{nz} \Pi_{z-Q})}{(1 - c_n \Pi_{nn}) (1 - c_s \Pi_{zz}) - c_n c_s \Pi_{nz}^2}, \quad (4.24f)$$

$$D_{z-Q} = \hbar \frac{\Pi_{z-Q} - c_n (\Pi_{z-Q} \Pi_{nn} - \Pi_{nz} \Pi_{n-Q})}{(1 - c_n \Pi_{nn}) (1 - c_s \Pi_{zz}) - c_n c_s \Pi_{nz}^2}, \quad (4.24g)$$

$$\begin{aligned} D_{QQ} &= \hbar \{ \Pi_{QQ} - c_n (\Pi_{QQ} \Pi_{nn} - \Pi_{nQ}^2) - c_s (\Pi_{QQ} \Pi_{zz} - \Pi_{zQ}^2) \\ &\quad + c_n c_s [\Pi_{QQ} (\Pi_{nn} \Pi_{zz} - \Pi_{nz}^2) - \Pi_{nQ} (\Pi_{zz} \Pi_{nQ} - \Pi_{nz} \Pi_{zQ}) \\ &\quad - \Pi_{zQ} (\Pi_{nn} \Pi_{zQ} - \Pi_{nz} \Pi_{nQ})] \} / [(1 - c_n \Pi_{nn}) (1 - c_s \Pi_{zz}) - c_n c_s \Pi_{nz}^2], \quad (4.24h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{Q-Q} &= \hbar \{ \Pi_{Q-Q} - c_n (\Pi_{Q-Q} \Pi_{nn} - \Pi_{nQ} \Pi_{n-Q}) - c_s (\Pi_{Q-Q} \Pi_{zz} - \Pi_{zQ} \Pi_{z-Q}) \\ &\quad + c_n c_s [\Pi_{Q-Q} (\Pi_{nn} \Pi_{zz} - \Pi_{nz}^2) - \Pi_{nQ} (\Pi_{zz} \Pi_{n-Q} - \Pi_{nz} \Pi_{z-Q}) \\ &\quad - \Pi_{zQ} (\Pi_{nn} \Pi_{z-Q} - \Pi_{nz} \Pi_{n-Q})] \} / [(1 - c_n \Pi_{nn}) (1 - c_s \Pi_{zz}) - c_n c_s \Pi_{nz}^2], \quad (4.24i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{-Q-Q} &= \hbar \{ \Pi_{-Q-Q} - c_n (\Pi_{-Q-Q} \Pi_{nn} - \Pi_{n-Q}^2) - c_s (\Pi_{-Q-Q} \Pi_{zz} - \Pi_{z-Q}^2) \\ &\quad + c_n c_s [\Pi_{-Q-Q} (\Pi_{nn} \Pi_{zz} - \Pi_{nz}^2) - \Pi_{n-Q} (\Pi_{zz} \Pi_{n-Q} - \Pi_{nz} \Pi_{z-Q}) \\ &\quad - \Pi_{z-Q} (\Pi_{nn} \Pi_{z-Q} - \Pi_{nz} \Pi_{n-Q})] \} / [(1 - c_n \Pi_{nn}) (1 - c_s \Pi_{zz}) - c_n c_s \Pi_{nz}^2], \quad (4.24j) \end{aligned}$$

$$D_{++} = \hbar \frac{\Pi_{++} - \frac{c_s}{2} (\Pi_{++} \Pi_{--} - \Pi_{+-}^2)}{(1 - \frac{c_s}{2} \Pi_{++}) (1 - \frac{c_s}{2} \Pi_{--}) - (\frac{c_s}{2})^2 \Pi_{+-}^2}, \quad (4.24k)$$

$$D_{+-} = \hbar \frac{\Pi_{+-}}{(1 - \frac{c_s}{2} \Pi_{++}) (1 - \frac{c_s}{2} \Pi_{--}) - (\frac{c_s}{2})^2 \Pi_{+-}^2}, \quad (4.24l)$$

$$D_{--} = \hbar \frac{\Pi_{--} - \frac{c_s}{2} (\Pi_{--} \Pi_{++} - \Pi_{+-}^2)}{(1 - \frac{c_s}{2} \Pi_{++}) (1 - \frac{c_s}{2} \Pi_{--}) - (\frac{c_s}{2})^2 \Pi_{+-}^2}. \quad (4.24m)$$

Ferromágneses eset:

A $C^{(1)}$ mátrixhoz tartozó sajátvektorok:

$$\underline{\chi}_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\chi}_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\chi}_p = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor projektoros felbontásban

$$\underline{\underline{C}}^{(1)} = 3c_n \underline{\chi}_n \circ \underline{\chi}_n + 2c_s \underline{\chi}_z \circ \underline{\chi}_z. \quad (4.25)$$

A $C^{(2)}$ mátrixhoz tartozó sajátvektorok:

$$\underline{\chi}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\chi}'_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Projektoros felbontásban

$$\underline{\underline{C}}^{(2)} = 2c_s \underline{\chi}_+ \circ \underline{\chi}_+. \quad (4.27)$$

A $C^{(3)}$ mátrix sajátvektorai:

$$\underline{\chi}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\chi}'_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

és a projektoros felbontásban

$$\underline{\underline{C}}^{(3)} = 2c_s \underline{\chi}_- \circ \underline{\chi}_-. \quad (4.29)$$

A $C^{(4)}$ és $C^{(5)}$ mátrixok azonosan 0 számok, a hozzájuk tartozó sajátvektorok egydimenziósak $\underline{\chi}_Q = \underline{\chi}_{-Q} = 1$. A fizikailag releváns korrelációs függvényeket a poláris

kölcsönhatás esetéhez nagyon hasonló módon kaphatjuk meg:

$$D_{nn} = 3 \underline{\chi}_n \underline{\underline{D}}^{(1)} \underline{\chi}_n, \quad (4.30a)$$

$$D_{nz} = \sqrt{6} \underline{\chi}_n \underline{\underline{D}}^{(1)} \underline{\chi}_z, \quad (4.30b)$$

$$D_{zz} = 2 \underline{\chi}_z \underline{\underline{D}}^{(1)} \underline{\chi}_z, \quad (4.30c)$$

$$D_{nQ} = 0, \quad (4.30d)$$

$$D_{zQ} = 0, \quad (4.30e)$$

$$D_{n-Q} = 0, \quad (4.30f)$$

$$D_{z-Q} = 0, \quad (4.30g)$$

$$D_{QQ} = 4 \underline{\chi}_Q \underline{\underline{D}}^{(4)} \underline{\chi}_Q, \quad (4.30h)$$

$$D_{Q-Q} = 0, \quad (4.30i)$$

$$D_{-Q-Q} = 4 \underline{\chi}_{-Q} \underline{\underline{D}}^{(5)} \underline{\chi}_{-Q}, \quad (4.30j)$$

$$D_{++} = 4 \underline{\chi}_+ \underline{\underline{D}}^{(2)} \underline{\chi}_+, \quad (4.30k)$$

$$D_{+-} = 0, \quad (4.30l)$$

$$D_{--} = 4 \underline{\chi}_- \underline{\underline{D}}^{(3)} \underline{\chi}_-. \quad (4.30m)$$

A sajátvektorokkal jobbról illetve balról való beszorzások után a következő egyenletek adódnak:

$$D_{nn} = \hbar \Pi_{nn} + c_n \Pi_{nn} D_{nn} + c_s \Pi_{nz} D_{nz}, \quad (4.31a)$$

$$D_{nz} = \hbar \Pi_{nz} + c_n \Pi_{nn} D_{nz} + c_s \Pi_{nz} D_{zz}, \quad (4.31b)$$

$$D_{zz} = \hbar \Pi_{zz} + c_n \Pi_{nz} D_{nz} + c_s \Pi_{zz} D_{zz}, \quad (4.31c)$$

Ez megegyezik azzal, amit a poláris kölcsönhatás esetén, a P2 fázisban kaptunk. A

fennmaradó egyenletek egyszerűek lesznek:

$$D_{++} = \hbar \Pi_{++} + \frac{c_s}{2} \Pi_{++} D_{++}, \quad (4.32a)$$

$$D_{--} = \hbar \Pi_{--} + \frac{c_s}{2} \Pi_{--} D_{--}, \quad (4.32b)$$

$$D_{QQ} = \hbar \Pi_{QQ}, \quad (4.32c)$$

$$D_{-Q-Q} = \hbar \Pi_{-Q-Q}. \quad (4.32d)$$

Megoldva a fentieket a következő eredményeket kapjuk:

$$D_{nn} = \hbar \frac{\Pi_{nn} - c_s (\Pi_{nn} \Pi_{zz} - \Pi_{nz}^2)}{(1 - c_n \Pi_{nn}) (1 - c_s \Pi_{zz}) - c_n c_s \Pi_{nz}^2}, \quad (4.33a)$$

$$D_{nz} = \hbar \frac{\Pi_{nz}}{(1 - c_n \Pi_{nn}) (1 - c_s \Pi_{zz}) - c_n c_s \Pi_{nz}^2}, \quad (4.33b)$$

$$D_{zz} = \hbar \frac{\Pi_{zz} - c_n (\Pi_{zz} \Pi_{nn} - \Pi_{nz}^2)}{(1 - c_n \Pi_{nn}) (1 - c_s \Pi_{zz}) - c_n c_s \Pi_{nz}^2}, \quad (4.33c)$$

$$D_{++} = \hbar \frac{\Pi_{++}}{1 - \frac{c_s}{2} \Pi_{++}}, \quad (4.33d)$$

$$D_{--} = \hbar \frac{\Pi_{--}}{1 - \frac{c_s}{2} \Pi_{--}}, \quad (4.33e)$$

$$D_{QQ} = \hbar \Pi_{QQ}, \quad (4.33f)$$

$$D_{-Q-Q} = \hbar \Pi_{-Q-Q}. \quad (4.33g)$$

Látható, hogy a poláris kölcsönhatás P2 fázisához képest egyes keresztkorrelációs függvények azonosan zérussá válnak. Ennek oka az, hogy csak olyan keresztkorrelációs függvények jelenhetnek meg, amelyeket úgy kapunk meg, hogy a jobbról illetve balról szorzó sajátvektorokat azonos altérből vesszük ki. Ezzel egy egyszerű feltételt kapunk arra, hogy melyik keresztkorrelációs függvény lesz azonosan zérus. Az is látható, hogy a poláris kölcsönhatás P2 fázisának alterei előállíthatóak a ferromágneses eset altereinek direktösszegeiként is. Jelölje a poláris illetve ferromágneses eset altereit $P^{(n)}$ és $F^{(m)}$ n, m összes lehetséges értékeire. Ekkor $P^{(1)} = F^{(1)} \oplus F^{(4)} \oplus F^{(5)}$ és $P^{(2)} = F^{(2)} \oplus F^{(3)}$.

A fenti eredmények függetlenek a közelítés rendjétől, csak a kondenzátum spinorának alakjától és a kétrészecske kölcsönhatás szerkezetétől függenek. Alkalmazásként két esetre számoljuk ki a Green- és korrelációs függvényeket, illetve a hozzájuk tartozó elemi gerjesztéseket:

–Bogoliubov-közelítésben, amely a nulla és a közel nulla hőmérsékletű rendszer esetén alkalmazható

–Hartree-közelítésben, amely egy véges hőmérsékletű leírását adja a rendszernek és a Bose–Einstein kondenzáció hőmérséklete alatt és felett egyaránt alkalmazható

Végig feltesszük, hogy a rendszer sűrűsége kicsi, azaz $\frac{a}{r_0} \ll 1$, ahol a az s -hullámú szórási hossz és r_0 a részecskék átlagos távolsága. A (1.17) kétrészecske kölcsönhatásban szereplő paramétereket a spinor Bose-gázoknál szokásos módon választjuk meg [30, 31]:

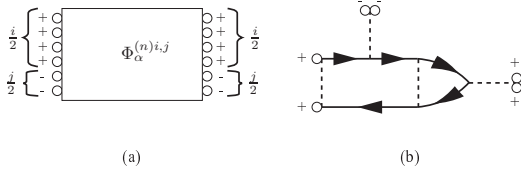
$$c_n = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \frac{a_0 + 2a_2}{3}, \quad (4.34a)$$

$$c_s = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \frac{a_2 - a_0}{3}, \quad (4.34b)$$

ahol a_0 és a_2 a 0 illetve 2 nagyságú spin csatorna s -hullámú szórási hossza.

4.2. Általánosított Hugenholtz–Pines tétel

Általában, ha egy Hugenholtz–Pines tétel teljesül, akkor az azt jelenti, hogy az egyrészecske gerjesztésekben Goldstone módus jelenik meg. Esetünkben a rendparaméter a kondenzátum hullámfüggvénye ($\sqrt{n_c}\zeta_r$), a Goldstone módusok száma pedig annak független fázisfluktuációnak számával egyezik meg [47]. Poláris kölcsönhatás esetén a P2 fázisban a kondenzátum normált spinora $\zeta = (\zeta_+, 0, \zeta_-)$. Ezzel ekvivalens minden olyan spinor, amely a $\zeta' = (\zeta_+ e^{i\varphi_+}, 0, \zeta_- e^{i\varphi_-})$ alakú. Látható, hogy két független fázis van, azaz két Goldstone módus várható. Ferromágneses esetben a spinornak egy komponense nem zérus, $\zeta = (1, 0, 0)$, amellyel ekvivalens az összes $\zeta' = (e^{i\varphi_+}, 0, 0)$ alakú kifejezés. Egy független fázis van, egy Goldstone módus jelenik meg.



• *Poláris kölcsönhatás esete*

A poláris kölcsönhatás esetén a P2 fázisban az általánosított Hugenholtz–Pines tétel alakja:

$$\Sigma_{1,1}^{++}(\mathbf{0}, 0) - \Sigma_{1,-1}^{++}(\mathbf{0}, 0) = 0, \quad (4.35a)$$

$$\Sigma_{1,1}^{--}(\mathbf{0}, 0) - \Sigma_{1,-1}^{--}(\mathbf{0}, 0) = 0, \quad (4.35b)$$

$$\Sigma_{1,1}^{+-}(\mathbf{0}, 0) - \Sigma_{1,-1}^{+-}(\mathbf{0}, 0) = 0. \quad (4.35c)$$

Bizonyítás:

Tekintsük a 4.2. (a) ábrán látható diagramot. Ez egy olyan n -ed rendű egyrészecske irreducibilis diagram, amely i darab kondenzátumvonallal rendelkezik a $+$ és j darab kondenzátumvonallal a $-$ spinvetület irányában, továbbá nincs egyetlen külső vonala sem. A kondenzátumvonalat most körrel reprezentáljuk. Nevezük el az ilyen típusú diagrammot vákuumdiagramnak és jelöljük $\Phi_\alpha^{(n),i,j}$ -vel. Itt n utal a perturbációs számítás rendjére, α pedig azokat a vákuumdiagramokat indexeli, amelyek azonos n, i, j számokkal jellemezhetőek, de más-más a topológiájuk, így más-más járulékot adnak. A részecske és spinmegmaradás következtében i és j páros kell legyen; a bemenő és kimenő kondenzátumvonalak számának meg kell egyeznie mind a $+$, mind a $-$ spinvetület irányában. A 4.2. (a) ábrán bal illetve jobb oldalra vannak rendezve azok a kondenzátumvonalak, amelyeket kimenő illetve bemenő vonallal helyettesíthetünk. A $\Sigma_{11}^{++}(\mathbf{0}, 0)$ normális szabadenergia n -ed rendű kifejezését úgy kaphatjuk meg, ha az n -ed rendű vákuumdiagramokban két megfelelően választott kondenzá-

tumvonalat lecserélünk egy bemenő illetve egy kimenő vonalra. Ennek megfelelően:

$$\Sigma_{11}^{++}(\mathbf{0}, 0) = \frac{1}{n_{c,+}} \sum_i \sum_\alpha \left(\frac{i}{2}\right)^2 \Phi_\alpha^{(n)ij}. \quad (4.36)$$

A $\Sigma_{1-1}^{++}(\mathbf{0}, 0)$ anomális sajátenergiát úgy kapjuk meg, ha két megfelelően választott kondenzátumvonalat kimenő vonalakkal helyettesítünk, ekkor

$$\Sigma_{1-1}^{++}(\mathbf{0}, 0) = \frac{1}{n_{c,+}} \sum_i \sum_\alpha \left(\frac{i}{2}\right) \left(\frac{i}{2} - 1\right) \Phi_\alpha^{(n)ij}. \quad (4.37)$$

Hasonlóan számolhatjuk ki azokat az irreducibilis diagramokat, amelyek egyetlen bemenő vonallal rendelkeznek, azaz

$$\Sigma_{0,1}^+ = \frac{1}{\sqrt{n_{c,+}}} \sum_i \sum_\alpha \left(\frac{i}{2}\right) \Phi_\alpha^{(n)ij} \quad (4.38)$$

Felhasználva a (4.36), (4.37) és (4.38) egyenleteket a következő kifejezésre jutunk:

$$\Sigma_{11}^{++}(\mathbf{0}, 0) - \Sigma_{1-1}^{++}(\mathbf{0}, 0) = \frac{1}{\sqrt{n_{c,+}}} \Sigma_{0,1}^+. \quad (4.39)$$

Korábban láttuk már, hogy (2.16) feltétel a $\Sigma_{0,1}^+ = 0$ -t eredményezi, azaz a (4.39) éppen a (4.35a) kifejezést adja. A bizonyítás hasonló módon végezhető el a többi esetre is.

Belátható, hogy a fenti összefüggések teljesülése szükséges feltétele annak, hogy gap nélküli gerjesztések jelenjenek meg. Ez azt jelenti, hogy a (4.2a)-ben definiált Green-függvény mátrix nevezője eltűnik, ha $k = 0$ és $i\omega_n = 0$.

- *Ferromágneses eset* A ferromágneses esetben a bizonyítás analóg módon történik. A különbség az, hogy nem lesz kondenzátum a $-$ spinvetület irányában, így az Hugenholtz–Pines tétel egyetlen egyenletből áll:

$$\Sigma_{1,1}^{++}(\mathbf{0}, 0) - \Sigma_{1,-1}^{++}(\mathbf{0}, 0) = 0. \quad (4.40)$$

Ez biztosítja azt, hogy a (4.4a)-tel megadott Green-függvény mátrix nevezője zérus legyen $k = 0$ és $i\omega_n = 0$ esetén.

4.3. Összegszabályok

Az általános elmélet szerint a termodinamikai deriváltak és a korrelációs függvények között fennállnak bizonyos összefüggések, amelyeket összegszabályoknak nevezünk. Ezek közül most a következőkre lesz szükségünk:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_{T,B} = -\frac{1}{\hbar} \lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} D_{nn}(\mathbf{k}, 0), \quad (4.41a)$$

$$\left(\frac{\partial m}{\partial B}\right)_{T,\mu} = -\frac{g\mu_B}{\hbar} \lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} D_{zz}(\mathbf{k}, 0), \quad (4.41b)$$

$$\left(\frac{\partial n}{\partial B}\right)_{T,\mu} = -\frac{g\mu_B}{\hbar} \lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} D_{nz}(\mathbf{k}, 0). \quad (4.41c)$$

Beláthatjuk ezen összefüggések helyességét, ha összehasonlítjuk a (3.32) termodinamikai deriváltak és a (4.33) korrelációs függvények alakjait. $\Pi_{r's}^s(\mathbf{k}, i\omega_n)$ buborék diagram (4.52) alakját felhasználva közvetlen számolással is belátható, hogy

$$P = -\Pi_{++}^+(\mathbf{k} \rightarrow 0, 0), \quad (4.42a)$$

$$Q = -\Pi_{00}^{00}(\mathbf{k} \rightarrow 0, 0), \quad (4.42b)$$

$$R = -\Pi_{--}^-(\mathbf{k} \rightarrow 0, 0). \quad (4.42c)$$

Sőt az is igaz, hogy

$$P \rightarrow -\Pi_{++}^+(\mathbf{k}, i\omega_n), \quad (4.43a)$$

$$Q \rightarrow -\Pi_{00}^{00}(\mathbf{k}, i\omega_n), \quad (4.43b)$$

$$R \rightarrow -\Pi_{--}^-(\mathbf{k}, i\omega_n). \quad (4.43c)$$

helyettesítéssel a termodinamikai deriváltak és a korrelációs függvények egymásba mennek át.

Felírható-e vajon összegszabály a rögzített részecskesűrűség mellett felírt deriváltakra? A mágneses átalakulás szempontjából fontos derivált a $(\partial m/\partial B)_{T,n}$. Közvetlen számolással belátható, hogy

$$\left(\frac{\partial m}{\partial B}\right)_{T,n} = g\mu_B \frac{(P+R)Q + 4PR}{P+Q+R+c_s[(P+R)Q+4PR]}. \quad (4.44)$$

Az összegszabályokból következik, hogy ha (3.32d)-ben elvégezzük a $c_n/c_s \rightarrow \infty$ határesetet, akkor ugyanezt az alakot kapjuk (ekkor a maradék 3 derivált zérus lesz). Ez azonban kevésbé világítja meg, hogy $(\partial m/\partial B)_{T,n}$ milyen kapcsolatban áll a korrelációs függvényekkel. Erre a kérdésre a lineáris válasz elmélet segítségével adhatunk egy szemléletes levezetést [51]. A lineáris válasz elmélet szerint a részecskesűrűség és a mágnesezettség fluktuációit a hozzájuk tartozó külső terek, $\delta\mu(\mathbf{k}, \omega)$ illetve $\delta B(\mathbf{k}, \omega)$ változásai keltik és őket a korrelációs függvények kapcsolják össze, azaz

$$\delta n(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{\hbar} D_{nm}(\mathbf{k}, \omega) \delta\mu(\mathbf{k}, \omega) - \frac{g\mu_B}{\hbar} D_{nz}(\mathbf{k}, \omega) \delta B(\mathbf{k}, \omega), \quad (4.45a)$$

$$\delta m(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{\hbar} D_{zn}(\mathbf{k}, \omega) \delta\mu(\mathbf{k}, \omega) - \frac{g\mu_B}{\hbar} D_{zz}(\mathbf{k}, \omega) \delta B(\mathbf{k}, \omega). \quad (4.45b)$$

A (4.45a) egyenletből

$$\delta\mu(\mathbf{k}, \omega) = -g\mu_B \frac{D_{nz}(\mathbf{k}, \omega)}{D_{nn}(\mathbf{k}, \omega)} \delta B(\mathbf{k}, \omega) - \hbar \frac{\delta n(\mathbf{k}, \omega)}{D_{nn}(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (4.46)$$

Ezt behelyettesítve (4.45b) egyenletbe kapjuk, hogy

$$\delta m(\mathbf{k}, \omega) = \frac{D_{zn}}{D_{nn}} \delta n(\mathbf{k}, \omega) - \frac{g\mu_B}{\hbar} \frac{D_{nm}(\mathbf{k}, \omega) D_{zz}(\mathbf{k}, \omega) - D_{nz}(\mathbf{k}, \omega) D_{zn}(\mathbf{k}, \omega)}{D_{nn}(\mathbf{k}, \omega)} \delta B(\mathbf{k}, \omega). \quad (4.47)$$

Ezt összehasonlítva (4.45) egyenletekkel definiálhatjuk $D_{zz}^{(n)}(\mathbf{k}, \omega)$ korrelációs függvényt a következő módon:

$$D_{zz}^{(n)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{D_{nm}(\mathbf{k}, \omega)D_{zz}(\mathbf{k}, \omega) - D_{nz}(\mathbf{k}, \omega)D_{zn}(\mathbf{k}, \omega)}{D_{nn}(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (4.48)$$

A mágneses szuszceptibilitás megkapható a válaszfüggvény sztatikus határesetéből, azaz

$$\left(\frac{\partial m}{\partial B}\right)_{T,n} = \lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} \frac{\delta m(\mathbf{k}, 0)}{\delta B(\mathbf{k}, 0)}, \quad (4.49a)$$

$$\text{és } \lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} \delta n(\mathbf{k}, 0) = 0. \quad (4.49b)$$

Felhasználva a (4.47) egyenletet felírhatjuk, hogy

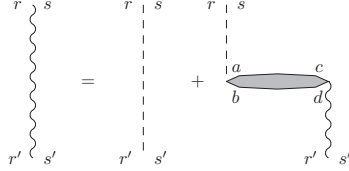
$$\left(\frac{\partial m}{\partial B}\right)_{T,n} = -\frac{g\mu_B}{\hbar} \lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} D_{zz}^{(n)}(\mathbf{k}, 0), \quad (4.50)$$

ami éppen a keresett összecsabály.

