

# Hadronspektroszkópiai módszerek a rács-kvantumszíndinamikában

Tóth Bálint

– Doktori értekezés –

Témavezető:

Dr. Fodor Zoltán, DSc.

Egyetemi tanár

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék

Department of Physics, University of Wuppertal

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Fizika Doktori Iskola

Doktori iskola vezetője: Dr. Horváth Zalán

Részecskefizika és csillagászat program

Doktori program vezetője: Dr. Csikor Ferenc

Budapest, 2010

# Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	2
<b>1. Bevezetés</b>	<b>4</b>
<b>2. A rács-kvantumszindinamika elemei</b>	<b>6</b>
2.1. A kvantumszindinamika . . . . .	6
2.2. Regularizáció téridőrács segítségével . . . . .	8
2.3. Tiszta mértékelméletek a rácson . . . . .	10
2.4. Fermionok a rácson . . . . .	12
2.4.1. Wilson fermionok . . . . .	12
2.4.2. Kogut–Susskind fermionok . . . . .	14
2.5. Számolási algoritmus . . . . .	15
2.6. Rácsállandó meghatározása . . . . .	18
2.7. Hadronspektroszkópia . . . . .	19
2.8. Véges hőmérsékletű QCD . . . . .	20
<b>3. A <math>\Theta^+</math> pentakvark spektroszkópiája</b>	<b>23</b>
3.1. Korábbi rácsrelméleti eredmények . . . . .	24
3.2. Nukleon–kaon szórásállapotok a rácson . . . . .	25
3.3. A számoláshoz használt operátorok . . . . .	27
3.3.1. Az operátorok általános szerkezete . . . . .	27
3.3.2. Spinsajátállapotok létrehozása . . . . .	29
3.3.3. Negatív paritású operátorok . . . . .	32
3.3.4. Pozitív paritású operátorok . . . . .	34
3.4. Állapotok elkülönítése keresztkorrelációs módszerrel . . . . .	36
3.5. Eredmények . . . . .	38
3.6. A pentakvark helyzete ma . . . . .	44
<b>4. Hadronspektroszkópia termodinamikai megfontolások alapján</b>	<b>45</b>
4.1. A szabadenergia alacsony hőmérsékletű viselkedése . . . . .	45

4.2. A szabadenergia meghatározása rácson . . . . .	47
4.2.1. Az állapotösszegek közötti kapcsolat . . . . .	47
4.2.2. Kogut–Susskind fermionok . . . . .	48
4.2.3. Wilson fermionok . . . . .	52
4.2.4. A $Z_3$ szimmetria következményei . . . . .	54
4.2.5. A lényeges sajátértékek meghatározása . . . . .	57
4.3. A spektroszkópiai módszer alkalmazhatósága . . . . .	59
4.3.1. A módszer korlátai . . . . .	59
4.3.2. Piontömeg meghatározása . . . . .	60
4.4. Kapcsolat korábbi eredményekkel . . . . .	60
4.5. Numerikus eredmények . . . . .	61
<b>5. Összefoglalás</b>	<b>65</b>
<b>Köszönetnyilvánítás</b>	<b>67</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>68</b>

# 1. fejezet

## Bevezetés

Az erős kölcsönhatás általánosan elfogadott elmélete a standard modell szerves részét képező kvantumszíndinamika (QCD). Az egyik legfontosabb tulajdonsága az aszimptotikus szabadság, amelynek értelmében az energiaskála növelésével a csatolási állandó csökken. Ennek következtében a nagyenergiás folyamatok, és a nagyon magas hőmérsékleti viselkedés leírására a perturbációs számítás jól alkalmazható, így lehetőség nyílt az elmélet nagyenergiás ütközésekkel történő ellenőrzésére.

A kvantumszíndinamikára alacsony energián viszont a bezárás a jellemző. Ez annak a következménye, hogy a kvarkokat egymástól eltávolítva a potenciál közöttük lineárisan nő. Emiatt szabad kvarkokat és gluonokat a kísérletekben előállítani nem lehet, azoknak csak kötött állapotait, a hadronokat tudjuk megfigyelni. Ebben az energiatartományban a csatolási állandó olyan nagyvá válik, hogy a perturbatív módszerek nem működnek, így a perturbációs számítás a kísérletekben jól megfigyelhető hadronok, például a nukleonok és pionok leírására nem alkalmas. Ennélfogva szükségessé vált a QCD alacsonyenergiás tartományának vizsgálatára egy megbízható, nemperturbatív módszer.

Ez vezetett a rácis-QCD kifejlesztéséhez. A módszer a kezdeti megjelenése óta nagyon sokat fejlődött, és a számítógéptechnika ezzel párhuzamos fejlődésének következtében ma már a hadronok nemperturbatív vizsgálatának elsődleges eszközévé vált.

A  $\Theta^+$  pentakvarkra utaló jel első kísérleti észlelését követően több rácstérelmélettel foglalkozó csoport is kísérletet tett a  $\Theta^+$  rácson történő kimutatására, és a kísérletileg még ismeretlen kvantumszámainak meghatározására. Ezen eredmények azonban egymásnak ellentmondani látszottak. Így szükségessé vált egy olyan átfogó keresés, melynek során a  $\Theta^+$  tömegéig mindkét paritás-csatornában minden más, a  $\Theta^+$  ismert kvantumszámaival azonos kvantumszámokkal rendelkező állapotot be lehet azonosítani. Ehhez azonban a pentakvark lehetséges bonyolult hullámfüggvénye miatt a triviális térbeli szerkezettel rendelkező operátorok nem elegendőek. Doktori értekezésem egyik célja a megfelelő spinel rendelkező, nemtriviális térszerkezetű operátorok előállítása, valamint a  $\Theta^+$  mindkét

paritás-csatornát átfogó, az így előállított operátorok segítségével történő keresése.

A  $\Theta^+$  spektroszkópiája kapcsán is előkerülő nehézség, miszerint a keresett állapotnak nemcsak a kvantumszámait, hanem a hullámfüggvényét is ismerni kell, motiválta a doktori értekezésem másik célját: egy olyan spektroszkópiai módszer kidolgozása, amely pusztán a keresett állapot kvantumszámai alapján megadja annak tömegét.

## 2. fejezet

# A rács-kvantumszíndinamika elemei

Ebben a fejezetben áttekintem a rács-kvantumszíndinamika azon főbb elemeit, amelyek a későbbi fejezetekben felhasználásra kerülnek. Ezen fejezet legtöbb része az [1–4] összefoglalók valamint az [5, 6] könyvek felhasználásával készült. A dolgozat során végig a részecskefizikában megszokott  $\hbar = c = k_B = 1$  egységrendszert használom.

### 2.1. A kvantumszíndinamika

Az erős kölcsönhatást leíró elmélet, a kvantumszíndinamika (QCD) egy  $SU(3)$  mértékcsoporttal rendelkező lokális mértékelmélet. Az alapvető szabadsági fokok a 8 szín-komponenssel rendelkező  $A_\mu^a$  gluonmezők, és a 6 különböző ízben előforduló,  $4(\text{spin}) \times 3(\text{szín})$  komponenssel rendelkező  $\psi$  kvarkmezők. A QCD Lagrange-függvénye

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \bar{\psi}(iD_\mu \gamma^\mu - m)\psi, \quad (2.1)$$

ahol

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.2)$$

a térerősség-tenzor,

$$D_\mu = \partial_\mu + g A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2i} \quad (2.3)$$

pedig a kovariáns deriválás. Itt  $a, b, c = 1, \dots, 8$  a szín-indexek,  $f^{abc}$  az  $SU(3)$  csoport Lie-algebrájának struktúraállandói,  $\lambda^a$  a Gell-Mann mátrixok,  $\gamma^\mu$  a Dirac-mátrixok,  $g$  pedig az ún. csupasz csatolási állandó. Egy  $SU(3)$  mátrixokból álló tetszőleges  $G(x)$  mezőt véve

a (2.1) Lagrange-függvény invariáns az

$$\begin{aligned} A'_\mu(x) &= G(x)A_\mu(x)G(x)^\dagger - \frac{i}{g} \left( \partial_\mu G(x) \right) G(x)^\dagger \\ \psi'(x) &= G(x)\psi(x) \\ \bar{\psi}'(x) &= \bar{\psi}(x)G^\dagger(x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

lokális mértéktranszformációkra. A (2.4) transzformáció nem a rendszer fizikai állapotát változtatja meg, hanem csak azt, hogy azt miként koordinátáztuk. Ezért csak az olyan mennyiségek felelhetnek meg tényleges fizikai mennyiségeknek, amelyek szintén invariánsak a mérték-transzformációkra.

A mértékelméletek kvantálása a Feynman-féle pályaintegrál módszerrel történhet. Ennek megfelelően a  $\psi, \bar{\psi}$  kvarkmezőkből és  $A_\mu$  gluonmezőkből álló  $O_1, \dots, O_n$  operátorok időrendezett korrelátorát a

$$\langle 0|T[O_1(x_1) \cdots O_n(x_n)]|0\rangle = \frac{\int [d\psi][d\bar{\psi}][dA_\mu] O_1(x_1) \cdots O_n(x_n) e^{iS[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]}}{\int [d\psi][d\bar{\psi}][dA_\mu] e^{iS[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]}} \quad (2.5)$$

funkcionál-integálok hányadosa adja meg, ahol

$$S = \int \mathcal{L} d^4x \quad (2.6)$$

a hatás. A (2.5) integrál az integrandusban megjelenő, oszcilláló  $e^{iS}$  tényező miatt azonban numerikusan teljesen kezelhetetlen, emiatt a számolások elvégzéséhez a valós időből egy  $t \rightarrow -it$  analitikus elfolytatást, ún. Wick-forgatást végzünk a képzetes időbe. Ezáltal az indefinit metrikájú Minkowski-téridő helyett a pozitív definit metrikájú euklideszi téridőben számolhatunk. Az  $e^{iS}$  kifejezés a pozitív  $e^{-S_E}$  kifejezésbe megy át, ahol  $S_E$  az euklideszi hatás, az

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \bar{\psi}(D_\mu \gamma^\mu + m)\psi \quad (2.7)$$

euklideszi Lagrange-függvény integrálja az euklideszi téridőre. A Minkowskitól való megkülönböztetés végett a vektorok indexei most  $\mu = 0, 1, 2, 3$  helyett  $\mu = 1, 2, 3, 4$  lehetnek, ahol a negyedik komponens jelenti az euklideszi időirányt.

Az  $O_1, \dots, O_n$  operátorok euklideszi korrelátorát ilyen módon az

$$\langle 0|O_1(x_1) \cdots O_n(x_n)|0\rangle_E = \frac{\int [d\psi][d\bar{\psi}][dA_\mu] O_1(x_1) \cdots O_n(x_n) e^{-S_E[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]}}{\int [d\psi][d\bar{\psi}][dA_\mu] e^{-S_E[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]}} \quad (2.8)$$

pályaintegrál adja meg. A (2.8) összefüggés úgy is felfogható, hogy az  $\langle 0 | \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) | 0 \rangle_E$  korrelátor az  $\mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n)$  szorzatnak a  $[d\psi][d\bar{\psi}][dA_\mu] e^{-S_E}$  pozitív mérték szerinti várható értéke. Mostantól kezdve mindig euklideszi térben dolgozunk, így az  $E$  alsó indexet elhagyjuk.

## 2.2. Regularizáció téridőrács segítségével

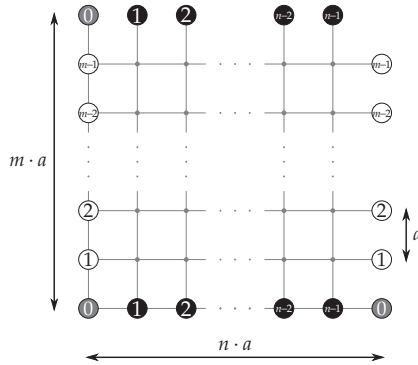
A (2.8) integrálban a kvarkmezőknek és a gluonmezőknek minden téridőpontban minden lehetséges értékére kell integrálnunk, ami végtelen sok integrálási változót jelentene. Ehelyett diszkrétizáljuk a téridőt, azaz a változóinkat csak egy  $a$  rácsállandójú köbös rács csúcsaiban értelmezzük. Ilyen módon a kontinuumbeli  $x_\mu$  folytonos téridő-koordináták helyett az  $x_\mu = a \cdot n_\mu$  ( $n_\mu \in \mathbb{Z}^4$ ) rács-koordinátákkal dolgozunk. Egy ilyen rácson az impulzus mindegyik komponense legfeljebb  $\pi/a$  lehet, így a kontinuumból a rácsra történő áttérés az ultraibolya divergenciáknak egy természetes regularizációját valósítja meg. Az integrálási változók száma így még mindig végtelen, ezért kiválasztunk a téridőből egy véges térfogatú, téglalatest alakú tartományt, és a számolásokat ezen minden irányban véges sok rácspontot tartalmazó dobozban végezzük. A doboz határain a legtöbbször alkalmazott határfeltétel a térszerű irányokban periodikus, időirányban bozonok esetén periodikus, fermionok esetén pedig antiperiodikus (2.1. ábra).

Az így kapott eredmények természetesen még nem egyeznek meg a fizikai, azaz a végtelen térfogathoz tartozó, kontinuumbeli eredményekkel. Meg kell ismételni a számolásokat egyre nagyobb térfogatú dobozokban, és egyre kisebb rácsállandókon. A fizikai eredmény eléréséhez először a térfogattal kell tartani a végtelenhez, majd a rácsállandóval nullához. Ez utóbbit nevezik kontinuum-határesetnek vagy kontinuum-limesznek. Ha a vizsgált fizikai problémában előforduló korrelációs hosszaknál a doboz mérete jóval nagyobb, és a jelenségre jellemző energiaskálák reciprokánál a rácsállandó jóval kisebb, akkor a rácson végzett számolások eredménye már jó közelítéssel adja meg a végtelen térfogati, kontinuum-limeszhez tartozó értékeket. Ilyenkor ezen határesetek elvégzése helyett azok hiánya szisztematikusan hibaként vehető figyelembe.

A (2.8) integrálban szerepel a hatás is, így azt is diszkrétizálni kell. A Lagrange-függvényben szereplő differenciál-hányadosokat véges differencia-hányadosokkal helyettesítjük, a hatásban szereplő téridőre történő  $\int d^4x$  integrálás helyett pedig a rácspontokra történő  $a^4 \sum_x$  összegzést írunk. Az így kapott rács-hatás csak a kontinuum-limeszben egyenlő a kontinuumbeli hatással, az eltérés azonban általában jól kontrollálható. Egy  $R$  dimenziótlan mennyiség  $a$  rácsállandó mellett kiszámolt értékének az eltérése a kontinuumbeli értékétől

$$R^{\text{rács}} = R^{\text{kont.}} + O(a^\nu), \quad (2.9)$$





2.1. ábra. Egy  $a$  rácsállandójú,  $n \times m$ -es, kétdimenziós rács. A periodikus határfeltétel szerint a szélén levő, azonosan jelölt rácspontokat azonosítjuk egymással.

ahol  $\nu$  kitevő a hatás diszkrétizációjának módjától függ. Minél nagyobb ez a  $\nu$  kitevő, annál jobbnak tekintjük az adott diszkrétizációt, ugyanis annál gyorsabban tart az eredmény a kontinuum-limeszhez.

A rács-megfogalmazásra az egyik legegyszerűbb példa az

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4 \quad (2.10)$$

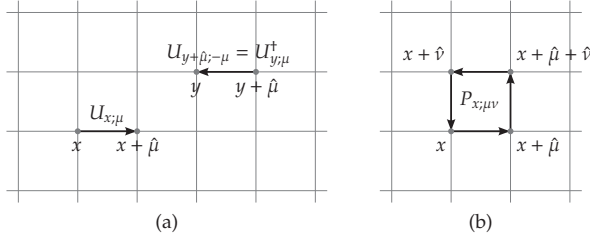
euklideszi Lagrange-függvénnyel rendelkező skalármező. Ennek legegyszerűbb diszkrétizálási módjában a rács-hatás

$$S = \sum_x a^4 \left( \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 \left[ \frac{\phi_{x+\hat{\mu}} - \phi_{x-\hat{\mu}}}{2a} \right]^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi_x^2 + \lambda \phi_x^4 \right) \quad (2.11)$$

alakú. Itt  $\hat{\mu}$  a  $\mu$  irányú, rácsállandó nagyságú vektort jelöli, így  $x + \hat{\mu}$  az  $x$  rácspontnak a  $\mu$  irányban levő szomszédja. A numerikus számolásokban érdemes rács-egységekben mért, dimenziótlan mennyiségekkel számolni, ezért a paramétereket is és a mezőket is átskalázzuk a rácsállandó megfelelő hatványaival. A skalármező esetében ez a  $\phi' = \phi a$ ,  $m' = ma$  és  $\lambda' = \lambda$  dimenziótlan mennyiségek bevezetését jelenti. Ilyen módon a rácsállandó nem jelenik meg explicit módon sem az

$$S = \sum_x \left( \phi_x'^2 \left[ 2 + \frac{1}{2} m'^2 \right] + \lambda' \phi_x'^4 - \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 \phi_{x+\hat{\mu}}' \phi_{x-\hat{\mu}}' \right) \quad (2.12)$$

hatásban, sem a számolás többi részében. Az így kapott dimenziótlan eredményekből a



2.2. ábra. (a) A rácson a gluonokat leíró mértékterek  $SU(3)$  mátrixokként a rácspontokat összekötő éleken vannak. (b) A Wilson-hatás építőeleme, a plakett.

fizikai értékek a ráczállandó megfelelő hatványaival törő szorzással kaphatók meg.

### 2.3. Tiszta mértékelméletek a rácson

A Yang–Mills elméletek leglényegesebb eleme a lokális mértékinvariancia, ezért a diszkrétizációjuk során a lokális mértékinvarianciának meg kell maradnia. A kontinuumban a mértékterek mutatják meg azt, hogy ha az egyik téridőpontban levő vektort össze akarunk hasonlítani egy másik téridőpontban levővel, akkor ehhez hogyan kell azt transzformálni. Ezért ha a kvarkok a rácspontokon vannak, akkor természetesnek adódik, hogy a mértékterek által leírt gluonok a rácspontokat összekötő éleken, az ún. linkeken ülnek.

Míg a kontinuumban a mértékmező az  $SU(3)$  mértékcsoport Lie-algebrájából veszi fel az értékeit, a rácson célszerűbb magukat az  $SU(3)$  csoport elemeit venni. Az  $x$  rácspontot a  $\mu$  irányú szomszédjával, az  $x + \hat{\mu}$  rácsponttal összekötő linken levő  $SU(3)$  mátrixot  $U_{x;\mu}$ -vel jelöljük. Ekkor a rács és a kontinuum mezők között a kapcsolat

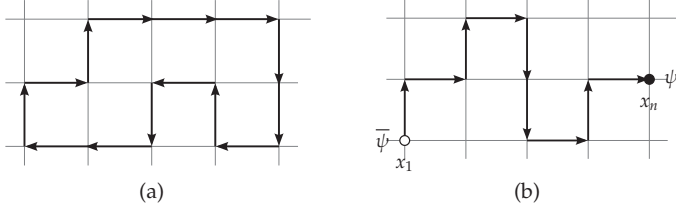
$$U_\mu = e^{igaA_\mu}, \quad (2.13)$$

ahol  $g$  a QCD (csupaszig) csatolási állandója. Egy link két rácspontoz is csatlakozik, így kétféleképpen tekinthetünk rá. Ha az  $x$  rácspontból induló, az  $x$ -et az  $x + \hat{\mu}$  rácsponttal összekötő  $\mu$  irányú linken a gluonmező értéke  $U_{x;\mu}$ , akkor az  $x + \hat{\mu}$ -ből induló, ugyanezen linken levő  $U_{x+\hat{\mu};-\mu}$ -re

$$U_{x+\hat{\mu};-\mu} = U_{x;\mu}^{-1} = U_{x;\mu}^\dagger \quad (2.14)$$

teljesül (2.2.a. ábra).

A gluonmezőknek ezen formája lehetővé teszi, hogy az egzakt mértékinvarianciát a rácson is megőrizzük. Ha minden rácspontban megadunk egy  $G_x \in SU(3)$  transzformációt



2.3. ábra. Mértékinvariáns mennyiségek: (a) zárt gluon-hurkok; (b) egy kvarkot és egy antikvarkot összekötő gluon-útvonalak.

mátrixot, akkor a megfelelő lokális mértéktranszformációt az

$$\begin{aligned}
 U'_{x;\mu} &= G_x U_{x;\mu} G_{x+\hat{\mu}}^\dagger \\
 \psi'_x &= G_x \psi_x \\
 \bar{\psi}'_x &= \bar{\psi}_x G_x^\dagger
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

képletek szerint hajthatjuk végre. Ez a kontinuumban megfelel a (2.4) mértéktranszformációknak.

A rácson mértékinvariáns mennyiségek képezhetők egyrészt

$$\text{Tr} \left[ U_{x_1;\mu} U_{x_1+\hat{\mu};\nu} \cdots U_{x_1-\hat{\epsilon};\epsilon} \right]
 \tag{2.16}$$

alakú zárt gluonhurkok formájában (2.3.a. ábra). Ezeknek az értéke nem függ attól, hogy a hurkon belül hol választjuk meg a kezdőpontot. Másrészt egy antikvarkból kiinduló és egy kvarkba torkolló

$$\bar{\psi}_{x_1} U_{x_1;\mu} U_{x_1+\hat{\mu};\nu} \cdots U_{x_n-\hat{\epsilon};\epsilon} \psi_{x_n}
 \tag{2.17}$$

gluon-útvonal is mértékinvariáns mennyiséget ad (2.3.b. ábra).

A tisztán gluonikus hatás a kontinuum QCD-ben

$$S_g^{\text{kont.}} = \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a.
 \tag{2.18}$$

Ennek a legegyszerűbb mértékinvariáns diszkrétizációja az

$$S_g^{\text{rács}} = \beta \sum_{\substack{x \\ \nu < \mu}} \left( 1 - \frac{1}{3} \text{Re} \left[ P_{x;\mu\nu} \right] \right)
 \tag{2.19}$$

ún. Wilson mértékhatás, ahol  $\beta = \frac{6}{g^2}$  a csatolási állandó, és

$$P_{x;\mu\nu} = \text{Tr} \left[ U_{x;\mu} U_{x+\hat{\mu};\nu} U_{x+\hat{\nu};\mu}^\dagger U_{x;\nu}^\dagger \right] \quad (2.20)$$

az  $1 \times 1$ -es zárt hurok, az ún. plakett (2.2.b. ábra).

## 2.4. Fermionok a rácson

A QCD-ben azonban nem csak gluonok, hanem kvarkok is szerepelnek. A kvarkok viszont fermionok, ami a rácstérelméleti számolásokban több nehézséget is okoz.

A legszembetűnőbb probléma, amely már szabad kvarkok esetén is jelentkezik, az ún. fermion-megkettőződés. Egy szabad egy ízből álló kvarkmező kontinuum hatása

$$S_f = \int d^4x \bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi. \quad (2.21)$$

Ezt naív módon diszkretizálva az

$$S_f^{\text{naív}} = a^4 \sum_x \left[ \bar{\psi}_x \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{\psi_{x+\hat{\mu}} - \psi_{x-\hat{\mu}}}{2a} + m \bar{\psi}_x \psi_x \right] \quad (2.22)$$

rács-hatást kapjuk. Ezen hatásból adódó rácspagatór inverze

$$G_{\text{naív}}^{-1}(p) = i\gamma_\mu \frac{\sin p_\mu a}{a} + m. \quad (2.23)$$

Ennek viszont az  $m = 0$  esetén nem csak a  $p = 0$  helyen van zérushelye, hanem ezen kívül az első Brillouin-zónában még a  $p_\mu = 0, \pm \frac{\pi}{a}$  helyeken, így a leírni kívánt egy fermionmező mellett megjelentek nemkívánt másolatok. A  $p = \frac{\pi}{a}$  és a  $p = -\frac{\pi}{a}$  pontok a véges ráczállandó következtében megegyeznek egymással, de még így is a 4 dimenziós téridőben egy helyett 16 kvarkot kapunk. Ezt hívjuk a fermion-megkettőződés problémájának.