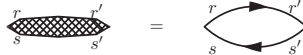
4.4. Az önkonzisztens RPA-közelítés általános elemei

A 4.1. fejezetben a Green- és korrelációs függvények általános tulajdonságait tárgyaltuk. A következőekben egy önkonzisztens közelítés keretén belül megadjuk ezen kifejezések alakjait. Az első lépés a proper Green-függvények meghatározása. A Bogoliubov-közelítéshez [lásd Függelék] képest ezek kiszámolása bonyolultabb. Ennek oka az, hogy a proper Green-függvényeket a proper sajátenergiák határozzák meg, amelyek viszont a Hartree-tagokon keresztül maguk is függenek a proper Green-függvényektől, azaz proper a Green-függvényeket önkonzisztensen kell meghatározni. Az önkonzisztenciát megkövetelve belátható, hogy létezik olyan megoldás, amelyben a proper sajátenergiák a spinindexekben és a görög indexekben is diagonálisnak lesznek a proper Green-függvényekkel együtt.

Az iterálás diagramtechnikailag tekintve azt jelenti, hogy Hartree-tagokat helyettesí-



4.1. ábra. Feynman-diagramok az effektív potenciál meghatározásához



4.2. ábra. Az Hartree-közelítésben használt reguláris polarizáció

tünk egymásba, ami azt fogja eredményezni, hogy a kétrészecske kölcsönhatást egy buboréksorral kell helyettesítenünk. Ez az ún. véletlen fázisú közelítés (**R**andom **P**hase **A**pproximation). Másképpen fogalmazva egy effektív kölcsönhatást vezethetünk be, amelyet a (4.51) egyenlet definiál:

$$W_{r's'}^{rs} = V_{r's'}^{rs} + W_{ab}^{rs} \Pi_{cd}^{(r)ba} V_{r's'}^{dc}. \quad (4.51)$$

Ezt az egyenletet a 4.1. ábra szemlélteti grafikusan.

A 4. fejezetben már említettük, hogy $\Pi^{(r)}$ kifejezés nem más, mint olyan diagramok összessége, amelyek abban az esetben sem esnek szét, ha vagy egy kölcsönhatási vagy egy belső vonalat vágunk el bennük. A Hartree-közelítésben reguláris polarizációként a proper Green-függvényekből felépített legegyszerűbb kifejezés lesz, amely a buborék diagram (4.2. ábra). Ezt a diagramot kiértékelve:

$$-\hbar \Pi_{r's'}^{(r)sr}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta \hbar} \sum_{i\nu_n} \tilde{\mathcal{G}}_{11}^{r'r}(\mathbf{q}, i\nu_n) \tilde{\mathcal{G}}_{11}^{ss'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, i\omega_n + i\nu_n). \quad (4.52)$$

Miután a proper Green-függvények diagonálisak a spinindexekben, ezért csak az olyan

reguláris polarizációk maradnak meg, ahol $r = r'$ és $s = s'$.

A továbbiakban szükségünk lesz az dielektromos függvényekre, amelyeket a következő módon vezetünk be:

$$\epsilon_{cd}^{sr} = \delta_d^s \delta_c^r - \Pi_{cd}^{ba} V_{ab}^{sr}. \quad (4.53)$$

A korrelációs függvényeknél alkalmazott felbontás a dielektromos függvényekre is elvégezhető és a reguláris részeikre igaz lesz, hogy

$$\epsilon_{cd}^{(r)sr} = \delta_d^s \delta_c^r - \Pi_{cd}^{ba} V_{ab}^{(r)sr}, \quad (4.54a)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{(r)n} = \underline{\underline{1}}^{(n)} - \underline{\underline{\Pi}}^{(r)(n)} \underline{\underline{C}}^{(n)}, \quad (4.54b)$$

ahol n felveszi az összes lehetséges értékét. Ekkor az effektív potenciálra teljesül az, hogy

$$\underline{\underline{W}}^{(n)} \underline{\underline{\epsilon}}^{(r)(n)} = \underline{\underline{C}}^{(n)}, \quad (4.55)$$

ahol n felveszi az összes lehetséges értékét. Belátható, hogy a proper Green-függvények diagonalitása azt fogja eredményezni, hogy az effektív kölcsönhatás és az eredeti azonos szerkezetű, azaz ha egy adott spinindex kiosztásra az eredeti kölcsönhatás zérus volt, akkor az effektív is az lesz és fordítva, ha nem volt zérus, akkor az effektív sem lesz az.

Az improper sajátenergiák diagramjai is megváltoznak, az eredeti kölcsönhatást az effektív potenciállal kell helyettesítenünk (3.1. ábra legalsó diagramja). Ennek megfelelően az improper sajátenergiák kifejezései

$$M_{11}^{rs} = (M_{-1-1}^{rs})^\dagger = \hbar^{-1} n_c \zeta_{s'}^\dagger \zeta_{s'} W_{r's'}^{rs}, \quad (4.56a)$$

$$M_{1-1}^{rs} = (M_{-11}^{rs})^\dagger = \hbar^{-1} n_c \zeta_{s'} \zeta_{r'} W_{sr'}^{rs}. \quad (4.56b)$$

4.5. Poláris kölcsönhatás esete, P2 fázis

A proper sajátenergiákat és Green-függvényeket már felírtuk a 3.2. fejezetben. Emlékeztetõül még egyszer az alakjuk:

$$\tilde{\Sigma}_{\alpha\gamma}^{rs} = \hbar^{-1} \mu_0 \delta_{rs} \delta_{\alpha\delta}, \quad (4.57)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\gamma}^{rs} = \frac{\delta_{rs} \delta_{\alpha\gamma}}{\alpha i \omega_n - \hbar^{-1} e_{\mathbf{k}}}. \quad (4.58)$$

Ennek megfelelően a szinguláris polarizációk megegyeznek a Bogoliubov-közelítésben használtakkal (A.92), de a véges hőmérséklet következményeként megjelennek a reguláris polarizációk is. Az effektív potenciál meghatározásához szükségünk van a reguláris polarizációk mátrixszal felírt alakjaira, amelyek a következő egyszerű alakot öltik:

$$\underline{\Pi}^{(n)} = \Pi_0 \underline{\mathbb{1}}^{(n)}. \quad (4.59)$$

A reguláris polarizációk ismeretében az effektív potenciál meghatározható a (4.51),(4.54) és (4.55) egyenletekből:

$$W_{ab}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_n^{(r)} + \mathcal{C}_s^{(r)} & \mathcal{C}_n^{(r)} & \mathcal{C}_n^{(r)} - \mathcal{C}_s^{(r)} & 0 & 0 \\ \mathcal{C}_n^{(r)} & \mathcal{C}_n^{(r)} & \mathcal{C}_n^{(r)} & 0 & 0 \\ \mathcal{C}_n^{(r)} - \mathcal{C}_s^{(r)} & \mathcal{C}_n^{(r)} & \mathcal{C}_n^{(r)} + \mathcal{C}_s^{(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.60a)$$

$$W_{ab}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_s^{(r)} & \mathcal{C}_s^{(r)} & 0 & 0 \\ \mathcal{C}_s^{(r)} & \mathcal{C}_s^{(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C}_s^{(r)} & \mathcal{C}_s^{(r)} \\ 0 & 0 & \mathcal{C}_s^{(r)} & \mathcal{C}_s^{(r)} \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.60b)$$

ahol

$$\mathcal{C}_n^{(r)} = \frac{c_n}{1 - 3c_n \Pi_0(\mathbf{k}, i\omega_n)}, \quad (4.61a)$$

$$\mathcal{C}_s^{(r)} = \frac{c_s}{1 - 2c_s \Pi_0(\mathbf{k}, i\omega_n)}. \quad (4.61b)$$

Látható, hogy az effektív potenciált ($W_{r's'}^{rs}$) úgy kapjuk meg, ha az eredeti potenciálban ($V_{r's'}^{rs}$) elvégezzük $c_n \rightarrow \mathcal{C}_n^{(r)}$, $c_s \rightarrow \mathcal{C}_s^{(r)}$ helyettesítést. Ezek után a impropere sajátenergiák könnyen felírhatóak:

$$M_{\gamma\delta}^{(1)} = \hbar^{-1} \begin{bmatrix} (\mathcal{C}_n^{(r)} + \mathcal{C}_s^{(r)})n_c \zeta_+^2 & (\mathcal{C}_n^{(r)} - \mathcal{C}_s^{(r)})n_c \zeta_+ \zeta_- & (\mathcal{C}_n^{(r)} + \mathcal{C}_s^{(r)})n_c \zeta_+^2 & (\mathcal{C}_n^{(r)} - \mathcal{C}_s^{(r)})n_c \zeta_+ \zeta_- \\ (\mathcal{C}_n^{(r)} - \mathcal{C}_s^{(r)})n_c \zeta_+ \zeta_- & (\mathcal{C}_n^{(r)} + \mathcal{C}_s^{(r)})n_c \zeta_-^2 & (\mathcal{C}_n^{(r)} - \mathcal{C}_s^{(r)})n_c \zeta_+ \zeta_- & (\mathcal{C}_n^{(r)} + \mathcal{C}_s^{(r)})n_c \zeta_-^2 \\ (\mathcal{C}_n^{(r)} + \mathcal{C}_s^{(r)})n_c \zeta_+^2 & (\mathcal{C}_n^{(r)} - \mathcal{C}_s^{(r)})n_c \zeta_+ \zeta_- & (\mathcal{C}_n^{(r)} + \mathcal{C}_s^{(r)})n_c \zeta_+^2 & (\mathcal{C}_n^{(r)} - \mathcal{C}_s^{(r)})n_c \zeta_+ \zeta_- \\ (\mathcal{C}_n^{(r)} - \mathcal{C}_s^{(r)})n_c \zeta_+ \zeta_- & (\mathcal{C}_n^{(r)} + \mathcal{C}_s^{(r)})n_c \zeta_-^2 & (\mathcal{C}_n^{(r)} - \mathcal{C}_s^{(r)})n_c \zeta_+ \zeta_- & (\mathcal{C}_n^{(r)} + \mathcal{C}_s^{(r)})n_c \zeta_-^2 \end{bmatrix}_{\gamma\delta}, \quad (4.62a)$$

$$M_{\gamma\delta}^{(2)} = \hbar^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_s^{(r)} n_c & 2\mathcal{C}_s^{(r)} n_c \zeta_+ \zeta_- \\ 2\mathcal{C}_s^{(r)} n_c \zeta_+ \zeta_- & \mathcal{C}_s^{(r)} n_c \end{bmatrix}_{\gamma\delta}. \quad (4.62b)$$

A Green-függvényeket kétféleképpen kaphatjuk meg. Az egyik lehetőség, hogy a (4.10b), (4.57) és (4.62) egyenleteket használjuk, ahogy azt a Bogoliubov-közelítésben tettük. A másik lehetőség az, hogy a Bogoliubov-megoldásokban elvégezzük a fenn már említett $c_n \rightarrow \mathcal{C}_n^{(r)}$, $c_s \rightarrow \mathcal{C}_s^{(r)}$ helyettesítést, figyelembe véve azt, hogy a spinor nem változik, azaz a $\frac{\hbar\omega}{c_s n_c}$ kombináció is változatlan marad.

$$\mathcal{G}_{\gamma\delta}^{(1)} = \frac{1}{\Delta^{(1)}(\mathbf{k}, i\omega_n)} \begin{bmatrix} A_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & C_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & B_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & D_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) \\ C_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & A_1(\mathbf{k}, -i\omega_n, \hbar\omega_L) & D_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & B_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) \\ B_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & D_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & A_1(\mathbf{k}, i\omega_n, -\hbar\omega_L) & C_1(\mathbf{k}, i\omega_n, -\hbar\omega_L) \\ D_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & B_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & C_1(\mathbf{k}, i\omega_n, -\hbar\omega_L) & A_1(\mathbf{k}, -i\omega_n, -\hbar\omega_L) \end{bmatrix}_{\gamma\delta}, \quad (4.63a)$$

ahol

$$\begin{aligned}
A_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) &= (1 - 2c_s\Pi_0)(1 - 3c_n\Pi_0)(i\omega_n)^3 \\
&+ \hbar^{-1} \left[e_{\mathbf{k}}(1 - 2c_s\Pi_0)(1 - 3c_n\Pi_0) + \frac{1}{2}(c_n + c_s - 5c_n c_s \Pi_0) n_c \left(1 + \frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right) \right] (i\omega_n)^2 \\
&- \hbar^{-2} \left[e_{\mathbf{k}}^2(1 - 2c_s\Pi_0)(1 - 3c_n\Pi_0) + e_{\mathbf{k}}(c_n + c_s - 5c_n c_s \Pi_0) n_c \left(1 - \frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right) \right] (i\omega_n) \\
&- \hbar^{-3} \left[e_{\mathbf{k}}^3(1 - 2c_s\Pi_0)(1 - 3c_n\Pi_0) + \frac{1}{2}(c_n + c_s - 5c_n c_s \Pi_0) n_c e_{\mathbf{k}}^2 \left(3 - \frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right) \right. \\
&\quad \left. + 2e_{\mathbf{k}} c_n c_s n_c^2 \left(1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right) \right],
\end{aligned}$$

$$B_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) = \frac{1}{2} \hbar^{-1} (c_n - c_s + c_n c_s \Pi_0) n_c \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} (i\omega_n + \hbar^{-1} e_{\mathbf{k}})^2,$$

$$\begin{aligned}
C_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) &= -\frac{1}{2} \hbar^{-1} (c_n + c_s - 5c_n c_s \Pi_0) n_c \left(1 + \frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right) (i\omega_n)^2 \\
&+ \hbar^{-1} \left[\frac{1}{2} e_{\mathbf{k}}^2 (c_n + c_s - 5c_n c_s \Pi_0) n_c \left(1 + \frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right) + 2e_{\mathbf{k}} c_n c_s n_c^2 \left(1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right) \right],
\end{aligned}$$

$$D_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) = \frac{1}{2} \hbar^{-1} (c_n - c_s + c_n c_s \Pi_0) n_c \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} (-(i\omega_n)^2 + \hbar^{-2} e_{\mathbf{k}}^2),$$

$$\begin{aligned}
\Delta^{(1)}(\mathbf{k}, i\omega_n) &= [(i\omega_n)^2 - e_{\mathbf{k}}^2]^2 (1 - 2c_s \Pi_0)(1 - 3c_n \Pi_0) \\
&- 2\hbar^{-2} e_{\mathbf{k}} (c_n + c_s - 5c_n c_s \Pi_0) n_c [(i\omega_n)^2 - e_{\mathbf{k}}^2] + 4\hbar^{-4} e_{\mathbf{k}}^2 c_n c_s n_c^2 \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right], \quad (4.63b)
\end{aligned}$$

és

$$\mathcal{G}_{\gamma\delta}^{(2)} = \frac{1}{\Delta^{(2)}(\mathbf{k}, i\omega_n)} \begin{bmatrix} A_2(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & B_2(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) \\ B_2(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & A_2(\mathbf{k}, -i\omega_n, \hbar\omega_L) \end{bmatrix}_{\gamma\delta}, \quad (4.63c)$$

ahol

$$A_2(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) = (i\omega_n + \hbar^{-1}e_{\mathbf{k}})(1 - 2c_s\Pi_0)^2 + \hbar^{-1}c_s n_c(1 - 2c_s\Pi_0),$$

$$B_2(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) = -\hbar^{-1}c_s n_c \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right) \right]^{\frac{1}{2}} (1 - 2c_s\Pi_0),$$

$$\Delta^{(2)}(\mathbf{k}, i\omega_n) = [(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}^2](1 - 2c_s\Pi_0)^2 - 2\hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}c_s n_c(1 - 2c_s\Pi_0) - \omega_L^2. \quad (4.63d)$$

A korrelációs függvényeket a (4.19), (4.20), (4.21) és (4.22) kifejezések adják meg. Szükségünk lesz még a polarizációk kifejezéseire, amelyekben most megjelennek a reguláris polarizációkból jövő tagok is:

$$\Pi_{nn} = 3\Pi_0 + \Pi_{++}^{(s)++} + \Pi_{--}^{(s)--}, \quad (4.64a)$$

$$\Pi_{nz} = \Pi_{++}^{(s)++} - \Pi_{--}^{(s)--}, \quad (4.64b)$$

$$\Pi_{zz} = 2\Pi_0 + \Pi_{++}^{(s)++} + \Pi_{--}^{(s)--}, \quad (4.64c)$$

$$\Pi_{nQ} = 2 \left(\Pi_{+-}^{(s)++} + \Pi_{-+}^{(s)--} \right), \quad (4.64d)$$

$$\Pi_{zQ} = 2 \left(\Pi_{+-}^{(s)++} - \Pi_{-+}^{(s)--} \right), \quad (4.64e)$$

$$\Pi_{n-Q} = 2 \left(\Pi_{-+}^{(s)++} + \Pi_{+-}^{(s)--} \right), \quad (4.64f)$$

$$\Pi_{z-Q} = 2 \left(\Pi_{-+}^{(s)++} - \Pi_{+-}^{(s)--} \right), \quad (4.64g)$$

$$\Pi_{QQ} = 4\Pi_0 + 4\Pi_{+-}^{(s)-+}, \quad (4.64h)$$

$$\Pi_{Q-Q} = 0, \quad (4.64i)$$

$$\Pi_{-Q-Q} = 4\Pi_0 + 4\Pi_{-+}^{(s)+-}, \quad (4.64j)$$

$$\Pi_{++} = 4\Pi_0 + 2 \left(\Pi_{+0}^{(s)0+} + \Pi_{0-}^{(s)-0} \right), \quad (4.64k)$$

$$\Pi_{+-} = 2 \left(\Pi_{-0}^{(s)0+} + \Pi_{0+}^{(s)-0} \right), \quad (4.64l)$$

$$\Pi_{--} = 4\Pi_0 + 2 \left(\Pi_{+0}^{(s)0+} + \Pi_{0-}^{(s)-0} \right) \quad (4.64m)$$

és a szinguláris polarizációk ugyanazok, mint a Bogoliubov-közelítésben. Ezek után a

korrelációs függvények a következő alakot öltik:

$$D_{nn}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \hbar \left\{ 3\Pi_0(1 - 2c_s\Pi_0)[(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}^2]^2 + 2\hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}n_c(1 - 5c_s\Pi_0)[(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}^2] - 4\hbar^{-4}e_{\mathbf{k}}^2c_s n_c^2 \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right] \right\} / \Delta^{(1)}, \quad (4.65a)$$

$$D_{nz}(\mathbf{k}, i\omega_n) = 2e_{\mathbf{k}} \frac{\omega_L (i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}^2}{c_s \Delta^{(1)}}, \quad (4.65b)$$

$$D_{zz}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \hbar \left\{ 2\Pi_0(1 - 3c_n\Pi_0)[(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}^2]^2 + 2\hbar^{-2}(1 - 5c_n\Pi_0)e_{\mathbf{k}}n_c[(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}^2] - 4\hbar^{-4}e_{\mathbf{k}}^2c_n n_c^2 \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right] \right\} / \Delta^{(1)}, \quad (4.65c)$$

$$D_{nQ}(\mathbf{k}, i\omega_n) = 2\hbar^{-1}e_{\mathbf{k}}n_c \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ (1 - 2c_s\Pi_0)[(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}^2]q - 2\omega_L(i\omega_n) - 2\hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}c_s n_c \right\} / \Delta^{(1)}, \quad (4.65d)$$

$$D_{zQ}(\mathbf{k}, i\omega_n) = 2n_c \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ - (1 - 3c_n\Pi_0)(i\omega_n)[(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}^2] + 2\hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}c_n n_c(i\omega_n) + 2\hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}^2\omega_L \frac{c_n}{c_s} \right\} / \Delta^{(1)}, \quad (4.65e)$$

$$D_{n-Q}(\mathbf{k}, i\omega_n) = D_{nQ}(\mathbf{k}, -i\omega_n), \quad (4.65f)$$

$$D_{z-Q}(\mathbf{k}, i\omega_n) = D_{zQ}(\mathbf{k}, -i\omega_n), \quad (4.65g)$$

$$D_{++}(\mathbf{k}, i\omega_n) = 2n_c \left\{ 2\hbar\Pi_0(1 - 2c_s\Pi_0)n_c^{-1}[(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}^2] - 4\hbar^{-1}e_{\mathbf{k}}c_s\Pi_0 + \frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c}(i\omega_n) + \hbar^{-1}e_{\mathbf{k}} + \hbar^{-1} \frac{(\hbar\omega_L)^2}{c_s n_c} \right\} / \Delta^{(2)}, \quad (4.65h)$$

$$D_{+-}(\mathbf{k}, i\omega_n) = 2\hbar^{-1}n_c e_{\mathbf{k}} \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} / \Delta^{(2)}, \quad (4.65i)$$

$$D_{--}(\mathbf{k}, i\omega_n) = D_{++}(\mathbf{k}, -i\omega_n), \quad (4.65j)$$

$$\begin{aligned}
D_{QQ}(\mathbf{k}, i\omega_n) &= 4\hbar\Pi_{+-}^{+-} + 4\hbar[(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}^2]^2 [c_n(\Pi_{+-}^{(s)++} + \Pi_{+-}^{(s)--})^2 \\
&+ c_s(\Pi_{+-}^{(s)++} - \Pi_{+-}^{(s)--})^2(1 - c_n\Pi_0) - 4c_n c_s \Pi_0(\Pi_{+-}^{(s)++2} + \Pi_{+-}^{(s)--2}) \\
&- 4c_n c_s(\Pi_{+-}^{(s)--} \Pi_{+-}^{(s)++2} + \Pi_{+-}^{(s)++} \Pi_{+-}^{(s)--2})] / \Delta^{(1)}, \tag{4.65k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{-Q-Q}(\mathbf{k}, i\omega_n) &= 4\hbar[(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}^2]^2 [c_n(\Pi_{+-}^{(s)++} + \Pi_{+-}^{(s)--})^2 \\
&+ c_s(\Pi_{+-}^{(s)++} - \Pi_{+-}^{(s)--})^2(1 - c_n\Pi_0) - 8c_n c_s \Pi_0(\Pi_{+-}^{(s)++} \Pi_{+-}^{(s)--}) \\
&- 4c_n c_s(\Pi_{+-}^{(s)--} \Pi_{+-}^{(s)++} \Pi_{+-}^{(s)--} + \Pi_{+-}^{(s)++} \Pi_{+-}^{(s)--} \Pi_{+-}^{(s)++})] / \Delta^{(1)}, \tag{4.65l}
\end{aligned}$$

$$D_{-Q-Q}(\mathbf{k}, i\omega_n) = D_{QQ}(\mathbf{k}, i\omega_n). \tag{4.65m}$$

Továbbá az is könnyen belátható, hogy

$$\Delta^{(1)} = \det \underline{\underline{\epsilon}}^{(1)} [(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}^2]^2, \tag{4.66a}$$

$$\Delta^{(2)} = \det \underline{\underline{\epsilon}}^{(2)} [(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}^2], \tag{4.66b}$$

ahol

$$\det \underline{\underline{\epsilon}}^{(1)} = (1 - c_n \Pi_{nm})(1 - c_s \Pi_{zz}) - c_n c_s \Pi_{nz}^2, \tag{4.66c}$$

$$\det \underline{\underline{\epsilon}}^{(2)} = \left(1 - \frac{c_s}{2} \Pi_{++}\right) \left(1 - \frac{c_s}{2} \Pi_{--}\right) - \frac{c_s^2}{4} \Pi_{-+}^2. \tag{4.66d}$$

A (4.66) egyenletek azt mutatják, hogy az egyrészecske és kollektív gerjesztések hibridizálódnak, azaz az egyrészecske és kollektív gerjesztések spektrumai megegyeznek.

4.6. Ferromágneses kölcsönhatás esete

A proper sajátenergiákat felírtuk a 3.3 fejezetben. Emlékeztetőül az alakjuk még egyszer:

$$\tilde{\Sigma}_{\alpha\gamma}^{++} = \hbar^{-1} \mu_0 \delta_{\alpha\gamma}, \quad (4.67a)$$

$$\tilde{\Sigma}_{\alpha\gamma}^{00} = \hbar^{-1} (\mu_0 - c_s m + \hbar \omega_L) \delta_{\alpha\gamma}, \quad (4.67b)$$

$$\tilde{\Sigma}_{\alpha\gamma}^{--} = \hbar^{-1} (\mu_0 - 2c_s m + 2\hbar \omega_L) \delta_{\alpha\gamma}. \quad (4.67c)$$

Innen a proper Green-függvények:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\gamma}^{++}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{1}{\alpha i\omega_n - \hbar^{-1} \epsilon_{\mathbf{k}}}, \quad (4.68a)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\gamma}^{00}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{1}{\alpha i\omega_n - \hbar^{-1} (\epsilon_{\mathbf{k}} - c_s m + \hbar \omega_L)}, \quad (4.68b)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\gamma}^{--}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{1}{\alpha i\omega_n - \hbar^{-1} (\epsilon_{\mathbf{k}} - 2c_s m + 2\hbar \omega_L)}. \quad (4.68c)$$

Az effektív potenciál meghatározásához szükségünk van a reguláris polarizációkra illetve a belőlük felépített mátrix alakokra:

$$\Pi_{ab}^{(r)(1)} = \begin{bmatrix} \Pi_{++}^{(r)++} & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_{00}^{(r)00} & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_{--}^{(r)--} \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.69a)$$

$$\Pi_{ab}^{(r)(2)} = \begin{bmatrix} \Pi_{+0}^{(r)0+} & 0 \\ 0 & \Pi_{0-}^{(r)-0} \end{bmatrix}_{ab}, \quad (4.69b)$$

$$\Pi_{ab}^{(r)(3)} = \begin{bmatrix} \Pi_{0+}^{(r)+0} & 0 \\ 0 & \Pi_{-0}^{(r)0-} \end{bmatrix}_{ab}. \quad (4.69c)$$

$$(4.69d)$$

Felhasználva a (4.51),(4.54) és (4.55) egyenleteket, az effektív potenciálra azt kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{W}}^{(1)} = \frac{1}{\det \underline{\underline{\epsilon}}^{(r)(1)}} \begin{bmatrix} c_n + c_s - c_n c_s (\Pi_{00}^{(r)00} + 4\Pi_{--}^{(r)--}) & c_n - 2c_n c_s \Pi_{--}^{(r)--} & c_n - c_s + c_n c_s \Pi_{00}^{(r)00} \\ c_n - 2c_n c_s \Pi_{--}^{(r)--} & c_n - c_n c_s (\Pi_{++}^{(r)++} + \Pi_{--}^{(r)--}) & c_n - 2c_n c_s \Pi_{++}^{(r)++} \\ c_n - c_s + c_n c_s \Pi_{++}^{(r)++} & c_n - 2c_n c_s \Pi_{++}^{(r)++} & c_n + c_s - c_n c_s (\Pi_{00}^{(r)00} + 4\Pi_{++}^{(r)++}) \end{bmatrix}, \quad (4.70a)$$

$$\underline{\underline{W}}^{(2)} = \frac{1}{\det \underline{\underline{\epsilon}}^{(r)(2)}} \begin{bmatrix} c_s & c_s \\ c_s & c_s \end{bmatrix}, \quad (4.70b)$$

$$\underline{\underline{W}}^{(3)} = \frac{1}{\det \underline{\underline{\epsilon}}^{(r)(3)}} \begin{bmatrix} c_s & c_s \\ c_s & c_s \end{bmatrix}, \quad (4.70c)$$

$$W_{-+}^{+-} = W_{+-}^{-+} = 0, \quad (4.70d)$$

ahol

$$\det \underline{\underline{\epsilon}}^{(r)(1)} = (1 - c_n \Pi_{nn}^{(r)})(1 - c_s \Pi_{zz}^{(r)}) - c_n c_s \Pi_{nz}^{(r)2}, \quad (4.70e)$$

$$\det \underline{\underline{\epsilon}}^{(r)(2)} = 1 - \frac{c_s}{2} \Pi_{++}^{(r)}, \quad (4.70f)$$

$$\det \underline{\underline{\epsilon}}^{(r)(3)} = 1 - \frac{c_s}{2} \Pi_{--}^{(r)}, \quad (4.70g)$$

és

$$\Pi_{nn}^{(r)} = \Pi_{++}^{(r)++} + \Pi_{00}^{(r)00} + \Pi_{--}^{(r)--}, \quad (4.70h)$$

$$\Pi_{zz}^{(r)} = \Pi_{++}^{(r)++} + \Pi_{--}^{(r)--}, \quad (4.70i)$$

$$\Pi_{nz}^{(r)} = \Pi_{++}^{(r)++} - \Pi_{--}^{(r)--}, \quad (4.70j)$$

$$\Pi_{++}^{(r)} = 2 \left(\Pi_{+0}^{(r)0+} + \Pi_{0-}^{(r)-0} \right), \quad (4.70k)$$

$$\Pi_{--}^{(r)} = 2 \left(\Pi_{0+}^{(r)+0} + \Pi_{-0}^{(r)0-} \right). \quad (4.70l)$$

Az effektív potenciál ismeretében az impropper sajátenergiák:

$$M_{\gamma\delta}^{(1)} = \hbar^{-1} \frac{\rho n_c}{\det \underline{\underline{\epsilon}}^{(r)(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{\gamma\delta}, \quad (4.71a)$$

$$M_{\gamma\delta}^{(2)} = \hbar^{-1} c_s n_c \begin{bmatrix} \frac{1}{\det \underline{\underline{\epsilon}}^{(r)(2)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\det \underline{\underline{\epsilon}}^{(r)(3)}} \end{bmatrix}_{\gamma\delta}, \quad (4.71b)$$

$$M_{\gamma\delta}^{(3)} = 0, \quad (4.71c)$$

ahol $\rho = c_n + c_s - c_n c_s \left(\Pi_{00}^{(r)00} + 4\Pi_-^{(r)--} \right)$. A Green-függvényeket a (4.10b), (4.68) és (A.102) kifejezések felhasználásával kaphatjuk meg.

$$\mathcal{G}_{\alpha\gamma}^{(1)} = \frac{1}{\Delta^{(1)}} \begin{bmatrix} [i\omega_n + \hbar^{-1} e_{\mathbf{k}}] \det \underline{\underline{\epsilon}}^{(r)(1)} + \hbar^{-1} \rho n_c & -\hbar^{-1} \rho n_c \\ -\hbar^{-1} \rho n_c & [-i\omega_n + \hbar^{-1} e_{\mathbf{k}}] \det \underline{\underline{\epsilon}}^{(r)(1)} + \hbar^{-1} \rho n_c \end{bmatrix}_{\alpha\gamma}, \quad (4.72a)$$

$$\mathcal{G}_{\alpha\gamma}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{\det \underline{\underline{\epsilon}}^{(r)(2)}}{\Delta^{(2)}} & 0 \\ 0 & \frac{\det \underline{\underline{\epsilon}}^{(r)(3)}}{\Delta^{(3)}} \end{bmatrix}_{\alpha\gamma}, \quad (4.72b)$$

$$\mathcal{G}_{\alpha\gamma}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(i\omega_n) - \hbar^{-1} (e_{\mathbf{k}} - 2c_s m + 2\hbar\omega_L)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-(i\omega_n) - \hbar^{-1} (e_{\mathbf{k}} - 2c_s m + 2\hbar\omega_L)} \end{bmatrix}_{\alpha\gamma}, \quad (4.72c)$$

ahol bevezettük a

$$\Delta^{(1)} = [(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2} e_{\mathbf{k}}^2] \det \underline{\underline{\epsilon}}^{(r)(1)} - 2\hbar^{-2} e_{\mathbf{k}} \rho n_c, \quad (4.73)$$

$$\Delta^{(2)} = [(i\omega_n) - \hbar^{-1} (e_{\mathbf{k}} - c_s m + \hbar\omega_L)] \det \underline{\underline{\epsilon}}^{(r)(2)} - \hbar^{-1} c_s n_c, \quad (4.74)$$

$$\Delta^{(3)} = [-(i\omega_n) - \hbar^{-1} (e_{\mathbf{k}} - c_s m + \hbar\omega_L)] \det \underline{\underline{\epsilon}}^{(r)(3)} - \hbar^{-1} c_s n_c, \quad (4.75)$$

$$(4.76)$$

kifejezést.

A korrelációs függvényeket a (4.30) kifejezések adják meg. Ehhez szükségünk lesz a polarizációkra:

$$\Pi_{nm} = \Pi_{nm}^{(r)} + \Pi_{++}^{(s)++}, \quad (4.77a)$$

$$\Pi_{nz} = \Pi_{nz}^{(r)} + \Pi_{++}^{(s)++}, \quad (4.77b)$$

$$\Pi_{zz} = \Pi_{zz}^{(r)} + \Pi_{++}^{(s)++}, \quad (4.77c)$$

$$\Pi_{++} = \Pi_{++}^{(r)} + 2\Pi_{+0}^{(s)0+}, \quad (4.77d)$$

$$\Pi_{--} = \Pi_{--}^{(r)} + 2\Pi_{+0}^{(s)0+}, \quad (4.77e)$$

$$\Pi_{QQ} = 4\Pi_{+-}^{(r)-+} + 4\Pi_{+-}^{(s)-+}, \quad (4.77f)$$

$$\Pi_{-Q-Q} = 4\Pi_{-+}^{(r)+-} + 4\Pi_{-+}^{(s)+-}, \quad (4.77g)$$

ahol

$$\Pi_{++}^{(s)++} = \frac{2\hbar^{-2}\epsilon_{\mathbf{k}}n_c}{(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}\epsilon_{\mathbf{k}}^2}, \quad (4.78a)$$

$$\Pi_{+0}^{(s)0+} = \frac{\hbar^{-1}n_c}{i\omega_n - \hbar^{-1}(\epsilon_{\mathbf{k}} - c_s m + \hbar\omega_L)}, \quad (4.78b)$$

$$\Pi_{0+}^{(s)+0} = \frac{\hbar^{-1}n_c}{-i\omega_n - \hbar^{-1}(\epsilon_{\mathbf{k}} - c_s m + \hbar\omega_L)}, \quad (4.78c)$$

$$\Pi_{+-}^{(s)-+} = \frac{\hbar^{-1}n_c}{i\omega_n - \hbar^{-1}(\epsilon_{\mathbf{k}} - 2c_s m + 2\hbar\omega_L)}, \quad (4.78d)$$

$$\Pi_{-+}^{(s)+-} = \frac{\hbar^{-1}n_c}{-i\omega_n - \hbar^{-1}(\epsilon_{\mathbf{k}} - 2c_s m + 2\hbar\omega_L)}. \quad (4.78e)$$

Ezek után a korrelációs függvények:

$$D_{nm}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \hbar \frac{(\Pi_{++}^{(r)++} + \Pi_{++}^{(s)++})[1 - c_s(\Pi_{00}^{(r)00} + 4\Pi_{--}^{(r)--})] + \Pi_{00}^{(r)00} + \Pi_{--}^{(r)--}(1 - c_s\Pi_{00}^{(r)00})}{\det \underline{\underline{\epsilon}}^{(1)}} \quad (4.79a)$$

$$D_{zz}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \hbar \frac{(\Pi_{++}^{(r)++} + \Pi_{++}^{(s)++})[1 - c_n(\Pi_{00}^{(r)00} + 4\Pi_{--}^{(r)--})] + \Pi_{--}^{(r)--}(1 - c_s\Pi_{00}^{(r)00})}{\det \underline{\underline{\epsilon}}^{(1)}} \quad (4.79b)$$

$$D_{nz}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \hbar \frac{\Pi_{++}^{(r)++} + \Pi_{++}^{(s)++} - \Pi_{--}^{(r)--}}{\det \underline{\epsilon}^{(1)}} \quad (4.79c)$$

$$D_{++}(\mathbf{k}, i\omega_n) = 2\hbar \frac{\Pi_{+0}^{(r)0+} + \Pi_{+0}^{(s)0+} + \Pi_{0-}^{(r)-0}}{\det \underline{\epsilon}^{(2)}} \quad (4.79d)$$

$$D_{--}(\mathbf{k}, i\omega_n) = D_{++}(\mathbf{k}, -i\omega_n) \quad (4.79e)$$

$$D_{QQ}(\mathbf{k}, i\omega_n) = 4\hbar(\Pi_{+-}^{(r)-+} + \Pi_{+-}^{(s)-+}) \quad (4.79f)$$

$$D_{-Q-Q}(\mathbf{k}, i\omega_n) = D_{QQ}(\mathbf{k}, -i\omega_n), \quad (4.79g)$$

ahol

$$\det \underline{\epsilon}^{(1)} = (1 - c_n \Pi_{nn})(1 - c_s \Pi_{zz}) - c_n c_s \Pi_{nz}^2, \quad (4.79h)$$

$$\det \underline{\epsilon}^{(2)} = 1 - \frac{c_s}{2} \Pi_{++}, \quad (4.79i)$$

$$\det \underline{\epsilon}^{(3)} = 1 - \frac{c_s}{2} \Pi_{--}. \quad (4.79j)$$

Ferromágneses esetben is hibridizálódnak az egyrészecske és kollektív gerjesztések, azaz

$$\Delta^{(1)} = [(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2} \epsilon_{\mathbf{k}}^2] \det \underline{\epsilon}^{(1)}, \quad (4.80)$$

$$\Delta^{(2)} = [(i\omega_n) - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} - c_s m + \hbar \omega_L)] \det \underline{\epsilon}^{(2)}, \quad (4.81)$$

$$\Delta^{(3)} = [-(i\omega_n) - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} - c_s m + \hbar \omega_L)] \det \underline{\epsilon}^{(3)}, \quad (4.82)$$

továbbá a $G_{11}^{(3)}$ -ben és a D_{QQ} -ban illetve a $G_{-1-1}^{(3)}$ -ben és a D_{-Q-Q} -ban megjelenő gerjesztések egyeznek meg.

Tartsunk a mágneses térrel zérushoz! Ekkor a ferromágneses esetben a Green- és korrelációs függvények átmennek a [45] eredményeibe (mind Bogoliubov-, mind a Hartree-közelítésben). A poláris kölcsönhatás esetében [45] eredményeit viszont nem kapjuk meg. Ennek oka szintén a 4. fejezetben már említett spinorkülönbözőség. Természetesen, ahogy

a spinorok egymásba transzformálhatóak, úgy Green- és korrelációs függvények is áttranszformálhatóak egymásba.

4.7. Szimmetrikus fázis

Már említettük, hogy a 2.1. fejezetben bevezetett Green-függvény definíció kondenzátum jelenléte nélkül is fennáll, mert a (2.2) kanonikus transzformáció ekkor egy identitást jelent. A korrelációs függvények alakjai szintén használhatóak, hiszen azokat az eredeti δ illetve eltüntetett δ operátorokkal vezettük be.

5. fejezet

Kollektív gerjesztések RPA-közelítésben

Az állapotegyenlet megoldásával az egyes fázisok tulajdonságairól illetve a határaikon végbemenő fázisátalakulásokról kaphattunk képet. A következőkben a rendszer dinamikai tulajdonságait vizsgáljuk meg, külön hangsúlyt fektetve a fázisátalakulások közelében történő dinamikai változásokra. A rendszer dinamikai tulajdonságainak vizsgálata során meghatározzuk a különböző egyrészecske illetve kollektív gerjesztési spektrumokat, amelyeket a retardált Green- illetve korrelációs függvények pólusai adnak meg. Az általános elmélet szerint a gerjesztéseket a pólusok a komplex felső síkra való kiterjesztésével kaphatjuk meg oly módon, hogy a pólusok valós része felel meg a gerjesztés frekvenciájának (energiájának), míg a képzetes rész adja a gerjesztés csillapodását¹. A ferromágneses kölcsönhatás esetén illetve a poláris kölcsönhatás esetén a P1 fázisban, ahol $n_c = n_{c,+}$ vezessük be a következő karakterisztikus hosszúságokat:

$$\lambda = \hbar \left(\frac{\beta}{2M} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.1a)$$

$$\xi_{n,s}^B = \frac{\hbar}{\sqrt{4Mn_c|c_{n,s}|}}, \quad (5.1b)$$

$$\xi' = \frac{M}{4\pi\hbar^2 n_c \beta}, \quad (5.1c)$$

¹Ennek inverze a gerjesztés élettartama.

illetve a poláris kölcsönhatás esetén a P2 fázisban

$$\xi_{n,s}^{B-} = \frac{\hbar}{\sqrt{4Mn_{c,-}|c_{n,s}|}}, \quad (5.1d)$$

$$\xi'^{-} = \frac{M}{4\pi\hbar^2 n_{c,-}\beta}, \quad (5.1e)$$

$$(5.1f)$$

ahol λ a termikus hullámhossz, $\xi_{n,s}^B$ illetve $\xi_{n,s}^{B-}$ a megfelelő csatolási állandóhoz tartozó Bose–Einstein kondenzációt illetve a P2 fázisbeli rendparaméterét (ϕ_-) jellemző Bogoliubov (átlagtér) korrelációs hossz és ξ' illetve ξ'^{-} a Bose–Einstein kondenzáció illetve a P2 fázisbeli rendparaméterének kritikus fluktuációit jellemző hossz. A Bose–Einstein kondenzátummal rendelkező fázisokban a fizikailag releváns és kísérletileg is elérhető tartomány az átmeneti hőmérsékleti tartomány, amelyet a

$$\xi_{n,s}^B \gg \xi', \lambda \quad (5.2)$$

feltétel határoz meg. Ha $k\lambda \ll 1$ feltétel teljesül a kísérletileg szóba jövő hullámhosszakra, akkor a buborék járuléka közelíthető analitikus kifejezésekkel.