### 2.4.1. Wilson fermionok

A fermion-megkettőződés kikerülésére több különböző mód létezik. Ezek közül az alkalmazásokban az egyik legelterjedtebb a Wilson fermionhatás. A hatáshoz adott Wilson-tag azáltal küszöböl ki minden másolatot, hogy azoknak  $ma$ -nál sokkal nagyobb tömeget ad, így azok nem adnak járulékot. A Wilson-tag második deriváltat tartalmaz, így a dimenziótlanság megőrzése érdekében  $a$ -nak eggyel magasabb hatványával kell szorozni, mint a

többi tagot:

$$S_f^W = S_f^{\text{naív}} - a \cdot \frac{r}{2} a^4 \sum_x \bar{\psi}_x \square \psi_{x'} \quad (2.24)$$

ahol

$$\square \psi_x = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\psi_{x+\hat{\mu}} - 2\psi_x + \psi_{x-\hat{\mu}}}{a^2}. \quad (2.25)$$

Ezáltal a kontinuum határesetben a Wilson-tag  $a$ -val arányosan nullához tart. Az  $r$  az ún. Wilson paraméter, amit legtöbbször 1-nek választanak, de értéke tetszőleges egynél nem nagyobb pozitív szám lehet. A (2.24) hatásból számolt propagátor inverze

$$G_W^{-1}(p) = G_{\text{naív}}^{-1}(p) + \frac{2r}{a^2} \sum_{\mu=1}^4 \sin^2(p_\mu a/2) \quad (2.26)$$

alakú. Ez  $O(p)$  rendig nem módosítja a fermionhatás  $p = 0$  körüli viselkedését, viszont a másolatoknak egy  $\frac{br}{a}$  extra tömeget ad, ahol  $b$  lehetséges értékei 2, 4, 6 vagy 8, attól függően, hogy melyik másolatot vizsgáljuk. A kontinuum limeszben a másolatok tömege végtelenhez tart, így a hatás valóban egy kvarkot ír le.

Az  $a^{3/2}\psi \rightarrow \psi$  dimenziótlanítás után a Wilson fermionhatás a

$$S_f^W = \sum_x \left\{ \bar{\psi}_x \sum_{\mu} [(\gamma_{\mu} - r)\psi_{x+\hat{\mu}} - (\gamma_{\mu} + r)\psi_{x-\hat{\mu}}] + (ma + 4r)\bar{\psi}_x \psi_x \right\} \quad (2.27)$$

alakot ölti. A tömeghez hasonló szerepe miatt szokás bevezetni a  $\kappa = 1/(2ma + 8r)$  ún. hopping paramétert, és a fermionmezőt  $\sqrt{2\kappa}$ -val átskálázni. A gluonmezőkhöz csatolva a kvarkok minden egyes rácspontban már  $3(\text{szín}) \times 4(\text{spin})$  dimenziós vektorok lesznek. Az  $U$  gluonmezőt úgy lehet mértékinvariáns módon betenni a hatásba, hogy a szomszédos rácspontokon levő  $\psi$  és  $\bar{\psi}$  közé írjuk. Így a teljes mértékinvariáns Wilson hatás:

$$S_f^W = \sum_x \left\{ \kappa \left[ \sum_{\mu} \bar{\psi}_x (\gamma_{\mu} - r) U_{x;\mu} \psi_{x+\hat{\mu}} - \bar{\psi}_{x+\hat{\mu}} (\gamma_{\mu} + r) U_{x;\mu}^{\dagger} \psi_x \right] + \bar{\psi}_x \psi_x \right\}. \quad (2.28)$$

A Wilson hatás nagy előnye, hogy a fermion-megkettőződés során keletkező összes másolatot megszünteti. Ezen előnye mellett azonban hátrányai is vannak. A Wilson tag a királis szimmetriát explicit módon sérti. Ha  $a \rightarrow 0$ , akkor a szimmetria visszaáll, de a valódi,  $a \neq 0$  melletti rács-számolásokban a királis szimmetria hiánya sokszor nehézséget okozhat. Meglepő módon ennek ellenére kaphatunk tömegtelen pionokat  $a \neq 0$  rács-állandó mellett is. Az ahhoz tartozó  $\kappa_c$  azonban nem egyszerűen  $\frac{1}{8r}$ -rel egyenlő, hanem a számolások során azt külön meg kell keresni.

A Wilson hatás egy másik hátránya, hogy használatakor nagy diszkretizációs hibák

léphetnek föl. A naív hatás használatakor a fizikai mennyiségek várható értékének hibája  $a^2$ -tel arányos. A hatásához adott Wilson-tag azonban  $a$ -val arányos, azaz  $S_f^W = S_f^{\text{kont.}} + O(a)$ , így a kapott hibák itt  $a$ -val lesznek arányosak. Ez azonban javítható, ha a hatásához egy olyan tagot adunk, ami kiejti az  $O(a)$  hibákat. A Wilson fermionhatáshoz hozzáadva a Sheikholeslami–Wohlerti, vagy más néven clover tagot [7], akkor a kapott

$$S_f^{\text{clover}} = S_f^W - \frac{iac\kappa r}{4} \sum_x \bar{\psi}_x \sigma_{\mu\nu} \mathcal{F}_{x;\mu\nu} \psi_x \quad (2.29)$$

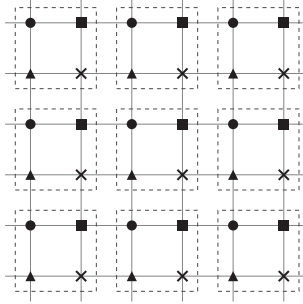
hatás a  $c$  együttható megfelelő megválasztása esetén már  $O(a^2)$  hibával rendelkezik. Itt  $\mathcal{F}_{x;\mu\nu}$  a kontinuumbeli  $F_{\mu\nu}$  térerősségnek a diszkretizált változata:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{x;\mu\nu} &= \frac{1}{4} \left( U_{x;\mu} U_{x+\hat{\nu}} U_{x+\hat{\nu};\mu}^\dagger U_{x;\nu}^\dagger - U_{x-\hat{\nu};\nu}^\dagger U_{x-\hat{\nu};\mu}^\dagger U_{x-\hat{\nu};\mu} U_{x-\hat{\nu};\nu} + \right. \\ &\quad \left. + U_{x;\nu} U_{x-\hat{\nu};\nu}^\dagger U_{x-\hat{\nu};\mu}^\dagger U_{x-\hat{\nu};\mu} - U_{x;\mu} U_{x+\hat{\nu};\nu}^\dagger U_{x-\hat{\nu};\mu}^\dagger U_{x-\hat{\nu};\nu} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left( \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & x+\hat{\nu} & \\ \hline & \downarrow & \\ \hline x & & x+\hat{\mu} \\ \hline \end{array} & - & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & x-\hat{\mu} & x \\ \hline & \uparrow & \\ \hline x-\hat{\nu} & & x \\ \hline \end{array} & + & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & x+\hat{\nu} & \\ \hline & \downarrow & \\ \hline x-\hat{\mu} & & x \\ \hline \end{array} & - & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & x & x+\hat{\mu} \\ \hline & \uparrow & \\ \hline x-\hat{\nu} & & x-\hat{\nu} \\ \hline \end{array} \end{array} \right) \quad (2.30) \end{aligned}$$

### 2.4.2. Kogut–Susskind fermionok

Amint azt fentebb láttuk, a fermion-megkettőződés abból ered, hogy a rác-propagátor (2.23) inverzének a Brillouin-zóna szélein is zérushelyei vannak. Ezáltal felmerül az a lehetőség, hogy a nemkívánt másolatokat a Brillouin-zóna méretének csökkentésével távolítsuk el. Ez elérhető, ha a fermion szabadsági fokokat a rácspontok között oly módon osztjuk szét, hogy az effektív rácállandó kétszerese legyen az eredetinek, és a kontinuum határesetben visszakapjuk a kontinuum hatást. Az eredetileg egy rácspontban levő különböző spinkomponenseket szétszítjuk egy rácállandó elhosszúságú hiperkocka csúcsaiba. Egy  $d$  dimenziós hiperkockának  $2^d$  csúcsa van, így a rendelkezésre álló szabadsági fokok száma  $2^d$  (2.4. ábra). A Dirac-spinoroknak  $d$  dimenzióban  $2^{d/2}$  komponense van, így egy hiperkocka minden csúcsába egy komponenszt írva  $2^d/2^{d/2} = 2^{d/2}$  fermionmezőt tudunk leírni. A  $d = 4$  dimenziós téridőben tehát  $2^{4/2} = 4$  degenerált kvarkot kapunk. Az eredeti  $\psi_x$  mezők helyett minden rácspontban bevezetjük a  $3(\text{szín}) \times 1(\text{spin})$  komponenssel rendelkező  $\chi_x$  mezőt, melyekre a mértékinvariáns teljes Kogut–Susskind (staggered) hatás:

$$S_f^S = \sum_x \bar{\chi}_x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu} \eta_{x;\mu} \left( U_{x;\mu} \chi_{x+\hat{\mu}} - U_{x-\hat{\mu};\mu}^\dagger \chi_{x-\hat{\mu}} \right) + m a \chi_x \right\}, \quad (2.31)$$



2.4. ábra. A  $2^d$  staggered fermion szabadsági fok szétosztása a kétdimenziós ( $d = 2$ ) rácson.

ahol

$$\eta_{x,\mu} = (-1)^{\sum_{\nu=1}^{\mu-1} x_\nu}. \quad (2.32)$$

Ez a hatás 4 degenerált kvark-ízét ír le, de az ízek szétválasztása az egy hiperkocka csúcaiban levő 16 különböző  $\chi$  értékből bonyolult feladat. A staggered hatásnak azonban van egy maradék királis szimmetriája, aminek következtében jobban kezelhető, és gyorsabban lehet vele dolgozni, mint a Wilson hatással. Továbbá a staggered hatás esetén a diszkretizációs hibák  $a^2$ -tel arányosak, csak úgy, mint a naív hatás esetében.

## 2.5. Számolási algoritmus

A teljes rác-QCD hatás tömören az

$$S(U, \psi, \bar{\psi}) = S_g(U) - \bar{\psi} M(U) \psi \quad (2.33)$$

alakba írható, ahol  $S_g$  a tisztán gluonikus hatás,  $M(U)$  pedig a mérték-konfigurációtól függő fermionmátrix. Mivel a kvarkmezők kvadratikusan szerepelnek, az azokra történő integrálást analitikusan el lehet végezni. A fermionokat a Pauli-elv miatt nem hagyományos számok, hanem egymással antikommutáló Grassmann-változók írják le, így a kvarkokra vonatkozó Gauss-integrál eredményeként az  $M(U)$  kvarkmátrix determinánsa nem a nevezőbe, hanem a számlálóba kerül:

$$\int [dU] [d\bar{\psi}] [d\psi] e^{-S_g(U) + \bar{\psi} M(U) \psi} = \int [dU] e^{-S_g(U)} \det M(U). \quad (2.34)$$

Ezt úgy is felfoghatjuk, hogy a fermionok bevezetésének a következményeként a gluonokra az

$$S_{\text{eff.}}(U) = S_g(U) - \ln(\det M(U)) \quad (2.35)$$

effektív hatás vonatkozik. Az  $\ln(\det M)$  tag felelős a vákuumpolarizációért, a vákuumban megjelenő és eltűnő kvark-antikvark párokért. Emiatt amelyik kvark-ízek fermiondeterminánsát a mérték-konfigurációk előállításakor figyelembe vesszük, azokat dinamikus fermionoknak hívják.

A 2.4.2. alszakaszban láttuk, hogy ha staggered fermionokat használunk, akkor ezen hatás 4 azonos tömegű kvarkot ír le. Ha 4 helyett  $n_f$  számú azonos tömegű kvarkkal szeretnénk dolgozni, akkor az integrálban és az effektív hatásban a  $\det M(U)$  tényezőt az  $n_f/4$ -edik hatványra emeljük.

$$\int [dU] [d\bar{\psi}] [d\psi] e^{-S_g - S_f} = \int [dU] e^{-S_g(U)} [\det M(U)]^{n_f/4}, \quad (2.36)$$

$$S_{\text{eff.}}(U) = S_g(U) - \frac{n_f}{4} \ln(\det M(U)). \quad (2.37)$$

Az egyszerűség kedvéért az  $n_f/4$  kitevőt a továbbiakban elhagyjuk.

A kvarkokat is tartalmazó operátorok (2.8) szerinti várható értékének meghatározásakor a fermionokra történő kiintegrálás során a fermionmátrix inverzének, a kvark-propagátornak a megfelelő mátrixelemei jönnek elő. Legyen például

$$O(x, y) = (\bar{\psi}\psi)_y (\bar{\psi}\psi)_x \quad (2.38)$$

az  $x$  pontban egy  $\bar{u}$  és  $d$  kvarkot tartalmazó mezont keltő, majd azt az  $y$  pontban eltüntető operátor. Ennek a várható értéke

$$\begin{aligned} \langle 0|O(x, y)|0\rangle &= \frac{\int [dU] [d\bar{\psi}] [d\psi] \bar{\psi}_y^{u,a} \psi_y^{d,a} \bar{\psi}_x^{u,b} \psi_x^{d,b} e^{-S_g(U) + \bar{\psi}M(U)\psi}}{\int [dU] [d\bar{\psi}] [d\psi] e^{-S_g(U) + \bar{\psi}M(U)\psi}} = \\ &= \frac{\int [dU] [M_{x,y}^{-1,u}(U)]^{ab} [M_{y,x}^{-1,d}(U)]^{ba} \det M(U) e^{-S_g(U)}}{\int [dU] \det M(U) e^{-S_g(U)}} = \\ &= \frac{\int [dU] \text{Tr}_{\text{szín,spin}} \left[ (M_{x,y}^{-1,u}) (M_{y,x}^{-1,d}) \right] e^{-S_{\text{eff.}}(U)}}{\int [dU] e^{-S_{\text{eff.}}(U)}}. \quad (2.39) \end{aligned}$$



Az  $O$  várható értéke megegyezik tehát a pusztán a mértékterektől függő

$$O' = \text{Tr}_{\text{spin}, \text{spin}} \left[ \left( M_{x,y}^{-1,u} \right) \left( M_{y,x}^{-1,d} \right) \right] \quad (2.40)$$

operátornak a (2.35) effektív hatással rendelkező gluonmezőkön vett várható értékével.

Egy csupán a gluonmezőktől függő  $O$  operátor

$$\langle 0|O|0\rangle = \frac{\int [dU] O e^{-S_{\text{eff}}(U)}}{\int [dU] e^{-S_{\text{eff}}(U)}} \quad (2.41)$$

várható értékének a kiszámítása a következőképpen történik. Generálunk véletlen  $\{U\}_\alpha$  gluonmező konfigurációkat, majd kiszámítjuk az

$$\langle 0|O|0\rangle = \frac{\sum_\alpha O_\alpha e^{-S_\alpha}}{\sum_\alpha e^{-S_\alpha}} \quad (2.42)$$

súlyozott átlagot. Itt  $O_\alpha$  az  $O$  operátor értéke,  $S_\alpha$  pedig az  $S_{\text{eff}}$  effektív hatás értéke az  $\alpha$  mérték-konfiguráción. A mérték-konfigurációk összességét hívjuk sokaságnak.

A véletlenszerűen generált gluonkonfigurációk többségére azonban  $S_\alpha$  nagyon nagy, így azok nagyon kis járulékot adnak a (2.42) átlaghoz. Ilyen módon számolva tehát nagyon sok felesleges munkát végeznénk. Célszerűbb a konfigurációkat eleve olyan eloszlással előállítani, hogy az  $\{U_\alpha\}$  konfiguráció  $e^{-S_\alpha}$ -val arányos valószínűséggel kerüljön elő. Ezt hívjuk fontossági mintavételezésnek. Ha ilyen eloszlással állnak rendelkezésünkre a konfigurációk, akkor

$$\langle 0|O|0\rangle = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N O_\alpha, \quad (2.43)$$

tehát az eredmény az  $O$  operátornak az egyes konfigurációkban vett értékének az átlaga. Ha a számolás során  $N$  statisztikusan független mérték-konfigurációt használtunk, akkor az eredmény relatív statisztikus hibája  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ .

Többféle algoritmus létezik a konfigurációk  $e^{-S}$  eloszlású generálásához. A legkorábbi és egyben a legegyszerűbb eljárás a Metropolis algoritmus. Első lépésként generálunk egy véletlenszerű konfigurációt. Ebből kis véletlenszerű változtatással előállítunk egy következő konfigurációt, és közben figyeljük a hatás  $\Delta S$  változását. Ha  $S$  csökken, akkor az újonnan kapott konfigurációt elfogadjuk. Ha  $S$  nő, akkor az új konfigurációt  $e^{-\Delta S}$  valószínűséggel fogadjuk el. Ezt ilyen módon folytatva minden egyes konfigurációban végezhetünk méréseket, azaz kiértékelhetjük a különböző  $O$  operátorok értékét.

A lépéseket egy véletlenszerű mérték-konfigurációról indítva az első lépéseknél előfor-

duló konfigurációk még nem az  $e^{-S}$  eloszlást fogják követni. Nagyon nagy valószínűséggel fognak a kiindulási konfigurációhoz közeli konfigurációk előkerülni, még akkor is, ha az  $e^{-S}$  értéke azon konfigurációkra rendkívül kicsi. A mérések elkezdése előtt ki kell várni tehát a termalizációs időt, ami az ahhoz szükséges lépések száma, hogy a konfigurációk sorozata elérje a kiindulási konfigurációtól független  $e^{-S}$  egyensúlyi eloszlást.

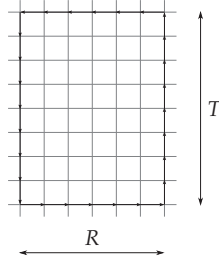
Mivel minden konfigurációt egy előző konfigurációból kis változtatással hoztunk létre, az egyes konfigurációk nem tekinthetők statisztikusan függetlennek. Figyelembe kell venni tehát az autokorrelációs időt, ami azt mutatja meg, hogy két konfiguráció között hány lépésnek kell megtörténnie ahhoz, hogy az azokban mért mennyiségek már egymástól statisztikusan függetlennek, korrelálatlanok tekinthetők legyenek. Az autokorrelációs idő megállapítható az  $O$  operátornak a konfigurációk sorozatán mért értékeiből. Ez általában függ az  $O$  operátortól. Ha például  $O$  olyan zárt gluonhurok, ami szinte az egész rácsot bejárja, akkor hosszabb lesz az autokorrelációs ideje, mint ha csak néhány egymáshoz közeli linken haladna. Ahogy csökkentjük az  $a$  rácsállandót, a kontinuum határesethez haladva fellép a kritikus lelassulás jelensége. Ez annak a következménye, hogy  $a$ -t csökkentve egy adott tipikus fizikai távolság, mint például egy hadron mérete, rács-egységekben mérve nagyobb lesz, azaz több rácsponthoz felel meg. Ahhoz, hogy két konfiguráció ugyanazon a fizikai méretskálán korrelálatlan maradjon, kisebb rácsállandó esetében több lépésnek kell közöttük elteltie.

## 2.6. Rácsállandó meghatározása

A numerikus számolások során dimenziótlán, rács-egységekben mért mennyiségekkel dolgozunk, a rácsállandó sehol nem jelenik meg. A számolások végén az eredményeket azonban a fizikai egységekben szeretnénk tudni. Ehhez a számolások során a keresett mennyiségek mellett a rácsállandót is meg kell határozni. A rácsállandó meghatározása minden esetben úgy történik, hogy egy jól ismert értékű, és a rácsra is könnyen mérhető fizikai mennyiséget megmérünk a rácsra, és a rács-egységekben kapott értékét összehasonlítjuk annak fizikai egységekben mért valódi értékével.

A statikus kvark-antikvark potenciál a tiszta mértékelméletben is és dinamikus fermionok használata esetén is alkalmazható a rácsállandó meghatározására. Jelölje  $W(R, T)$  egy térirányban  $R$ , időirányban  $T$  élhosszúságú, téglalap alakú gluonhurok (2.5. ábra), ún. Wilson-hurok várható értékét. Ebből a  $V(R)$  statikus kvark-antikvark potenciál [8]:

$$V(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln[W(R, T)] \quad (2.44)$$

2.5. ábra. Térirányban  $R$ , időirányban  $T$  kiterjedésű Wilson-hurok.

Durvább rácson a

$$\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{dV(R)}{dR} \quad (2.45)$$

húrfeszültség  $\sqrt{\sigma} = 465 \text{ MeV}$  értéke használható a ráczállandó meghatározására [9]. Finomabb rácson célszerűbb az

$$R^2 \cdot \left. \frac{dV(R)}{dR} \right|_{R=r_0} = 1.65 \quad (2.46)$$

összefüggéssel definiált  $r_0$  Sommer-paramétert alkalmazni [10], amelynek az értéke  $r_0 = 0.469(7) \text{ fm}$  [11]. Ezeken kívül a ráczállandó meghatározására nagyon jól használható mennyiség például a kaon leptonikus bomlási állandója, melynek  $f_K = 159.8 \text{ MeV}$  kísérleti értéke is jól ismert, és a rácson is könnyen mérhető.

## 2.7. Hadronspektroszkópia

A hadronspektroszkópia célja meghatározott kvarktartalmú és kvantumszámokkal rendelkező hadronok, állapotok tömegének a meghatározása. Az  $\langle 0 | \mathcal{O}(t) \bar{\mathcal{O}}(0) | 0 \rangle$  euklideszi korrelátor annak a folyamatnak a valószínűségi amplitúdóját írja le, hogy a 0 pillanatban az  $\bar{\mathcal{O}}$  operátor által keltett hadronállapot a  $t$  időpontban eltűnik. Az  $\mathcal{O}$  operátor alakja adja meg, hogy milyen hullámfüggvénnyel rendelkező állapotok keltődnek. A hadronspektroszkópiában  $\mathcal{O}$  különböző kvarkokat keltő és eltüntető operátorokból épül fel.

A hadronok tömege lényegében azok nyugalmi energiáját jelenti, így azt szeretnénk, hogy az  $\mathcal{O}$  operátor csak a nulla impulzussal rendelkező állapotok hullámfüggvényével

fedjen át. Ezért az  $O$  operátort vetítjük a  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  altérre:

$$O^{(\mathbf{p}=0)}(t) = \sum_{\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} O(t, \mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{p}=0} = \sum_{\mathbf{x}} O(t, \mathbf{x}) \quad (2.47)$$

Megadott paritású állapotok keltéséhez az  $O$  operátorból az

$$O_{\pm} = \frac{1}{2} (O \pm POP^{-1}) \quad (2.48)$$

projekció segítségével ki kell választani a megfelelő paritás-csatornát. A legegyszerűbb alakú operátorokra a tértükrözés hatása

$$POP^{-1} = \eta\gamma_0 O, \quad (2.49)$$

ahol  $\eta = \pm 1$  az  $O$  operátor belső paritása. Nem pontszerű  $O$  operátorok tértükrözése esetén a kvarkforrások elhelyezkedését is tükrözni kell.

Mivel euklideszi időben vagyunk,

$$O(t) = e^{Ht} O(0) e^{-Ht}, \quad (2.50)$$

ahol  $H$  a teljes QCD Hamilton-operátora. Így a korrelátorba  $H$  egy teljes  $|i\rangle$  sajátállapot-rendszerét beillesztve a korrelátor az

$$\langle 0|O(t)\bar{O}(0)|0\rangle = \sum_i \left| \langle i|\bar{O}(0)|0\rangle \right|^2 e^{-(E_i - E_0)t} \quad (2.51)$$

alakot ölti, ahol  $E_i$  az  $|i\rangle$  sajátállapot energiája,  $E_0$  pedig a vákuumállapot energiája. Az összegzésben természetesen csak azok a sajátállapotok fognak járulékot adni, amelyeknek az átfedése az  $O$  által keltett állapottal nem nulla. Hosszú idő elteltével a (2.51) összeget a leglassabban lecsengő exponenciális fogja dominálni. Tehát az  $O$  operátorral átfedő állapotok közül a legalacsonyabb energiájú állapot tömege a (2.51) korrelátor nagy  $t$ -nél megvalósuló exponenciális lecsengéséből kapható meg.

## 2.8. Véges hőmérsékletű QCD

Egy kvantumrendszer nulla kémiai potenciálhoz tartozó nagykanonikus állapotösszege véges  $T$  hőmérsékleten

$$Z = \text{Tr} \left[ e^{-H/T} \right], \quad (2.52)$$

ahol  $H$  a rendszer Hamilton-operátora. A (2.52) egyenletben szereplő  $\text{Tr}$  meghatározásához az állapotoknak egy teljes rendszerére kell összegezni. Egy bozonokat leíró térelmélet esetén ez azt jelenti, hogy az összes, a három térdimenzióban értelmezett  $\varphi$  mezőkonfigurációra kell elvégezni a

$$\text{Tr} \left[ e^{-H/T} \right] = \int [d\varphi] \langle \varphi | e^{-H/T} | \varphi \rangle \quad (2.53)$$

funkcionál-integrált. A (2.53) integrálban szereplő  $\langle \varphi | e^{-H/T} | \varphi \rangle$  integrandus pedig nem más, mint annak a valószínűségi amplitúdója, hogy a  $t = 0$ -beli  $\varphi$  állapotból kiindulva a rendszer  $t = -i/T$  képzetes idő „elteltével” ismét a  $\varphi$  állapotba kerül. Az ilyen átmeneti valószínűségi amplitúdók pedig a

$$\langle \varphi | e^{-H/T} | \varphi \rangle = \int_{\substack{\phi|_{t=0}=\varphi \\ \phi|_{t=-i/T}=\varphi}} [d\phi] \exp \left( i \int_{t=0}^{t=-i/T} dt L \left( \phi, \frac{\partial \phi}{\partial it} \right) \right) \quad (2.54)$$

funkcionál-integrál segítségével számolhatók ki, ahol az összes olyan  $3 + 1$  dimenzióban értelmezett  $\phi$  mezőkonfigurációra integrálunk, amelyek a  $t = 0$ -ban is és a  $t = -i/T$ -ben is  $\varphi$ -vel egyenlők. Mivel képzetes időirányban integrálunk, ezért az

$$L \left( \phi, \frac{\partial \phi}{\partial it} \right) = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{L} \left( \phi, \frac{\partial \phi}{\partial it} \right) \quad (2.55)$$

Lagrange-függvényben a  $\phi$  mezőnek a képzetes időirányú deriváltja jelenik meg. Bevezetve a  $\tau = it$  helyettesítést a (2.54) integrál a

$$\langle \varphi | e^{-H/T} | \varphi \rangle = \int_{\substack{\phi|_{\tau=0}=\varphi \\ \phi|_{\tau=1/T}=\varphi}} [d\phi] \exp \left( - \int_{\tau=0}^{\tau=1/T} d\tau \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{L}_E \left( \phi, \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) \right) \quad (2.56)$$

alakúvá válik, ahol  $\mathcal{L}_E$  az euklideszi Lagrange-sűrűség. Ha a (2.56) egyenletet a (2.53) összefüggésnek megfelelően integráljuk az összes,  $3$  dimenzióban értelmezett  $\varphi$  konfigurációra,

$$Z = \text{Tr} \left[ e^{-H/T} \right] = \int [d\varphi] \int_{\substack{\phi|_{\tau=0}=\varphi \\ \phi|_{\tau=1/T}=\varphi}} [d\phi] \exp \left( - \int_{\tau=0}^{\tau=1/T} d\tau \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{L}_E \left( \phi, \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) \right), \quad (2.57)$$

akkor tulajdonképpen a

$$Z = \int [d\phi] e^{-S_E(\phi)} \quad (2.58)$$

euklideszi funkcionál-integrált vettük az összes olyan mezőkonfigurációra, amely az időirányban  $1/T$  szerint periodikus. Fermionokat is tartalmazó elméletek termodinamikai leírásakor a fermionmezőkre időirányban nem periodikus, hanem antiperiodikus határfeltételt kell kiróni.

A  $T$  hőmérsékletű kvantumszindinamika egyensúlyi termodinamikájának leírása tehát egy  $1/T$  nagyságú, képzetes idővel analóg tengely bevezetésével lehetséges. Az állapotösszeg formálisan megegyezik az euklideszi térelmélet

$$Z = \text{Tr} \left[ e^{-H/T} \right] = \int [dU] [d\bar{\psi}] [d\psi] e^{-S_E(U, \psi, \bar{\psi})} \quad (2.59)$$

állapotösszegével, itt azonban a hatást az időirányban csak  $1/T$ -ig kell integrálni.

$$S_E = \int_0^{1/T} dx_4 \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}_E. \quad (2.60)$$

Az időirányban a gluonok esetében periodikus, a kvarkok esetében antiperiodikus határfeltételt kell alkalmazni.

A (2.59) állapotösszeg diszkrétizálása, és rácson történő kiszámolása pontosan ugyanúgy történik, mint az euklideszi ráctérelmélet esetében. Itt akkor kerülünk közel a végtelen térfogati határesethez, az ún. termodinamikai limeszhez, ha a rács térirányú kiterjedése sokkal nagyobb, mint az  $1/T$  időirányú mérete.

Ha az  $a$  rácsállandójú rács időirányban  $N_t$  rácspontot tartalmaz, akkor a rendszer hőmérséklete

$$T = \frac{1}{a \cdot N_t}. \quad (2.61)$$

A QCD-ben az aszimptotikus szabadság miatt  $a$  monoton csökkenő függvénye a  $\beta$  csatolási állandónak, így rögzített  $N_t$  mellett  $\beta$  növelése a hőmérséklet növelésének felel meg.

## 3. fejezet

# A $\Theta^+$ pentakvark spektroszkópiája

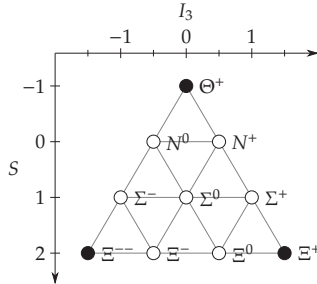
A kvarkmodell nagyon jól leírja a kísérletileg is jól ismert hadronokat: a kvark-antikvark párból álló  $q\bar{q}$  mezonokat, a három kvarkból álló  $qqq$  barionokat, valamint a három antikvarkból álló  $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$  antibarionokat. Ezek mellett azonban jószol egzotikus kvarktartalmú hadronokat is: például négy kvarkot és egy antikvarkot tartalmazó  $qqqq\bar{q}$  részecskét, vagy hat kvarkból felépülő  $qqqqqq$  hadront is. Bár ezen egzotikus hadronok megkeresésére irányuló kísérletek már a 60-as évek óta zajlottak, egyértelműen kimutatni egyet sem sikerült. Ez annak volt betudható, hogy az egzotikus hadronok feltételezhetően nagy bomlási szélességgel rendelkeznek.

A királis szolitonmodell [12] által megjósolt pentakvark antidekuplet legkönnyebb tagja az 1530 MeV tömegű [13],  $uudd\bar{s}$  minimális kvarktartalommal rendelkező  $\Theta^+$  (3.1. ábra). Diakonov, Petrov és Polyakov 1997-ben a  $\Theta^+$  pentakvark szélességére nagyon kicsi,  $\Gamma < 15$  MeV értéket jósolt [14], aminek hatására beindultak a megtalálására irányuló kísérletek.

Először a LEPS kollaboráció látott a  $\Theta^+$ -ra utaló kísérleti jelet 2003-ban 1540 MeV tömegnél [15], amit a DIANA [16], a CLAS [17], majd a SAPHIR [18] csoportok pozitív eredményei követték. A  $\Theta^+$  pentakvarkon kívül az antidekuplet más tagjai is előbukkantak, például az NA49 kollaboráció a  $\Xi^{--}$  (1860) pentakvarkra utaló jelet észlelt [19].

A  $\Theta^+$  (1540)-re utaló kísérleti indikációk teljesen megváltoztatták az egzotikus hadronokról alkotott képet, a szélességére felállított  $\Gamma < 10$  MeV kísérleti felső korlát pedig azt is megmagyarázta, hogy korábbi kísérletekben miért nem láttak a létezésére utaló jelet. A  $\Theta^+$  a kísérletekben egy neutronra és egy  $K^+$ -ra bomlott, így a ritkasága  $S = +1$ , az izospinjének harmadik komponense  $I_3 = 0$ , és a minimális kvarktartalma  $uudd\bar{s}$  kell legyen. Mivel az  $I_3 = 1$  csatornában nem látták, a SAPHIR kollaboráció szerint a  $\Theta^+$  valószínűleg egy izospin szinglet állapot [18]. A rendelkezésre álló kísérleti adatok alapján a spinjét és a paritását azonban nem lehetett megállapítani.

A  $\Theta^+$  kísérleti előállítását a lehetséges szerkezetének feltárására, a még nem ismert



3.1. ábra. A királis szolitonmodell által jósolt pentakvark antidekuplet. A háromszög csúcsaiban levő hadronok egzotikusak, a kvantumszámaik előállításához háromnál több kvarkra van szükség.

kvantumszámainak meghatározására, és esetleges további egzotikus hadronok létezésének vizsgálatára irányuló elméleti munkák sokasága követte. A kvarkmodell viszonylag nagy értékeket jósol a pentakvark tömegekre [20], a  $\Theta^+(1540)$  alacsony tömegét a kvarkok között fellépő erős korrelációval magyarázták. Jaffe és Wilczek [21, 22] szerint a  $\Theta^+$  pentakvark két dikvarkból és egy antikvarkból, míg Karliner és Lipkin [23] szerint egy dikvarkból és egy trikvarkból épül fel. A modell alapján a kis bomlási szélességet a pentakvark hullámfüggvényének a végső nukleon–kaon ( $N-K$ ) állapottal való nagyon kismértékű átfedése, vagy pedig két majdnem azonos tömegű állapot keveredése okozhatja [24]. A kvarkmodellen kívül a kísérletben látottakat a QCD összszabály alapján [25, 26], valamint barion-mezon kötött állapotként is próbálták értelmezni [27, 28].

A különböző modellek a  $\Theta^+$ -nak azonban eltérő tulajdonságokat jósolnak. Míg a királis szolitonmodell és a kvarkmodell szerint például pozitív paritású, a QCD összszabály alapján a  $\Theta^+$  negatív paritású. Szükséges tehát a  $\Theta^+(1540)$  pentakvarknak egy modellfeltevésektől mentes, közvetlenül a QCD alapelvein alapuló, vagyis rács-QCD segítségével történő vizsgálata.

### 3.1. Korábbi rács térelméleti eredmények

A rács-QCD segítségével történő megközelítésben a nehézséget viszont az okozza, hogy a  $\Theta^+$  tömege nagyobb a  $N-K$  szórási küszöbnél, így az beekelődik a  $N-K$  szórásállapotoknak a rács véges mérete miatt diszkrét seregébe. Mivel minden kvantumszámukban megegyeznek, a  $\Theta^+$  pentakvarkot egyáltalán nem könnyű egyértelműen megkülönböztetni a közelében lévő szórásállapotoktól.

Jelen dolgozat alapját képező munka [29] előtt már jelentek meg a  $\Theta^+$  pentakvark-



ról rácstérelméleti tárgyalások, a fellépő nehézségeket figyelembe véve azonban nem meglepő, hogy az eredményeik nincsenek teljes összhangban [30, 31]. Mindegyik munka dinamikus fermionok nélkül készült konfigurációkat használt, a pentakvark operátor előállításához viszont különböző fermion diszkrétizációkat alkalmaztak.

Csikor *et al.* [32] és Sasaki [33] a negatív paritású csatornában láttak a  $\Theta^+$  várható tömegéhez közeli állapotot. Mivel a pozitív paritású csatornában látott legalacsonyabb energiájú állapot jóval magasabb tömegű volt, a negatív paritású jelet a  $\Theta^+$  pentakvarknak tulajdonították. Mathur *et al.* [34] a spektrálsúlyok térfogatfüggését vizsgálva, Ishii *et al.* [35] pedig kevert határfeltételt alkalmazva vonták le azt a következtetést, hogy az általuk a negatív paritású csatornában látott jel egy  $N - K$  szórásállapot. Takahashi *et al.* [36] azonban a negatív paritású csatornában a legalacsonyabb energiájú állapotot a tömegének térfogatfüggése alapján a  $\Theta^+$  pentakvarkkal azonosítják. Alexandrou *et al.* [37] a spektrálsúlyok térfogatfüggése alapján tartják az általuk talált negatív paritású állapotot a  $\Theta^+$ -nak. Ezen kívül a pentakvark potenciál vizsgálata során azt is megállapítják, hogy a dikvark-dikvark-antikvark kép energetikailag kedvezőbb, mint a  $N - K$  kép.

Az eddigi rács számolások egymással konzisztensek abban a tekintetben, hogy a pozitív ill. negatív paritású csatornában a legalacsonyabb energiájú állapotra milyen tömeget kaptak. Az eredményeik közötti különbség csupán ezen állapotok interpretációjában rejlik. Az egyetlen, az előbbieknél ellentmondó eredmény Chiu *et al.* [38] munkája, akik a negatív paritású csatornában a legalacsonyabb  $N - K$  szórásállapot mellett a pozitív paritású csatornában találtak a  $\Theta^+$  pentakvarkkal azonosítható állapotot.

Az viszont közös mindegyik rács számolásban, hogy egyik sem tudta a legalacsonyabb energiájú szórásállapotokat azonosítani egyszerre mindkét paritás-csatornában. Ez arra enged következtetni, hogy a pusztán az origóba tett, forgásszimmetrikus kvarkforrásokból álló hullámfüggvényeknek nincs megfelelő átfedése az összes alacsonyenergiás állapottal.

## 3.2. Nukleon–kaon szórásállapotok a rácson

Nagy biztonsággal csak akkor mondható el, hogy a rács számolásokban látható a  $\Theta^+$  pentakvarkra utaló jel, ha mindkét paritási csatornában a  $\Theta^+$  várható tömege fölötti első szórásállapotig bezárólag minden  $N - K$  szórásállapotot sikerült azonosítani, és a  $\Theta^+$  állapotot ezektől egyértelműen megkülönböztetni.

Egy  $a$  rácscellájú, térirányban  $N_s$  rácspontot tartalmazó, periodikus határfeltétellel rendelkező rácson az impulzus csak a

$$\mathbf{p}_n = \frac{2\pi}{L_s} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3 \quad (3.1)$$

diszkrét értékeket veheti fel, ahol  $L_s = a \cdot N_s$  a rács térirányú mérete. Így a  $N - K$  rendszer lehetséges energiái

$$E_{NK,n} = \sqrt{m_N^2 + |\mathbf{p}_n|^2} + \sqrt{m_K^2 + |\mathbf{p}_n|^2}, \quad (3.2)$$

ahol  $\mathbf{p}_n$  a nukleon és kaon relatív impulzusa,  $m_N$  és  $m_K$  pedig rendre a nukleon és a kaon tömege. Ha két részecske van a dobozban, akkor a (3.1) kvantálási feltétel a  $\delta(\mathbf{p}_n)$  szórási fázistolással módosul,

$$\mathbf{p}_n + \frac{2\delta(\mathbf{p}_n)}{L_s} = \frac{2\pi}{L_s}, \quad (3.3)$$

azonban a  $N - K$  csatornában a kísérletek alapján nagyon gyengék a kölcsönhatások, így a  $\delta(\mathbf{p}_n)$  elhagyása a pentakvarkkal kapcsolatos rács-számolásokban előforduló statisztikus hibáknál jóval kisebb szisztematikus hibát okoz [36].

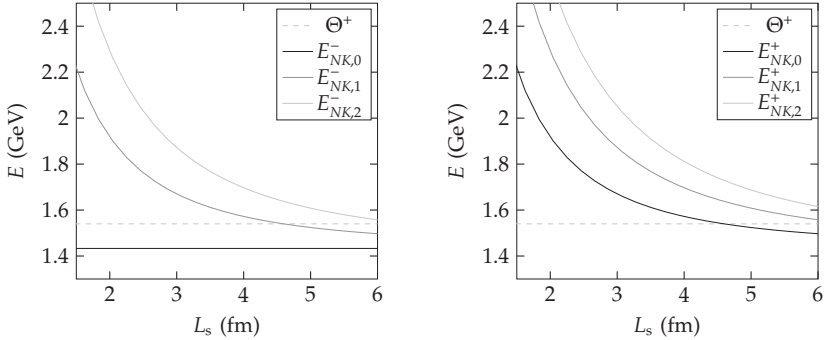
A negatív paritású csatornában a  $N - K$  rendszer legkisebb lehetséges relatív impulzusa nulla, így a legalacsonyabb néhány szórásállapot energiája

$$\begin{aligned} E_{NK,0}^- &= m_N + m_K \\ E_{NK,1}^- &= \sqrt{m_N^2 + \frac{4\pi^2}{L_s^2}} + \sqrt{m_K^2 + \frac{4\pi^2}{L_s^2}} \\ E_{NK,2}^- &= \sqrt{m_N^2 + \frac{8\pi^2}{L_s^2}} + \sqrt{m_K^2 + \frac{8\pi^2}{L_s^2}} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.4)$$

A pozitív paritású csatornában a  $N - K$  rendszer negatív belső paritása miatt a térbeli hullámfüggvény antiszimmetrikus kell legyen, így itt nulla relatív impulzus nem fordulhat elő:

$$\begin{aligned} E_{NK,0}^+ &= \sqrt{m_N^2 + \frac{4\pi^2}{L_s^2}} + \sqrt{m_K^2 + \frac{4\pi^2}{L_s^2}} \\ E_{NK,1}^+ &= \sqrt{m_N^2 + \frac{8\pi^2}{L_s^2}} + \sqrt{m_K^2 + \frac{8\pi^2}{L_s^2}} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Mivel nagyobb a rács térbeli kiterjedése, annál lejjebb kerülnek a szórásállapotok energiái (3.2. ábra). A negatív paritású csatornában a legalacsonyabb szórásállapot mindenképpen körülbelül 100 MeV-vel a  $\Theta^+$  kísérleti tömege alatt van. Ha  $L_s$ -t kellően kicsinek választjuk, akkor viszont a következő szórásállapot, és a pozitív paritású csatornában a legalacsonyabb szórásállapot már jóval a  $\Theta^+$  fölött lesznek. Ilyen módon elérhető, hogy a pozitív paritású csatornában a  $\Theta^+$  legyen az alapállapot, a negatív paritású csatorná-



3.2. ábra. A legalacsonyabb néhány  $N - K$  szórásállapot energiája a dobozméret függvényében. A baloldali ábra a negatív paritású csatornát, a jobboldali a pozitív paritású csatornát mutatja. A szaggatott vonal mindkét esetben a  $\Theta^+$  kísérleti várakozások szerinti tömegét jelenti.

ban pedig a második legalacsonyabb energiájú állapot. A végesméret effektusok miatt azonban túl kicsi  $L_s$  dobozméret sem megfelelő, így a  $\Theta^+$  vizsgálatához ideális rácsméret  $L_s \approx 2 - 3$  fm. Ilyen rácsméret esetén tehát a  $\Theta^+$  pentakvark kimutatásához legalább három negatív paritású, és legalább kettő pozitív paritású, egymástól független operátorra van szükség.

### 3.3. A számoláshoz használt operátorok

#### 3.3.1. Az operátorok általános szerkezete

A spektroszkópiában az egyik legfontosabb rész a megfelelő operátorok megválasztása. Ha a keresett hadronállapot hullámfüggvénye ismert, akkor az lerögzíti, hogy a vizsgálatához a rácson milyen operátort használjunk. A pentakvark hullámfüggvényére léteznek az irodalomban különböző javaslatok, mivel azonban a rácson használható operátorok szerkezetére vonatkozóan erős megkötések vannak, ezek kipróbálási lehetősége meglehetősen korlátozott.

Az operátorok térbeli szerkezetére vonatkozó megkötés a (2.51) alakú korrelátorok kiszámítási módjának következménye. Ezek ugyanis  $\langle 0|q_\alpha(x)q_\beta^\dagger(y)|0\rangle$  alakú kvark-kvark korrelátorokra bomlanak, amikhez viszont a fermionmátrix inverzének  $M_{x,\alpha;y,\beta}^{-1}$  mátrixelemei kellene. Egy tetszőleges 5-kvark hullámfüggvényen alapuló  $O$  operátor korrelátorának kiszámításához szükség van tetszőleges  $x$  és  $y$  téridőpont-pár esetén az  $M_{x,\alpha;y,\beta}^{-1}$  propagátorra, ami a jelenleg használatos rácsméretek mellett nagyságrendileg  $10^{14}$  mátrixelem

kiszámítását és tárolását jelentené. Ez a manapság rendelkezésre álló számítógépekkel nem megoldható.

Ehelyett azt lehet tenni, hogy rögzítünk egy  $q_\beta(\mathbf{y})$  kvark hullámfüggvényt, és csak a

$$d_\alpha(x) = \sum_{\mathbf{y}, \beta} M_{x, \alpha; \mathbf{y}, \beta}^{-1} q_\beta(\mathbf{y}) \quad (3.6)$$

mátrixelemeket számoljuk ki és tároljuk. Ez nagymértékben csökkenti a szükséges számítási kapacitást, viszont csak olyan  $O$  operátor korrelátorának a kiszámolását teszi lehetővé, amelyik öt kvark hullámfüggvényének a szorzataként írható:

$$O(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5) = q_1(\mathbf{x}_1) q_2(\mathbf{x}_2) q_3(\mathbf{x}_3) q_4(\mathbf{x}_4) q_5(\mathbf{x}_5) \quad (3.7)$$

Az egyes kvarkok hullámfüggvényeként leggyakrabban

$$q_i(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i0})^2}{r_i^2}\right) \quad (3.8)$$

Gauss-függvényt alkalmazunk.

A hagymányos, három kvarkból álló hadronok spektroszkópiájához képest a pentakvark esetében még egy nehézség adódik. A spin, szín és íz indexekre történő összegzésekhez szükséges gépidő a kvarkok számával exponenciálisan nő. Három kvark esetében ezek elhanyagolhatóak a fermionmátrix inverziók mellett, azonban még a legegyszerűbb pentakvark operátor esetében is az indexekre történő összegzések a gépidő közel 50%-át teszik ki. Emiatt a rács számolásokban használt pentakvark operátor az index-szerkezetét tekintve is csak az egyszerűbbek közül kerülhet ki.

Ezen megkötések által adott lehetőségeken belül szeretnénk a legmegfelelőbb operátorokkal dolgozni. A hadronspektroszkópiában leggyakrabban alkalmazott operátorok esetében mindegyik kvarkforrás forgásszimmetrikus, és mindegyik ugyanabban a pontban van, így minden pályaimpulzusmomentum automatikusan nulla. Ilyen típusú operátorral a különböző modellek alapján kapott pentakvark hullámfüggvényeknek csak egy meglehetősen kis hányada valósítható meg. Például a Jaffe és Wilczek [21,22] által javasolt hullámfüggvény megvalósításához olyan operátorra van szükség, amelyben a különböző kvark-források különböző rácspontokban vannak. Az ilyen nemtriviális térbeli szerkezettel rendelkező operátorokat a gerjesztett barionok spektroszkópiájában már sikeresen alkalmazták [39].

Ennek megfelelően az izospin szinglet és feles spinű csatornában történő pentakvark kereséshez mi is ilyen nemtriviális térszerkezetű operátorokat használtunk. Ahhoz azonban, hogy a kvarkokat különböző rácspontokban tartalmazó operátorok valóban feles spinű állapotokat írjanak le, azoknak  $s = \frac{1}{2}$  spinsajátállapotoknak kell lennie.

### 3.3.2. Spinsajátállapotok létrehozása

Nullánál nagyobb rácsállandójú rácsnak a kontinuumbeli teljes  $SO(3)$  forgáscsoport nem szimmetriája, hanem annak csak a 24 elemű  $O$  köbös részcsoportja. Emiatt a különböző állapotokat a forgatással szembeni viselkedésük szempontjából az  $SU(2)$  helyett az  $O$  kétszeres fedőcsoportja, a 48 elemű  ${}^2O$  csoport ábrázolásaival jellemezhetjük (3.1. táblázat).

$O$	$I$	$6C_4$		$8C_3$	$3C_2$	$6C_2'$		
$A_1$	1	1	1	1	1	1		
$A_2$	1	-1	1	1	1	-1		
$E$	2	0	-1	2	0	0		
$T_1$	3	1	0	-1	-1	-1		
$T_2$	3	-1	0	0	-1	1		
$G_1$	2	-2	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1	1	0	0
$G_2$	2	-2	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1	1	0	0
$H$	4	-4	0	0	1	-1	0	0
${}^2O$	$I$	$J$	$6C_8'$	$6C_8$	$8C_3$	$8C_6$	$6C_4$	$12C_4'$

3.1. táblázat. Az  $O$  köbös csoport és a  ${}^2O$  kétszeres fedőcsoport karaktertáblája. Az első öt ábrázolás az  $O$ -nak is ábrázolása, az utolsó három csak a  ${}^2O$ -nak.