A számolás áttekinthetőségének érdekében definiáljunk a következő dimenziótlan kifejezéseket:

$$\Omega = \frac{\hbar\omega}{\epsilon_{\mathbf{k}}}, \quad (5.3a)$$

$$b = \beta g\mu_B B, \quad (5.3b)$$

$$\gamma_0 = \beta |c_s| n_c, \quad (5.3c)$$

továbbá a ferromágneses esetben

$$\tilde{\gamma} = \beta (|c_s| m + g\mu_B B). \quad (5.3d)$$

A korábban felírt polarizációk közül a szingulárisak közvetlenül zárt alakban írhatóak fel, de a gerjesztések analitikus meghatározásához szükségünk lesz a buborék járulékanak

egy az $i\omega_n$ -ben és \mathbf{k} -ban felírt zárt alakjára is. Induljunk ki a buborék (4.52) alakjából és használjuk ki azt, hogy a proper Green-függvények diagonálisak a spin indexükben. Ekkor a (4.52) kifejezés el nem tűnő tagjai

$$\Pi_{rs}^{(r)sr}(\mathbf{k}, i\omega_n) = -\frac{1}{\hbar} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{n^0(e_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \hbar\tilde{\Sigma}_{11}^{ss}) - n^0(e_{\mathbf{q}} + \hbar\tilde{\Sigma}_{11}^{rr})}{i\omega_n - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - e_{\mathbf{q}}) - \Delta\tilde{\Sigma}}, \quad (5.4)$$

ahol $\Delta\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}_{11}^{ss} - \tilde{\Sigma}_{11}^{rr}$ és $n^0(e_{\mathbf{k}})$ az ideális Bose-gáz betöltési függvénye. Vezessük be a következő jelöléseket is:

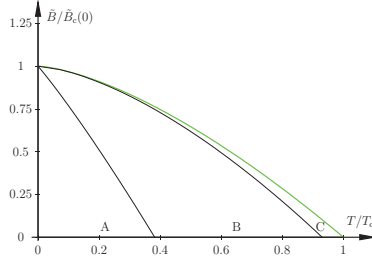
$$\sigma_s = \beta\hbar\tilde{\Sigma}_{11}^{ss}, \quad (5.5a)$$

$$\sigma_r = \beta\hbar\tilde{\Sigma}_{11}^{rr}. \quad (5.5b)$$

Az ún. retardált alakot akkor kapjuk, ha a (5.4) kifejezést kifolytatjuk a komplex felső félsíkra oly módon, hogy $i\omega_n$ helyébe $\omega + i\eta$ -t helyettesítünk be. A reguláris polarizációk számolása zérus mágneses térben [24, 45] cikkekben található meg. A továbbiakban az ezekben kapott eredményeket használjuk fel és terjesztjük ki megfelelő módon a véges mágneses tér esetére.

5.1. Poláris kölcsönhatás esete, P2 fázis

A poláris kölcsönhatás esetén a legkézenfekvőbb kérdés az, hogy hogyan viselkednek a gerjesztések a P2-P1 fázisátalakulás határán, melyik lesz ezek közül a kritikus. Vizsgáljuk meg először részletesebben a P2 fázist a $T-B$ fázistérben. A λ , ξ_s^B , ξ_t^- viszonya alapján a P2 fázisban a $T-B$ tartomány három részre osztható fel. Ez látható a 5.1. ábrán. Az „A” tartományban $\lambda \gg \xi_s^B, \xi_t^-$, a „B” tartományban $\xi_s^B \gg \lambda, \xi_t^-$, míg a „C” tartományban $\xi_t^- \gg \xi_s^B, \lambda$. A nem eltűnő reguláris polarizációk mind megegyeznek, azaz $\Pi_0(\mathbf{k}, i\omega) = \Pi_{rs}^{sr}$ minden $r, s = +, 0, -$ -ra, mivel $\gamma_f = \gamma_b = 0$ az összes proper Green-függvényre [45]. Ezek



5.1. ábra. A P2 fázis három tartománya. A jobb láthatóság érdekében az „A” és „C” tartományokat kinagyítottuk.

után a reguláris polarizáció az egyes tartományokban

$$c_{n,s}\Pi_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{\lambda\xi^{\prime-}}{(\xi_{n,s}^{B-})^2} \frac{1}{(\Omega k\lambda)^2} \quad \text{az „A” tartományban,} \quad (5.6a)$$

$$c_{n,s}\Pi_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{2} \frac{(\lambda\xi^{\prime-})}{(\xi_{n,s}^{B-})^2} \frac{1}{(k\lambda)} \ln\left(\frac{\Omega-1}{\Omega+1}\right) \quad \text{a „B” és „C” tartományokban.} \quad (5.6b)$$

A „B” és „C” tartományokban további közelítéssel élhetünk, ha teljesül a $\Omega \gg 1$ feltétel. Ez $k \rightarrow 0$ mellett a Bogoliubov megoldásokra teljesül. Mivel azt várjuk, hogy az RPA-közelítés eredményei (a valós részek) nem térnek el jelentősen a Bogoliubov megoldástól, ezért az $|\Omega| \gg 1$ az RPA-közelítésben is fenntarthatjuk, így

$$c_{n,s}\Pi_0(\mathbf{k}, \omega) = -i \frac{(\lambda\xi^{\prime-})}{(\xi_{n,s}^{B-})^2} \frac{1}{(k\lambda)} \frac{1}{\Omega}. \quad (5.7)$$

A szinguláris polarizációk alakja az egész P2 fázisban azonos:

$$c_{n,s}\Pi_{++}^{(s)++}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2\zeta_-^2} \left(1 + \frac{b}{\gamma_0}\right) \left(\frac{\lambda}{\xi_{n,s}^{B-}}\right)^2 \frac{1}{(k\lambda)^2} \frac{1}{\Omega^2 - 1}, \quad (5.8a)$$

$$c_{n,s}\Pi_{--}^{(s)--}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2\zeta_-^2} \left(1 - \frac{b}{\gamma_0}\right) \left(\frac{\lambda}{\xi_{n,s}^{B-}}\right)^2 \frac{1}{(k\lambda)^2} \frac{1}{\Omega^2 - 1}, \quad (5.8b)$$

$$c_{n,s}(\Pi_{+0}^{(s)0+}(\mathbf{k}, \omega) + \Pi_{0-}^{(s)0-}(\mathbf{k}, \omega)) = \frac{1}{2\zeta_-^2} \left(1 + \frac{b}{\gamma_0} \Omega\right) \left(\frac{\lambda}{\zeta_{n,s}^{B-}}\right)^2 \frac{1}{(k\lambda)^2} \frac{1}{\Omega^2 - 1}, \quad (5.8c)$$

$$c_{n,s}(\Pi_{0+}^{(s)0+}(\mathbf{k}, \omega) + \Pi_{-0}^{(s)0-}(\mathbf{k}, \omega)) = \frac{1}{2\zeta_-^2} \left(1 - \frac{b}{\gamma_0} \Omega\right) \left(\frac{\lambda}{\zeta_{n,s}^{B-}}\right)^2 \frac{1}{(k\lambda)^2} \frac{1}{\Omega^2 - 1}, \quad (5.8d)$$

$$c_{n,s}(\Pi_{0-}^{(s)0+}(\mathbf{k}, \omega) + \Pi_{-0}^{(s)0+}(\mathbf{k}, \omega)) = \frac{1}{2\zeta_-^2} \left(1 - \frac{b^2}{\gamma_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda}{\zeta_{n,s}^{B-}}\right)^2 \frac{1}{(k\lambda)^2} \frac{1}{\Omega^2 - 1}. \quad (5.8e)$$

5.1.1. Sűrűség hullám, spinsűrűség hullám és kvadrupolár-spin hullám módus

Az 3. fejezetben tárgyaltuk a P2-P1 fázisok határán végbemenő folytonos fázisátalakulást. Tudjuk, hogy ehhez a fázisátalakuláshoz tartozik egy lágy módus, amely a kritikus pontban eltűnik. Ez a módus a sűrűség hullám, spinsűrűség hullám és kvadrupolár-spin hullám gerjesztések egyike lesz, amelyek a mágneses tér jelenlétében összekapcsolódnak ((4.65a), (4.65c) és (4.65k) kifejezések nevezői azonosak)². Ezen gerjesztések spektrumát a (4.66c) kifejezés zérushelyei adják.

A megoldandó egyenlet:

$$(1 - 2c_s \Pi_0)(1 - 3c_n \Pi_0) - (c_n + c_s - 5c_n c_s \Pi_0)(\Pi_{++}^{(s)++} + \Pi_{--}^{(s)--}) + 4c_n c_s \Pi_{++}^{(s)++} \Pi_{--}^{(s)--} = 0. \quad (5.9)$$

Az „A” tartományban ez a következő egyenletet eredményezi a poláris és szinguláris pola-

²A mágneses tér megjelenése miatt a kondenzátum spinorában már két nem zérus komponens van. Mágneses tér nélkül is ugyanaz marad a spinor szerkezet, így a módusok ekkor is összekapcsolódnak. Azonban a spinort ekkor megválaszthatjuk úgy, hogy csak 1 komponense legyen zérustól különböző, amely a módusok szétválásához vezet. A két választási lehetőséget ekkor egy spintérbeli forgatás köti össze.

rizációkat beírva:

$$\begin{aligned}
& \left(1 - 2 \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{\lambda \xi^{\prime-}}{(\xi_s^{B-})^2 (\Omega k \lambda)^2}\right) \left(1 - 3 \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{\lambda \xi^{\prime-}}{(\xi_n^{B-})^2 (\Omega k \lambda)^2}\right) \\
& - \left(\frac{1}{\zeta_-^2} \left[\left(\frac{\lambda}{\xi_n^{B-}}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}}\right)^2 \right] \frac{1}{(k\lambda)^2} \frac{1}{\Omega^2 - 1} - 5 \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}} \zeta_-^2} \left(\frac{\lambda^3 \xi^{\prime-}}{\xi_n^{B-2} \xi_s^{B-2}}\right) \frac{1}{\Omega^2 - 1} \frac{1}{(k\lambda)^2} \frac{1}{(\Omega k \lambda)^2}\right) \\
& + \frac{1}{\zeta_-^4} \left(1 - \frac{b^2}{\gamma_0^2}\right) \left(\frac{\lambda^4}{\xi_n^{B-} \xi_s^{B-}}\right) \frac{1}{(k\lambda)^4} \frac{1}{(\Omega^2 - 1)^2} + 6 \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\pi} \frac{(\lambda \xi^{\prime-})^2}{\xi_s^{B-2} \xi_n^{B-2}} \frac{1}{(\Omega k \lambda)^4} = 0.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Felhasználva az $\Omega \gg 1$ feltételt és a megoldást

$$\Omega = \frac{a-1}{(k\lambda)} + \mathcal{O}((k\lambda)^0)$$

alakban keresve egy valós együtthatós, negyedfokú egyenletet kapunk:

$$\begin{aligned}
& a_{-1}^4 - \left[\frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}} \left(2 \frac{\lambda \xi^{\prime-}}{(\xi_s^{B-})^2} + 3 \frac{\lambda \xi^{\prime-}}{(\xi_n^{B-})^2}\right) + \frac{1}{\zeta_-^2} \left(\left(\frac{\lambda}{\xi_n^{B-}}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}}\right)^2 \right) \right] a_{-1}^2 \\
& + 5 \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}} \zeta_-^2} \left(\frac{\lambda^3 \xi^{\prime-}}{\xi_n^{B-2} \xi_s^{B-2}}\right) + \frac{1}{\zeta_-^4} \left(1 - \frac{b^2}{\gamma_0^2}\right) \left(\frac{\lambda^4}{\xi_n^{B-} \xi_s^{B-}}\right) + 6 \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\pi} \frac{(\lambda \xi^{\prime-})^2}{\xi_s^{B-2} \xi_n^{B-2}} = 0.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

A megoldás könnyen felírható innen:

$$\begin{aligned}
& a_{-1}^2 = \frac{1}{\zeta_-^2} \left(\frac{\lambda^2}{\xi_n^{B-2}} + \frac{\lambda^2}{\xi_s^{B-2}}\right) + \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}} \left(3 \frac{\lambda \xi^{\prime-}}{\xi_n^{B-2}} + 2 \frac{\lambda \xi^{\prime-}}{\xi_s^{B-2}}\right) \\
& \pm \sqrt{\left[\frac{1}{\zeta_-^2} \left(\frac{\lambda^2}{\xi_n^{B-2}} - \frac{\lambda^2}{\xi_s^{B-2}}\right) + \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}} \left(3 \frac{\lambda \xi^{\prime-}}{\xi_n^{B-2}} - 2 \frac{\lambda \xi^{\prime-}}{\xi_s^{B-2}}\right) \right]^2 + \frac{1}{\zeta_-^4} \frac{b^2}{\gamma_0^2} \frac{\lambda^4}{\xi_n^{B-2} \xi_s^{B-2}}}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

A módusok tisztán valósak lesznek és hullámszámmal lineárisan mennek: $\omega_{\pm} = c_{\pm} k$ és

$$c_{\pm}^2 = \frac{(c_n + c_s)n_c + (3c_n + 2c_s)p \pm \sqrt{[(c_n - c_s)n_c + (3c_n - 2c_s)p]^2 + 4c_n c_s n_c^2 \left(\frac{g\mu_B B}{c_s n_c}\right)^2}}{2}, \tag{5.13}$$

ahol $p = \Gamma(3/2)\zeta(3/2)/4\pi^2\lambda^3$ a nemkondenzált részecskék sűrűsége tetszőleges spinirányban. Ez az eredmény $T = 0$ hőmérsékleten megegyezik azzal, amit Ohmi és Machida kapott a mozgásegyenlet vizsgálatával [37]. A (5.13)-ben a négyzetgyök alatti kifejezést c_s/c_n -ben vezető rendben közelítve:

$$c_+^2 = \frac{c_n n}{M} - 4 \frac{c_s n_+ n_-}{nM} \quad (5.14a)$$

$$c_-^2 = \frac{c_s n_c}{M} + 4 \frac{c_s n_+ n_-}{nM}, \quad (5.14b)$$

ahol $n_r = n_{c,r} + n'_r$. Ebben a közelítésben a csillapodás csak nem zérus hőmérsékleten jelenik meg és exponenciálisan kicsi lesz. Magasabb rendben Beliaev típusú csillapodás jelenik meg a gerjesztésben, amire részletes számolást találhatunk a skalár Bose gáz esetén a [56] hivatkozásban.

A „B” tartományban a szinguláris és reguláris polarizációk kifejezéseit beírva a (5.9) egyenlet a következő alakra vezet:

$$\begin{aligned} & \left(1 + 2i \frac{(\lambda \xi'^-)}{(\xi_s^{B-})^2} \frac{1}{(k\lambda)} \frac{1}{\Omega}\right) \left(1 + 3i \frac{(\lambda \xi'^-)}{(\xi_n^{B-})^2} \frac{1}{(k\lambda)} \frac{1}{\Omega}\right) \\ & - \frac{1}{\zeta^2} \left(\left(\frac{\lambda}{\xi_n^{B-}}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}}\right)^2 + 5i \frac{(\lambda^3 \xi'^-)}{(\xi_n^{B-} \xi_s^{B-})^2} \frac{1}{(k\lambda)} \frac{1}{\Omega}\right) \frac{1}{(k\lambda)^2} \frac{1}{\Omega^2 - 1} \\ & + \frac{1}{\zeta^4} \left(1 - \frac{b^2}{\gamma_0^2}\right) \frac{\lambda^4}{(\xi_n^{B-} \xi_s^{B-})^2} \frac{1}{(k\lambda)^4} \frac{1}{(\Omega^2 - 1)^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Kihasználva azt, hogy $\Omega \gg 1$ (így $\Omega^2 - 1 \approx \Omega^2$)³ és a megoldást

$$\Omega = \frac{a_{-1}}{(k\lambda)} + \mathcal{O}((k\lambda)^0) \quad (5.16)$$

³Pontosabban: A megoldást (valójában egy végtelen sor)

$$\Omega = \sum_{-n_{min}}^{n_{max}} a_n (k\lambda)^n$$

alakban keressük $k \rightarrow 0$ mellett. Ha $n_{min} + n_{max} < 0$, akkor Ω^2 minden egyes tagja $\gg 1$, $k \rightarrow 0$ esetén. Ez a feltétel minden közelítésünknel fennáll.

alakban keresve a_{-1} -re a következő egyenlet adódik:

$$a_{-1}^4 + i \left(3 \frac{(\lambda \xi'^{-})}{(\xi_n^{B-})^2} + 2 \frac{(\lambda \xi'^{-})}{(\xi_s^{B-})^2} \right) a_{-1}^3 - \frac{1}{\zeta_-^2} \left(\left(\frac{\lambda}{\xi_n^{B-}} \right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^2 + 6 \frac{(\lambda \xi'^{-})^2}{(\xi_n^{B-} \xi_s^{B-})^2} \right) a_{-1}^2 - 5i \frac{1}{\zeta_-^2} \frac{(\lambda^3 \xi'^{-})}{(\xi_n^{B-} \xi_s^{B-})^2} a_{-1} + \frac{1}{\zeta_-^4} \frac{\lambda^4}{(\xi_n^{B-} \xi_s^{B-})^2} \left(1 - \frac{b^2}{\gamma_0^2} \right) = 0. \quad (5.17)$$

Ez egy negyedfokú egyenlet, amelynek megoldását közelítéssel adjuk meg. Legyen

$$a_{-1} = a_{-1}^{(0)} + i\alpha, \quad (5.18)$$

ahol $|\alpha/a_{-1}^{(0)}| \ll 1$ és $a_{-1}^{(0)}$ megoldása a

$$a_{-1}^{(0)4} - \frac{1}{\zeta_-^2} \left(\left(\frac{\lambda}{\xi_n^{B-}} \right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^2 + 6 \frac{(\lambda \xi'^{-})^2}{(\xi_n^{B-} \xi_s^{B-})^2} \right) a_{-1}^{(0)2} + \frac{1}{\zeta_-^4} \frac{\lambda^4}{(\xi_n^{B-} \xi_s^{B-})^2} \left(1 - \frac{b^2}{\gamma_0^2} \right) = 0 \quad (5.19)$$

egyenletnek. Kihasználva a $\xi'^{-} \ll \xi_{n,s}^{B-}$ feltételt a $\mathcal{O}\left(\left(\frac{\xi'}{\xi_{n,s}}\right)^2\right)$ tagokat elhanyagoljuk. Ekkor

$$(a_{-1}^{(0)})^2 = \frac{\lambda^2}{2\zeta_-} \left[\frac{1}{(\xi_n^{B-})^2} + \frac{1}{(\xi_s^{B-})^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{(\xi_n^{B-})^2} - \frac{1}{(\xi_s^{B-})^2} \right)^2 + 4 \frac{1}{(\xi_n^{B-} \xi_s^{B-})^2} \frac{b^2}{\gamma_0^2}} \right]. \quad (5.20)$$

Ezután $a_{-1} = a_{-1}^{(0)} + i\alpha$ -t beírva a (5.17) egyenlet be és az $|\alpha/a_{-1}^{(0)}| \leq 1$ feltételnek megfelelően az α -ban lineáris tagokat megtartva, α -ra a következő kifejezést kapjuk:

$$\alpha = - \frac{\lambda \xi'}{4(\xi_n^{B-} \xi_s^{B-})^2} \left[3(\xi_s^{B-})^2 + 2(\xi_n^{B-})^2 \pm \frac{(3(\xi_s^{B-})^2 - 2(\xi_n^{B-})^2) \left(\frac{1}{(\xi_n^{B-})^2} - \frac{1}{(\xi_s^{B-})^2} \right) \xi_n^{B-} \xi_s^{B-}}{\sqrt{\left(\frac{(\xi_n^{B-})^2 - (\xi_s^{B-})^2}{\xi_n^{B-} \xi_s^{B-}} \right)^2 + 4 \frac{b^2}{\gamma_0^2}}} \right]. \quad (5.21)$$

Látható, hogy α tisztán valós, amely következménye az $\mathcal{O}\left(\left(\frac{\xi'}{\xi_{n,s}^{B-}}\right)^2\right)$ feltételnek⁴. Az ω is

⁴ α képzetes részére nincs szükségünk. Ez a teljes megoldás valós részéhez adna korrekciót, de minket elsősorban a valós illetve a képzetes rész vezető tagjai érdekelnek.

lineáris k -ban, de már nem lesz tisztán valós: $\omega = c_{\pm}k - i\gamma_{\pm}k$, ahol

$$c_{\pm}^2 = \left[c_n + c_s \pm \sqrt{(c_n - c_s)^2 + 4c_n c_s \left(\frac{g\mu_B B}{c_s n_c} \right)^2} \right] \frac{n_c}{2M} \quad (5.22a)$$

$$\gamma_{\pm} = \left[3c_n + 2c_s \pm \frac{(3c_n - 2c_s)(c_n - c_s)}{\sqrt{(c_n - c_s)^2 + 4c_n c_s \left(\frac{g\mu_B B}{c_s n_c} \right)^2}} \right] \frac{M}{8\pi\hbar^3\beta}. \quad (5.22b)$$

A valós rész nem más, mint a (A.108a) és (A.108b) által megadott Bogoliubov megoldások k -ban lineáris közelítése $k \rightarrow 0$ határesetben ($\epsilon_{\mathbf{k}}^2$ elhanyagolásával), azzal a lényeges különbséggel, hogy az n_c kondenzátumsűrűség véges hőmérsékleten számolandó. Kihazsnálva a gyakorlatban megvalósuló $c_n \gg c_s$ feltételt:

$$c_+^2 = \frac{(c_n + c_s)n_c}{M} - \frac{4c_s n_{c,+} n_{c,-}}{n_c} \frac{c_s}{M}, \quad (5.23a)$$

$$c_-^2 = \frac{4c_s n_{c,+} n_{c,-}}{n_c} \frac{c_s}{M}, \quad (5.23b)$$

$$\gamma_+ = \frac{3M}{4\pi\hbar^3} \left[c_n - c_s \left(\frac{g\mu_B B}{c_s n_c} \right)^2 \right] k_B T, \quad (5.23c)$$

$$\gamma_- = \frac{c_s M}{4\pi\hbar^3} \left[2 + 3 \left(\frac{g\mu_B B}{c_s n_c} \right)^2 \right] k_B T. \quad (5.23d)$$

A „C” tartományban szintén a (5.15) egyenletet kell megoldanunk, azzal a különbséggel, hogy a vezető rendben más tagok maradnak meg. Csak az $\omega_- = -i\gamma_- k$ gerjesztést követve a megoldandó egyenlet:

$$-5i \frac{1}{\zeta_-^2} \frac{(\lambda^3 \xi'^-)}{(\xi_n^{B-} \xi_s^{B-})^2} \frac{1}{(k\lambda)} \frac{1}{\Omega} \frac{1}{(k\lambda)^2} \frac{1}{\Omega^2 - 1} + \frac{1}{\zeta_-^4} \left(1 - \frac{b^2}{\gamma_0^2} \right) \frac{\lambda^4}{(\xi_n^{B-} \xi_s^{B-})^2} \frac{1}{(k\lambda)^4} \frac{1}{(\Omega^2 - 1)^2} = 0. \quad (5.24)$$

A megoldást $\Omega = \frac{a-1}{(k\lambda)} + \mathcal{O}((k\lambda)^0)$ alakban keresve: $a_{-1} = -i \frac{2\lambda}{5\zeta_-^2} \left(1 + \frac{b}{\gamma_0} \right)$. Innen

$$\gamma_- = \frac{8\pi\hbar^3 n_{c,-}}{5M^2 k_B T}. \quad (5.25)$$

A fejezet elején említettük már, hogy a P2-P1 fázisátalakuláshoz tartozik egy lágy gerjesztési módus. A fenti három tartományok vizsgálatával látható, hogy ez nem más, mint az ω_- gerjesztési ág, amely a fázisátalakulás határán $n_{c,-}$ -szal tűnik el.