Az  $SU(2)$  irreducibilis ábrázolásai a  ${}^2O$ -ra leszűkítve az  $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$  spinű ábrázolások kivételével már nem lesznek irreducibilis ábrázolásai  ${}^2O$ -nak (3.2. táblázat). Emiatt a  ${}^2O$  valamely irreducibilis ábrázolásához tartozó állapot  $SU(2)$  több különböző spinű ábrázolásához tartozó komponenssel rendelkezhet [40].

$SU(2)$ irred. ábr.	$\rightarrow$	${}^2O$ ábr.	$SU(2)$ irred. ábr.	$\rightarrow$	${}^2O$ ábr.
0	$\rightarrow$	$A_1$	$\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	$G_1$
1	$\rightarrow$	$T_1$	$\frac{3}{2}$	$\rightarrow$	$H$
2	$\rightarrow$	$E + T_2$	$\frac{5}{2}$	$\rightarrow$	$G_2 + H$
3	$\rightarrow$	$A_2 + T_1 + T_2$	$\frac{7}{2}$	$\rightarrow$	$G_1 + G_2 + H$
4	$\rightarrow$	$A_1 + E + T_1 + T_2$	$\frac{9}{2}$	$\rightarrow$	$G_1 + 2H$
$\vdots$			$\vdots$		

3.2. táblázat. A kontinuumbeli  $SU(2)$  irreducibilis ábrázolásainak leszűkítése a  ${}^2O$  részcsoporthra.

Tehát annak ellenére, hogy az  $A_1$ ,  $G_1$ ,  $T_1$  és  $H$  megegyeznek az  $SU(2)$  legalacsonyabb négy spinhez tartozó irreducibilis ábrázolásának leszűkítésével, tartalmazhatnak a követ-

kező kontinuumbeli spinekhez tartozó komponenseket is:

$$\begin{aligned}
 A_1: & \quad s = 0, 4, 6, \dots \\
 G_1: & \quad s = \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \dots \\
 T_1: & \quad s = 1, 3, 4, \dots \\
 H: & \quad s = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Egy  $A_1$  állapot által az  $s = 0$  spinen kívül esetlegesen tartalmazott legkisebb spin 4-gyel nagyobb az  $s = 0$ -nál, míg ez a második legalacsonyabb esetlegesen tartalmazott spin a  $G_1$  esetében 3-mal, a  $T_1$  esetében 2-vel nagyobb a legalacsonyabbnál. Így ha feltételezzük, hogy a kontinuumban a magasabb spinekhez tartozó állapotok energiája jóval magasabb, akkor az  $A_1$ ,  $G_1$  és  $T_1$  csatornák legalacsonyabb energiájú állapotainak meghatározásakor gyakorlatilag alkalmazhatjuk a

kontinuum	$\longleftrightarrow$	rács
0	$\longleftrightarrow$	$A_1$
$\frac{1}{2}$	$\longleftrightarrow$	$G_1$
1	$\longleftrightarrow$	$T_1$

(3.10)

megfeleltetést.

Most  $s = \frac{1}{2}$  spinű pentakvark állapotokat keresünk, ezért olyan  $O$  operátorokat kell tehát előállítanunk, amelyek a  ${}^2O$  forgatások hatására a  $G_1$  irreducibilis ábrázolása szerint transzformálódnak. Ez történhet egyrészlől a köbös csoport Clebsch–Gordan együtthatóin alapuló technikával [41]. Mi azonban egy másik, az adott irreducibilis ábrázoláshoz tartozó projektorok felhasználásán alapuló módszert [42] választottunk.

Ha  $T(g)$  a  $|G|$  elemszámú  $G$  véges csoportnak egy unitér ábrázolása,  $D_{ij}^{(r)}(g)$  ( $g \in G$  és  $i, j = 1, \dots, d_r$ ) pedig a  $G$  csoport  $d_r$  dimenziós  $r$  irreducibilis ábrázolásának mátrixelemei, akkor definiálhatók a  $T(g)$  ábrázolás terén ható

$$P_{ij}^{(r)} = \frac{d_r}{|G|} \sum_{g \in G} D_{ij}^{(r)}(g)^* T(g) \quad i, j = 1, \dots, d_r \tag{3.11}$$

lineáris transzformációk. Ha  $|\psi\rangle$  egy tetszőleges vektor a  $T(g)$  ábrázolási terében, akkor rögzített  $j$ -re a

$$|\phi_i^{(r,j)}\rangle = P_{ij}^{(r)} |\psi\rangle, \quad i = 1, \dots, d_r \tag{3.12}$$

módon kapott  $d_r$  elemszámú vektorrendszer vagy úgy transzformálódik a  $T(g)$  hatására, mint az  $r$  irreducibilis ábrázoláshoz tartozó bázisvektorok a  $D^{(r)}(g)$  hatására, vagy pedig mindegyik tagja nulla [43].

Ha az  $O$  operátorból indulunk ki, akkor az előzőek alapján a  ${}^2O$  köbös csoport  $G_1$  irreducibilis ábrázolása szerint transzformálódó  $O_i^{(G_1)}$  operátorokat a következőképpen kaphatunk. Az  $O(x)$  operátornak vannak szabad Dirac-indexei is, és nem triviális térbeli szerkezete is, így a  $g \in {}^2O$  elemmel való elforgatottja  $D_g O(R_g^{-1} \mathbf{x})$ , ahol  $D_g$  a Dirac-indexeket forgatja a  $g$  csoportelemnek megfelelően,  $R_g$  pedig a  $g$ -nek a  $T_1$  ábrázolásbeli mátrixa, azaz a  $g$ -nek megfelelő geometriai forgatást végrehajtó lineáris transzformáció.

Vegyük az  $O$  elforgatásaival adódó  $\{D_g O(R_g^{-1} \mathbf{x})\}_{g \in {}^2O}$  operátorok által kifeszített lineáris teret. Minden  $h \in {}^2O$  csoportelem esetén a

$$T(h) = (D_g O(R_g^{-1} \mathbf{x}) \mapsto D_{hg} O(R_{hg}^{-1} \mathbf{x}) \quad \text{lineáris kiterjesztése}) \quad (3.13)$$

lineáris leképezést véve a  ${}^2O$  csoportnak egy  $h \mapsto T(h)$  ábrázolását kaptuk az  $\{D_g O(R_g^{-1} \mathbf{x})\}_{g \in {}^2O}$  operátorok által kifeszített lineáris téren. Ekkor az  $O$  operátorból a  $G_1$  ábrázoláshoz tartozó részt a

$$P_{ij}^{(G_1)} = \frac{2}{48} \sum_{g \in {}^2O} D_{ij}^{(G_1)}(g)^* T(g) \quad (3.14)$$

transzformációk segítségével kaphatjuk meg. Ha a  $D^{(G_1)}$  ábrázolómátrixokat a  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$  bázisban írtuk fel, akkor (3.12) alapján a spinsajátállapotok

$$\begin{aligned} O_{\uparrow}^{(G_1, j)} &= P_{1, j}^{(G_1)} O, \\ O_{\downarrow}^{(G_1, j)} &= P_{2, j}^{(G_1)} O, \end{aligned} \quad j = 1, 2. \quad (3.15)$$

Ha a kiindulási  $O$  operátor már eleve rendelkezik a  ${}^2O$  egy részcsoportjának megfelelő valamilyen szimmetriával, akkor előfordulhat, hogy a (3.15) képletben a  $j$  két lehetséges értékét figyelembe véve sem kapunk két különböző  $\{O_{\uparrow}^{(G_1, j)}, O_{\downarrow}^{(G_1, j)}\}$  operátorbázist. Ez az általunk alkalmazott összes operátor esetében így volt, ezért a  $j$  indexet elhagyva az

$$\begin{aligned} O_{\uparrow}^{(G_1)} &= P_{\uparrow}^{(G_1)} O, \\ O_{\downarrow}^{(G_1)} &= P_{\downarrow}^{(G_1)} O \end{aligned} \quad (3.16)$$

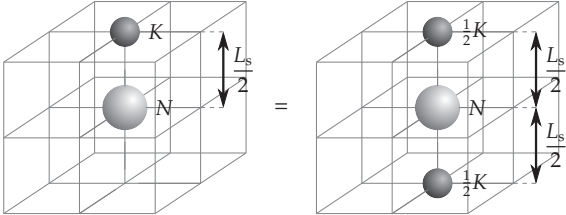
egyszerűsített jelölést alkalmazzuk.

Mindegyik kiindulási operátorunk olyan volt, hogy az öt kvarkforrás (3.7) szorzatában egy kivételével minden Dirac-indexet kontraháltunk. Így az operátor teljes impulzusmomentuma az egy szabad Dirac-indexből származó  $\frac{1}{2}$  spin, és a kvarkok térbeli elrendeződéséből származó pályaimpulzusmomentum összegeként adódott. Tehát a  $G_1$  ábrázoláshoz tartozó részt a  $G_1 \otimes l$  összegből kell kivétítenünk, ahol  $l$  a pályaimpulzusmomentumnak megfelelő ábrázolása az  $O$  (és nem pedig a  ${}^2O$ ) köbös csoportnak.





$L_s/2$ -vel eltolt kaonból:

$$O_3 = \epsilon^{abc} \left[ u_a^T(0, 4) C \gamma_5 d_b(0, 4) \right] \left\{ u_c(0, 4) \bar{s}_c(N_s/2, 4) \gamma_5 d_c(N_s/2, 4) + (u \leftrightarrow d) \right\} =$$

(3.19)

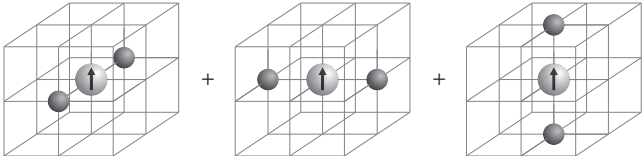
Mivel a kaon a rács térirányú méretének felével van eltolva a nukleonhoz képest, a periodikus határfeltétel miatt ez egyenértékű azzal, mintha lefelé toltuk volna el a kaont a dobozméret felével, vagy mintha a kaon fele felé, a fele fölfelé lenne eltolva. Ennek következtében ez az elrendezés a  $z$  tengely körüli  $90^\circ$ -os forgatásokon kívül a tértükrözésre is szimmetrikus lesz. Ha ezt a  $|z\rangle$ -vel jelölt elrendezést az  $O$  köbös csoport elemeivel elforgatjuk, az  $|x\rangle$ ,  $|y\rangle$  és  $|z\rangle$  által kifeszített három dimenziós teret kapjuk, ahol  $|x\rangle$  és  $|y\rangle$  rendre azokat az elrendezéseket jelölik, amikor a kaon az  $x$  tengely mentén, illetve az  $y$  tengely mentén van eltolva. Ezen a három dimenziós téren a forgatások az  $O$  csoportnak az  $A_1 \oplus E$  ábrázolását valósítják meg. Ehhez hozzávéve a szabad Dirac-index által hordozott  $\frac{1}{2}$  spin a

$$G_1 \otimes (A_1 \oplus E) = G_1 \otimes A_1 \oplus G_1 \otimes E = G_1 \oplus H \quad (3.20)$$

ábrázoláshoz jutunk. Ebből szeretnénk a  $G_1$  alterét kivettetni. Legyen  $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |z\rangle$ , amire a (3.14) projekciót végrehajtva

$$P_{11}^{(G_1)}(|\uparrow\rangle \otimes |z\rangle) = |\uparrow\rangle \otimes (|x\rangle + |y\rangle + |z\rangle), \quad (3.21)$$

így (3.16) alapján a szimmetrikus elrendezésű, eltolt  $N - K$  operátorunkra

$$O_{3,\uparrow} = P_{\uparrow}^{(G_1)} \left( \epsilon^{abc} \left[ u_a^T(0, 4) C \gamma_5 d_b(0, 4) \right] \left\{ u_c(0, 4) \bar{s}_c(N_s/2, 4) \gamma_5 d_c(N_s/2, 4) + (u \leftrightarrow d) \right\} \right) =$$

(3.22)

adódik.

### 3.3.4. Pozitív paritású operátorok

Pozitív paritású állapotokhoz olyan operátorra van szükségünk, amelyeknek a pályaimpulzusmomentum része antiszimmetrikus. Induljunk ki egy olyan  $|\pm z\rangle$  állapotból, amelyek a  $z$  tengely körüli forgatásokra nézve szimmetrikus, tértükrözést végrehajtva viszont előjelet vált. Ennek az elforgatásaival a  $|\pm x\rangle$ ,  $|\pm y\rangle$  és  $|\pm z\rangle$  vektorok által kifeszített három dimenziós térhez jutunk. Ezen az elforgatások az  $O$  csoportnak a  $T_1$  ábrázolását valósítják meg, ami a kontinuumban 1-es pályaimpulzusmomentumnak felel meg. A szabadon maradt  $\frac{1}{2}$  kvarkspint ehhez hozzáadva a

$$G_1 \otimes T_1 = G_1 \oplus H \quad (3.23)$$

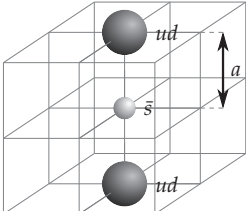
összeget kapjuk, amiből a  $G_1$  részre történő projekciót végrehajtva

$$P_{\uparrow}^{(G_1)}(|\uparrow\rangle \otimes |\pm z\rangle) = |\downarrow\rangle \otimes [|\pm x\rangle + i \cdot |\pm y\rangle] + |\uparrow\rangle \otimes |\pm z\rangle \quad (3.24)$$

adódik. A kapott együtthatók megegyeznek a kontinuumbeli  $\frac{1}{2} \otimes 1 = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}$  spinösszeadásnál fellépő Clebsch-Gordan együtthatókkal.

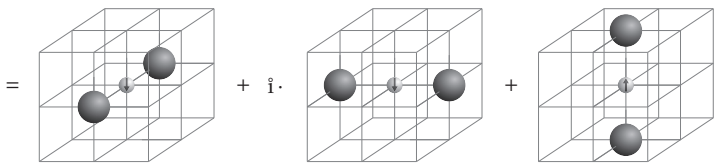
A negyedik operátorunkat a Jaffe és Wilczek [21, 22] által felvázolt dikvark-dikvark-antikvark képnek megfelelően úgy készítjük el, hogy az  $\bar{s}$  antikvarkot az origóba tesszük, a két egyforma  $ud$  dikvarkot pedig a  $z$  tengely mentén helyezzük el, az egyiket fölfelé, a másikat lefelé eltolva:

$$O_4 = \epsilon^{abc} \epsilon^{ade} \epsilon^{bgh} \left[ u_d^T(1, 2) C \gamma_5 d_e(1, 2) \right] \left[ u_g^T(-1, 2) C \gamma_5 d_h(-1, 2) \right] C \bar{s}_c^T(0, 4) =$$

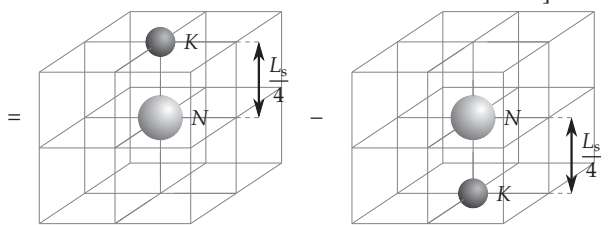

(3.25)

A szín-indexekben fellépő antiszimmetria miatt az így kapott elrendezés antiszimmetrikus

lesz. Erre alkalmazva a (3.24) projekciót a negyedik feles spinű operátor tehát

$$O_{4,\uparrow} = P_{\uparrow}^{(G_1)} \left( \epsilon^{abc} \epsilon^{ade} \epsilon^{bgh} \left[ u_d^T(1,2) C \gamma_5 d_e(1,2) \right] \left[ u_g^T(-1,2) C \gamma_5 d_h(-1,2) \right] C \bar{s}_c^T(0,4) \right) =$$

(3.26)

A másik antiszimmetrikus elrendezésű operátorunkat az origóba helyezett nukleonból és egy tőle  $\frac{L_s}{4}$  távolságra elhelyezett kaonból építjük fel. A pályaimpulzusmomentum rész antiszimmetrikusságának elérése érdekében a kaon két ellenkező irányba eltolásával kapott tagot ellentétes előjellel vesszük figyelembe:

$$O_5 = \epsilon^{abc} \left[ u_a^T(0,4) C \gamma_5 d_b(0,4) \right] \left\{ u_c(0,4) \left[ \bar{s}_e(N_s/4,4) \gamma_5 d_e(N_s/4,4) - \bar{s}_e(-N_s/4,4) \gamma_5 d_e(-N_s/4,4) \right] + (u \leftrightarrow d) \right\} =$$

(3.27)

így a (3.24) spinprojekció után az antiszimmetrikus  $N - K$  operátorunk

$$\mathcal{O}_{5,\uparrow} = P_{\uparrow}^{(G_1)} \left( e^{abc} \left[ u_a^T(0, 4) C \gamma_5 d_b(0, 4) \right] \left\{ u_c(0, 4) \left[ \bar{s}_e(N_s/4, 4) \gamma_5 d_c(N_s/4, 4) - \bar{s}_e(-N_s/4, 4) \gamma_5 d_c(-N_s/4, 4) \right] + (u \leftrightarrow d) \right\} \right) =$$

$$(3.28)$$

### 3.4. Állapotok elkülönítése keresztkorrelációs módszerrel

Az

$$\langle 0|O(t)\bar{O}(0)|0\rangle = \sum_i |\langle i|\bar{O}(0)|0\rangle|^2 e^{-(E_i - E_0)t} \quad (3.29)$$

korrelátor az időben különböző exponenciálisok lineáris kombinációjaként cseng le. Ezt a lecsengést hosszú idő elteltével a legalacsonyabb tömegű állapot fogja dominálni, így arra exponenciálist illetve az  $O$  operátorral átfedő hullámfüggvénnyel rendelkező állapotok közül a legkisebb energiájúnak a tömege meghatározható. A  $\Theta^+$  pentakvark megbízható kimutatásához a legalacsonyabb állapot megtalálása azonban nem elegendő. Több exponenciális összegének illesztésével elviekben a magasabb energiájú állapotok is meghatározhatók, ehhez azonban a korrelátor olyan nagy pontosságú mérése szükséges, ami a pentakvark számolásokban nem valósítható meg. Ha viszont az  $O$  operátornak az átfedése a legalacsonyabb tömegű állapottal nulla, akkor a (3.29) korrelátor hosszú idejű lecsengését a második legalacsonyabb energiájú állapot dominálja. Ahhoz, hogy olyan  $O$  operátort készítsünk, amelyik nem fed át a legalacsonyabb energiájú állapottal, egyrészt előre tudnunk kellene, hogy mi lesz a legalacsonyabb állapot, másrészt annak pontosan ismernünk kellene a hullámfüggvényét.

Ezt a nehézséget hidalja át a gluonlabdák spektroszkópiájában [44, 45] sikeresen alkal-

mazott keresztkorrelációs módszer [46,47]. Képezzük az  $O_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) operátorok

$$\mathcal{R}(t) = \sum_{i=1}^n v_i O_i(t). \quad (3.30)$$

lineáris kombinációját. Akkor az  $\mathcal{R}$  korrelátora kifejezhető az  $n \times n$ -es

$$C_{ij}(t) = \langle O_i(t) \bar{O}_j(0) \rangle \quad (3.31)$$

korrelátor-mátrix segítségével:

$$R(t) = \langle \mathcal{R}(t) \bar{\mathcal{R}}(0) \rangle = \sum_{i,j=1}^n v_i v_j^* C_{ij}(t). \quad (3.32)$$

Egy exponenciálisan lecsengő  $C(t)$  korrelátor esetén az állapot tömegét az

$$m_{\text{eff}}(t) = -\frac{1}{\Delta t} \ln \left( \frac{C(t + \Delta t)}{C(t)} \right) \quad (3.33)$$

effektív tömeg adja meg. Jelen esetben az

$$m_{\text{eff}}(t) = -\frac{1}{\Delta t} \ln \left( \frac{R(t + \Delta t)}{R(t)} \right) = -\frac{1}{\Delta t} \ln \left( \frac{\sum_{i,j=1}^n v_i v_j^* C_{ij}(t + \Delta t)}{\sum_{i,j=1}^n v_i v_j^* C_{ij}(t)} \right) \quad (3.34)$$

effektív tömeg a  $v_i$ -knek is függvénye. Ha a korrelátor pontosan  $n$  állapotot tartalmaz, akkor (3.34) stacionárius értékei pontosan az  $n$  állapotnak megfelelő effektív tömegeket adják, egy adott stacionárius értékhez tartozó  $v_i$ -kkel képzett (3.30) lineáris kombináció pedig az adott tömegű állapottal legjobban átfedő operátort eredményezi. Ha a korrelátor  $n$ -nél több állapotot tartalmaz, akkor mivel a magasabb energiájú állapotok hamar lecsengenek, viszonylag kis  $t$ -től kezdve (3.34) stacionárius értékei jó közelítéssel adják meg a legalacsonyabb  $n$  állapot energiáját.

A (3.34) effektív tömeg stacionárius értékeit, és minden egyes stacionárius érték esetében a  $v_i$  együtthatókat az

$$\sum_{j=1}^n C_{ij}(t + \Delta t) v_j = \lambda \sum_{j=1}^n C_{ij}(t) v_j \quad (3.35)$$

általánosított sajátértékprobléma megoldásai adják meg. A magasabb tömegű állapotok járulékaiknak zavaró hatása ellenőrizhető abból, hogy a  $t$  és  $\Delta t$  értékeket variálva a kapott

$\kappa_{u,d}$	$m_\pi$ (MeV)	$m_K$	$m_N$ (GeV)
0.1550	626(2)	670(2)	1.364(7)
0.1555	550(2)	637(2)	1.301(8)
0.1558	497(2)	613(2)	1.258(8)
0.1563	393(2)	575(2)	1.161(9)

3.3. táblázat. A könnyű kvarkok hopping paraméterei, és a hozzájuk tartozó pion-, kaon- és nukleontömegek.

effektív tömegek és  $v_i$  együtthatók mennyire változnak.

Ilyen módon megkapható, hogy a legkönnyebb  $k$  ( $k \leq n$ ) állapottal legjobban átfedő  $k$  operátor az eredeti  $n$  operátor milyen lineáris kombinációjaként adódik. A módszer egyetlen hátránya, hogy a korrelátor értékét csak két különböző pontban használja. Miután azonban megvannak az optimális  $v_i$  együtthatók, az állapotok tömegei a (3.34) effektív tömegeből, annak jóval több  $t$ -nél levő értékét felhasználva, a hagyományos illesztési módszerrel kaphatók meg.

### 3.5. Eredmények

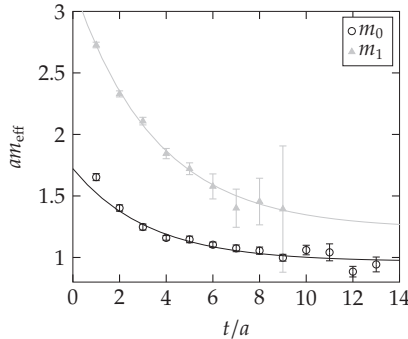
A stabil hadronok spektrumát a dinamikus fermionok nélkül készült konfigurációkkal végzett rács-számolások is nagyon jól visszaadják [48], így mi is pusztán a Wilson mértékhatást használtuk a konfigurációk előállításához. A csatolási állandó  $\beta = 6.0$  volt, amiből a rácsállandóra a Sommer-paraméter alapján mérve  $a = 0.093$  fm adódott. A propagátorok méréséhez Wilson fermionokat használtunk. Az  $u$  és  $d$  könnyű kvarkokra négy különböző  $\kappa_{u,d}$  hopping paraméter értéket használtunk (3.3. táblázat), míg az  $s$  kvark hopping paramétere minden esetben  $\kappa_s = 0.1544$  volt, ami a királis limeszben a kaon tömegére a fizikai értéket eredményezi. A számolásokhoz használt rácsméret  $24^3 \times 60$  ( $L_s = 2.24$  fm) volt, de az állapotok térfogatfüggésének vizsgálata céljából a legnagyobb kvarktömeg esetében  $20^3 \times 60$ -as ( $L_s = 1.86$  fm) rácson is végeztünk számolásokat.

A kiértékeléshez a negatív paritású csatornában a 3.3.3. alszakaszban ismertetett  $O_1 - O_3$ , a pozitív paritású csatornában a 3.3.4. alszakaszban bemutatott  $O_4 - O_5$  operátorokat használtuk. Az egyes esetekben a kiértékelt mérték-konfigurációk száma a 3.4. táblázatban látható. Az állapotok szétválasztása a 3.4. szakaszban leírt módon történt. A (3.35) diagonalizálások során  $t/a-t$  és  $\Delta t/a-t$  a  $2 - 5$  tartományban változtattuk, majd az ebből származó bizonytalanságokat a végeredményben szisztematikusan hibaként vettük figyelembe.

A (3.34) effektív tömegnek a  $t \rightarrow \infty$  esetben lesz egy platója, melyre konstans függvényt

$N_s$	Paritás	$\kappa_{U,d}$	Operátorok	Konfigurációk száma
24	-	0.1550	$O_1, O_2, O_3$	242
24	-	0.1555	$O_1, O_2, O_3$	205
24	-	0.1558	$O_1, O_2, O_3$	205
24	-	0.1563	$O_1, O_2, O_3$	205
20	-	0.1550	$O_1, O_2, O_3$	630
24	+	0.1550	$O_4, O_5$	250
24	+	0.1555	$O_4, O_5$	144
24	+	0.1558	$O_4, O_5$	144
24	+	0.1563	$O_4, O_5$	144
20	+	0.1550	$O_4, O_5$	234

3.4. táblázat. Az egyes paraméterértékek esetén használt mérték-konfigurációk száma.

3.3. ábra. Az effektív tömegek a pozitív csatornában  $\kappa_{U,d} = 0.1558$  esetén. A görbék a (3.36) egyenlet szerinti illesztett exponenciálisokat mutatják.

illesztve a megfelelő korrelátor által tartalmazott legalacsonyabb állapot tömegét kapjuk. Az általunk kapott effektív tömegek azonban nagyon zajossá váltak még mielőtt elérték volna ezt a platót. Viszont az effektív tömeg exponenciálisan tart a platóhoz

$$m_{\text{eff}}(t) = m + \varrho \cdot \exp(-vt) \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.36)$$

így exponenciálisan illesztve már a plató elérése előtti pontokból az  $m$  tömeg megkapható. Ez a módszer nagyon stabilnak mutatkozott, és amint azt a 3.3. ábra illusztrálja, az exponenciális már  $t/a = 2 - 3$ -tól jól illeszkedik az effektív tömegekre.

Ilyen módon mindkét paritás-csatornában meghatároztuk a legalacsonyabb két állapot  $m_0$  és  $m_1$  tömegét. Mivel nem a fizikai kvarktömegeknél dolgoztunk, nem közvetlenül a

$N_s$	Paritás	$\kappa_{u,d}$	$E_0$	$E_1$	$m_0$	$m_1$
			$m_N+m_K$	$m_N+m_K$	$m_N+m_K$	$m_N+m_K$
24	–	0.1550	1	1.152(1)	1.01(1)	1.16(5)
24	–	0.1555	1	1.166(2)	0.99(1)	1.16(5)
24	–	0.1558	1	1.177(2)	0.99(1)	1.14(8)
24	–	0.1563	1	1.202(2)	0.98(2)	1.28(13)
20	–	0.1550	1	1.211(2)	1.00(1)	1.24(8)
24	+	0.1550	1.152(1)	1.281(2)	1.16(2)	1.45(16)
24	+	0.1555	1.166(2)	1.306(3)	1.13(3)	1.39(15)
24	+	0.1558	1.177(2)	1.325(3)	1.09(5)	1.39(17)
24	+	0.1563	1.202(2)	1.368(4)	1.14(8)	1.31(32)
20	+	0.1550	1.211(2)	1.383(3)	1.21(2)	1.48(12)

3.5. táblázat. A mért két legalacsonyabb tömeg és a legelső két  $N - K$  szórásállapot energiája, lenormálva a  $N - K$  küszöbhez tartozó tömeggel.

tömegeket érdemes vizsgálni, hanem a  $N - K$  küszöbvel lenormált

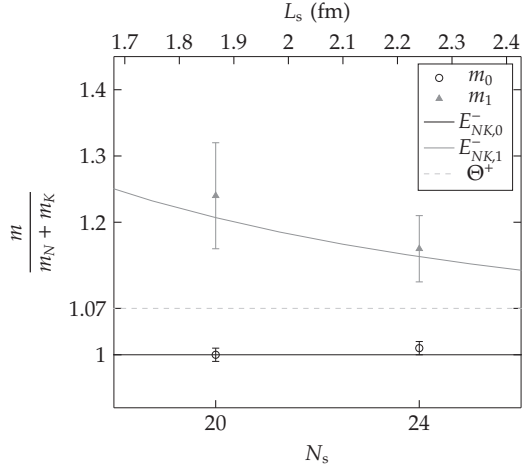
$$\alpha_i = \frac{m_i}{m_N + m_K} \quad (3.37)$$

értékeket. A pentakvark esetében ez a mennyiség várhatóan sokkal kevésbé érzékeny a kvarktömegekre, mint a tömege. A kísérleti várakozások szerint  $\alpha_{0^+} = 1.07$ . A mért  $\alpha$  értékek a (3.4) és (3.5) szórásállapotokra kiszámolt értékekkel együtt a 3.5. táblázatban láthatók. A 3.4. és 3.5. ábrák az állapotok energiájának térfogatfüggését mutatják a legnagyobb kvarktömeg esetében a negatív és pozitív paritású csatornában. Látható, hogy mindkét paritás-csatornában a két legkisebb mért tömeg minden esetben konzisztens a legelső két  $N - K$  szórásállapottal.

Annak eldöntésére, hogy egy állapot egyrészescke-állapot-e, vagy pedig szórásállapot, az energiájának a térfogatfüggésén kívül a (3.29) egyenletben az állapothoz tartozó exponenciális együttthatójának, az ún. spektrálsúlyának a térfogatfüggése is használható [34,36]. A mi esetünkben azonban a térfogat nagyon kis tartományban változott, így ez a fajta analízis nem volt eredményes.

Érdemes viszont megvizsgálni, hogy az egyes állapotokban az  $O_1 - O_5$  operátorok milyen arányban szerepelnek. Ehhez oly módon normáltuk az operátorokat, hogy azon  $t$ -re, amelynél a (3.35) diagonalizációt elvégeztük,  $C_{ii}(t) = 1$  legyen. Ekkor az általánosított sajátértékprobléma megoldásaként kapott normált sajátvektorok adják meg, hogy az adott állapothoz tartozó (3.30) lineáris kombinációban melyik operátor milyen  $v_{O_i}$  együttthatóval vesz részt. Ezen együttthatók abszolútértékeit a 3.6. és 3.7. táblázatok foglalják össze. Látható, hogy az egyes állapotokban a különböző operátorok járuléka nem függ lényegesen a kvarktömegektől.

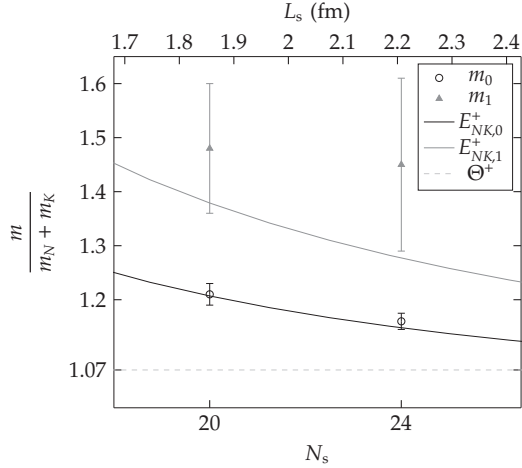




3.4. ábra. A negatív paritású csatornában a legalacsonyabb két állapot mért tömege, és a legelső két  $N - K$  szórási állapot energiája a dobozméret (rácsméret) függvényében a  $\kappa_{u,d} = 0.1550$  esetben. A szaggatott vonal a  $\Theta^+$  pentakvarknak a kísérleti várakozások szerinti helyét mutatja.

$N_s$	$\kappa_{u,d}$	Állapot	$ v_{O_1} $	$ v_{O_2} $	$ v_{O_3} $
24	0.1550	$m_0$	0.341(4)	0.0086(72)	0.940(1)
		$m_1$	0.817(28)	0.19(12)	0.544(22)
24	0.1555	$m_0$	0.301(5)	0.017(11)	0.953(2)
		$m_1$	0.829(12)	0.161(88)	0.536(8)
24	0.1558	$m_0$	0.282(26)	0.023(17)	0.959(8)
		$m_1$	0.820(22)	0.23(16)	0.525(29)
24	0.1563	$m_0$	0.266(13)	0.013(10)	0.964(4)
		$m_1$	0.837(12)	0.058(53)	0.544(8)
20	0.1550	$m_0$	0.142(6)	0.0057(42)	0.990(1)
		$m_1$	0.807(5)	0.025(21)	0.590(3)

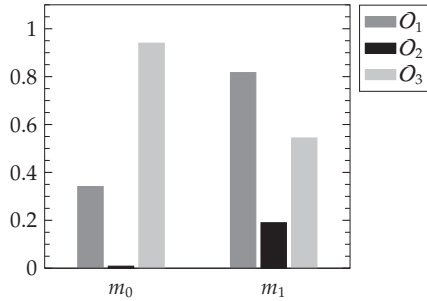
3.6. táblázat. Az egyes operátorok járuléklai a negatív paritású csatorna legelső két állapotában.



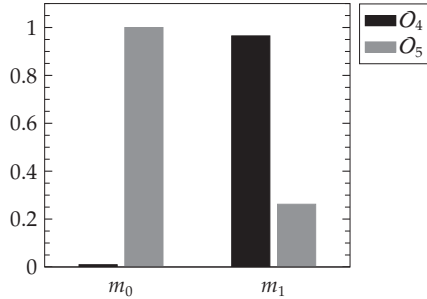
3.5. ábra. A pozitív paritású csatornában a legalacsonyabb két állapot mért tömege, és a legszűk két  $N - K$  szórási állapot energiája a dobozméret (rácsméret) függvényében a  $\kappa_{u,d} = 0.1550$  esetben. A szaggatott vonal a  $\Theta^+$  pentakvarknak a kísérleti várakozások szerinti helyét mutatja.

$N_s$	$\kappa_{u,d}$	Állapot	$ v_{O_4} $	$ v_{O_5} $
24	0.1550	$m_0$	0.0094(83)	0.99996(2)
		$m_1$	0.965(5)	0.262(18)
24	0.1555	$m_0$	0.044(38)	0.9990(7)
		$m_1$	0.959(13)	0.285(45)
24	0.1558	$m_0$	0.057(49)	0.9984(12)
		$m_1$	0.957(16)	0.291(54)
24	0.1563	$m_0$	0.135(77)	0.991(3)
		$m_1$	0.947(22)	0.322(61)
20	0.1550	$m_0$	0.047(40)	0.9989(7)
		$m_1$	0.965(11)	0.261(42)

3.7. táblázat. Az egyes operátorok járuléka a pozitív paritású csatorna legszűk két állapotában.



3.6. ábra. Az egyes operátorok járulékei a negatív paritású csatorna legkisebb tömegű két állapotában,  $\kappa_{u,d} = 0.1550$  esetén.



3.7. ábra. Az egyes operátorok járulékei a pozitív paritású csatorna legkisebb tömegű két állapotában,  $\kappa_{u,d} = 0.1550$  esetén.

Az is leolvasható, hogy a pozitív paritású csatornában, ahol a  $\Theta^+$  lenne a várható legalacsonyabb energiájú állapot, a dikvark-dikvark-antikvark típusú  $O_4$  operátor elhanyagolható járulékot ad az alapállapotba (3.7. ábra). A negatív paritású csatornában az  $O_2$  dikvark-dikvark-antikvark típusú operátor szintén kis mértékben járul hozzá a két legkisebb tömegű állapothoz (3.6. ábra). Ez is azt a képet erősíti, hogy ezek az állapotok  $N - K$  kétrészecske-állapotok.

Összegezve tehát, mindkét paritás-csatornában megtaláltuk és beazonosítottuk a  $N - K$  szórásállapotokat a  $\Theta^+$  pentakvark várható tömege fölötti energiáig bezárólag. Feltételezve, hogy az  $m_{\Theta^+}/(m_N + m_K)$  mennyiség nem függ jelentősen a kvarktömegektől, az eredményekből az állapítható meg, hogy nem találtunk a  $\Theta^+$  pentakvarkra utaló jelet.

Egy részecske nemlétezését bizonyítani azonban szinte lehetetlen feladat. Mindig fennállhat az a lehetőség, hogy a  $\Theta^+$  hullámfüggvénye olyan, amelynek elhanyagolható az

átfedése az általunk használt operátorbázissal. Már a három-kvark barionspektroszkópiában is előfordulhat az, hogy ha az állapot hullámfüggvényének nincs elegendő átfedése a kereséséhez használt operátorral, akkor az állapot nem mutatkozik [49].

Az is elképzelhető, hogy rácson a  $\Theta^+$  pentakvark csak kisebb, a fizikaihoz nagyon közeli kvarktömegek esetén létezik, vagy csak dinamikus fermionokkal készült mérték-konfigurációkon látható, vagy csak a kontinuum-határesethez jóval közelebbi rácsállandók esetén, esetleg a kimutathatóságához mindezen feltételeknek egyszerre kell teljesülnie.

### 3.6. A pentakvark helyzete ma

Jelen fejezetben vázolt eredményekkel párhuzamosan, illetve röviddel utána további rács-térelméleti munkák jelentek meg. Takahashi *et al.* [50] és Alexandrou *et al.* [51] találtak a negatív paritású csatornában a  $\Theta^+$  pentakvarkra utaló jelet, míg Lasscock *et al.* [52], Holland *et al.* [53] és Jahn *et al.* [54] nem látták a  $\Theta^+$  pentakvarkot. Lasscock *et al.* [55,56] feles spinű pentakvarkot nem, viszont  $\frac{3}{2}$  spinnel rendelkező pentakvarkot találtak a rácson.

Mindezek ellenére mostanra már a rács-térelméleti közösség konszenzusra jutott abban, hogy a pozitív eredményekben megfigyelt pentakvark állapot valójában vagy a nem elég finom rácsállandó miatti rács-effektusok következménye, vagy pedig a közeli szórás-állapotoknak egy keveréke lehetett [57].

Az elmúlt években a pentakvarkok kísérleti helyzete is nyugvópontonra tért [58,59]. A legtöbb, a pentakvark létezésére utaló pozitív eredményt későbbi, pontosabb kísérletek megcáfolták. A legjelentősebb meg nem cáfolt megfigyelés az SVD-2 kollaboráció nagy statisztikával megismételt atommag–proton ütközéseket vizsgáló kísérlete. A jelentős számú negatív eredményt figyelembe véve azonban a kísérleti részecskefizikusok körében mára már általánosan elfogadott az a vélemény, hogy a pozitív kísérletekben látott jelek nem pentakvark jelek voltak [60,61].

Mindez azonban nem jelenti azt, hogy a  $\Theta^+$  vélt felfedezése után a pentakvarkokra irányuló rács-térelméleti munkák feleslegesek lettek volna. Egyrészt világosabbá váltak a rács-térelmélet alkalmazhatóságának korlátai, másrészt felhívták a figyelmet a numerikus eredmények körültekintő interpretációjának fontosságára. Nem utolsó sorban ezen munkák során olyan új technikák fejlődtek ki a szórásállapotok és egy-hadron állapotok megkülönböztetésére, amelyek az egész rács-térelméleti spektroszkópia területnek a javára váltak.

## 4. fejezet

# Hadronspektroszkópia termodinamikai megfontolások alapján

A 3. fejezetben láttuk, hogy a rácstérelmélet segítségével történő hadronspektroszkópiának milyen fontos mozzanata az operátorok megfelelő megválasztása. Ha a keresett részecske hullámfüggvénye nem ismert, akkor még nehezebb a megfelelő operátorokat eltalálni. Szükséges volna tehát egy olyan spektroszkópiai módszer, amelynél az állapot hullámfüggvényének előzetes ismerete nélkül, pusztán a kvantumszámainak felhasználásával megkapható annak tömege. A véges sűrűségű rács-QCD kanonikus megközelítése ma már nem elérhetetlen [62–65], így lehetőség nyílik egy pusztán termodinamikai megfontolások alapján történő spektroszkópiai módszer kidolgozására.

### 4.1. A szabadenergia alacsony hőmérsékleti viselkedése

Tekintsünk egy  $K$  különböző kvark-ízt tartalmazó rendszert. Annak a szektornak, amelyben az  $i$ -edik kvarkból  $N_i$  található ( $i = 1, \dots, K$ ), a kanonikus állapotösszege  $T$  hőmérsékleten

$$Z_{N_1, \dots, N_K}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} n_k^{(N_1, \dots, N_K)} e^{-E_k^{(N_1, \dots, N_K)}/T}, \quad (4.1)$$

ahol  $E_k^{(N_1, \dots, N_K)}$  és  $n_k^{(N_1, \dots, N_K)}$  rendre az  $N_1, \dots, N_K$  kvarkszámokkal jellemzett szektor  $k$ -adik energiaszintjének energiája és multiplicitása. Ugyanezen szektor szabadenergiája

$$F_{N_1, \dots, N_K}(T) = -T \ln Z_{N_1, \dots, N_K}(T). \quad (4.2)$$

A  $(0, \dots, 0)$  kvarkszámú szektorban a legalacsonyabb energiaszint a vákuum. A vákuumról feltételezzük, hogy nemdegenerált, így a  $(0, \dots, 0)$  kvarkszámú szektor kanonikus

állapotösszege a

$$Z_{0,\dots,0}(T) = e^{-E_0^{(0,\dots,0)}/T} + \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{(0,\dots,0)} e^{-E_k^{(0,\dots,0)}/T}, \quad (4.3)$$

míg egy általános  $(N_1, \dots, N_k)$  kvarkszámú szektor kanonikus állapotösszege a

$$Z_{N_1,\dots,N_k}(T) = n_0^{(N_1,\dots,N_k)} e^{-E_0^{(N_1,\dots,N_k)}/T} + \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{(N_1,\dots,N_k)} e^{-E_k^{(N_1,\dots,N_k)}/T} \quad (4.4)$$

alakban írható. Ekkor az  $(N_1, \dots, N_k)$  kvarkszámú szektor és a nulla kvarkszámokhoz tartozó szektor szabadenergiájának különbsége

$$\begin{aligned} F_{N_1,\dots,N_k}(T) - F_{0,\dots,0}(T) &= -T \ln Z_{N_1,\dots,N_k}(T) + T \ln Z_{0,\dots,0}(T) = \\ &= -T \ln \left[ \frac{n_0^{(N_1,\dots,N_k)} e^{-E_0^{(N_1,\dots,N_k)}/T} + \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{(N_1,\dots,N_k)} e^{-E_k^{(N_1,\dots,N_k)}/T}}{e^{-E_0^{(0,\dots,0)}/T} + \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{(0,\dots,0)} e^{-E_k^{(0,\dots,0)}/T}} \right] = \\ &= -T \ln \left[ e^{-E_0^{(N_1,\dots,N_k)}/T} \cdot e^{E_0^{(0,\dots,0)}/T} \cdot n_0^{(N_1,\dots,N_k)} \cdot \frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k^{(N_1,\dots,N_k)}}{n_0^{(N_1,\dots,N_k)}} e^{-(E_k^{(N_1,\dots,N_k)} - E_0^{(N_1,\dots,N_k)})/T}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{(0,\dots,0)} e^{-(E_k^{(0,\dots,0)} - E_0^{(0,\dots,0)})/T}} \right] = \\ &= E_0^{(N_1,\dots,N_k)} - E_0^{(0,\dots,0)} - T \ln n_0^{(N_1,\dots,N_k)} - T \ln \left[ \frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k^{(N_1,\dots,N_k)}}{n_0^{(N_1,\dots,N_k)}} e^{-(E_k^{(N_1,\dots,N_k)} - E_0^{(N_1,\dots,N_k)})/T}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{(0,\dots,0)} e^{-(E_k^{(0,\dots,0)} - E_0^{(0,\dots,0)})/T}} \right]. \quad (4.5) \end{aligned}$$

Az  $(N_1, \dots, N_k)$  kvarkszám-szektor legkönnyebb részecskéjének tömege az ezen szektor és a vákuum-szektor alapállapoti energiájának különbségeként adódik.

$$m_0^{(N_1,\dots,N_k)} = E_0^{(N_1,\dots,N_k)} - E_0^{(0,\dots,0)} \quad (4.6)$$

Ha a hőmérséklet jóval alacsonyabb, mint a (4.5) képletben a szögletes zárójelben a kitevőkben előforduló energia-különbségek, akkor a (4.5) összefüggésben az utolsó tag elhanyagolható az első háromhoz képest. Ebben a hőmérséklettartományban a (4.5) szabadenergia-különbség tehát egy olyan lineáris hőmérsékletfüggést mutat,

$$F_{N_1,\dots,N_k}(T) - F_{0,\dots,0}(T) \approx m_0^{(N_1,\dots,N_k)} - T \cdot \ln n_0^{(N_1,\dots,N_k)}, \quad (4.7)$$

amelynek a  $T = 0$  tengelymetszete az  $(N_1, \dots, N_K)$  kvarkszám-szektorban található legkönnyebb részecske tömegével egyezik meg, a mereedsége pedig ezen állapot multiplicitásáról ad számot.

## 4.2. A szabadenergia meghatározása rácson

### 4.2.1. Az állapotösszegek közötti kapcsolat

Egy  $K$  különböző kvark-íz tartalmazó rendszerben jelölje rendre  $\hat{N}_i$  és  $\mu_i$  ( $i = 1, \dots, K$ ) az  $i$ -edik kvarkíz kvarkszám-operátorát és kémiai potenciálját. Ekkor a  $T$  hőmérséklethez és  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K)$  kvark kémiai potenciálokhoz tartozó nagykanonikus állapotösszeg

$$Z(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K, T) = \text{Tr} \left[ e^{-(\hat{H} - \mu_1 \hat{N}_1 - \mu_2 \hat{N}_2 - \dots - \mu_K \hat{N}_K)/T} \right]. \quad (4.8)$$

Az  $N_1, \dots, N_K$  kvarkszám értékekhez tartozó kanonikus állapotösszeg

$$Z_{N_1, \dots, N_K}(T) = \text{Tr} \left[ e^{-\hat{H}/T} \cdot \delta_{\hat{N}_1, N_1} \dots \delta_{\hat{N}_K, N_K} \right], \quad (4.9)$$

ahol  $\delta_{\hat{N}_i, N_i}$  az  $\hat{N}_i = N_i$  altérre vetítő projektor. Mivel az  $\hat{N}_i$  kvarkszám-operátorok spektrumában csak egész számok találhatóak, az adott kvarkszámú altérre vetítő projektorok a

$$\delta_{\hat{N}_i, N_i} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\hat{N}_i - N_i)\theta_i} d\theta_i \quad (4.10)$$

alakban is írhatók. Ekkor

$$\begin{aligned} Z_{N_1, \dots, N_K}(T) &= \text{Tr} \left[ e^{-\hat{H}/T} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\hat{N}_1 - N_1)\theta_1} d\theta_1 \dots \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\hat{N}_K - N_K)\theta_K} d\theta_K \right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^K} \int_0^{2\pi} d\theta_1 e^{-iN_1\theta_1} \dots \int_0^{2\pi} d\theta_K e^{-iN_K\theta_K} \text{Tr} \left[ e^{-(\hat{H} - iT\theta_1 \hat{N}_1 - \dots - iT\theta_K \hat{N}_K)/T} \right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^K} \int_0^{2\pi} d\theta_1 e^{-iN_1\theta_1} \dots \int_0^{2\pi} d\theta_K e^{-iN_K\theta_K} Z(iT\theta_1, \dots, iT\theta_K, T). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ha a nagykanonikus állapotösszegben komplex kémiai potenciál értékeket is megengedünk [66], akkor a (4.11) összefüggés alapján a kanonikus állapotösszegek tulajdonképpen a képzetes kémiai potenciáloknál vett nagykanonikus állapotösszeg Fourier-sorának együtthatói:

$$Z_{N_1, \dots, N_K}(T) = \frac{1}{(2\pi T)^K} \int_0^{2\pi T} d\mu_1 \dots \int_0^{2\pi T} d\mu_K e^{-i\mu_1 N_1/T} \dots e^{-i\mu_K N_K/T} Z(i\mu_1, \dots, i\mu_K, T), \quad (4.12)$$

$$Z(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_K, T) = \sum_{N_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{N_K=-\infty}^{\infty} Z_{N_1, \dots, N_K}(T) \cdot e^{\hat{\mu}_1 N_1/T} \dots e^{\hat{\mu}_K N_K/T}. \quad (4.13)$$

### 4.2.2. Kogut–Susskind fermionok

Egy időirányban  $N_t$  rácspontot tartalmazó,  $a$  rácsállandójú rács hőmérséklete

$$T = \frac{1}{a \cdot N_t}. \quad (4.14)$$

A képzetes kémiai potenciált pedig úgy vehetjük figyelembe [67], hogy az  $i$ -edik kvarkmező fermionmátrixában a pozitív időirányú linkeket  $e^{\hat{\mu}_i}$ -vel, a negatív időirányú linkeket  $e^{-\hat{\mu}_i}$ -vel szorozzuk meg, ahol  $\hat{\mu}_i = \mu_i a$  az  $i$ -edik kvarkmező rács-egységeken mért kémiai potenciálja.