5.1.2. Spinhullám módus

Ezen gerjesztések spektrumát a (4.66d) kifejezés zérushelyei adják. A megoldandó egyenlet:

$$(1 - 2c_s \Pi_0)^2 - c_s(1 - 2c_s \Pi_0)(\Pi_{0+}^{(s)+0} + \Pi_{-0}^{(s)0-} + \Pi_{+0}^{(s)0+} + \Pi_{-0}^{(s)-0}) - c_s^2 \left((\Pi_{0-}^{(s)+0} + \Pi_{-0}^{(s)0+})^2 - (\Pi_{0+}^{(s)+0} + \Pi_{-0}^{(s)0-})(\Pi_{+0}^{(s)0+} + \Pi_{-0}^{(s)-0}) \right) = 0. \quad (5.26)$$

A spinhullám módus nem mutat kritikus viselkedést a P2-P1 fázis határán, ezért csak a fizikailag releváns „B” tartományban vizsgálódunk. Beírva a polarizációk kifejezéseit:

$$\left(1 + 2i \frac{(\lambda \xi'^-)}{(\xi_s^{B-})^2} \frac{1}{(k\lambda)} \frac{1}{\Omega} \right)^2 - \frac{1}{\zeta_-^2} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^2 \left(1 + 2i \frac{(\lambda \xi'^-)}{(\xi_s^{B-})^2} \frac{1}{(k\lambda)} \frac{1}{\Omega} \right) \frac{1}{(k\lambda)^2} \frac{1}{\Omega^2 - 1} - \frac{1}{4\zeta_-^4} \frac{b^2}{\gamma_0^2} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^4 \frac{1}{(k\lambda)^4} \frac{1}{\Omega^2 - 1} = 0. \quad (5.27)$$

Kihasználva, hogy $\Omega^2 - 1 \approx \Omega^2$:

$$\Omega^3 + 4i \frac{(\lambda \xi'^-)}{(\xi_s^{B-})^2} \frac{1}{(k\lambda)} \Omega^2 - \left(\frac{1}{\zeta_-^2} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^2 + \frac{1}{4\zeta_-^4} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^4 \frac{1}{(k\lambda)^2} \frac{b^2}{\gamma_0^2} + 4 \frac{(\lambda \xi'^-)^2}{(\xi_s^{B-})^4} \right) \frac{1}{(k\lambda)^2} \Omega^2 - 2i \frac{1}{\zeta_-^2} \frac{(\lambda^3 \xi'^-)}{(\xi_s^{B-})^4} \frac{1}{(k\lambda)^3} = 0. \quad (5.28)$$

Tekintsük a Bogoliubov megoldást:

$$\omega^{(2)} = \pm \hbar^{-1} \sqrt{\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + 2e_{\mathbf{k}} c_s N_0 + (g\mu_B B)^2}. \quad (5.29)$$

Ez egy gappal rendelkező gerjesztés, amelynek gapje $B \rightarrow 0$ -val tűnik el. Ez azt jelenti, hogy a mágneses tér változtatásával a gerjesztés jellege megváltozik. A spinhullám módus

tárgyalásánál elővigyázatosabbnak kell eljárni. A k egy kicsi, de nem zérus értéket vesz fel. Továbbra is fenntartjuk, hogy a k kicsi, de már nem infinitezimálisan, csak annyira, hogy a

$$(g\mu_B B)^2, 2e_{\mathbf{k}}c_s n_c \gg e_{\mathbf{k}}^2, \quad (5.30)$$

feltétel fennálljon, azaz az $e_{\mathbf{k}}^2$ tagot mindig elhanyagoljuk. A továbbiakban a maradék két tag egymáshoz való viszonya határozza meg a megoldást.

1. $(g\mu_B B)^2 \gg 2e_{\mathbf{k}}c_s n_c$:

Ekkor a megoldást

$$\Omega = \frac{a_{-2}}{(k\lambda)^2} + \frac{a_{-1}}{(k\lambda)} + a_0 + a_1(k\lambda) + \mathcal{O}((k\lambda)^2) \quad (5.31)$$

alakban keressük. Az a_n együtthatókat meghatározó egyenletek:

$$a_{-2}: \quad a_{-2}^2 - \frac{1}{4\zeta_-^4} \frac{b^2}{\gamma_0^2} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^4 = 0, \quad (5.32a)$$

$$a_{-1}: \quad a_{-2}^2 \left(3a_{-1} + 4i \frac{(\lambda\xi^{\prime-})}{(\xi_s^{B-})^2} \right) - \frac{1}{4\zeta_-^4} \frac{b^2}{\gamma_0^2} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^4 a_{-1} = 0 \quad (5.32b)$$

$$\begin{aligned} a_0: \quad & 3a_{-2}a_{-1}^2 + 3a_{-2}^2a_0 + 8i \frac{(\lambda\xi^{\prime-})}{(\xi_s^{B-})^2} a_{-2}a_{-1} - \left(\frac{1}{\zeta_-^2} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^2 + 4 \frac{(\lambda\xi^{\prime-})^2}{(\xi_s^{B-})^4} \right) a_{-2} \\ & - \frac{1}{4\zeta_-^4} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^4 \frac{b^2}{\gamma_0^2} a_0 = 0, \end{aligned} \quad (5.32c)$$

$$\begin{aligned} a_1: \quad & a_{-1}^3 + 6a_{-2}a_{-1}a_0 + 3a_{-2}^2a_1 + 4i \frac{(\lambda\xi^{\prime-})}{(\xi_s^{B-})^2} (2a_{-2}a_0 + a_{-1}^2) \\ & - \left(\frac{1}{\zeta_-^2} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^2 + 4 \frac{(\lambda\xi^{\prime-})^2}{(\xi_s^{B-})^4} \right) a_{-1} - \frac{1}{4\zeta_-^4} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^4 \frac{b^2}{\gamma_0^2} a_1 - 2i \frac{1}{\zeta_-^2} \frac{(\lambda^3\xi^{\prime-})}{(\xi_s^{B-})^4} = 0. \end{aligned} \quad (5.32d)$$

Innen az a_n együtthatók:

$$a_{-2} = \pm \frac{1}{2\zeta_-^2} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^2 \frac{b}{\gamma_0}, \quad (5.33a)$$

$$a_{-1} = -2i \frac{(\lambda \xi^{t-})}{(\xi_s^{B-})^2}, \quad (5.33b)$$

$$a_0 = \pm \frac{\gamma_0}{b}, \quad (5.33c)$$

$$a_1 = 4i \zeta_-^2 \left(\frac{\xi^{t-}}{\lambda} \right) \left(\frac{\gamma_0}{b} \right)^2. \quad (5.33d)$$

A spinhullám módus spektruma tehát:

$$\omega = \pm \hbar^{-1} g \mu_B B \left(1 + \frac{\hbar^2 c_s n_c}{2M(g\mu_B B)^2} k^2 \right) - i \frac{c_s M}{\pi \hbar^3 \beta} k \left(1 - \frac{\hbar^2 c_s n_c}{2M(g\mu_B B)^2} k^2 \right). \quad (5.34)$$

Ezen megoldás valós része éppen a (A.108c) Bogoliubov megoldás közelítése a mágneses teret vezető tagként kezelve, $k \rightarrow 0$ esetén. Megjegyzendő, hogy van egy tisztán képzetes módus is, amelyet $(g\mu_B B)^2 \gg 2e_{\mathbf{k}} c_s n_c$ esetben nem kapunk meg ezzel a közelítéssel. Ugyan a (5.26)-nek létezik tisztán képzetes megoldása $(g\mu_B B)^2 \gg 2e_{\mathbf{k}} c_s n_c$ esetén is, de az k^3 -nal arányos. Ez azt jelenti, hogy ezen megoldás esetén $\Omega \sim k$. Ez azonban nem teljesíti a megkövetelt $\Omega \gg 1$ feltételt $k \rightarrow 0$ esetén.

2. $(g\mu_B B)^2 \approx 2e_{\mathbf{k}} c_s n_c$:

Ekkor Ω -t más módon kell közelítenünk. Matematikailag $k \rightarrow 0$ -t teszünk fel, míg gyakorlatban k „kicsi”. Ezt a kettősséget úgy oldjuk fel, hogy b -t $b = b_1(k\lambda)$ alakba írjuk, ahol b_1 véges szám úgy, hogy eleget tesz a $(g\mu_B B)^2 \approx 2e_{\mathbf{k}} c_s n_c$ feltételnek. Ekkor már kezelhető a $k \rightarrow 0$ feltétel. Az előzőeket figyelembe véve Ω -t

$$\Omega = \frac{a_{-1}}{(k\lambda)} + \mathcal{O}((k\lambda)^0) \quad (5.35)$$

alakban keressük. Beírva a (5.27) egyenletbe:

$$a_{-1}^3 + 4i \frac{(\lambda \xi'^-)}{(\xi_s^{B-})^2} a_{-1}^2 - \left(\frac{1}{\zeta_-^2} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^2 + 4 \frac{(\lambda \xi'^-)^2}{(\xi_s^{B-})^4} \right. \\ \left. + \frac{1}{4\zeta_-^4} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^4 \frac{b_1^2}{\gamma_0^2} \right) a_{-1} - 2i \frac{1}{\zeta_-^2} \frac{(\lambda^3 \xi'^-)}{(\xi_s^{B-})^4} = 0. \quad (5.36)$$

A megoldást keressük $a_{-1} = a_{-1}^{(0)} + i\alpha$ alakban. Ha $a_{-1}^{(0)} = 0$, akkor létezik tisztán képzetes megoldás. Ha $a_{-1}^{(0)} \neq 0$, akkor feltesszük, hogy $|\alpha/a^{(0-1)}| \ll 1$ és $a_{-1}^{(0)}$ megoldása

a

$$a_{-1}^{(0)2} - \left(\frac{1}{\zeta_-^2} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^2 + 4 \frac{(\lambda \xi'^-)^2}{(\xi_s^{B-})^4} + \frac{1}{4\zeta_-^4} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^4 \frac{b_1^2}{\gamma_0^2} \right) = 0 \quad (5.37)$$

egyenletnek. Ekkor

$$a_{-1}^{(0)} = \pm \left(\frac{1}{\zeta_-^2} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^2 + 4 \frac{(\lambda \xi'^-)^2}{(\xi_s^{B-})^4} + \frac{1}{4\zeta_-^4} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^4 \frac{b_1^2}{\gamma_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.38)$$

1. $a_{-1}^{(0)} = 0$:

Ekkor létezik tisztán képzetes megoldás. Az $a_{-1} = i\alpha$ -t behelyettesítve (5.36)-ba és α -ban első rendig megtartva az egyenletet:

$$a_{-1} = -2i \frac{(\lambda \xi'^-)}{(\xi_s^{B-})^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{4\zeta_-^2} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^2 \frac{b_1^2}{\gamma_0^2}}. \quad (5.39)$$

A gerjesztés:

$$\omega = -i \frac{c_s M}{\pi \hbar^3 \beta} k \frac{1}{1 + \frac{(g\mu_B B)^2}{2e_k c_s n_c}} \approx -i \frac{c_s M}{2\pi \hbar^3 \beta} k, \quad (5.40)$$

ahol kihasználtuk a $(g\mu_B B)^2 \approx 2e_k c_s n_c$. Ez a gerjesztés egy spinrelaxációt ír le.

2. $a_{-1}^{(0)} \neq 0$:

Ekkor $a_{-1} = a_{-1}^{(0)} + i\alpha$ kifejezését beírva és az egyenletet α -ban első rendig

megtartva

$$\alpha = -\frac{(\lambda\xi')}{(\xi_s^B)^2} \frac{1 + \frac{1}{2\xi_-^2} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}}\right)^2 \frac{b^2}{\gamma_0^2}}{1 + \frac{1}{4\xi_-^2} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}}\right)^2 \frac{b^2}{\gamma_0^2}}. \quad (5.41)$$

A gerjesztés ekkor:

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{c_s n_c}{M} \left(1 + \frac{(g\mu_B B)^2}{2e_k c_s n_c}\right)} k - i \frac{c_s M}{2\pi \hbar^3 \beta} k \frac{1 + 2\frac{(g\mu_B B)^2}{2e_k c_s n_c}}{1 + \frac{(g\mu_B B)^2}{2e_k c_s n_c}}. \quad (5.42)$$

Ezen megoldás valós része a (A.108c) Bogoliubov megoldás $k \rightarrow 0$ esetén. Felhasználva a $(g\mu_B B)^2 \approx 2e_k c_s n_c$ feltételt a gerjesztést $\omega \approx c_{\pm} k - i\gamma k$ alakra hozhatjuk, ahol

$$c_{\pm}^2 = \frac{2c_s n_c}{M}, \quad (5.43a)$$

$$\gamma = \frac{3c_s M}{4\pi \hbar^3 \beta}. \quad (5.43b)$$

3. $(g\mu_B B)^2 \ll 2e_k c_s n_c$:

Ekkor írjuk a (5.27) egyenletet a következő alakba:

$$\left(\Omega^2 + 2i \frac{(\lambda\xi'^-)}{(\xi_s^{B-})^2} \frac{\Omega}{(k\lambda)} - \frac{1}{\xi_-^2} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}}\right)^2 \frac{1}{(k\lambda)^2}\right) \left(\Omega + 2i \frac{(\lambda\xi'^-)}{(\xi_s^{B-})^2} \frac{1}{(k\lambda)}\right) - \frac{1}{4\xi_-^4} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}}\right)^4 \frac{b^2}{\gamma_0^2} \frac{\Omega}{(k\lambda)^4} = 0. \quad (5.44)$$

Keressük Ω -t

$$\Omega = \frac{a_{-1}}{(k\lambda)} + \mathcal{O}((k\lambda)^0) \quad (5.45)$$

alakban. Ekkor

$$\left(a_{-1}^2 + 2i \frac{(\lambda\xi'^-)}{(\xi_s^{B-})^2} a_{-1} - \frac{1}{\xi_-^2} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}}\right)^2\right) \left(a_{-1} + 2i \frac{(\lambda\xi'^-)}{(\xi_s^{B-})^2}\right) - \frac{1}{4\xi_-^4} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}}\right)^4 \frac{b^2}{\gamma_0^2} \frac{a_{-1}}{(k\lambda)^2} = 0. \quad (5.46)$$

Tekintsük a b^2 -t tartalmazó tagot perturbációnak és a megoldást keressük a zérus

mágneses térbeli megoldás segítségével a következő módon. A zérus mágneses térbeli megoldások:

$$a_{-1}^{(0)} = -2i \frac{(\lambda \xi'^{-})}{(\xi_s^{B-})^2} \quad (5.47a)$$

és

$$a_{-1}^{(0)} = \pm \frac{1}{\zeta_-} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right) - i \frac{(\lambda \xi'^{-})}{(\xi_s^{B-})^2}. \quad (5.47b)$$

Ezután a teljes megoldást $a_{-1} = a_{-1}^{(0)} + \alpha$ alakban keressük, ahol $|\alpha/a_{-1}^{(0)}| \ll 1$. Ezt behelyettesítve a (5.46) egyenletbe és α -ban első rendet megtartva:

$$\alpha = i \frac{1}{2\zeta_-^2} \frac{(\lambda^3 \xi'^{-}) b^2}{(\xi_s^{B-})^4} \frac{1}{\gamma_0^2 (k\lambda)^2} \quad (5.48a)$$

és

$$\alpha = \pm \frac{1}{8\zeta_-^3} \left(\frac{\lambda}{\xi_s^{B-}} \right)^3 \frac{b^2}{\gamma_0^2 (k\lambda)^2} - i \frac{1}{4\zeta_-^2} \frac{(\lambda^3 \xi'^{-}) b^2}{(\xi_s^{B-})^4} \frac{1}{\gamma_0^2 (k\lambda)^2}, \quad (5.48b)$$

ahol α számolásánál αb^2 -nel arányos tagokat elhanyagoltuk, mert α a b^2 -ben már első rendű. A gerjesztés :

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{c_s n_c}{M}} k \left(1 + \frac{M(g\mu_B B)^2}{2c_s n_c \hbar^2 k^2} \right) - i \frac{c_s M}{2\pi \hbar^3 \beta} k \left(1 + \frac{M(g\mu_B B)^2}{c_s n_c \hbar^2 k^2} \right) \quad (5.49a)$$

és egy spinrelaxáció

$$\omega = -i \frac{c_s M}{\pi \hbar^3 \beta} k \left(1 - \frac{M(g\mu_B B)^2}{c_s n_c \hbar^2 k^2} \right). \quad (5.49b)$$

Az első spektrumot megkapjuk, ha a (A.108c) Bogoliubov megoldást közelítjük a mágneses teret perturbációként kezelve, $k \rightarrow 0$ esetén.

Látható, hogy a D_{zz} korrelációs függvény nevezőjének zérushelyeként létezik egy tisztán

képzetes megoldás, amely Bogoliubov-közelítésben nem jelenik meg. Ennek oka az, hogy nem zérus hőmérsékleten megjelenik a véges hőmérsékletű részecskék alkotta termikus felhő. Meg kell említenünk, hogy a mágneses tér nagyságának megfelelő figyelembevételével a 2. eset közelítésével megkapható az 1. és a 3. eset.

5.2. Ferromágneses kölcsönhatás esete

A szinguláris polarizációk a következő alakba írhatóak:

$$|c_{n,s}| \Pi_{++}^{(s)++}(\mathbf{k}, \omega) = \left(\frac{\lambda}{\xi_{n,s}^B} \right)^2 \frac{1}{(k\lambda)^2} \frac{1}{\Omega^2 - 1}, \quad (5.50a)$$

$$|c_{n,s}| \Pi_{+0}^{(s)0+}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\gamma_0}{(k\lambda)^2 (\Omega - 1) - \tilde{\gamma}}, \quad (5.50b)$$

$$|c_{n,s}| \Pi_{+-}^{(s)-+}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\gamma_0}{(k\lambda)^2 (\Omega - 1) - 2\tilde{\gamma}}. \quad (5.50c)$$

A P2 fázissal ellentétben az összes reguláris polarizáció már nem fog megegyezni, hiszen a proper sajátenergiák nem egyeznek meg.

A reguláris polarizáció alakja függ attól is, hogy milyen tartományban vizsgáljuk a gerjesztést. Ha teljesül a $\sigma_s = \sigma_r = \sigma$ feltétel, akkor az átmeneti hőmérsékleti tartományban ($\xi_{n,s}^B \gg \xi', \lambda$)

$$|c_{n,s}| \Pi_{rs}^{(r)sr}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{2} \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_{n,s}^B)^2} \frac{1}{(k\lambda)} \ln \left(\frac{\Omega - 1 + 2i \frac{\sqrt{\sigma}}{(k\lambda)}}{\Omega + 1 + 2i \frac{\sqrt{\sigma}}{(k\lambda)}} \right), \quad (5.51)$$

ahol teljesülnie kell a

$$\frac{\sqrt{\sigma}}{\Omega k \lambda} \ll 1 \quad (5.52)$$

feltételnek is [45]. Mivel ferromágneses esetben a sajátenergiák különböznek egymástól, ezért a reguláris polarizációk közül a fentiek csak a diagonálisakra teljesülnek, azaz $r = s$ esetben. Továbbá kihasználva a $|\Omega| \gg 1$ feltételt

$$|c_{n,s}| \Pi_{rr}^{(r)rr}(\mathbf{k}, \omega) = -i \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_{n,s}^B)^2} \frac{1}{(k\lambda)} \frac{1}{\Omega} \left(1 - 2i \frac{\sqrt{\sigma_r}}{\Omega k \lambda} \right), \quad (5.53)$$

ahol mind a valós, mind a képzetes részben a vezető tagot tartottuk meg. Ennek megfelelően

$$|c_{n,s}|\Pi_{++}^{(r)++}(\mathbf{k}, \omega) = -i \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_s^B)^2} \frac{1}{(k\lambda)} \frac{1}{\Omega}, \quad (5.54a)$$

$$|c_{n,s}|\Pi_{00}^{(r)00}(\mathbf{k}, \omega) = -i \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_{n,s}^B)^2} \frac{1}{(k\lambda)} \frac{1}{\Omega} \left(1 - 2i \frac{\sqrt{\tilde{\gamma}}}{\Omega k\lambda}\right), \quad (5.54b)$$

$$|c_{n,s}|\Pi_{--}^{(r)--}(\mathbf{k}, \omega) = -i \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_{n,s}^B)^2} \frac{1}{(k\lambda)} \frac{1}{\Omega} \left(1 - 2i \frac{\sqrt{2\tilde{\gamma}}}{\Omega k\lambda}\right). \quad (5.54c)$$

A mágneses átalakulás közelében, ahol azt várjuk, hogy van lágú gerjesztés [lásd 5.2.1. fejezet 2. pontját], a reguláris polarizációt jól közelíti a

$$|c_s|\Pi_{rr}^{rr}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\lambda\xi'}{(\xi_s^B)^2} \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} F\left(\frac{1}{2} \middle| \sigma_r\right) + i \frac{\Omega k\lambda}{4\sigma_r} \right] \quad (5.55)$$

kifejezés, amely azon esetben igaz, amikor $k\lambda \ll 1$, $|\beta\hbar\omega| \ll k\lambda$ és $|\beta\hbar\omega| \ll 2\sqrt{\sigma_r}k\lambda$. A megmaradt reguláris polarizációk függenek az Ω közvetlen alakjától [45]. Ha a megoldást $\Omega = \frac{a-2}{(k\lambda)^2} + a_0 + \mathcal{O}((k\lambda)^2)$ alakban keressük, akkor

$$|c_s|(\Pi_{+0}^{(r)0+} + \Pi_{0-}^{(r)-0}) = \frac{C_- - C_+}{\tilde{\gamma} - a_{-2}} + \left[\frac{2\tilde{\gamma}_0 + C_+ + C_-}{(\tilde{\gamma} - a_{-2})^2} + \frac{a_0}{(\tilde{\gamma} - a_{-2})^2} (C_- - C_+) + \frac{D_- - D_+}{(\tilde{\gamma} - a_{-2})^3} \right] (k\lambda)^2 + \mathcal{O}((k\lambda)^4), \quad (5.56)$$

ahol

$$C_+ = \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_s^B)^2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi} F\left(\frac{3}{2} \middle| 0\right), \quad (5.57a)$$

$$C_0 = \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_s^B)^2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi} F\left(\frac{3}{2} \middle| \tilde{\gamma}\right), \quad (5.57b)$$

$$C_- = \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_s^B)^2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi} F\left(\frac{3}{2} \middle| 2\tilde{\gamma}\right), \quad (5.57c)$$

$$D_+ = \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_s^B)^2} \frac{4\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) F\left(\frac{5}{2} \mid 0\right)}{3\pi}, \quad (5.57d)$$

$$D_- = \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_s^B)^2} \frac{4\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) F\left(\frac{5}{2} \mid 2\tilde{\gamma}\right)}{3\pi}. \quad (5.57e)$$

Ekkor

$$\tilde{\gamma} = \gamma_0 + C_+ - C_- + b, \quad (5.58)$$

ahol $\tilde{\gamma}$ -t (5.3d) definiálja.

5.2.1. Sűrűség hullám és spinsűrűség hullám módus

A sűrűség hullám és spinsűrűség hullám gerjesztéseket két tartományban adjuk meg. Az egyik az átmeneti hőmérséklet tartomány ($\xi_{n,s}^B \gg \xi'\lambda$), a másik a 3.3.2. fejezetben tárgyalt mágneses átalakulás kritikus pontjának környezete. A mágneses átalakulás szoros kapcsolatban áll a longitudinális spinfluktuációkkal, amelyet a (4.41b) összecsabály is kifejez. Amíg c_n/c_s véges, addig a sűrűség hullám és spinsűrűség hullám módusok összekapcsolódnak, $c_n/c_s \rightarrow \infty$ esetén a sűrűség hullámhoz tartozó korrelációs függvény azonosan zérus lesz, csak a spinsűrűség-hullámban lesz gerjesztés.

1. Átmeneti hőmérsékleti tartomány:

Ezen gerjesztések spektrumát a (4.79h) kifejezés zérushelyei adják, azaz

$$(1 - c_n \Pi_{nn})(1 - c_s \Pi_{zz}) - c_n c_s \Pi_{nz}^2 = 0. \quad (5.59)$$

Béírva a polarizációk kifejezését:

$$\begin{aligned} & \left(1 + 3i \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_n^B)^2} \frac{1}{(k\lambda)} \frac{1}{\Omega} + 2(1 + \sqrt{2}) \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_n^B)^2} \frac{\sqrt{\tilde{\gamma}}}{(k\lambda)^2} \frac{1}{\Omega^2} - \left(\frac{\lambda}{\xi_n^B} \right)^2 \frac{1}{(k\lambda)^2} \frac{1}{\Omega^2} \right) \\ & \left(1 - 2i \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_s^B)^2} \frac{1}{(k\lambda)} \frac{1}{\Omega} - 2\sqrt{2} \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_s^B)^2} \frac{\sqrt{\tilde{\gamma}}}{(k\lambda)^2} \frac{1}{\Omega^2} + \left(\frac{\lambda}{\xi_s^B} \right)^2 \frac{1}{(k\lambda)^2} \frac{1}{\Omega^2} \right) \\ & + \left(2\sqrt{2} \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_n^B \xi_s^B)} \frac{1}{(k\lambda)^2} \frac{1}{\Omega^2} \sqrt{\tilde{\gamma}} + \frac{\lambda^2}{\xi_n^B \xi_s^B} \frac{1}{(k\lambda)^2} \frac{1}{\Omega^2} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.60)$$

A megoldást

$$\Omega = \frac{a_{-1}}{(k\lambda)} + \mathcal{O}((k\lambda)^0) \quad (5.61)$$

alakban keresve az a_{-1} -t meghatározó egyenlet:

$$\begin{aligned} & a_{-1}^4 + i \left(3 \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_B^B)^2} - 2 \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_S^B)^2} \right) a_{-1}^3 + \\ & + \left[6 \frac{(\lambda\xi')^2}{(\xi_n^B \xi_s^B)^2} + \sqrt{\tilde{\gamma}} \left(2(1 + \sqrt{2}) \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_n^B)^2} - 2\sqrt{2} \frac{(\lambda\xi')}{(\xi_s^B)^2} \right) - \left(\frac{\lambda}{\xi_n^B} \right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\xi_s^B} \right)^2 \right] a_{-1}^2 \\ & + i \left(5 \frac{(\lambda^3 \xi')}{(\xi_n^B \xi_s^B)^2} - 2(2 + 5\sqrt{2}) \frac{(\lambda\xi')^2}{(\xi_n^B \xi_s^B)^2} \right) a_{-1} \\ & + 2(1 + 4\sqrt{2}) \frac{\lambda^3 \xi'}{(\xi_n^B \xi_s^B)^2} \sqrt{\tilde{\gamma}} - 4\sqrt{2} \frac{(\lambda\xi')^2}{(\xi_n^B \xi_s^B)^2} \tilde{\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Vezető rendben az egyenlet ($\mathcal{O}\left(\frac{\xi'}{\xi_{n,s}^B}\right)$ -t elhanyagolva):

$$a_{-1}^4 - \left(\left(\frac{\lambda}{\xi_n^B} \right)^2 - \left(\frac{\lambda}{\xi_s^B} \right)^2 \right) a_{-1}^2 = 0. \quad (5.63)$$

Ennek a megoldása éppen a Bogoliubov megoldás lesz:

$$a_{-1}^{(0)2} = \left(\frac{\lambda}{\xi_n^B} \right)^2 - \left(\frac{\lambda}{\xi_s^B} \right)^2. \quad (5.64)$$

A $a_{-1}^{(0)} = 0$ megoldás nem túl érdekes, hiszen a Bogoliubov megoldáshoz szeretnénk korrekciós tagokat meghatározni.

A teljes megoldást $a_{-1} = a_{-1}^{(0)} + \alpha$ alakban keresve, majd ezt beírva (5.62) egyenletbe és α -ban első rendű tagokat megtartva:

$$\begin{aligned} \alpha = & -a_{-1}^{(0)} \left(\frac{\xi'}{\lambda} \right) \frac{2}{((\xi_s^B)^2 - (\xi_n^B)^2)^2} \left[(1 + \sqrt{2})(\xi_n^B)^4 + 2\sqrt{2}(\xi_s^B)^2(\xi_n^B)^2 + \sqrt{2}(\xi_s^B)^4 \right] \sqrt{\tilde{\gamma}} \\ & - i \left\{ \frac{1}{2} \frac{(\lambda \xi')}{(\xi_n^B \xi_s^B)^2 ((\xi_s^B)^2 - (\xi_n^B)^2)} (3(\xi_s^B)^4 + 2(\xi_n^B)^4) - \frac{1}{2} \frac{(\xi')^2}{(\xi_n^B \xi_n^B)^2 ((\xi_s^B)^2 - (\xi_n^B)^2)^3} \sqrt{\tilde{\gamma}} \times \right. \\ & \left[9(1 + \sqrt{2})(\xi_s^B)^8 - (10 - 8\sqrt{2})(\xi_s^B)^6(\xi_n^B)^2 + (6 - 5\sqrt{2})(\xi_s^B)^4(\xi_n^B)^4 + 2\sqrt{2}(\xi_s^B)^2(\xi_n^B)^6 \right. \\ & \left. \left. + 6\sqrt{2}(\xi_s^B)^8 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

A gerjesztés spektruma:

$$\begin{aligned} \omega = & \pm \sqrt{\frac{(c_n + c_s)n_c}{M}} k \left(1 - \frac{M^{\frac{3}{2}}\sqrt{\tilde{\gamma}}}{\sqrt{2}\pi\hbar^3 n_c \beta^{\frac{3}{2}}} \frac{(1 + \sqrt{2})c_n^2 - \sqrt{2}c_n c_s + \sqrt{2}c_s^2}{c_n^2 + c_s^2} \right) \\ & - i \left[\frac{M}{4\pi\hbar^3\beta} \frac{3c_n^2 + 2c_s^2}{c_n + c_s} - \frac{\sqrt{2}M^{\frac{5}{2}}\sqrt{\tilde{\gamma}}}{16\pi^2 n_c \hbar^6 \beta^{\frac{5}{2}}} \right. \\ & \left. \frac{9(1 + \sqrt{2})c_n^4 + (10 - 8\sqrt{2})c_n^3 c_s + (6 - 5\sqrt{2})c_n^2 c_s^2 - 2\sqrt{2}c_n c_s^3 + 6\sqrt{2}c_s^4}{(c_n + c_s)^3} \right] k \approx \\ & \pm \sqrt{\frac{(c_n + c_s)n_c}{M}} k \left(1 - \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \frac{c_n M^{\frac{3}{2}}\sqrt{\tilde{\gamma}}}{\pi n_c \hbar^3 \beta^{\frac{3}{2}}} \right) - i \left(\frac{3c_n M}{4\pi\hbar^3\beta} - \frac{9\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{16} \frac{c_n M^{\frac{5}{2}}\sqrt{\tilde{\gamma}}}{\pi^2 n_c \hbar^6 \beta^{\frac{5}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (5.66)$$

A megoldás valós részében a (A.109a) Bogoliubov megoldáshoz képest megjelenik a mágneses tér is $\tilde{\gamma}$ -n keresztül, de ezen járulék alacsonyabb rendű, mint maga a Bogoliubov megoldás.

2. A mágneses átalakulás környezete

Rögzített részecskesűrűség esetén ($c_n/c_s \rightarrow \infty$) a mágneses átalakulás közelében megjelenő módus spektrumát a $D_{zz}^{(n)}$ [(4.48)] korrelációs függvény pólusa adja, amely

megegyezik éppen a D_{nn} számlálójának zérushelyeivel:

$$\Pi_{nn} - c_s (\Pi_{nn}\Pi_{zz} - \Pi_{nz}^2) = 0. \quad (5.67)$$

Behelyettesítve a polarizáció (5.55) kifejezését a következő egyenletet kell megoldani:

$$\begin{aligned} & P + Q + R + c_s [Q(P + R) + 4PR] + i[p + q + r \\ & - c_s(Q(p + r) + q(P + R) + 4(Pr + pR))] (\Omega k \lambda) + c_s [q(p + r) + 4pr] (\Omega k \lambda)^2 = 0, \end{aligned} \quad (5.68)$$

ahol

$$P = -\frac{\lambda \xi'}{(\xi_s^B)^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} F\left(\frac{1}{2}, \sigma_+\right), \quad (5.69)$$

$$Q = -\frac{\lambda \xi'}{(\xi_s^B)^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} F\left(\frac{1}{2}, \sigma_0\right), \quad (5.70)$$

$$R = -\frac{\lambda \xi'}{(\xi_s^B)^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} F\left(\frac{1}{2}, \sigma_-\right). \quad (5.71)$$

Ezek a kifejezések éppen megegyeznek az egyes reguláris polarizációk ($i\omega_n, \mathbf{k} \rightarrow 0$)-ban vett határértékeinek, ahogy azt már a 4.3. fejezet (4.42) egyenleteiben is felírtuk.

A p, q, r kifejezései a következők lesznek:

$$p = -i \frac{\lambda \xi'}{(\xi_s^B)^2} \frac{1}{4\sigma_+}, \quad (5.72)$$

$$q = -i \frac{\lambda \xi'}{(\xi_s^B)^2} \frac{1}{4\sigma_0}, \quad (5.73)$$

$$r = -i \frac{\lambda \xi'}{(\xi_s^B)^2} \frac{1}{4\sigma_-}. \quad (5.74)$$

$$(5.75)$$

A (5.68) egyenlet közvetlen megoldható $(\Omega k \lambda)$ -ra és a megoldások tisztán képzetesek lesznek. Az egyik megoldás lassan változik a fázisátalakulás pontjához közeledve,

míg a másik eltűnik a kritikus pontban. Ezen utóbbi a következő alakot ölti:

$$\omega = -i \frac{\lambda}{\beta \hbar p + q + r + c_s [Q(p+r) + q(P+R) + 4PR]} k. \quad (5.76)$$

Ezen kifejezés számlálója megegyezik a rögzített részecskesűrűség mellett vett szuszceptibilitás (4.44) nevezőjével, azaz valóban eltűnik a fázisátalakulás pontjában.

5.2.2. Spin hullám módus

A gerjesztés spektrumát a (4.79i) egyenlet zérushelye adja:

$$1 - c_s (\Pi_{+0}^{(r)0+} + \Pi_{0-}^{(r)-0} + \Pi_{+0}^{(s)0+}) = 0. \quad (5.77)$$

A megoldást

$$\Omega = \frac{a_{-2}}{(k\lambda)^2} + a_0 + \mathcal{O}((k\lambda)^2) \quad (5.78)$$

alakban keressük. Ekkor a szinguláris polarizáció az alábbi módon közelíthető:

$$|c_{n,s} \Pi_{+0}^{(s)0+}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\gamma_0}{(k\lambda)^2 (\Omega - 1) - \tilde{\gamma}} = -\frac{\gamma_0}{\tilde{\gamma} - a_{-2}} + \frac{\gamma_0(1 - a_0)}{(\tilde{\gamma} - a_{-2})^2} + \mathcal{O}((k\lambda)^4). \quad (5.79)$$

Ezt és a reguláris polarizációk (5.56) kifejezését felhasználva

$$1 - \frac{\gamma_0 - C_- + C_+}{\tilde{\gamma} - a_{-2}} + \left[\frac{(1 - a_0)\gamma_0 + 2C_0 + C_+ + C_- + a_0(C_- - C_+)}{(\tilde{\gamma} - a_{-2})^2} + \frac{D_- - D_+}{(\tilde{\gamma} - a_{-2})^3} \right] (k\lambda)^2 = 0. \quad (5.80)$$

Az a_n együtthatókat meghatározó egyenletek:

$$a_{-2} : \quad 1 - \frac{\gamma_0 - C_- + C_+}{\tilde{\gamma} - a_{-2}} = 0, \quad (5.81a)$$

$$a_0 : \quad (1 - a_0)\gamma_0 + 2C_0 + C_+ + C_- + a_0(C_- - C_+) + \frac{D_- - D_+}{\tilde{\gamma}} = 0. \quad (5.81b)$$

Innen az a_n együtthatók

$$a_{-2} = \tilde{\gamma} - (\gamma_0 + C_+ - C_-) = b, \quad (5.82a)$$

$$a_0 = \frac{(\gamma_0 + C_+ - C_-)(2C_0 + C_+ + C_- + \gamma_0) - D_+ + D_-}{(\gamma_0 + C_+ - C_-)^2}. \quad (5.82b)$$

A gerjesztés tehát:

$$\omega = \omega_L + \frac{\hbar^2 k^2}{2M^*}, \quad (5.83)$$

ahol

$$M^* = \frac{M}{a_0} \quad (5.84)$$

az effektív tömeg. Nézzük meg a_0 viselkedését, ha $T \rightarrow 0$. Ekkor $C_+, C_0, C_-, D_+, D_- \propto T$, míg $\tilde{\gamma}, \gamma_0 \rightarrow \frac{|c_s|N(T=0)}{k_B T}$. Könnyen látható, hogy ekkor $a_0 \rightarrow 1$ és visszkapjuk a Bogoliubov megoldást.

5.2.3. Kvadrupolár-spinhullám módus

Ezen gerjesztés spektrumát a

$$\Pi_{+-}^{-+} = \Pi_{+-}^{(r)-+} + \Pi_{+-}^{(s)-+} \quad (5.85)$$

kifejezés pólusai adják. A $\Pi_{+-}^{(s)-+}$ -nak pólusa van az

$$\Omega = 1 + \frac{2\tilde{\gamma}}{(k\lambda)^2} \quad (5.86)$$

helyen. Ugyanezen a helyen a reguláris polarizációnak logaritmikus szingularitása van, ugyanis a $\Pi_{+-}^{(r)-+}$ imaginárius része:

$$\text{Im}\Pi_{+-}^{(r)-+} = \frac{M^2}{4\pi\hbar^4 k\beta} \ln \left(\frac{1 - \exp \left[- \left(\frac{k\lambda}{2} \right)^2 \left(\Omega - 1 - \frac{2\tilde{\gamma}}{(k\lambda)^2} \right)^2 \right]}{1 - \exp \left[- \left(\frac{k\lambda}{2} \right)^2 \left(\Omega + 1 - \frac{2\tilde{\gamma}}{(k\lambda)^2} \right)^2 \right]} \right). \quad (5.87)$$

A gerjesztés spektruma tehát:

$$\omega = 2\hbar^{-1}(\hbar\omega_L - c_s m) + \frac{\hbar^2 k^2}{2M}. \quad (5.88)$$

Az utolsó két módus számolásánál a reguláris polarizáció közelítése akkor jogos, ha teljesül a

$$\frac{(k\lambda)^2}{\Delta\gamma} \ll 1 \quad (5.89)$$

feltétel, ahol $\Delta\gamma = \tilde{\gamma}$ spinhullám módusra és $\Delta\gamma = 2\tilde{\gamma}$ kvadrupolár-spinhullám módusra. A feltétel egyenértékű a

$$k \ll \frac{\sqrt{4M(\hbar\omega_L + |c_s| m)}}{\hbar} \quad (5.90)$$

kifejezéssel.

Tartsunk a mágneses térrel zérushoz! Ekkor ferromágneses esetben visszkapjuk [45] eredményeit. Poláris kölcsönhatás esetén a P2 fázisban egy kicsit más a helyzet. Itt is visszkapjuk a módusokat, de azzal a különbséggel, hogy ugyanabból a korrelációs függvényből más-más spektrum adódik, ha más-más spinort használunk. Ennek következtében jelenik meg pl. kvadrupolár-spinhullám módus. Új módus tehát nem jelenik meg, csak a spinortól függően a spektrumok más-más korrelációs függvényhez csatolódnak.

5.3. Poláris kölcsönhatás esete, P1 fázis

A 5.2.1, 5.2.2 és 5.2.3 fejezetekben tárgyaltak a poláris kölcsönhatás P1 fázisában is érvényesek az $n_c \rightarrow n_{c,+}$ helyettesítéssel.

Összefoglalás

A doktori értekezés témája az egyes spinű Bose–Einstein gázok sztatikus és dinamikus tulajdonságainak vizsgálata nemzérus mágneses térben. Homogén rendszert feltételezve felírtuk a rendszer nagykanonikus Hamilton-operátorát másodkvantált formalizmusban, majd a diagramtechnikát segítéül hívva meghatároztuk a rendszer Green- és korrelációs függvényeit, felírtuk az állapotegyenletet és meghatároztuk az elemi gerjesztések spektrumát.

Az atomok közötti spinfüggő kölcsönhatás erősségének (c_s) előjele meghatározza a rendszer viselkedését. Ennek megfelelően beszélhetünk poláris ($c_s > 0$) illetve ferromágneses kölcsönhatásról ($c_s < 0$). Az állapotegyenlet vizsgálata azt mutatta, hogy poláris kölcsönhatás esetén Bose-kondenzátum jelenlétében két fázis létezik a $B - T$ fázistérben, az egyikben a kondenzátum spinora két nemzérus komponenssel (P2 fázis), a másikban egy nemzérus komponenssel (P1 fázis) rendelkezik. A P2 fázis a P1 fázisba egy folytonos fázisátalakulással megy át és a rendparaméter a $-$ spinirányban levő kondenzált atomok sűrűsége Ψ_- . A két fázist a $B - T$ fázistérben egy vonal választja el, amely egy kvantumfázisátalakulásban végződik a hőmérséklettel zérushoz tartva, azaz egy crossover van a klasszikus és kvantumfázisátalakulás között. A P2-P1 rendparaméterének dinamikáját a G_{11}^- normális Green-függvény írja le és ezen Green-függvény sztatikus határesetének vizsgálatával megadhatóak a skálaparaméterek $T > 0$ és $T = 0$ esetén. A P1 fázis vizsgálata azt mutatta, hogy a Bose–Einstein kondenzáció mindig folytonos poláris kölcsönhatás esetén.

Ferromágneses kölcsönhatás esetén a Bose-kondenzációt megelőzheti egy mágneses átalakulás, amely hőmérséklete nem alacsonyabb a Bose-kondenzáció hőmérsékleténél. A

ferromágneses rendszer viselkedése rögzített részecskesűrűség mellett megkívánja, hogy a két részecske kölcsönhatás spinfüggetlen részének erőssége végtelen legyen. Ez megfelel annak, hogy a Bose–Einstein gázt egy rácsmodell keretein belül oldjuk meg. Belátható, hogy rögzített részecskesűrűség mellett a spinfüggő kölcsönhatás erőssége (c_s) szerint négy különböző módon mehet végbe a Bose–Einstein kondenzáció és mágneses átalakulás. Ugyanerre a következtetésre juthatunk, ha az egyenleteket rögzített intenzív változók mellett oldjuk meg. Ekkor c_s szerepét a kémiai potenciál veszi át.

Az Feynman gráfok alkalmazásával általánosított Hugenholtz–Pines tétel írható fel a spinor Bose–Einstein gázra külső mágneses tér esetén mind a poláris, mind a ferromágneses kölcsönhatás esetén. Matematikailag ezen tétel biztosítja azt, hogy a poláris kölcsönhatás esetén a P2 fázisban kettő, míg a ferromágneses kölcsönhatás esetén egy Goldstone-módus létezik. Ezen Goldstone módusok nem mások, mint a nemzérus kondenzátum-spinor komponensek független fázisfluktációi.

Általánosan igaz, hogy a korrelációs függvények sztatikus határesetei és a rögzített intenzív változók mellett vett termodinamikai deriváltak között ún. összecsabályok teljesülnek. Belátható, hogy rögzített részecskesűrűség mellett is felírható összecsabály a spinsűrűség hullám és mágneses szuszceptibilitás között.

A Green- és korrelációs függvények meghatározása véges hőmérsékleten a perturbációs számítás első rendjében egy önkonzisztens Hartree-közelítés megoldását jelenti. Ezen függvényekből a Bogoliubov-közelítéssel szemben nem csak a gerjesztések frekvenciái, hanem a csillapodások is meghatározhatóak. Poláris kölcsönhatás esetén a P2-P1 fázisátalakuláshoz tartozik egy lágyszuszceptibilis módus. Ugyanílyen típusú módus jelenik meg a ferromágneses kölcsönhatás esetén a mágneses átalakulás környezetében.