Ha az  $i$ -edik Kogut–Susskind (staggered) kvarkmező  $n_i$  kvark-ízt ír le, melyeknek csupasz tömege  $m_i$ , akkor a staggered nagykanonikus állapotösszeg a

$$Z(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_K) = \int [dU] e^{-S_S[U]} \prod_{i=1}^K \det M(m_i, \hat{\mu}_i, U)^{n_i/4} \quad (4.15)$$

integrál segítségével számolható ki. Ezt átírva a

$$Z(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_K) = \int [dU] e^{-S_S[U]} \prod_{i=1}^K \det M(m_i, 0, U)^{n_i/4} \times \prod_{i=1}^K \left( \frac{\det M(m_i, \hat{\mu}_i, U)}{\det M(m_i, 0, U)} \right)^{n_i/4} \quad (4.16)$$

alakba látszik, hogy ha a determináns-hányadost egy fizikai mennyiségnek tekintjük [68], akkor a (4.15) integrál tulajdonképpen ennek a fizikai mennyiségnek a  $\hat{\mu}_i = 0$  kémiai potenciál értékeknél vett várható értéke és a  $\hat{\mu}_i = 0$  kémiai potenciálokhoz tartozó  $Z$  állapotösszeg szorzatával egyenlő:

$$Z(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_K) = Z \cdot \left\langle \prod_{i=1}^K \left( \frac{\det M(m_i, \hat{\mu}_i, U)}{\det M(m_i, 0, U)} \right)^{n_i/4} \right\rangle \quad (4.17)$$

Ennek következtében a (4.15) kiszámolásához elegendő a nulla kémiai potenciálnál generálni a mérték-konfigurációkat, és a determináns-hányadost mint egy fizikai mennyiséget mérni az egyes konfigurációkon. A kanonikus állapotösszegek ennek megfelelően a determináns-hányados Fourier-együtthatóinak várható értékei segítségével adódnak.

$$Z_{N_1, \dots, N_K} = Z \cdot \left\langle \prod_{i=1}^K \frac{N_t}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\hat{\mu}_i e^{-i\hat{\mu}_i N_t} \left( \frac{\det M(m_i, \hat{\mu}_i, U)}{\det M(m_i, 0, U)} \right)^{n_i/4} \right\rangle \quad (4.18)$$



Minden egyes mérték-konfiguráció esetében meg kell tehát határozni a determináns-hányados megfelelő Fourier-együtthatóját. Ehhez explicit módon ismernünk kell a  $\det M(i\hat{\mu})$  fermiondetermináns  $\hat{\mu}$ -függését. A fermiondetermináns értéke nem függ a mértékválasztástól, annak kiszámolását tetszőleges mértékben elvégezhetjük. Temporális mértékben az időirányú linkek az utolsó időszeleten lévők kivételével mind triviálisak, így temporális mértékben a fermionmátrix az

$$M(i\hat{\mu}) = \begin{pmatrix} B_0 & e^{i\hat{\mu}} & 0 & \dots & 0 & Ue^{-i\hat{\mu}} \\ -e^{-i\hat{\mu}} & B_1 & e^{i\hat{\mu}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-i\hat{\mu}} & B_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{N_t-2} & e^{i\hat{\mu}} \\ -U^\dagger e^{i\hat{\mu}} & 0 & 0 & \dots & -e^{-i\hat{\mu}} & B_{N_t-1} \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

alakot ölti. Ha a rács mindhárom tértengely irányában  $N_s$  rácspontot tartalmaz, akkor minden időszeleten  $\hat{V} = N_s^3$  rácspont található, és ekkor a (4.19) mátrix minden egyes blokkja egy  $3\hat{V} \times 3\hat{V}$ -s mátrix.  $B_l$  a staggered fermionmátrix leszűkítése az  $l$ -edik időszeletre,  $U$  pedig a mértékrögzítés után az utolsó időszeleten megmaradt időirányú  $SU(3)$  linkeket tartalmazza.

A (4.19) fermionmátrix determinánsa Gauss-elimináció segítségével a

$$\det M(i\hat{\mu}) = e^{3\hat{V}N_t i\hat{\mu}} \det(S - e^{-i\hat{\mu}N_t}) \quad (4.20)$$

alakra egyszerűsíthető, ahol

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & B_{N_t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & B_{N_t-2} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

a  $6\hat{V} \times 6\hat{V}$ -s ún. redukált fermionmátrix [69]. Ha az  $S$   $k$ -adik sajátértékét  $\lambda_k$ -val jelöljük, akkor

$$\det M(i\hat{\mu}) = e^{3\hat{V}N_t i\hat{\mu}} \prod_{k=1}^{6\hat{V}} (\lambda_k - e^{-i\hat{\mu}N_t}), \quad (4.22)$$

így a determináns-hányados a

$$\frac{\det M(i\hat{\mu})}{\det M(0)} = e^{3\hat{V}N_t i\hat{\mu}} \prod_{k=1}^{6\hat{V}} \frac{\lambda_k - e^{-i\hat{\mu}N_t}}{\lambda_k - 1} \quad (4.23)$$

alakba írható.

A  $B_l$  térszerű staggered mátrixok rendelkeznek egy

$$\gamma_5 B_l = B_l^\dagger \gamma_5 \quad (4.24)$$

$\gamma_5$ -hermiticitási tulajdonsággal, ahol a staggered esetben

$$(\gamma_5)_{xy} = \delta_{xy} \cdot (-1)^{\sum_\mu x_\mu}. \quad (4.25)$$

Ennek következtében az  $S$  redukált fermionmátrix inverzére

$$S^{-1} = (-1)^{N_t+1} \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_5 \\ \gamma_5 & 0 \end{pmatrix} S^\dagger \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_5 \\ \gamma_5 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

teljesül. Emiatt az  $S$  sajátértékei párokban fordulnak elő: ha  $\lambda$  sajátértéke  $S$ -nek, akkor  $1/\lambda^*$  is az. Így a komplex egységkörön kívül található sajátértékeknek van az egységkörön belül párjuk. Ekkor attól a nullmértékű esettől eltekintve, amikor egy vagy több sajátérték a komplex egységkörre esik, a (4.23) determináns-hányados felírható pusztán az egységkörön belül lévő sajátértékek segítségével:

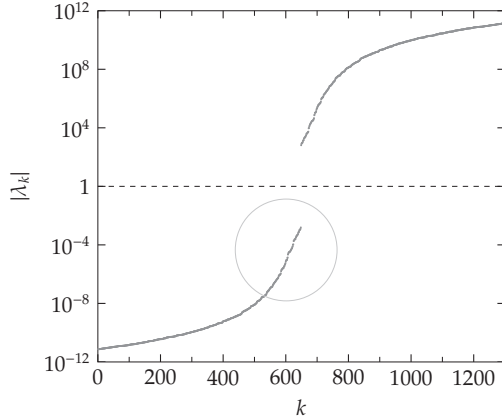
$$\frac{\det M(\hat{\mu})}{\det M(0)} = e^{3\hat{V}N_t\hat{\mu}} \prod_{\substack{1 \leq k \leq 6\hat{V} \\ |\lambda_k| < 1}} \frac{\lambda_k - e^{-i\hat{\mu}N_t}}{\lambda_k - 1} \frac{\frac{1}{\lambda_k^*} - e^{-i\hat{\mu}N_t}}{\frac{1}{\lambda_k^*} - 1} = \prod_k^* \left| \frac{1 - \lambda_k e^{i\hat{\mu}N_t}}{1 - \lambda_k} \right|^2 \quad (4.27)$$

A szorzat képzésnél, és a későbbiekben az összegzésnél a csillag azt jelenti, hogy csak a „kicsi”, azaz a komplex egységkörön belül található sajátértékeket vesszük figyelembe.

Ha a hőmérséklet a QCD királis fázisátmenetének hőmérsékletéhez képest kicsi, akkor a „kicsi” és a „nagy” sajátértékek jól elkülönülnek egymástól (4.1. ábra). A hőmérsékletet csökkentve a kis sajátértékek a hőmérséklet reciprokának exponenciálisával arányosan lesznek kisebbek, így alacsony hőmérsékleten a (4.27) determináns-hányadost, és a (4.18) egyenletben előforduló hatványait Taylor-sorba fejthetjük a kicsi sajátértékek szerint. Például (4.27)  $\alpha$ -adik hatványának sorfejtése elsőrendben:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\det M(\hat{\mu})}{\det M(0)} \right)^\alpha &= \left( \prod_k^* \left| \frac{1 - \lambda_k e^{i\hat{\mu}N_t}}{1 - \lambda_k} \right|^2 \right)^\alpha \approx \\ &\approx \left[ 1 + \alpha \sum_k^* \lambda_k + \alpha \sum_k^* \lambda_k^* \right] + e^{i\hat{\mu}N_t} \left[ -\alpha \sum_k^* \lambda_k \right] + e^{-i\hat{\mu}N_t} \left[ -\alpha \sum_k^* \lambda_k^* \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

A Taylor-sorfejtést  $n$ -ed rendig végezve az  $e^{N_t i\hat{\mu}N_t}$  exponenciálisok együtthatóit is  $n$ -ed rendig kapjuk meg, ezek azonban pontosan a keresett Fourier-együtthatók. A (4.18) egyenletben szereplő Fourier-együtthatók tehát minden mérték-konfiguráción megkap-



4.1. ábra. Az  $S$  redukált fermionmátrix sajátértékei egy tipikus  $6^3 \times 24$ -es,  $T \approx 25$  MeV hőmérsékletű staggered rács esetében. Az egységkörön belül levő és az azon kívül található sajátértékek már ezen a hőmérsékleten is jól elkülönülnek egymástól. A kanonikus állapotösszegek meghatározásakor a bekarikázott sajátértékek adják a jelentős járulékot.

hatók úgy, hogy a sorfejtésben vesszük a megfelelő exponenciális együtthatóját.

Az  $(N_1, \dots, N_K)$  szektorban a vezető rendű tag rendje  $|N_1| + \dots + |N_K|$ . Ha mindegyik staggered kvarkmező esetén  $n_i = 4$ , azaz mindegyik staggered kvarkmező 4 kvark-ízt ír le, akkor a (4.18) vezető rendű tagja

$$Z_{N_1, \dots, N_K}^{\text{LO}} = Z \cdot \left\langle \prod_{i=1}^K (-1)^{|N_i|} \sum_{1 \leq k_1^{(i)} < \dots < k_{|N_i|}^{(i)} \leq 3V} \left( \lambda_{k_1^{(i)}}^{(i)} \cdots \lambda_{k_{|N_i|}^{(i)}}^{(i)} \right)^{\star(\text{sgn } N_i)} \right\rangle, \quad (4.29)$$

ahol  $\lambda_k^{(i)}$  az  $i$ -edik kvarkmező fermionmátrixából képezett  $S^{(i)}$  redukált fermionmátrixnak a  $k$ -edik sajátértékét jelenti, a kitevőben szereplő  $\star(\text{sgn } N_i)$  pedig abban az esetben jelent komplex konjugálást, ha  $N_i$  negatív.

$Z_{N_1, \dots, N_K}$  vezető rendű tagja tetszőleges  $n_i$  számú kvark-íz esetén pedig a következőképpen kapható meg. A (4.29) egyetlenben a várható értékben szereplő képlet pusztán a

$$\begin{aligned} \sum_k^n \left( \lambda_k^{(i)} \right)^j & \quad j = 1, \dots, N_i & \quad \text{ha } N_i \text{ pozitív, és} \\ \sum_k^n \left( \lambda_k^{(i)\star} \right)^j & \quad j = 1, \dots, -N_i & \quad \text{ha } N_i \text{ negatív} \end{aligned} \quad (4.30)$$

kifejezések felhasználásával felírható a sajátértékeknek egy  $|N_1| + \dots + |N_K|$  fokszámú homogén polinomjaként. Ha ebben a polinomban végrehajtjuk a

$$\sum_k^* (\lambda_k^{(\theta)})^j \rightarrow \frac{n_i}{4} \sum_k^* (\lambda_k^{(\theta)})^j \quad \text{és} \quad \sum_k^* (\lambda_k^{(\theta^*)})^j \rightarrow \frac{n_i}{4} \sum_k^* (\lambda_k^{(\theta^*)})^j \quad (4.31)$$

cseréket, akkor az így kapott polinom várható értékeként  $Z_{N_1, \dots, N_K}$  vezető rendű tagját kapjuk.

### 4.2.3. Wilson fermionok

Ha a rácson  $K$  különböző Wilson fermionmezőt szeretnénk kezelni, oly módon, hogy az  $i$ -edik kvarkmező  $n_i$  kvark-ízt írjon le, melyeknek csupasz tömege  $m_i$ , akkor a  $\hat{\mu}_i$  rács-egységekben mért kémiai potenciálokhoz tartozó nagykanonikus állapotösszeget a (4.15) összefüggéshez hasonlóan az

$$Z(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_K) = \int [dU] e^{-S_s[U]} \prod_{i=1}^K \det M(m_i, \hat{\mu}_i, U)^{n_i} \quad (4.32)$$

integrál adja meg, ahol  $M(m_i, \hat{\mu}_i, U)$  most a Wilson fermionmátrix. A kanonikus állapotösszegek a (4.18) képlethez hasonlóan a determináns-hányados Fourier-együtthatóinak várható értékei segítségével adódnak:

$$Z_{N_1, \dots, N_K} = Z \cdot \left\langle \prod_{i=1}^K \frac{N_i}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{N_i}} d\hat{\mu}_i e^{-i\hat{\mu}_i N_i} \left( \frac{\det M(m_i, \hat{\mu}_i, U)}{\det M(m_i, 0, U)} \right)^{n_i} \right\rangle. \quad (4.33)$$

Temporális mértékben a Wilson fermionmátrix az

$$M(\hat{\mu}) = \kappa \begin{pmatrix} B_0 & (\gamma_4 - r) e^{i\hat{\mu}} & 0 & \dots & 0 & (\gamma_4 + r) e^{-i\hat{\mu}} U \\ -(\gamma_4 + r) e^{-i\hat{\mu}} & B_1 & (\gamma_4 - r) e^{i\hat{\mu}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma_4 + r) e^{-i\hat{\mu}} & B_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{N_4-2} & (\gamma_4 - r) e^{i\hat{\mu}} \\ -(\gamma_4 - r) e^{i\hat{\mu}} U^\dagger & 0 & 0 & \dots & -(\gamma_4 + r) e^{-i\hat{\mu}} & B_{N_4-1} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

alakot ölti, ahol most minden blokk egy  $12\hat{V} \times 12\hat{V}$ -s mátrix.  $B_l$  most a Wilson fermionmátrix leszűkítését jelenti az  $l$ -edik időszeletre, amely magába foglalja a clover-tagot is, amennyiben clover-taggal javított Wilson fermionokat használunk.

Ha a Wilson paraméter értékét úgy választjuk meg, hogy  $r < 1$  legyen, akkor  $(\gamma_4 - r)$  és  $(\gamma_4 + r)$  invertálható mátrixok lesznek, és ebben az esetben a staggered fermionmátrixhoz

hasonlóan explicit módon kiszámolható a fermiondetermináns  $\hat{\mu}$ -függése. Ehhez szorozzuk meg jobbról a második oszlopot  $(\gamma_4 - r)^{-1}$ -gyel, a harmadik oszlopot  $(\gamma_4 - r)^{-1}(\gamma_4 + r)$ -rel, a negyediket  $(\gamma_4 - r)^{-2}(\gamma_4 + r)$ -rel, az ötödiket  $(\gamma_4 - r)^{-2}(\gamma_4 + r)^2$ -tel, és így tovább, míg végül az  $N_t$ -edik oszlopot már  $(\gamma_4 - r)^{-N_t/2}(\gamma_4 + r)^{N_t/2-1}$ -gyel. Hasonlóképpen szorozzuk meg balról a második sort  $(\gamma_4 + r)^{-1}$ -gyel, a harmadik sort  $(\gamma_4 + r)^{-1}(\gamma_4 - r)$ -rel, a negyediket  $(\gamma_4 + r)^{-2}(\gamma_4 - r)$ -rel, az ötödiket  $(\gamma_4 + r)^{-2}(\gamma_4 - r)^2$ -tel, és így tovább, míg végül az  $N_t$ -ediket már  $(\gamma_4 + r)^{-N_t/2}(\gamma_4 - r)^{N_t/2-1}$ -gyel. A gyakorlatban előforduló számolásoknál  $N_t$  mindig páros, így joggal feltételezhetjük ezt most is.

A mátrixok, amivel a fermionmátrixot balról és jobbról megszorozgattuk, nem egységnyi determinánsúak ugyan, de a determinánsuk független  $\hat{\mu}$ -tól is és a mérték-konfigurációtól is, így a fermiondeterminánshoz egy olyan  $C_1$  konstan szorzóval járulnak hozzá, amelyik a determináns-hányadosból ki fog esni. Ekkor a fermiondetermináns a

$$\det M(\hat{\mu}) = C_1 \cdot \kappa^{12\hat{V}N_t} \cdot \det \begin{pmatrix} B'_0 & e^{i\hat{\mu}} & 0 & \dots & 0 & T e^{-i\hat{\mu}} \\ -e^{-i\hat{\mu}} & B'_1 & e^{i\hat{\mu}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-i\hat{\mu}} & B'_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B'_{N_t-2} & e^{i\hat{\mu}} \\ -T^{-1} e^{i\hat{\mu}} & 0 & 0 & \dots & -e^{-i\hat{\mu}} & B'_{N_t-1} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

alakba írható, ahol

$$\begin{aligned} T &= (\gamma_4 + r)^{N_t/2} (\gamma_4 - r)^{-N_t/2} U, \\ B'_0 &= B_0, \\ B'_1 &= (\gamma_4 + r)^{-1} B_1 (\gamma_4 - r)^{-1}, \\ B'_2 &= (\gamma_4 + r)^{-1} (\gamma_4 - r) B_2 (\gamma_4 - r)^{-1} (\gamma_4 + r), \\ B'_3 &= (\gamma_4 + r)^{-2} (\gamma_4 - r) B_3 (\gamma_4 - r)^{-2} (\gamma_4 + r), \\ B'_4 &= (\gamma_4 + r)^{-2} (\gamma_4 - r)^2 B_4 (\gamma_4 - r)^{-2} (\gamma_4 + r)^2, \\ &\vdots \\ B'_{N_t-1} &= (\gamma_4 + r)^{-N_t/2} (\gamma_4 - r)^{N_t/2-1} B_{N_t-1} (\gamma_4 - r)^{-N_t/2} (\gamma_4 + r)^{N_t/2-1}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

A (4.35) determináns már pontosan olyan alakú, mint a (4.19) staggered fermiondetermináns, így a Gauss-elimináció pontosan ugyanúgy elvégezhető. Mivel azonban most  $T$  nem egységnyi determinánsú, a fermiondeterminánshoz járul még egy,  $\hat{\mu}$ -tól független, de a mérték-konfigurációtól függő  $C_2$  szorzó:

$$\det M(\hat{\mu}) = C_2 \cdot C_1 \cdot \kappa^{12\hat{V}N_t} \cdot e^{12\hat{V}N_t i\hat{\mu}} \cdot \det (S - e^{-N_t i\hat{\mu}}), \quad (4.37)$$

ahol

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & B'_{N_t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & B'_{N_t-2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & B'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

a  $24\hat{V} \times 24\hat{V}$ -s redukált fermionmátrix. Ennek  $k$ -adik sajátértékét jelölje  $\lambda_k$ , ekkor a determináns-hányados:

$$\frac{\det M(i\hat{\mu})}{\det M(0)} = e^{12\hat{V}N_t i\hat{\mu}} \prod_{k=1}^{24\hat{V}} \frac{\lambda_k - e^{-N_t i\hat{\mu}}}{\lambda_k - 1}. \quad (4.39)$$

A  $B_j$  térszerű Wilson fermionmátrixok is rendelkeznek a (4.24)  $\gamma_5$ -hermiticitási tulajdonsággal, ebből következően a  $B'_j$  mátrixok is, továbbá  $T$  felcserélhető  $\gamma_5$ -tel, így a Wilson fermionmátrixból kapott (4.38) redukált fermionmátrixra is érvényes a (4.26) összefüggés. Ennek következtében  $S$  is rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a sajátértékei párokban fordulnak elő: ha  $\lambda$  sajátértéke  $S$ -nek, akkor  $1/\lambda^*$  is az. Tehát a determináns-hányados a Wilson fermionok esetében is a (4.27) összefüggéssel megegyező módon megadható az  $S$ -nek pusztán a komplex egységkörön belül található sajátértékei segítségével:

$$\frac{\det M(i\hat{\mu})}{\det M(0)} = \prod_k^* \left| \frac{1 - \lambda_k e^{i\hat{\mu}N_t}}{1 - \lambda_k} \right|^2, \quad (4.40)$$

és a (4.33) egyenletben szereplő Fourier-együtthatók a staggered esetben alkalmazott Taylor-sorfejtéssel meghatározhatók.

#### 4.2.4. A $Z_3$ szimmetria következményei

##### Az állapotösszegekre vonatkozó következmények

A determináns-hányados (4.27) alakú felírásából látható, hogy a nagykanonikus állapotösszeg (4.17) képletében a várható értékben szereplő kifejezés minden mérték-konfiguráción minden  $\hat{\mu}_i$ -ben  $2\pi/N_t$  szerint periodikus. Ennek következtében maga a nagykanonikus állapotösszeg is  $2\pi/N_t$  szerint periodikus minden  $\hat{\mu}_i$ -ben. Ez egyenértékű azzal, hogy a  $Z_{N_1, \dots, N_K}$  kanonikus állapotösszegek csak akkor lehetnek nullától különbözőek, ha minden  $N_i$  egész.