Függelék

A. Bogoliubov-közelítés

A korábbiakban már szót ejtettünk arról, hogy ez a közelítés csak nagyon alacsony hőmérsékleten alkalmazható, ami azt jelenti, hogy elhanyagol minden olyan kifejezést (diagramot), amelyben a nem kondenzált részecskék sűrűsége is megjelenik. Számos eredmény ismert már korábról, amelyek különböző módszerekkel adják meg az elemi gerjesztéseket spektrumát zérus hőmérsékleten [37, 38]. A Green-függvényes technika előnye az, hogy nem csak a különböző gerjesztések frekvenciáit adja meg, hanem maguk a Green- és korrelációs függvények is meghatározhatóak.

A 4. fejezetben említettek szerint a Green-függvények meghatározásához a proper és improper sajátenergiákra van szükség. Ezen diagramok Bogoliubov közelítésben a A.2. ábrán láthatóak.

A diagramokat kiértékelve a megfelelő sajátenergiák a következő alakot öltik:

$$\tilde{\Sigma}_{\alpha\gamma}^{rs} = \hbar^{-1}[(\mu_0 - \mu)\delta_{rs} - \hbar\omega_L(F_z)_{rs} + n_c\zeta_r^\dagger V_{rs}^{r's'}\zeta_{s'}]\delta_{\alpha\gamma}, \quad (\text{A.91a})$$

$$\tilde{\Sigma}_{01}^s = \hbar^{-1}[-(\mu\delta_{rs} + \hbar\omega_L(F_z)_{rs})\zeta_r^\dagger + n_c\zeta_r^\dagger\zeta_r^\dagger V_{rs}^{r's'}\zeta_{s'}^\dagger]n_c^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.91b})$$

$$M_{11}^{rs} = (M_{-1-1}^{rs})^\dagger = \hbar^{-1}n_c\zeta_r^\dagger\zeta_{s'}V_{rs}^{r's'}, \quad (\text{A.91c})$$

$$M_{1-1}^{rs} = (M_{-11}^{rs})^\dagger = \hbar^{-1}n_c\zeta_{s'}\zeta_r^\dagger V_{rs}^{r's'}, \quad (\text{A.91d})$$

ahol n_c a kondenzátum sűrűségét jelöli. A fenti kifejezések általánosak, abban az értelemben, hogy a spinort tetszőleges alakúnak választhatjuk meg.

Bogoliubov közelítésben csak szinguláris (reducibilis) polarizációk lépnek fel, amelyek a proper Green-függvények meghatározása után a A.3. ábra alapján könnyedén felírhatóak:

$$\Pi_{r's'}^{(s)sr}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \hbar^{-1} n_c [\zeta_r^\dagger \zeta_{r'} \mathcal{G}_{11}^{ss'}(\mathbf{k}, i\omega_n) + \zeta_{s'}^\dagger \zeta_s \mathcal{G}_{-1-1}^{r'r}(\mathbf{k}, i\omega_n)]. \quad (\text{A.92})$$

A továbbiakban rátérünk a poláris és ferromágneses esetek vizsgálatára.

A.1. Poláris kölcsönhatás esete, P2 fázis

Poláris kölcsönhatás esetén a kétrészecske kölcsönhatás spinfüggő tagjában szereplő kölcsönhatási állandó pozitív ($c_s > 0$). A spinort $\zeta_r = \begin{pmatrix} \zeta_+ \\ 0 \\ \zeta_- \end{pmatrix}$ alakban keresve a (2.17) konzisztencia feltételt és a $\zeta_+^2 + \zeta_-^2 = 1$ normálási feltételt kielégítve kapjuk, hogy

$$\mu = c_n n_c, \quad (\text{A.93a})$$

$$\zeta_\pm = \left[\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.93b})$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\gamma}^{rs} &= \frac{r}{\alpha} \boxed{\otimes} \frac{s}{\gamma} = \frac{r}{\alpha} \blacktriangle \frac{s}{\gamma} + \frac{r'}{\alpha} \circ \frac{s'}{\gamma} \\ \sum_{01}^s &= \frac{s}{\alpha} \boxed{\otimes} \frac{r}{\gamma} = s \circ \blacktriangle \frac{r}{\gamma} + \frac{s'}{\alpha} \circ \frac{r'}{\gamma} \\ M_{\alpha\gamma}^{rs} &= \frac{r}{\alpha} \boxed{\square} \frac{s}{\gamma} = \frac{r}{\alpha} \circ \frac{s'}{\gamma} \end{aligned}$$

A.2. ábra. A proper és improper sajátenergiák Bogoliubov-közeliésben



A.3. ábra. A szinguláris polarizáció ábrázolása

Látható, hogy ezen spinor létezésének matematikai feltétele az, hogy $\hbar\omega_L \leq c_s n_c$. A mágneses teret növelve adott hőmérsékleten vagy a hőmérsékletet növelve adott mágneses tér mellett a spinor átvihető az $\zeta_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ -ba, ami egy fázisátalakulást jelent a poláris és a ferromágneses fázis között. Ezzel a későbbiekben részletesen foglalkozunk.

A (A.93) kifejezéseket behelyettesítve a proper sajátenergiák kifejezéseibe azt kapjuk, hogy azok eltűnnek (kivéve a μ_0 diagonális tagot, amely kondenzált fázisban szintén eltűnik), így a proper Green-függvények a szabad részecske Green-függvények lesznek:

$$\bar{G}_{\alpha\gamma}^{rs} = \frac{\delta_{rs}\delta_{\alpha\gamma}}{\alpha i\omega_n - \hbar^{-1}e_{\mathbf{k}}} . \quad (\text{A.94})$$

Az előzőek ismeretében a (A.91c), (A.91d) kifejezések segítségével az improper sajátenergiák mátrixai:

$$M_{\gamma\delta}^{(1)} = \hbar^{-1} \begin{bmatrix} (c_n+c_s)n_c\zeta_+^2 & (c_n+c_s)n_c\zeta_+^2 & (c_n-c_s)n_c\zeta_+\zeta_- & (c_n-c_s)n_c\zeta_+\zeta_- \\ (c_n+c_s)n_c\zeta_+^2 & (c_n+c_s)n_c\zeta_+^2 & (c_n-c_s)n_c\zeta_+\zeta_- & (c_n-c_s)n_c\zeta_+\zeta_- \\ (c_n-c_s)n_c\zeta_+\zeta_- & (c_n-c_s)n_c\zeta_+\zeta_- & (c_n+c_s)n_c\zeta_-^2 & (c_n+c_s)n_c\zeta_-^2 \\ (c_n-c_s)n_c\zeta_+\zeta_- & (c_n-c_s)n_c\zeta_+\zeta_- & (c_n+c_s)n_c\zeta_-^2 & (c_n+c_s)n_c\zeta_-^2 \end{bmatrix}_{\gamma\delta} , \quad (\text{A.95a})$$

$$M_{\gamma\delta}^{(2)} = \hbar^{-1} \begin{bmatrix} c_s n_c & 2c_s n_c \zeta_+ \zeta_- \\ 2c_s n_c \zeta_+ \zeta_- & c_s n_c \end{bmatrix}_{\gamma\delta} . \quad (\text{A.95b})$$

A improper sajátenergiák ismeretében a Green-függvényeket megkaphatjuk, ha felhasznál-

juk a (4.10b), (A.94) és (A.95) egyenleteket.

$$\mathcal{G}_{\gamma\delta}^{(1)} = \frac{1}{\Delta^{(1)}(\mathbf{k}, i\omega_n)} \begin{bmatrix} A_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & C_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & B_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & D_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) \\ C_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & A_1(\mathbf{k}, -i\omega_n, \hbar\omega_L) & D_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & B_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) \\ B_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & D_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & A_1(\mathbf{k}, i\omega_n, -\hbar\omega_L) & C_1(\mathbf{k}, i\omega_n, -\hbar\omega_L) \\ D_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & B_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & C_1(\mathbf{k}, i\omega_n, -\hbar\omega_L) & A_1(\mathbf{k}, -i\omega_n, -\hbar\omega_L) \end{bmatrix}_{\gamma\delta}, \quad (\text{A.96a})$$

ahol

$$\begin{aligned} A_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) &= (i\omega_n)^3 + \hbar^{-1} \left[e_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} (c_n + c_s) n_c \left(1 + \frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right) \right] (i\omega_n)^2 \\ &\quad - \hbar^{-2} \left[e_{\mathbf{k}}^2 + e_{\mathbf{k}} (c_n + c_s) n_c \left(1 - \frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right) \right] (i\omega_n) \\ &\quad - \hbar^{-3} \left[e_{\mathbf{k}}^3 + \frac{1}{2} (c_n + c_s) n_c e_{\mathbf{k}}^2 \left(3 - \frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right) + 2e_{\mathbf{k}} c_n c_s n_c^2 \left(1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right) \right], \end{aligned}$$

$$B_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) = \frac{1}{2} \hbar^{-1} (c_n - c_s) n_c \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} (i\omega_n + \hbar^{-1} e_{\mathbf{k}})^2,$$

$$\begin{aligned} C_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) &= -\frac{1}{2} \hbar^{-1} (c_n + c_s) n_c \left(1 + \frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right) (i\omega_n)^2 \\ &\quad + \hbar^{-3} \left[\frac{1}{2} e_{\mathbf{k}}^2 (c_n + c_s) n_c \left(1 + \frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right) + 2e_{\mathbf{k}} c_n c_s n_c^2 \left(1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right) \right], \end{aligned}$$

$$D_1(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) = \frac{1}{2} \hbar^{-1} (c_n - c_s) n_c \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left(-i\omega_n \right)^2 + \hbar^{-2} e_{\mathbf{k}}^2,$$

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}(\mathbf{k}, i\omega_n) &= \left[(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2} (e_{\mathbf{k}}^2 + e_{\mathbf{k}} (c_n + c_s) n_c) \right]^2 \\ &\quad - \hbar^{-4} e_{\mathbf{k}}^2 n_c^2 \left[(c_n + c_s)^2 - 4c_n c_s \left(1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.96b})$$

és

$$\mathcal{G}_{\gamma\delta}^{(2)} = \frac{1}{\Delta^{(2)}(\mathbf{k}, i\omega_n)} \begin{bmatrix} A_2(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & B_2(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) \\ B_2(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) & A_2(\mathbf{k}, -i\omega_n, \hbar\omega_L) \end{bmatrix}_{\gamma\delta}, \quad (\text{A.96c})$$

ahol

$$A_2(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) = i\omega_n + \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} + c_s n_c),$$

$$B_2(\mathbf{k}, i\omega_n, \hbar\omega_L) = -\hbar^{-1}c_s n_c \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta^{(2)}(\mathbf{k}, i\omega_n) = (i\omega_n)^2 - \hbar^{-2} [e_{\mathbf{k}}^2 + 2e_{\mathbf{k}}c_s n_c + (\hbar\omega_L)^2]. \quad (\text{A.96d})$$

A korrelációs függvényeket a (4.19), (4.20), (4.21) és (4.22) kifejezések adják meg. Szükségünk van a polarizációk kifejezésére, amelyek most csak szinguláris polarizációkat tartalmaznak:

$$\Pi_{nn} = \Pi_{zz} = \Pi_{++}^{(s)++} + \Pi_{--}^{(s)--}, \quad (\text{A.97a})$$

$$\Pi_{nz} = \Pi_{++}^{(s)++} - \Pi_{--}^{(s)--}, \quad (\text{A.97b})$$

$$\Pi_{nQ} = 2 \left(\Pi_{+-}^{(s)++} + \Pi_{-+}^{(s)--} \right), \quad (\text{A.97c})$$

$$\Pi_{zQ} = 2 \left(\Pi_{+-}^{(s)++} - \Pi_{-+}^{(s)--} \right), \quad (\text{A.97d})$$

$$\Pi_{n-Q} = 2 \left(\Pi_{-+}^{(s)++} + \Pi_{+-}^{(s)--} \right), \quad (\text{A.97e})$$

$$\Pi_{z-Q} = 2 \left(\Pi_{-+}^{(s)++} - \Pi_{+-}^{(s)--} \right), \quad (\text{A.97f})$$

$$\Pi_{QQ} = 4\Pi_{+-}^{(s)-+}, \quad (\text{A.97g})$$

$$\Pi_{Q-Q} = 0, \quad (\text{A.97h})$$

$$\Pi_{-Q-Q} = 4\Pi_{-+}^{(s)+-}, \quad (\text{A.97i})$$

$$\Pi_{++} = 2 \left(\Pi_{+0}^{(s)0+} + \Pi_{0-}^{(s)-0} \right), \quad (\text{A.97j})$$

$$\Pi_{+-} = 2 \left(\Pi_{-0}^{(s)0+} + \Pi_{0+}^{(s)-0} \right), \quad (\text{A.97k})$$

$$\Pi_{--} = 2 \left(\Pi_{+0}^{(s)0+} + \Pi_{0-}^{(s)-0} \right), \quad (\text{A.97l})$$

ahol

$$\Pi_{++}^{(s)++} = \frac{\hbar^{-2} e_{\mathbf{k}} n_c \left(1 + \frac{\hbar \omega_L}{c_s n_c} \right)}{(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2} e_{\mathbf{k}}^2}, \quad (\text{A.98a})$$

$$\Pi_{--}^{(s)--} = \frac{\hbar^{-2} e_{\mathbf{k}} n_c \left(1 - \frac{\hbar \omega_L}{c_s n_c} \right)}{(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2} e_{\mathbf{k}}^2}, \quad (\text{A.98b})$$

$$\Pi_{+-}^{(s)++} = \Pi_{++}^{(s)-+} = \Pi_{--}^{(s)+-} = \Pi_{-+}^{(s)--} = \frac{\frac{1}{2} \hbar^{-1} n_c \left[1 - \left(\frac{\hbar \omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{-i\omega_n - \hbar^{-1} e_{\mathbf{k}}}, \quad (\text{A.98c})$$

$$\Pi_{-+}^{(s)++} = \Pi_{++}^{(s)+-} = \Pi_{--}^{(s)-+} = \Pi_{-+}^{(s)--} = \frac{\frac{1}{2} \hbar^{-1} n_c \left[1 - \left(\frac{\hbar \omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{i\omega_n - \hbar^{-1} e_{\mathbf{k}}}, \quad (\text{A.98d})$$

$$\Pi_{-+}^{(s)+-} = \frac{\hbar^{-1} n_c \left(-i\omega_n \frac{\hbar \omega_L}{c_s n_c} + \hbar^{-1} e_{\mathbf{k}} \right)}{(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2} e_{\mathbf{k}}^2}, \quad (\text{A.98e})$$

$$\Pi_{+-}^{(s)+-} = \frac{\hbar^{-1} n_c \left(i\omega_n \frac{\hbar \omega_L}{c_s n_c} + \hbar^{-1} e_{\mathbf{k}} \right)}{(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2} e_{\mathbf{k}}^2}, \quad (\text{A.98f})$$

$$\Pi_{0+}^{(s)+0} = \frac{\frac{1}{2} \hbar^{-1} n_c \left(1 + \frac{\hbar \omega_L}{c_s n_c} \right)}{-i\omega_n - \hbar^{-1} e_{\mathbf{k}}}, \quad (\text{A.98g})$$

$$\Pi_{+0}^{(s)0+} = \frac{\frac{1}{2} \hbar^{-1} n_c \left(1 + \frac{\hbar \omega_L}{c_s n_c} \right)}{i\omega_n - \hbar^{-1} e_{\mathbf{k}}}, \quad (\text{A.98h})$$

$$\Pi_{-0}^{(s)0-} = \frac{\frac{1}{2} \hbar^{-1} n_c \left(1 - \frac{\hbar \omega_L}{c_s n_c} \right)}{i\omega_n - \hbar^{-1} e_{\mathbf{k}}}, \quad (\text{A.98i})$$

$$\Pi_{0-}^{(s)-0} = \frac{\frac{1}{2} \hbar^{-1} n_c \left(1 - \frac{\hbar \omega_L}{c_s n_c} \right)}{-i\omega_n - \hbar^{-1} e_{\mathbf{k}}}, \quad (\text{A.98j})$$

$$\Pi_{0_-}^{(s)+0} = \Pi_{0_+}^{(s)-0} = \frac{\frac{1}{2}\hbar^{-1}n_c \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{-i\omega_n - \hbar^{-1}\epsilon_{\mathbf{k}}}, \quad (\text{A.98k})$$

$$\Pi_{-0}^{(s)0+} = \Pi_{+0}^{(s)0-} = \frac{\frac{1}{2}\hbar^{-1}n_c \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{i\omega_n - \hbar^{-1}\epsilon_{\mathbf{k}}}. \quad (\text{A.98l})$$

A többi szinguláris polarizáció azonosan zérus. Ekkor a sűrűséghullám, spinhullám, kvadrupól-spinhullám és egyéb keresztkorrelációs függvények:

$$D_{nn}(\mathbf{k}, i\omega_n) = 2\hbar^{-1}\epsilon_{\mathbf{k}}n_c \frac{(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}\epsilon_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}} + 2c_s n_c) + 2\hbar^{-2}\epsilon_{\mathbf{k}} \frac{(\hbar\omega_L)^2}{c_s n_c}}{\Delta^{(1)}}, \quad (\text{A.99a})$$

$$D_{nz}(\mathbf{k}, i\omega_n) = 2\epsilon_{\mathbf{k}} \frac{\omega_L (i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}\epsilon_{\mathbf{k}}^2}{\Delta^{(1)}}, \quad (\text{A.99b})$$

$$D_{zz}(\mathbf{k}, i\omega_n) = 2\hbar^{-1}\epsilon_{\mathbf{k}}n_c \frac{\left[(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}\epsilon_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}} + 2c_s n_c) + 2\hbar^{-2}\epsilon_{\mathbf{k}} \frac{e_n}{c_s} \frac{(\hbar\omega_L)^2}{c_s n_c} \right]}{\Delta^{(1)}}, \quad (\text{A.99c})$$

$$D_{nQ}(\mathbf{k}, i\omega_n) = 2\hbar^{-1}\epsilon_{\mathbf{k}}n_c \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{(i\omega_n)^2 - 2\omega_L(i\omega_n) - \hbar^{-2}\epsilon_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}} + 2c_s n_c)}{\Delta^{(1)}}, \quad (\text{A.99d})$$

$$D_{zQ}(\mathbf{k}, i\omega_n) = 2n_c \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{-(i\omega_n)^3 + \hbar^{-2}\epsilon_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}} + 2c_s n_c)(i\omega_n) + 2\hbar^{-2}\epsilon_{\mathbf{k}}^2 \frac{e_n}{c_s} \omega_L}{\Delta^{(1)}}, \quad (\text{A.99e})$$

$$D_{n-Q}(\mathbf{k}, i\omega_n) = D_{nQ}(\mathbf{k}, -i\omega_n), \quad (\text{A.99f})$$

$$D_{z-Q}(\mathbf{k}, i\omega_n) = D_{zQ}(\mathbf{k}, -i\omega_n), \quad (\text{A.99g})$$

$$\begin{aligned}
D_{QQ}(\mathbf{k}, i\omega_n) &= 4n_c \left\{ \frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} (i\omega_n)^3 + \hbar^{-1} \left[e_{\mathbf{k}} + c_s n_c \left(1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right) \right] (i\omega_n)^2 \right. \\
&\quad - \frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \hbar^{-2} [e_{\mathbf{k}}^2 + 2(c_n + c_s)n_c e_{\mathbf{k}}] (i\omega_n) + \hbar^{-3} e_{\mathbf{k}}^2 \left[c_n n_c \left(1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right) - 2(c_n + c_s)n_c \right] \\
&\quad \left. - 2\hbar^{-3} e_{\mathbf{k}} c_n c_s n_c^2 \left(1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right) \right\} / \Delta^{(1)}, \tag{A.99h}
\end{aligned}$$

$$D_{Q-Q}(\mathbf{k}, i\omega_n) = 4\hbar^{-1} n_c \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right] \frac{[-c_s n_c (i\omega_n)^2 + \hbar^{-2} c_n n_c e_{\mathbf{k}} (e_{\mathbf{k}} + 2c_s n_c)]}{\Delta^{(1)}}, \tag{A.99i}$$

$$D_{-Q-Q}(\mathbf{k}, i\omega_n) = D_{QQ}(\mathbf{k}, -i\omega_n), \tag{A.99j}$$

$$D_{++}(\mathbf{k}, i\omega_n) = 2n_c \frac{\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} (i\omega_n) + \hbar^{-1} e_{\mathbf{k}} + \hbar^{-1} \frac{(\hbar\omega_L)^2}{c_s n_c}}{\Delta^{(2)}}, \tag{A.99k}$$

$$D_{+-}(\mathbf{k}, i\omega_n) = 2n_c \frac{\hbar^{-1} e_{\mathbf{k}} \left[1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\Delta^{(2)}}, \tag{A.99l}$$

$$D_{--}(\mathbf{k}, i\omega_n) = D_{++}(\mathbf{k}, -i\omega_n). \tag{A.99m}$$

A.2. Ferromágneses kölcsönhatás esete

Ferromágneses esetben a kölcsönhatási állandó negatív ($c_s < 0$) és a $\zeta_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ spinor kielégíti a (2.17) konzisztencia feltételt $\mu = (c_n + c_s)n_c - \hbar\omega_L$ kémiai potenciál mellett. A proper sajátenergiák a (A.91a) egyenletből kaphatóak meg:

$$\tilde{\Sigma}_{\alpha\gamma}^{+++} = \hbar^{-1} \mu_0 \delta_{\alpha\gamma}, \tag{A.100a}$$

$$\tilde{\Sigma}_{\alpha\gamma}^{00} = \hbar^{-1} (\mu_0 - c_s n_c + \hbar\omega_L) \delta_{\alpha\gamma}, \tag{A.100b}$$

$$\tilde{\Sigma}_{\alpha\gamma}^{--} = \hbar^{-1} (\mu_0 - 2c_s n_c + 2\hbar\omega_L) \delta_{\alpha\gamma}. \tag{A.100c}$$

Innen a proper Green-függvények:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\gamma}^{++}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{1}{\alpha i\omega_n - \hbar^{-1}e_{\mathbf{k}}}, \quad (\text{A.101a})$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\gamma}^{00}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{1}{\alpha i\omega_n - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} - c_s n_c + \hbar\omega_L)}, \quad (\text{A.101b})$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\alpha\gamma}^{--}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{1}{\alpha i\omega_n - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} - 2c_s n_c + 2\hbar\omega_L)}. \quad (\text{A.101c})$$

Az improper sajátenergiák:

$$M_{\gamma\delta}^{(1)} = \hbar^{-1} \begin{bmatrix} (c_n + c_s)n_c & (c_n + c_s)n_c \\ (c_n + c_s)n_c & (c_n + c_s)n_c \end{bmatrix}_{\gamma\delta}, \quad (\text{A.102a})$$

$$M_{\gamma\delta}^{(2)} = \hbar^{-1} \begin{bmatrix} c_s n_c & 0 \\ 0 & c_s n_c \end{bmatrix}_{\gamma\delta}, \quad (\text{A.102b})$$

$$M_{\gamma\delta}^{(3)} = 0. \quad (\text{A.102c})$$

Felhasználva (4.10b), (A.101) és (A.102) kifejezéseket a Green-függvények a következő alakokat öltenek:

$$\mathcal{G}_{\alpha\gamma}^{(1)} = \frac{1}{\Delta^{(1)}} \begin{bmatrix} i\omega_n + \hbar^{-1}[e_{\mathbf{k}} + (c_n + c_s)n_c] & -\hbar^{-1}(c_n + c_s)n_c \\ -\hbar^{-1}(c_n + c_s)n_c & -i\omega_n + \hbar^{-1}[e_{\mathbf{k}} + (c_n + c_s)n_c] \end{bmatrix}_{\alpha\gamma}, \quad (\text{A.103a})$$

$$\mathcal{G}_{\alpha\gamma}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(i\omega_n) - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} + \hbar\omega_L)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-(i\omega_n) - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} + \hbar\omega_L)} \end{bmatrix}_{\alpha\gamma}, \quad (\text{A.103b})$$

$$\mathcal{G}_{\alpha\gamma}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(i\omega_n) - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} - 2c_s n_c + 2\hbar\omega_L)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-(i\omega_n) - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} - 2c_s n_c + 2\hbar\omega_L)} \end{bmatrix}_{\alpha\gamma}, \quad (\text{A.103c})$$

ahol bevezettük a

$$\Delta^{(1)} = (i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}[c_{\mathbf{k}}^2 + 2e_{\mathbf{k}}(c_n + c_s)n_c] \quad (\text{A.104})$$

kifejezést.