Az  $U$  mérték-konfiguráción végrehajthatunk egy  $Z_3$  transzformációt oly módon, hogy az utolsó időszeleten levő időirányú linkeket megszorozzuk  $\varepsilon_j = e^{2\pi i j/3}$ -mal ( $j = 0, 1, 2$ ). Az így keletkező, szintén  $SU(3)$  mérték-konfigurációt jelölje  $U^{\varepsilon_j}$ . Ekkor a nagykanonikus

állapotösszeg átírható a

$$Z(\hat{i}\hat{\mu}_1, \dots, \hat{i}\hat{\mu}_K) = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 \int [dU^{\varepsilon_j}] e^{-S_g[U^{\varepsilon_j}]} \prod_{i=1}^K \det M(m_i, \hat{i}\hat{\mu}_i, U^{\varepsilon_j})^{\alpha_i} \quad (4.41)$$

alakba, ahol staggered fermionok esetén  $\alpha_i = n_i/4$ , míg Wilson fermionok esetén  $\alpha_i = n_i$ . Mind a  $[dU]$  funkcionál-mérték, mind az  $S_g$  mérték-hatás invariáns a  $Z_3$  transzformációkra [70], így

$$\begin{aligned} Z(\hat{i}\hat{\mu}_1, \dots, \hat{i}\hat{\mu}_K) &= \int [dU] e^{-S_g[U]} \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 \prod_{i=1}^K \det M(m_i, \hat{i}\hat{\mu}_i, U^{\varepsilon_j})^{\alpha_i} = \\ &= \int [dU] e^{-S_g[U]} \prod_{i=1}^K \det M(m_i, 0, U)^{\alpha_i} \times \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 \prod_{i=1}^K \left( \frac{\det M(m_i, \hat{i}\hat{\mu}_i, U^{\varepsilon_j})^{\alpha_i}}{\det M(m_i, 0, U)^{\alpha_i}} \right) = \\ &= Z \cdot \left\langle \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 \prod_{i=1}^K \left( \frac{\det M(m_i, \hat{i}\hat{\mu}_i, U^{\varepsilon_j})^{\alpha_i}}{\det M(m_i, 0, U)^{\alpha_i}} \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Az  $U \rightarrow U^{\varepsilon_j}$  transzformáció a (4.21) és (4.38) redukált fermionmátrixokra nézve egy  $S \rightarrow \varepsilon_j \cdot S$  szorzást jelent, aminek következtében a (4.27) és (4.40) felhasználásával a (4.42) egyenletben szereplő determináns-hányados a

$$\begin{aligned} \frac{\det M(m_i, \hat{i}\hat{\mu}_i, U^{\varepsilon_j})}{\det M(m_i, 0, U)} &= \prod_k^* \left| \frac{1 - \lambda_k^{(j)} \varepsilon_j e^{i\hat{\mu}_i N_i}}{1 - \lambda_k^{(j)}} \right|^2 = \prod_k^* \left| \frac{1 - \lambda_k^{(j)} e^{i\hat{\mu}_i N_i + i\frac{2\pi}{3} j}}{1 - \lambda_k^{(j)}} \right|^2 = \\ &= \frac{\det M(m_i, \hat{i}\hat{\mu}_i + i\frac{2\pi}{3N_t}, U)}{\det M(m_i, 0, U)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

alakba írható. Ezt behelyettesítve a (4.42) egyenletbe

$$\begin{aligned} Z(\hat{i}\hat{\mu}_1, \dots, \hat{i}\hat{\mu}_K) &= \frac{1}{3} \left[ Z(\hat{i}\hat{\mu}_1, \dots, \hat{i}\hat{\mu}_K) + Z\left(\hat{i}\hat{\mu}_1 + i\frac{2\pi}{3N_t}, \dots, \hat{i}\hat{\mu}_K + i\frac{2\pi}{3N_t}\right) + \right. \\ &\quad \left. + Z\left(\hat{i}\hat{\mu}_1 + i\frac{4\pi}{3N_t}, \dots, \hat{i}\hat{\mu}_K + i\frac{4\pi}{3N_t}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.44)$$

adódik, aminek következtében

$$Z(\hat{i}\hat{\mu}_1, \dots, \hat{i}\hat{\mu}_K) = Z\left(\hat{i}\hat{\mu}_1 + i\frac{2\pi}{3N_t}, \dots, \hat{i}\hat{\mu}_K + i\frac{2\pi}{3N_t}\right). \quad (4.45)$$

Tehát a nagykanonikus állapotösszeg rendelkezik egy extra periodicitással: invariáns arra nézve, ha mindegyik kvarkmező kémiai potenciáljához  $2\pi i/3N_t$ -t hozzáadunk [66]. Ennek

következményeként csak azok a  $Z_{N_1, \dots, N_K}$  kanonikus állapotösszegek lehetnek nullától különbözőek, amelyekre az  $N_1 + \dots + N_K$  összkvarkszám osztható hárommal [64].

### A $Z_3$ szimmetria alkalmazása a sorfejtésben

Legyen  $A[U]$  egy mértékinvariáns függvénye az  $U$  mérték-konfigurációnak.  $A[U]$  várható értékét az

$$\langle A[U] \rangle = \frac{1}{Z} \int [dU] e^{-S_g[U]} A[U] \cdot \prod_{i=1}^K \det M(m_i, 0, U)^{\alpha_i} \quad (4.46)$$

integrál adja meg. A mérték-hatás és az integrációs mérték  $Z_3$ -invarianciáját felhasználva ez a várható érték átférható:

$$\begin{aligned} \langle A[U] \rangle &= \frac{1}{Z} \int [dU] e^{-S_g[U]} \prod_{i=1}^K \det M(m_i, 0, U)^{\alpha_i} \times \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 A[U^{\varepsilon_j}] \cdot \prod_{i=1}^K \left( \frac{\det M(m_i, 0, U^{\varepsilon_j})}{\det M(m_i, 0, U)} \right)^{\alpha_i} = \\ &= \left\langle \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 A[U^{\varepsilon_j}] \cdot \prod_{i=1}^K \left( \frac{\det M(m_i, 0, U^{\varepsilon_j})}{\det M(m_i, 0, U)} \right)^{\alpha_i} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.47)$$

A (4.43) összefüggést felhasználva a (4.47) egyenletben szereplő determináns-hányadosra szintén alkalmazható a kicsi sajátértékek szerinti Taylor sorfejtés.

A (4.30) alakú kifejezések mindegyike mérték-invariáns, így a kis sajátértékek szerinti sorfejtés bármelyik tagját tekinthetjük az  $A[U]$  mennyiségnek. Ilyen módon a sorfejtés minden egyes tagjának várható értékét képezhetjük a (4.47)  $Z_3$ -invariáns formát használva. Például ha egy,  $n_t$  kvark-ízt leíró staggered kvarkmezőnk van, akkor a sorfejtés elsőrendű tagjainak várható értéke vezető rendben

$$\left\langle \sum_k^* \lambda_k \right\rangle \stackrel{\text{LO}}{=} \left\langle \sum_k^* \lambda_k^* \right\rangle \stackrel{\text{LO}}{=} \left\langle -\frac{n_t}{4} \left| \sum_k^* \lambda_k \right|^2 \right\rangle. \quad (4.48)$$

A (4.47) eljárás során a  $Z_3$ -invariáns tagok nem változnak, a nem  $Z_3$ -invariáns tagok várható értékei viszont magasabb rendű,  $Z_3$ -invariáns tagok várható értékeinek összegével helyettesítődnek. A  $Z(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_K)$  nagykanonikus állapotösszeg sorfejtésében ezt rendről rendre elvégezve végül minden kvarkszám-szektor kanonikus állapotösszegét a kicsi sajátértékek egy  $Z_3$ -invariáns kombinációjának várható értékeként kapjuk meg. Például ha egy,  $n_t$  kvark-ízt leíró kvarkmezőnk van, akkor a nagykanonikus állapotösszeg  $Z_3$ -



invariáns harmadrendű sorfejtésére

$$\begin{aligned}
Z(\hat{i}\hat{\mu}) &= Z \cdot \left\langle \left( \frac{\det M(\hat{i}\hat{\mu})}{\det M(0)} \right)^\alpha \right\rangle \approx Z \cdot \left\langle 1 + \frac{\alpha}{3} \sum_k^* \lambda_k^3 - \frac{\alpha^2}{2} \left( \sum_k^* \lambda_k \right) \left( \sum_k^* \lambda_k^2 \right) + \frac{\alpha^3}{6} \left( \sum_k^* \lambda_k \right)^3 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha}{3} \sum_k^* \lambda_k^{*3} - \frac{\alpha^2}{2} \left( \sum_k^* \lambda_k^* \right) \left( \sum_k^* \lambda_k^{*2} \right) + \frac{\alpha^3}{6} \left( \sum_k^* \lambda_k^* \right)^3 \right\rangle + \\
&\quad + e^{3i\hat{\mu}N_t} \cdot Z \cdot \left\langle -\frac{\alpha}{3} \sum_k^* \lambda_k^3 + \frac{\alpha^2}{2} \left( \sum_k^* \lambda_k \right) \left( \sum_k^* \lambda_k^2 \right) - \frac{\alpha^3}{6} \left( \sum_k^* \lambda_k \right)^3 \right\rangle + \\
&\quad + e^{-3i\hat{\mu}N_t} \cdot Z \cdot \left\langle -\frac{\alpha}{3} \sum_k^* \lambda_k^{*3} + \frac{\alpha^2}{2} \left( \sum_k^* \lambda_k^* \right) \left( \sum_k^* \lambda_k^{*2} \right) - \frac{\alpha^3}{6} \left( \sum_k^* \lambda_k^* \right)^3 \right\rangle \quad (4.49)
\end{aligned}$$

adódik, ahol staggered fermionok esetén  $\alpha = n_t/4$ , Wilson fermionok esetén pedig  $\alpha = n_t$ . Ebből a kanonikus állapotösszegek harmadrendig:

$$\begin{aligned}
Z_0 &\approx Z \cdot \left\langle 1 + \frac{\alpha}{3} \sum_k^* \lambda_k^3 - \frac{\alpha^2}{2} \left( \sum_k^* \lambda_k \right) \left( \sum_k^* \lambda_k^2 \right) + \frac{\alpha^3}{6} \left( \sum_k^* \lambda_k \right)^3 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha}{3} \sum_k^* \lambda_k^{*3} - \frac{\alpha^2}{2} \left( \sum_k^* \lambda_k^* \right) \left( \sum_k^* \lambda_k^{*2} \right) + \frac{\alpha^3}{6} \left( \sum_k^* \lambda_k^* \right)^3 \right\rangle, \quad (4.50)
\end{aligned}$$

$$Z_3 \approx Z \cdot \left\langle -\frac{\alpha}{3} \sum_k^* \lambda_k^3 + \frac{\alpha^2}{2} \left( \sum_k^* \lambda_k \right) \left( \sum_k^* \lambda_k^2 \right) - \frac{\alpha^3}{6} \left( \sum_k^* \lambda_k \right)^3 \right\rangle, \quad (4.51)$$

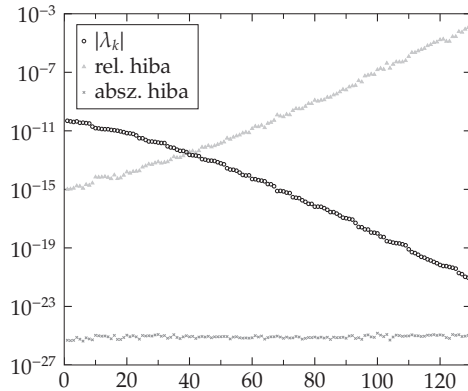
$$Z_{-3} \approx Z \cdot \left\langle -\frac{\alpha}{3} \sum_k^* \lambda_k^{*3} + \frac{\alpha^2}{2} \left( \sum_k^* \lambda_k^* \right) \left( \sum_k^* \lambda_k^{*2} \right) - \frac{\alpha^3}{6} \left( \sum_k^* \lambda_k^* \right)^3 \right\rangle, \quad (4.52)$$

a többi kvarkszám-szektor kanonikus állapotösszege pedig harmadrendig nulla.

#### 4.2.5. A lényeges sajátértékek meghatározása

Alacsony hőmérsékleteken ( $N_t \approx 50 - 100$ ) a redukált fermionmátrixnak az egységkörön belül található sajátértékei közül a legkisebb és a legnagyobb között 20–40 nagyságrend eltérés van, így a (4.29)–(4.31) képletekben levő összegzésekben jelentős járulékot a kicsi sajátértékek közül csak a legnagyobbak adnak (4.1. ábra). Mivel ezek a kanonikus állapotösszegek szempontjából releváns sajátértékek az  $S$  spektrumának a közepén találhatóak, és ilyen alacsony hőmérsékleteken  $S$  kondíciószáma a  $10^{60} - 10^{100}$  nagyságrendbe esik, a közönséges sajátértékmeghatározási módszerek nem működnek.

A redukált fermionmátrix azonban (4.26) alapján könnyen invertálható, így az  $S + S^{-1}$



4.2. ábra. A  $Q$  mátrixnak a dupla pontosságú ARPACK által meghatározott legnagyobb abszolútértékű sajátértékei, valamint azok relatív és abszolút hibája egy tipikus  $6^3 \times 100$  méretű staggered rácson.

és  $S - S^{-1}$  mátrixok is könnyen előállíthatóak. Ezeket invertálva bevezethetjük a

$$Q = \frac{1}{2} \left[ (S + S^{-1})^{-1} - (S - S^{-1})^{-1} \right] \quad (4.53)$$

mátrixot. Az  $S + S^{-1}$  és  $S - S^{-1}$  mátrixok kondíciós számának nagyságrendje kevesebb, mint fele az  $S$  kondíciós száma nagyságrendjének, így ezek kezeléséhez jóval kisebb számábrázolási pontosság elegendő.

Ha  $\lambda$  sajátértéke az  $S$ -nek, akkor  $\lambda/(1 - \lambda^4)$  a  $Q$ -nak sajátértéke. Ha  $\lambda$  egy kicsi sajátértéke  $S$ -nek, akkor  $|\lambda^4| \ll 1$ , így a számolásokban lényegtelen, hogy  $\lambda/(1 - \lambda^4)$ -t használunk vagy  $\lambda$ -t. Ha viszont  $\lambda$  egy nagy sajátértéke  $S$ -nek, akkor  $\lambda/(1 - \lambda^4) \approx -1/\lambda^3$ , ami elhanyagolható a releváns kicsi sajátértékek mellett. Tehát  $S$ -nek a kanonikus állapotösszegek szempontjából lényeges sajátértékei a  $Q$  legnagyobb abszolútértékű sajátértékei lesznek.

A lényeges sajátértékek meghatározása tehát a következőképpen történik. Temporális mértékrögzítést hajtunk végre, majd előállítjuk a  $B_i$  térszerű fermionmátrixokat. Az  $S$  és  $S^{-1}$  mátrixok kondíciós száma azonban nagyon nagy, így ezek előállítása már nagy számábrázolási pontosságban kell, hogy történjen. Az  $S$  és  $S^{-1}$  mátrixok (4.21) vagy (4.38), valamint (4.26) alapján történő megkonstruálása után  $S + S^{-1}$  és  $S - S^{-1}$  invertálásával megkapjuk a  $Q$  mátrixot. Miután a  $Q$  mátrixot nagy számábrázolási pontosságot használva előállítottuk, a legnagyobb 10 nagyságrendbe eső sajátértékeinek megtalálásához már dupla pontosság is elegendő (4.2. ábra), így a legnagyobb abszolútértékű sajátértékek megkeresése a dupla pontosságú ARPACK függvénykönyvtár [71] segítségével történik.

## 4.3. A spektroszkópiai módszer alkalmazhatósága

### 4.3.1. A módszer korlátai

A 4.1. és 4.2. szakaszokban ismertetett módszerrel elméletileg tetszőleges kvarkszám-szektorban meghatározható a legkisebb tömegű részecske tömege. Például a proton tömegét a következőképpen határozhatjuk meg. Vegyünk egy  $n_u = 1$  kvark-ízt leíró kvarkmezőt az  $u$  kvarkok számára, és egy  $n_d = 1$  kvark-ízt leíró kvarkmezőt az  $d$  kvarkok számára. A harmadik könnyű kvarkot, az  $s$  kvarkot az egyszerűség kedvéért most elhagyjuk, az eredményben nem hoz lényeges változást. A proton a legkisebb tömegű részecske az  $N_u = 2, N_d = 1$  kvarkszám-szektorban, így a tömegét a (4.7) összefüggésnek megfelelően az

$$F_{N_u=2, N_d=1}(T) - F_{N_u=0, N_d=0}(T) = -T \ln \left( \frac{Z_{2,1}(T)}{Z_{0,0}(T)} \right) \quad (4.54)$$

szabadenergia-különbség nulla hőmérsékleti határesetre adja meg. Legyen  $\alpha = 1/4$ , ha staggered fermionokkal dolgozunk, és  $\alpha = 1$ , ha Wilson fermionokkal. Ekkor a (4.54) egyenletben szereplő kanonikus állapotösszegek  $Z_3$ -invariáns sorfejtése vezető rendben

$$\begin{aligned} Z_{2,1} &\stackrel{\text{LO}}{=} Z \cdot \left\langle \frac{\alpha^2}{2} \left( \sum_k^* \lambda_k^{(u)2} \right) \left( \sum_k^* \lambda_k^{(d)} \right) - \frac{\alpha^3}{2} \left( \sum_k^* \lambda_k^{(u)} \right)^2 \left( \sum_k^* \lambda_k^{(d)} \right) \right\rangle, \\ Z_{0,0} &\stackrel{\text{LO}}{=} Z \cdot \langle 1 \rangle. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Ha a hőmérséklettel közelítünk a nullához, a sajátértékek egyre kisebbek lesznek, így egyre inkább csak a vezető rendű tag fog számítani. Tehát a protontömeg

$$am_p = \lim_{N_t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{N_t} \ln \left( \frac{\alpha^2}{2} \left( \sum_k^* \lambda_k^{(u)2} \right) \left( \sum_k^* \lambda_k^{(d)} \right) - \frac{\alpha^3}{2} \left( \sum_k^* \lambda_k^{(u)} \right)^2 \left( \sum_k^* \lambda_k^{(d)} \right) \right) \right]. \quad (4.56)$$

Hasonló módon kaphatók meg a magasabb barionszámú szektorokban levő legkisebb tömegű részecskék tömegét megadó képletek is, amelyek elméletileg akár a több-barionos állapotok kötési energiájának meghatározására is használhatóak.

A módszer elméleti szépsége ellenére a gyakorlati megvalósítása során nehézségekbe ütközünk. Ugyanis az a kifejezés, amelyik a protontömeget megadó (4.56) összefüggésben a várható értékben szerepel, egy tetszőleges fázisú komplex szám lehet. Emiatt az átlagolás során nagy kiejtések történnek: az átlaga sokkal kisebb, mint az értéke egy tipikus mérték-konfiguráción. Egy  $T \approx 25$  MeV hőmérsékletű,  $6^3 \times 24$ -es staggered szimuláció esetében egy tipikus mérték-konfiguráción ez az érték  $10^{-10}$  nagyságrendű, míg a várható értékének a nagyságrendje a várakozások szerint  $10^{-20}$ . Ez azt jelenti, hogy a helyes eredményhez  $10^{20}$  nagyságrendű konfigurációs szám volna szükséges. Ez viszont kivitelezhetetlen. Ha a

$T \rightarrow 0$  határesethez közelebb kerülés céljából csökkentjük a hőmérsékletet, a helyzet csak rosszabbodik.

### 4.3.2. Piontömeg meghatározása

Az előző alszakaszban tárgyalt előjelprobléma azonban nem merül fel, amennyiben  $n_d = n_u$ ,  $m_d = m_u$  és az  $N_d = -N_u$  szektorok valamelyikére vagyunk kíváncsiak. Ezen szektorokat egyetlen

$$I_3 = \frac{N_u - N_d}{2} \quad (4.57)$$

paraméterrel, az izospin harmadik komponensével jellemezhetjük. Az  $u$  és  $d$  kvarktömegek egyenlősége következtében minden  $k$ -ra  $\lambda_k^{(u)} = \lambda_k^{(d)}$ , ezért helyettük egyszerűen  $\lambda_k$ -t írunk. Legyen  $\alpha = n_u/4 = n_d/4$ , ha staggered fermionokkal dolgozunk, és  $\alpha = n_u = n_d$ , ha Wilson fermionokkal.

Az  $I_3 = 1$  szektor kanonikus állapotösszege vezető rendben

$$Z_{I_3=1} \stackrel{\text{LO}}{=} Z_{N_u=1, N_d=-1} \stackrel{\text{LO}}{=} Z \cdot \left\langle \alpha^2 \left| \sum_k^* \lambda_k \right|^2 \right\rangle, \quad (4.58)$$

ami a sajátértékek egy szembeszökően pozitív polinomjának a várható értéke. Így ez a várható érték problémamentesen meghatározható, és a

$$am_{I_3=1, \pi} = \lim_{N_t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{N_t} \ln \left\langle \alpha^2 \left| \sum_k^* \lambda_k \right|^2 \right\rangle \right] \quad (4.59)$$

nulla hőmérsékleti határeset megadja az  $I_3 = 1$  szektor legkisebb tömegű részecskéjének, a Goldstone-pionnak a tömegét.

A magasabb  $I_3$  csatornák legkisebb tömegű állapotának tömegére ehhez hasonlóan kaphatunk numerikusan kiszámolható képleteket. Ezek már valóban használhatóak pion-pion szórás vagy több-pion állapotok vizsgálatára.

## 4.4. Kapcsolat korábbi eredményekkel

P. E. Gibbs a staggered fermionmátrixot időirányban megsokszorozott rácson invertálva vizsgálta a legkisebb tömegű hadronállapot, a Goldstone-pion exponenciális lecsengését [72]. Megállapította, hogy az exponenciális lecsengést az általa bevezetett  $P$  propagátormátrixnak a komplex egységkörhöz legközelebb eső sajátértékei dominálják,

így minden egyes konfiguráción a piontömegre az

$$am_\pi = \min_{|z_{k,l}| > 1} \ln |z_{k,l}|^2 \quad (4.60)$$

összefüggéshez jutott. Itt  $z_{k,l}$  ( $k = 1, \dots, 6\hat{V}$  és  $l = 1, \dots, N_t$ ) a

$$P = \begin{pmatrix} -BU & 1 \\ -U^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

$6\hat{V}N_t \times 6\hat{V}N_t$ -s propagátormátrix sajátértékeit jelöli, ahol  $B$  a staggered fermionmátrixnak a térszerű részeit tartalmazza,  $U$  pedig az időirányú részeit foglalja magába.

A  $P$  propagátormátrix  $z_{k,l}$  sajátértékei és a (4.21) összefüggéssel megadott  $S$  redukált staggered fermionmátrix  $\lambda_k$  sajátértékei között fennáll a

$$\begin{aligned} \lambda_k &= (z_{k,l})^{N_t} \\ z_{k,l} &= \sqrt[N_t]{\lambda_k} \cdot e^{i\frac{2\pi l}{N_t}} \end{aligned} \quad l = 1, \dots, N_t \quad k = 1, \dots, 6\hat{V} \quad (4.62)$$

összefüggés, így a 4.1. és 4.2. szakaszokban ismertetett általános módszer megválaszolja Gibbs [72] cikkében feltett kérdést: milyen összefüggés fedezhető fel a hadronspektrum és a propagátormátrix sajátértékei között?

A (4.62) összefüggést felhasználva, és figyelembe véve, hogy  $S$  sajátértékei  $\lambda_k \leftrightarrow 1/\lambda_k^*$  párokban fordulnak elő, Gibbs (4.60) eredménye az

$$am_\pi = -\frac{1}{N_t} \cdot \ln \left( \max_{|\lambda_k| < 1} |\lambda_k|^2 \right) \quad (4.63)$$

alakba írható. Ezt összevethetjük a Goldstone-pionra kapott (4.59) eredményünkkel. Ha  $N_t$  elegendően nagy, akkor a (4.59) képletben a logaritmust elvégezve az  $\alpha^2$  szorzó elhanyagolható járulékot ad az összeg mellett. Továbbá ha a rács időirányú mérete jóval nagyobb, mint a térirányú mérete, akkor az összeget a kis sajátértékek közül a legnagyobb fogja dominálni. Ebben az esetben a (4.59) és (4.63) képletek az egyes mérték-konfigurációkon körülbelül ugyanazt az eredményt adják. A (4.59) összefüggés azonban a teljes sokaságra vonatkozó eredményt megadja, míg (4.63) csak az egyes mérték-konfigurációkra vonatkozik, a sokaságtól elvégzésének módjáról nem ad felvilágosítást.

## 4.5. Numerikus eredmények

A 4.1. és 4.2. szakaszokban leírt módszer numerikus számolásokkal tesztelhető: a (4.59) összefüggés alapján mérhető az  $I_3 = 1$  csatorna legalacsonyabb energiájú állapotának tö-

	$n_t = 2$	$n_t = 4$	$n_t = 8$
$\beta$	4.8	4.3	3.8
$a$	0.41 fm	0.42 fm	0.44 fm
$am_q$	0.04	0.04	0.04
$N_s$	6	6	6
$N_t = 1/aT$	50,100,200,300	50,100,200,300	100,200

4.1. táblázat. A numerikus számolások paramétereit.

$1/aT$	Konfigurációk száma		
	$n_t = 2$	$n_t = 4$	$n_t = 8$
50	331	322	–
100	1196	935	701
200	323	605	467
300	168	255	–

4.2. táblázat. A különböző számolásokban használt mérték-konfigurációk száma.