A korrelációs függvényeket a (4.30) kifejezések adják meg. Ehhez szükségünk lesz a polarizációkra:

$$\Pi_{nn} = \Pi_{zz} = \Pi_{nz} = \Pi_{++}^{(s)++}, \quad (\text{A.105a})$$

$$\Pi_{++} = 2\Pi_{+0}^{(s)0+}, \quad (\text{A.105b})$$

$$\Pi_{--} = 2\Pi_{+0}^{(s)0+} \quad (\text{A.105c})$$

$$\Pi_{QQ} = 4\Pi_{+-}^{(s)-+}, \quad (\text{A.105d})$$

$$\Pi_{-Q-Q} = 4\Pi_{+-}^{(s)+-}, \quad (\text{A.105e})$$

$$(\text{A.105f})$$

ahol

$$\Pi_{++}^{(s)++} = \frac{2\hbar^{-2}e_{\mathbf{k}}n_c}{(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}c_{\mathbf{k}}^2}, \quad (\text{A.106a})$$

$$\Pi_{+0}^{(s)0+} = \frac{\hbar^{-1}n_c}{i\omega_n - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} - c_s n_c + \hbar\omega_L)}, \quad (\text{A.106b})$$

$$\Pi_{0+}^{(s)+0} = \frac{\hbar^{-1}n_c}{-i\omega_n - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} - c_s n_c + \hbar\omega_L)}, \quad (\text{A.106c})$$

$$\Pi_{+-}^{(s)-+} = \frac{\hbar^{-1}n_c}{i\omega_n - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} - 2c_s n_c + 2\hbar\omega_L)}, \quad (\text{A.106d})$$

$$\Pi_{+-}^{(s)+-} = \frac{\hbar^{-1}n_c}{-i\omega_n - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} - 2c_s n_c + 2\hbar\omega_L)}. \quad (\text{A.106e})$$

A többi szinguláris polarizáció azonosan zérus. Ezek után a különböző korrelációs függvények:

$$D_{nn}(\mathbf{k}, i\omega_n) = D_{nz}(\mathbf{k}, i\omega_n) = D_{zz}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{2\hbar^{-1}e_{\mathbf{k}}n_c}{(i\omega_n)^2 - \hbar^{-2}[c_{\mathbf{k}}^2 + 2e_{\mathbf{k}}(c_n + c_s)n_c]}, \quad (\text{A.107a})$$

$$D_{++}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{2n_c}{(i\omega_n) - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} + \hbar\omega_L)}, \quad (\text{A.107b})$$

$$D_{--}(\mathbf{k}, i\omega_n) = D_{++}(\mathbf{k}, -i\omega_n), \quad (\text{A.107c})$$

$$D_{QQ}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{4n_c}{(i\omega_n) - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} - 2c_s n_c + 2\hbar\omega_L)}, \quad (\text{A.107d})$$

$$D_{-Q-Q}(\mathbf{k}, i\omega_n) = D_{QQ}(\mathbf{k}, -i\omega_n). \quad (\text{A.107e})$$

A.3. Kollektív gerjesztések Bogoliubov-közelítésben

A kollektív gerjesztések spektrumait az egyes korrelációs függvények pólusaiból kaphatjuk meg. Ezek a következők lesznek:

Poláris kölcsönhatás esete, P2 fázis:

Sűrűség hullám, spinsűrűség hullám és kvadrupolár-spin hullám módus:

$$\omega_1^{(1)} = \pm \hbar^{-1} \sqrt{e_{\mathbf{k}}^2 + e_{\mathbf{k}}(c_n + c_s)n_c + e_{\mathbf{k}}n_c \sqrt{(c_n + c_s)^2 - 4c_n c_s \left(1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c}\right)^2\right)}}, \quad (\text{A.108a})$$

$$\omega_2^{(1)} = \pm \hbar^{-1} \sqrt{e_{\mathbf{k}}^2 + e_{\mathbf{k}}(c_n + c_s)n_c - e_{\mathbf{k}}n_c \sqrt{(c_n + c_s)^2 - 4c_n c_s \left(1 - \left(\frac{\hbar\omega_L}{c_s n_c}\right)^2\right)}}. \quad (\text{A.108b})$$

Spin hullám módus:

$$\omega^{(2)} = \pm \hbar^{-1} \sqrt{e_{\mathbf{k}}^2 + 2e_{\mathbf{k}}c_s n_c + (\hbar\omega_L)^2}. \quad (\text{A.108c})$$

Két Goldstone módus van, amelyek nemcsak kollektív gerjesztésekként értelmezhetőek: Az alapállapotú spinor három komponensből áll és ezen komponensek komplex fázisait

tetszőlegesen választhatjuk meg. Ezen fázisok három folytonos szimmetria generátorainak feleltethetők meg, azaz legfeljebb ugyanennyi Goldstone módus lehet a rendszerben. A (2.17) feltételt illetve a részecskeszám és mágnesezettség megmaradást figyelembe véve azt kapjuk, hogy poláris kölcsönhatás esetén a P2 fázisban az alapállapotú spinornak két független komponense van. Ezen komponensek fázisfluktuációi adják a Goldstone módusokat. A mágneses tér megszűnésével helyreáll még egy folytonos szimmetria és a spinhullám gerjesztés is Goldstone módus lesz.

Ferromágneses eset:

Sűrűséghullám és spinsűrűséghullám módus:

$$\omega^{(1)} = \pm \hbar^{-1} \sqrt{e_{\mathbf{k}}^2 + 2e_{\mathbf{k}}(c_n + c_s)n_c}. \quad (\text{A.109a})$$

Spinhullám módus:

$$\omega^{(2)} = \pm \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} + \hbar\omega_L). \quad (\text{A.109b})$$

Kvadrupolár-spinhullám módus:

$$\omega^{(3)} = \pm \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} - 2c_s n_c + 2\hbar\omega_L). \quad (\text{A.109c})$$

Ferromágneses esetben egy Goldstone módusunk van, mert a (2.17) feltétel ferromágneses esetben egy független spinorkomponenst eredményez. A mágneses tér eltűnésével helyreáll még egy szimmetria és megjelenik egy második Goldstone módus is, de a harmadik nem jelenik meg, mert a rendszerben spontán mágnesezettség van.

A spektrumok megegyeznek a mások által már kiszámolt spektrumokkal [37, 38]. Azonban hangsúlyoznunk kell, hogy nem csak az eredmények reprodukálásáról van szó, mert a spektrumok mellett megadtuk magukat a Green- és korrelációs függvényeket is.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet nyilvánítani témavezetőmnek Szépfalusy Péternek, aki felkeltette érdeklődésemet ezen téma iránt, segített elindulni benne, irányt mutatott, ha akadályba ütköztem, ellátott irodalommal és ideje jelentős részét áldozta rám a téma minél sikeresebb kidolgozásában. Szintén szeretnék köszönetet mondani Szirmai Gergelynek, aki mindig értékes tanáccsal szolgált számomra és tapasztalataira támaszkodva jelentősen könnyebbé vált a bonyolult számolások elvégzése. Szintén szeretnék köszönetet mondani Csordás Andrásnak, akihez szintén bármikor fordulhat tam kérdéssel és kaphattam kielégítő választ. Továbbá szintén köszönet illeti a Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék összes dolgozóját, akik készséggel segítettek megoldani felmerülő problémáimat. Nem utolsó sorban szeretnék köszönetet mondani szüleimnek az egyetemi és doktori iskolai évek alatt nyújtott támogatásukért. Nélkülük ezen dolgozat nem készülhetett volna el. Ezen dolgozat az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok (OTKA) T046129 számú pályázatának segítségével készült el.

Irodalomjegyzék

- [1] Satyendra Bose. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Z. Phys.*, 26(0):178, 1924.
- [2] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases: Zweite Abhandlung. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1925(0):3, January 1925.
- [3] Fritz London. The λ -phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy. *Nature*, 141(3571):643, April 1938.
- [4] F. London. On the Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev.*, 54(0):947, December 1938.
- [5] L. Tisza. Transport phenomena in helium II. *Nature*, 141:913, 1938.
- [6] S. T. Beliaev. Energy-spectrum of a non-ideal Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 34(2):299, August 1958.
- [7] N. Bogoliubov. On the theory of superfluidity. *J. Phys.*, 11(1):23, 1947.
- [8] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269(0):198, July 1995.
- [9] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 75(22):3969, November 1995.

- [10] C. C. Bradley, C. A. Sackett, and R. G. Hulet. Bose-Einstein condensation of lithium: Observation of limited condensate number. *Phys. Rev. Lett.*, 78(6):985, February 1997.
- [11] Steven Chu, L. Hollberg, J. E. Bjorkholm, Alex Cable, and A. Ashkin. Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 55(1):48, July 1985.
- [12] Ch. Monroe, E. Cornell, and C. Wieman. The low (temperature) road toward Bose-Einstein condensation in optically and magnetically trapped cesium atoms. In E. Arimondo, W. D. Phillips, and F. Strumia, editors, *Proceedings of the International School of Physics 'Enrico Fermi'*, page 361. North-Holland, 1992.
- [13] Wolfgang Ketterle and N. J. van Druten. Evaporative cooling of trapped atoms. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, 37(0):181, 1996.
- [14] A.L. Fetter and J.D. Walecka. *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. McGraw-Hill, New York, 1971.
- [15] Gordon Baym and C. J. Pethick. Ground-state properties of magnetically trapped Bose-condensed rubidium gas. *Phys. Rev. Lett.*, 76(1):6, January 1996.
- [16] Yu. Kagan, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven. Bose-Einstein condensation in trapped atomic gases. *Phys. Rev. Lett.*, 76(15):2670, April 1996.
- [17] F. Dalfovo and S. Stringari. Bosons in anisotropic traps: Ground state and vortices. *Phys. Rev. A*, 53(4):2477, April 1996.
- [18] Mark Edwards, P. A. Ruprecht, K. Burnett, R. J. Dodd, and Charles W. Clark. Collective excitations of atomic Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 77(9):1671, August 1996.
- [19] P. A. Ruprecht, Mark Edwards, K. Burnett, and Charles W. Clark. Probing the linear and nonlinear excitations of Bose-condensed neutral atoms in a trap. *Phys. Rev. A*, 54(5):4178, November 1996.

-
- [20] D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a dilute gas. *Phys. Rev. Lett.*, 77(3):420, July 1996.
- [21] D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Quantitative studies of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Czech. J. Phys.*, 46(S6):3070, 1996. Supplement S6.
- [22] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, and W. Ketterle. Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a magnetic trap. *Phys. Rev. Lett.*, 77(6):988, August 1996.
- [23] S. Stringari. Collective excitations of a trapped Bose-condensed gas. *Phys. Rev. Lett.*, 77(12):2360, September 1996.
- [24] P. Szépfalussy and I. Kondor. On the dynamics of continuous phase transitions. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 82:1, 1974.
- [25] W. Vincent Liu. Theoretical study of the damping of collective excitations in a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 79(21):4056, November 1997.
- [26] L. P. Pitaevskii and S. Stringari. Landau damping in dilute Bose gases. *Phys. Lett. A*, 235(0):398, November 1997.
- [27] P. O. Fedichev, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven. Damping of low-energy excitations of a trapped Bose-Einstein condensate at finite temperatures. *Phys. Rev. Lett.*, 80(11):2269, March 1998.
- [28] Gyula Bene and Péter Szépfalussy. Dielectric formalism and damping of collective modes in trapped Bose-Einstein condensed gases. *Phys. Rev. A*, 58(5):R3391, November 1998.

-
- [29] D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, J. Stenger, and W. Ketterle. Optical confinement of a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 80(10):2027, March 1998.
- [30] Tin-Lun Ho and V. B. Shenoy. Local spin-gauge symmetry of the Bose-Einstein condensates in atomic gases. *Phys. Rev. Lett.*, 77(13):2595, September 1996.
- [31] Tin-Lun Ho. Spinor Bose condensates in optical traps. *Phys. Rev. Lett.*, 81(4):742, July 1998.
- [32] Tin-Lun Ho and Lan Yin. General structure of Bose-Einstein condensates with arbitrary spin. *Phys. Rev. Lett.*, 84(11):2302, March 2000.
- [33] J. Stenger, D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, and W. Ketterle. Optically confined Bose-Einstein condensates. *J. Low Temp. Phys.*, 113(3/4):167, 1998.
- [34] J. Stenger, S. Inouye, D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle. Spin domains in ground-state Bose-Einstein condensates. *Nature*, 396:345, November 1999.
- [35] Tomoya Isoshima, Kazushige Machida, and Tetsuo Ohmi. Spin-domain formation in spinor Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev. A*, 60(6):4857, December 1999.
- [36] W.-J. Huang and S.-C. Gou. e-print cond-mat/9905435.
- [37] T. Ohmi and K. Machida. Bose-Einstein condensation with internal degrees of freedom in alkali atom gases. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 67:1822, 1998.
- [38] W.-J. Huang and S.-C. Gou. Ground-state energy of the spinor Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 59:4608, 1999.
- [39] M. Koashi and M. Ueda. Exact eigenstates and magnetic response of spin-1 and spin-2 vectorial Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 84:1066, 2000.

- [40] W.-J. Huang, S.-C. Gou, and Y.-C. Tsai. Transition temperature for the all-optical formation of $f = 1$ spinor condensates. *Phys. Rev. A*, 65:063610, 2002.
- [41] Steven Chu, J. E. Bjorkholm, A. Ashkin, and A. Cable. Experimental observation of optically trapped atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 57(3):314, July 1986.
- [42] J. D. Miller, R. A. Cline, and D. J. Heinzen. Far-off-resonance optical trapping of atoms. *Phys. Rev. A*, 47(6):R4567, June 1993.
- [43] T. Takekoshi and R. J. Knize. CO₂ laser trap for cesium atoms. *Opt. Lett.*, 21(1):77, January 1996.
- [44] D.M. Stamper-Kurn and W. Ketterle. Spinor condensates and light scattering from Bose-Einstein condensates. In R. Kaiser, C. Westbrook, and F. David, editors, *Les Houches, Session LXXII, Coherent atomic matter waves*, page 137, Les Ulis; Berlin, 2001. EDP Sciences; Springer-Verlag.
- [45] Péter Szépfalussy and Gergely Szirmai. Structure of the perturbation series of the spin-1 Bose gas at low temperatures. *Phys. Rev. A*, 65:043602, April 2002.
- [46] J. E. Robinson. Note on the Bose-Einstein integral functions. *Phys. Rev.*, 83(0):678, August 1951.
- [47] Krisztián Kis-Szabó, Péter Szépfalussy, and Gergely Szirmai. Phases of a polar spin-1 bose gas in a magnetic field. *Phys. Lett. A*, pages 362–367, 2006.
- [48] S. L. Sondhi, S. M. Girvin, J. P. Carini, and D. Shahar. Continuous quantum phase transitions. *Rev. Mod. Phys.*, 69:315, 1997.
- [49] M. E. Fisher. The renormalization group in the theory of critical behavior. *Rev. Mod. Phys.*, 46:597, 1974.
- [50] Gergely Szirmai, Krisztián Kis-Szabó, and Péter Szépfalussy. Phase separation of ferromagnetic spin-1 Bose gases in non-zero magnetic field. *Eur. Phys. J. D.*, 36:281, 2005.

-
- [51] Krisztián Kis-Szabó, Péter Szépfalussy, and Gergely Szirmai. Static properties and spin dynamics of the ferromagnetic spin-1 Bose gas in a magnetic field. *Phys. Rev. A*, 72:023617, 2005.
- [52] Qiang Gu and Richard A. Klemm. Ferromagnetic phase transition and Bose-Einstein condensation in spinor Bose gases. *Phys. Rev. A*, 68:031604(R), October 2003.
- [53] W. J. Merz. Double hysteresis loop of BaTiO₃ at the Curie point. *Phys. Rev.*, 91:513, 1953.
- [54] A. F. Devonshire. Theory of ferroelectrics. *Adv. Phys.*, 3:85, 1954.
- [55] Qiang Gu, Kai Bongs, and Klaus Sengstock. Spin waves in ferromagnetically coupled spinor Bose gases. *Phys. Rev. A*, 70:063609, 2004.
- [56] Hua Shi and Allan Griffin. Finite-temperature excitations in a dilute Bose-condensed gas. *Phys. Rep.*, 304(1-2):1, October 1998.

Összefoglalás

A doktori értekezés témája az egyes spinű Bose–Einstein gázok sztatikus és dinamikus tulajdonságainak vizsgálata nemzérus mágneses térben. Homogén rendszert feltételezve felírtuk a rendszer nagykanonikus Hamilton-operátorát másodkvantált formalizmusban, a diagramtechnikát segítségül hívva meghatároztuk a rendszer Green- és korrelációs függvényeit, felírtuk az állapotegyenletet és meghatároztuk az elemi gerjesztések spektrumát.

Az atomok közötti spinfüggő kölcsönhatás erősségének (c_s) előjele meghatározza a rendszer viselkedését. Ennek megfelelően beszélhetünk poláris ($c_s > 0$) illetve ferromágneses kölcsönhatásról ($c_s < 0$). Az állapotegyenlet vizsgálata azt mutatta, hogy poláris kölcsönhatás esetén Bose-kondenzátum jelenlétében két fázis létezik a $B - T$ fázistérben, az egyikben a kondenzátum spinora két nemzérus komponenssel (P2 fázis), a másikban egy nemzérus komponenssel (P1 fázis) rendelkezik és a P2 fázis a P1 fázisba egy folytonos fázisátalakulással megy át. A hőmérséklettel zérushoz tartva a rendszerben egy kvantum-fázisátalakulás megy végbe, azaz egy crossover van a klasszikus és kvantum-fázisátalakulás között. A P1 fázis vizsgálata azt mutatta, hogy a Bose–Einstein kondenzáció mindig folytonos fázisátalakulás poláris kölcsönhatás esetén.

Ferromágneses kölcsönhatás esetén a Bose-kondenzációt megelőzheti egy mágneses átalakulás, amely hőmérséklete nem alacsonyabb a Bose-kondenzáció hőmérsékleténél. Belátható, hogy rögzített részecskesűrűség mellett a spinfüggő kölcsönhatás erőssége (c_s) szerint négy különböző módon mehet végbe a Bose–Einstein kondenzáció és mágneses átalakulás. Úgyanerre a következtetésre juthatunk, ha az egyenleteket rögzített intenzív változók mellett oldjuk meg. Ekkor c_s szerepét a kémiai potenciál veszi át.

A Feynman gráfok alkalmazásával általánosított Hugenholtz–Pines tétel írható fel a spinor Bose–Einstein gázra külső mágneses tér esetén mind a poláris, mind a ferromágneses kölcsönhatás esetén. Ezen tétel biztosítja azt, hogy a poláris kölcsönhatás esetén a P2 fázisban kettő, míg a ferromágneses kölcsönhatás esetén egy Goldstone-módus létezik. Ezen módusok a nemzérus kondenzátum-spinor komponensek független fázisfluktációi.

Summary

Subject of this Ph.D. dissertation is the investigation of static and dynamical properties of spin-1 Bose–Einstein condensed gases in a magnetic field. Assuming a homogeneous system Hamiltonian of the system was written up in second quantized formalism, Green- and correlation functions of the system were determined by using Feynman diagrams, the equation of state and elementary excitations were investigated.

Behaviour of system is determined by the sign of strength (c_s) of spin dependent interaction of atoms. Accordingly one can speak about polar ($c_s > 0$) or ferromagnetic interaction ($c_s < 0$). Investigation of the equation of state in case of polar interaction shows there exist two phases in $T - B$ phase space in presence of Bose–Einstein condensate. In one of them (P2 phase) the condensate spinor has two nonzero components, in the other one (P1 phase) has one nonzero component of condensate spinor. Phase transition between P2 and P1 phases is continuous along transition line. Going to zero by the temperature a quantum phase transition occurs and there is a crossover between classical and quantum phase transitions. Studying P1 phase showed that Bose–Einstein condensation is always a continuous phase transition in case of polar interaction.

In case of ferromagnetic interaction a magnetic transition can occur before Bose–Einstein condensation and its temperature is not lower than that of Bose–Einstein condensation. It can be shown that at fixed particle density depending on strength (c_s) of spin dependent interaction Bose–Einstein condensation and magnetic transition take place in four different ways. The same is true when the equation of state is solved at fixed intensive variables and the role of c_s is taken by the chemical potential.

A generalized Hugenholtz–Pines theorem can be written up for spinor Bose–Einstein condensed gases in a magnetic field with the help of Feynman graphs. It ensures that in phase P2 there exist two Goldstone modes and in P1 phase there is only one Goldstone mode. These modes are phase fluctuations of nonzero components of the condensate spinor.