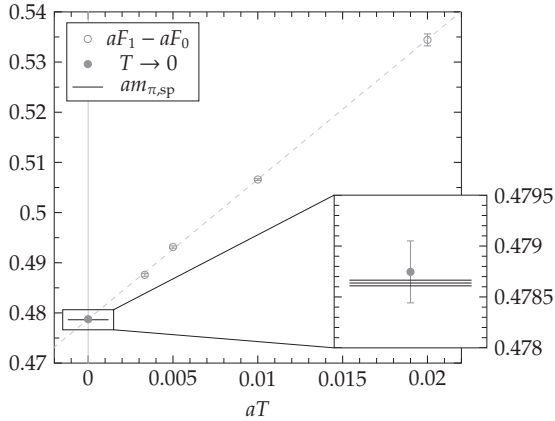
mege, majd az összehasonlítható a Goldstone-pionnak a hagyományos spektroszkópiai módszerrel kapott tömegével. Ebből a célból staggered fermionokat, mérték-hatásként pedig a Wilson plakett-hatást használva végeztünk numerikus számolásokat. Hogy vizsgálhassuk a staggered gyökvonás esetleges hatását az eredményre, az  $n_t = 2$  ( $n_u = n_d = 1$ ) számolásokon kívül  $n_t = 4$  ( $n_u = n_d = 2$ ) és  $n_t = 8$  ( $n_u = n_d = 4$ ) számolásokat is végeztünk.

A számolások során használt  $\beta$  csatolási állandót,  $a$  rácsállandót,  $m_u = m_d = m_q$  csupasz kvarktömeget, valamint az  $N_s$  és  $N_t$  rácsméreteket a 4.1. táblázat tartalmazza. A rácsállandót a  $\sigma = (465 \text{ MeV})^2$  [9] hírfeszültség segítségével határoztuk meg. A számolásokhoz használt mérték-konfigurációk száma a 4.2 táblázatban található.

A futások során mértük az  $aF_{I_3=1} - aF_{I_3=0}$  szabadenergia-különbségeket, majd (4.7) alap-

$1/aT$	$aF_{I_3=1} - aF_{I_3=0}$		
	$n_t = 2$	$n_t = 4$	$n_t = 8$
50	0.5344(12)	0.4971(12)	–
100	0.5066(2)	0.4826(4)	0.4639(4)
200	0.4931(2)	0.4760(1)	0.4641(3)
300	0.4876(3)	0.4730(3)	–
$\rightarrow \infty$	0.4787(3)	0.4688(3)	0.4643(7)
$am_{\pi,sp}$	0.47864(3)	0.46903(4)	0.46426(3)

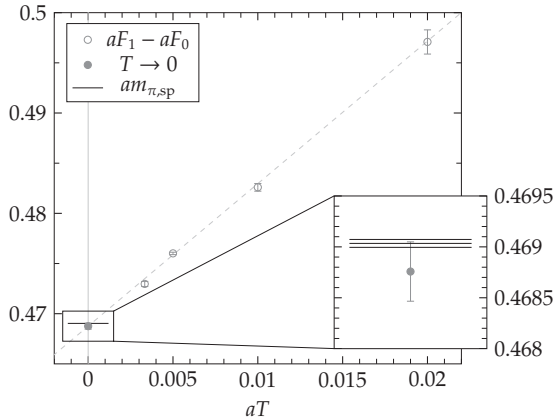
4.3. táblázat. A különböző számolások során mért szabadenergia-különbségek, azok  $T \rightarrow 0$  extrapolált értéke, valamint a hagyományos spektroszkópiával kapott piontömeg.



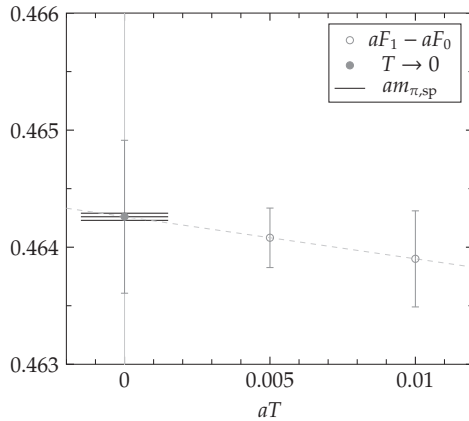
4.3. ábra. Az  $n_l = 2$  esetben mért szabadenergia-különbségek a hőmérséklet függvényében. A szaggatott vonal az illesztett egyenest mutatja. A  $T \rightarrow 0$  tengelymetszetet a spektroszkópiai piontömegeg összehasonlítva látható.

ján ezekre egyenest illesztve az egyenesek  $T = 0$  tengelymetszeteként kaptuk meg az  $I_3 = 1$  szektorban levő legalacsonyabb tömeget (4.3. táblázat). Ugyanezekben a konfigurációkon a hagyományos spektroszkópiai módszerrel megmértük az  $m_{\pi,sp}$  piontömeget is, majd összehasonlítottuk a  $T = 0$  tengelymetszetekkel. A mért szabadenergia-különbségek, az illesztett egyenesek, valamint a nulla hőmérsékleti extrapolált értékek a 4.3., 4.4. és 4.5. ábrákon láthatók.

A 4.3., 4.4. és 4.5. ábrák alapján látható, hogy függetlenül attól, hogy szükség volt-e a staggered számolásokban gyökvonásra, az  $I_3 = 1$  szektor alapállapotú energiája hibán belül megegyezik a hagyományos spektroszkópiával kapott piontömegeg. A numerikus számolás tehát alátámasztja, hogy a (4.59) összefüggés a gyakorlatban is használható a piontömeg meghatározására.



4.4. ábra. Az  $n_f = 4$  esetben mért szabadenergia-különbségek a hőmérséklet függvényében. A szaggatott vonal az illesztett egyenest mutatja. A  $T \rightarrow 0$  tengelymetszet a spektroszkópiai piontömeget összehasonlítva látható.



4.5. ábra. Az  $n_f = 8$  esetben mért szabadenergia-különbségek a hőmérséklet függvényében. A szaggatott vonal az illesztett egyenest mutatja. A  $T \rightarrow 0$  tengelymetszet a spektroszkópiai piontömeget összehasonlítva látható.



## 5. fejezet

# Összefoglalás

A doktori értekezésemben a rácstérelméletben használható, különböző spektroszkópiai módszerekkel foglalkoztam. A rács-kvantumszíndinamika alapjainak ismertetése után összefoglaltam az értekezésben bemutatott munka előtti, a  $\Theta^+$  pentakvarkkal kapcsolatos rácstérelméleti eredményeket. Mivel az irodalomban fellelhető, a pentakvark hullámfüggvényére vonatkozó javaslatok egy része nem valósítható meg triviális térbeli szerkezettel rendelkező operátorokkal, a számolásokhoz nemtriviális térbeli elrendezésű operátorokat használtunk. Az operátorok általános szerkezetének ismertetése után bemutattam, hogy milyen módon állítottam elő ezeket a megfelelő spinnel rendelkező, nemtriviális térbeli szerkezettel rendelkező operátorokat. Ezen operátorbázist használva a  $\Theta^+$  várható tömege fölötti első szórásállapotig bezárólag mind a negatív, mind a pozitív paritású csatornában megtaláltuk a nukleon–kaon ( $N - K$ ) szórásállapotokat, a  $\Theta^+$  pentakvarkra utaló jelet azonban nem találtunk. Megvizsgáltuk azt is, hogy melyik operátor milyen mértékben járul hozzá az egyes állapotok hullámfüggvényéhez, és azt láttuk, hogy mindkét paritás-csatornában a  $\Theta^+$  várható tömege környékén levő állapotokban a  $N - K$  típusú operátorok dominálnak, nem pedig a dikvark-dikvark-antikvark jellegűek. Ez tovább erősíti azt a képet, hogy a megtalált állapotok  $N - K$  szórásállapotok.

Figyelembe véve, hogy a spektroszkópiában az egyik legnehezebb mozzanat a keresett részecske hullámfüggvényének leginkább megfelelő operátor megtalálása, javasoltunk egy pusztán termodinamikai megfontolásokon alapuló hadronspektroszkópiai módszert. A módszer azon alapul, hogy a kanonikus állapotösszegek alacsony hőmérsékleti viselkedéséből a legalacsonyabb energiájú állapot tömege kinyerhető. A kanonikus állapotösszegeket előállítottam a redukált fermionmátrixnak a komplex egységkör belsejében levő sajátértékei szerinti Taylor-sorfejtés alakjában. Ezek után adtam egy robusztus módszert ezen releváns sajátértékek numerikus meghatározására. A bemutatott spektroszkópiai módszer használhatósága meglehetősen korlátozottnak adódott, a különböző izospin-szektorok alapállapot energiájának meghatározására viszont alkalmasnak bizo-

nyult. Numerikus számolásokat végezve demonstráltam, hogy a pusztán termodinamikai megfontolások alapján kapott Goldston-pion tömeg megegyezik az euklideszi korrelátoron alapuló spektroszkópai módszerrel kapottal.

# Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok témavezetőmnek, Fodor Zoltánnak a témavezetői munkájáért, az általa nyújtott rengeteg segítségért, a folytonos támogatásért és buzdításért, a szakmai tanácsokért, és a vele való közös munka lehetőségéért.

Köszönettel tartozom Katz Sándornak és Kovács Tamásnak a tőlük kapott bátorításokért, az inspiratív konzultációkért. Hálás vagyok Szabó Kálmánnak mind a fizikával, mind a programozással kapcsolatban nyújtott rengeteg segítségéért. Köszönettel tartozom Csikor Ferencnek az értékes konzultációkért, szakmai tanácsokért. Köszönettel tartozom továbbá Egri Győzőnek és Christian Hoelblingnek, akik segítségükkel szintén előremozdították a munkámat.

A számítások egy része az Eötvös Loránd Tudományegyetem Elméleti Fizikai Tanszékén található személyi számítógép-farmon, másik része a Wuppertali Egyetemen levő ALICEnext számítógép-rendszeren készült.

# Irodalomjegyzék

- [1] Olivier Pene, *An Introduction to lattice QCD*, 1995. [arxiv:hep-ph/9504271].
- [2] Rajan Gupta, *Introduction to lattice QCD*, 1997. [arxiv:hep-lat/9807028].
- [3] Kazuyuki Kanaya, *An introduction to finite temperature quantum chromodynamics on the lattice*, Prog. Theor. Phys. Suppl. 131:73, 1998. [arxiv:hep-lat/9804006].
- [4] Christine Davies, *Lattice QCD*, 2002. [arxiv:hep-ph/0205181].
- [5] I. Montvay & G. Munster, *Quantum fields on a lattice*, Cambridge University Press, 1994, Cambridge monographs on mathematical physics.
- [6] H. J. Rothe, *Lattice gauge theories: An Introduction*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1997.
- [7] B. Sheikholeslami & R. Wohlert, *Improved continuum limit lattice action for QCD with Wilson fermions*, Nucl. Phys. B259:572, 1985.
- [8] Christopher Michael, *The Running coupling from lattice gauge theory*, Phys. Lett. B283:103, 1992. [arxiv:hep-lat/9205010].
- [9] R. G. Edwards, Urs M. Heller & T. R. Klassen, *Accurate scale determinations for the Wilson gauge action*, Nucl. Phys. B517:377, 1998. [arxiv:hep-lat/9711003].
- [10] R. Sommer, *A New way to set the energy scale in lattice gauge theories and its applications to the static force and  $\alpha_s$  in SU(2) Yang-Mills theory*, Nucl. Phys. B411:839, 1994. [arxiv:hep-lat/9310022].
- [11] A. Gray *et al.*, *The  $\Upsilon$  spectrum and  $m_b$  from full lattice QCD*, Phys. Rev. D72:094507, 2005. [arxiv:hep-lat/0507013].
- [12] M. Chemtob, *Skyrme model of baryon octet and decuplet*, Nucl. Phys. B256:600, 1985.
- [13] Michal Praszalowicz, *SU(3) Skyrmion*, talk presented at the Cracow Workshop on Skyrmions and Anomalies, Mogilany, Poland, Feb 20-24, 1987.

- [14] Dmitri Diakonov, Victor Petrov & Maxim V. Polyakov, *Exotic anti-decuplet of baryons: Prediction from chiral solitons*, Z. Phys. A359:305, 1997. [arxiv:hep-ph/9703373].
- [15] T. Nakano *et al.*, *Evidence for Narrow  $S = +1$  Baryon Resonance in Photo-production from Neutron*, Phys. Rev. Lett. 91:012002, 2003. [arxiv:hep-ex/0301020].
- [16] V. V. Barmin *et al.*, *Observation of a baryon resonance with positive strangeness in  $K^+$  collisions with Xe nuclei*, Phys. Atom. Nucl. 66:1715, 2003. [arxiv:hep-ex/0304040].
- [17] S. Stepanyan *et al.*, *Observation of an exotic  $S = +1$  baryon in exclusive photoproduction from the deuteron*, Phys. Rev. Lett. 91:252001, 2003. [arxiv:hep-ex/0307018].
- [18] J. Barth *et al.*, *Evidence for the positive-strangeness pentaquark  $\Theta^+$  in photoproduction with the SAPHIR detector at ELSA*, Phys. Lett. B572:127, 2003. [arxiv:hep-ex/0307083].
- [19] C. Alt *et al.*, *Observation of an Exotic  $S = -2$ ,  $Q = -2$  Baryon Resonance in Proton-Proton Collisions at the CERN SPS*, Phys. Rev. Lett. 92:042003, 2004. [arxiv:hep-ex/0310014].
- [20] D. Strottman, *Multi-Quark Baryons and the MIT Bag Model*, Phys. Rev. D20:748, 1979.
- [21] Robert L. Jaffe & Frank Wilczek, *Diquarks and exotic spectroscopy*, Phys. Rev. Lett. 91:232003, 2003. [arxiv:hep-ph/0307341].
- [22] Robert Jaffe & Frank Wilczek, *Systematics of exotic cascade decays*, Phys. Rev. D69:114017, 2004. [arxiv:hep-ph/0312369].
- [23] Marek Karliner & Harry J. Lipkin, *A Diquark-Triquark Model for the KN Pentaquark*, Phys. Lett. B575:249, 2003. [arxiv:hep-ph/0402260].
- [24] Marek Karliner & Harry J. Lipkin, *The narrow width of the  $\Theta^+$ : A possible explanation*, Phys. Lett. B586:303, 2004. [arxiv:hep-ph/0401072].
- [25] Shi-Lin Zhu, *Understanding pentaquark states in QCD*, Phys. Rev. Lett. 91:232002, 2003. [arxiv:hep-ph/0307345].
- [26] Jun Sugiyama, Takumi Doi & Makoto Oka, *Penta-quark baryon from the QCD sum rule*, Phys. Lett. B581:167, 2004. [arxiv:hep-ph/0309271].
- [27] Nissan Itzhaki, Igor R. Klebanov, Peter Ouyang & Leonardo Rastelli, *Is  $\Theta^+(1540)$  a kaon Skyrmion resonance?*, Nucl. Phys. B684:264, 2004. [arxiv:hep-ph/0309305].
- [28] Felipe J. Llanes-Estrada, E. Oset & V. Mateu, *Is the  $\Theta^+$  a  $K\pi N$  bound state?*, Phys. Rev. C69:055203, 2004. [arxiv:nucl-th/0311020].

- [29] F. Csikor, Z. Fodor, S. D. Katz, T. G. Kovacs & B. C. Toth, *A comprehensive search for the  $\Theta^+$  pentaquark on the lattice*, Phys. Rev. D73:034506, 2006. [arxiv:hep-lat/0503012].
- [30] F. Csikor, Z. Fodor, S. D. Katz & T. G. Kovacs, *The status of pentaquark spectroscopy on the lattice*, 2004. [arxiv:hep-lat/0407033].
- [31] S. Sasaki, *Highlights of pentaquark spectroscopy from lattice calculations*, Nucl. Phys. A752:165, 2005.
- [32] F. Csikor, Z. Fodor, S. D. Katz & T. G. Kovacs, *Pentaquark hadrons from lattice QCD*, JHEP 11:070, 2003. [arxiv:hep-lat/0309090].
- [33] Shoichi Sasaki, *Lattice study of exotic  $S = +1$  baryon*, Phys. Rev. Lett. 93:152001, 2004. [arxiv:hep-lat/0310014].
- [34] N. Mathur *et al.*, *A study of pentaquarks on the lattice with overlap fermions*, Phys. Rev. D70:074508, 2004. [arxiv:hep-ph/0406196].
- [35] N. Ishii *et al.*, *Penta-quark baryon in anisotropic lattice QCD*, Phys. Rev. D71:034001, 2005. [arxiv:hep-lat/0408030].
- [36] Toru T. Takahashi, T. Umeda, T. Onogi & T. Kunihiro, *Lattice QCD study of the pentaquark baryons*, 2004. [arxiv:hep-lat/0410025].
- [37] C. Alexandrou, G. Koutsou & A. Tsapalis, *The pentaquark potential, mass and density-density correlator*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 140:275, 2005. [arxiv:hep-lat/0409065].
- [38] Ting-Wai Chiu & Tung-Han Hsieh, *A study of  $\Theta^+$  ( $udud\bar{s}$ ) in lattice QCD with exact chiral symmetry*, Phys. Rev. D72:034505, 2005. [arxiv:hep-ph/0403020].
- [39] Tommy Burch *et al.*, *Spatially improved operators for excited hadrons on the lattice*, Phys. Rev. D70:054502, 2004. [arxiv:hep-lat/0405006].
- [40] R. C. Johnson, *Angular momentum on a lattice*, Phys. Lett. B114:147, 1982.
- [41] Subhasish Basak *et al.*, *Clebsch-Gordan construction of lattice interpolating fields for excited baryons*, Phys. Rev. D72:074501, 2005. [arxiv:hep-lat/0508018].
- [42] S. Basak *et al.*, *Group-theoretical construction of extended baryon operators in lattice QCD*, Phys. Rev. D72:094506, 2005. [arxiv:hep-lat/0506029].
- [43] Wu-Ki Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific Publishing, 1985.
- [44] Colin J. Morningstar & Mike J. Peardon, *Efficient glueball simulations on anisotropic lattices*, Phys. Rev. D56:4043, 1997. [arxiv:hep-lat/9704011].

- [45] Colin J. Morningstar & Mike J. Peardon, *The glueball spectrum from an anisotropic lattice study*, Phys. Rev. D60:034509, 1999. [arxiv:hep-lat/9901004].
- [46] Christopher Michael, *Adjoint sources in lattice gauge theory*, Nucl. Phys. B259:58, 1985.
- [47] Martin Luscher & Ulli Wolff, *How to calculate the elastic scattering matrix in two-dimensional quantum field theories by numerical simulation*, Nucl. Phys. B339:222, 1990.
- [48] S. Aoki *et al.*, *Light Hadron Spectrum and Quark Masses from Quenched Lattice QCD*, Phys. Rev. D67:034503, 2003. [arxiv:hep-lat/0206009].
- [49] Shoichi Sasaki, Tom Blum & Shigemi Ohta, *A lattice study of the nucleon excited states with domain wall fermions*, Phys. Rev. D65:074503, 2002. [arxiv:hep-lat/0102010].
- [50] Toru T. Takahashi, Takashi Umeda, Tetsuya Onogi & Teiji Kunihiro, *Search for the possible  $S = +1$  pentaquark states in quenched lattice QCD*, Phys. Rev. D71:114509, 2005. [arxiv:hep-lat/0503019].
- [51] C. Alexandrou & A. Tsapalis, *A lattice study of the pentaquark state*, Phys. Rev. D73:014507, 2006. [arxiv:hep-lat/0503013].
- [52] B. G. Lasscock *et al.*, *Search for the pentaquark resonance signature in lattice QCD*, Phys. Rev. D72:014502, 2005. [arxiv:hep-lat/0503008].
- [53] Kieran Holland & K. Jimmy Juge, *Absence of evidence for pentaquarks on the lattice*, Phys. Rev. D73:074505, 2006. [arxiv:hep-lat/0504007].
- [54] O. Jahn, John W. Negele & D. Sigaev, *The quark structure of pentaquarks*, PoS LAT2005:069, 2006. [arxiv:hep-lat/0509102].
- [55] B. G. Lasscock *et al.*, *Lattice QCD studies of pentaquarks and exotics*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 153:348, 2006.
- [56] B. G. Lasscock *et al.*, *Spin 3/2 pentaquark resonance signature in lattice QCD*, Phys. Rev. D72:074507, 2005. [arxiv:hep-lat/0504015].
- [57] Abdullah Shams Bin Tariq, *Revisiting the pentaquark episode for lattice QCD*, PoS LAT2007:136, 2007. [arxiv:0711.0566].
- [58] T. Nakano, *Overview of pentaquark searches*, J. Phys. G32:S77, 2006.
- [59] Reinhard A. Schumacher, *The rise and fall of pentaquarks in experiments*, AIP Conf. Proc. 842:409, 2006. [arxiv:nucl-ex/0512042].
- [60] W. M. Yao *et al.*, *Review of particle physics*, J. Phys. G33:1019, 2006.

- [61] Claude Amsler *et al.*, *Review of particle physics*, Phys. Lett. B667:1124, 2008.
- [62] Andrei Alexandru, Manfred Faber, Ivan Horvath & Keh-Fei Liu, *Lattice QCD at finite density via a new canonical approach*, Phys. Rev. D72:114513, 2005. [arxiv:hep-lat/0507020].
- [63] Slavo Kratochvila & Philippe de Forcrand, *The canonical approach to finite density QCD*, PoS LAT2005:167, 2006. [arxiv:hep-lat/0509143].
- [64] Slavo Kratochvila & Philippe de Forcrand, *QCD at zero baryon density and the Polyakov loop paradox*, Phys. Rev. D73:114512, 2006. [arxiv:hep-lat/0602005].
- [65] Philippe de Forcrand & Slavo Kratochvila, *Finite density QCD with a canonical approach*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 153:62, 2006. [arxiv:hep-lat/0602024].
- [66] Andre Roberge & Nathan Weiss, *Gauge theories with imaginary chemical potential and the phases of QCD*, Nucl. Phys. B275:734, 1986.
- [67] P. Hasenfratz & F. Karsch, *Chemical potential on the lattice*, Phys. Lett. B125:308, 1983.
- [68] Z. Fodor & S. D. Katz, *Lattice determination of the critical point of QCD at finite  $T$  and  $\mu$* , JHEP 03:014, 2002. [arxiv:hep-lat/0106002].
- [69] A. Hasenfratz & D. Toussaint, *Canonical ensembles and nonzero density quantum chromodynamics*, Nucl. Phys. B371:539, 1992.
- [70] Nathan Weiss, *The effective potential for the order parameter of gauge theories at finite temperature*, Phys. Rev. D24:475, 1981.
- [71] R. Lehoucq, K. Maschhoff, D. Sorensen & C. Yang, *ARNoldi PACKage*, <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK/>.
- [72] P. E. Gibbs, *The fermion propagator matrix in lattice QCD*, Phys. Lett. B172:53, 1986.





# Hadronspektroszkópiai módszerek a rács-kvantumszindinamikában

Tóth Bálint

– Összefoglaló –

A doktori értekezésemben a rácsérelméletben használható, különböző spektroszkópiai módszerekkel foglalkoztam. A rács-kvantumszindinamika alapjainak ismertetése után összefoglaltam az értekezésben bemutatott munka előtti, a  $\Theta^+$  pentakvarkkal kapcsolatos rácsérelméleti eredményeket. Mivel az irodalomban fellelhető, a pentakvark hullámfüggvényére vonatkozó javaslatok egy része nem valósítható meg triviális térbeli szerkezettel rendelkező operátorokkal, a számolásokhoz nemtriviális térbeli elrendezésű operátorokat használtunk. Az operátorok általános szerkezetének ismertetése után bemutattam, hogy milyen módon állítottam elő ezeket a megfelelő spinnel rendelkező, nemtriviális térbeli szerkezettel rendelkező operátorokat. Ezen operátorbázist használva a  $\Theta^+$  várható tömege fölötti első szórásállapotig bezárólag mind a negatív, mind a pozitív paritású csatornában megtaláltuk a nukleon–kaon ( $N - K$ ) szórásállapotokat, a  $\Theta^+$  pentakvarkra utaló jelet azonban nem találtunk. Megvizsgáltuk azt is, hogy melyik operátor milyen mértékben járul hozzá az egyes állapotok hullámfüggvényéhez, és azt láttuk, hogy mindkét paritás-csatornában a  $\Theta^+$  várható tömege környékén levő állapotokban a  $N - K$  típusú operátorok dominálnak, nem pedig a dikvark-dikvark-antikvark jellegűek. Ez tovább erősíti azt a képet, hogy a megtalált állapotok  $N - K$  szórásállapotok.

Figyelembe véve, hogy a spektroszkópiában az egyik legnehezebb mozzanat a keresett részecske hullámfüggvényének leginkább megfelelő operátor megtalálása, javasoltunk egy pusztán termodinamikai megfontolásokon alapuló hadronspektroszkópiai módszert. A módszer azon alapul, hogy a kanonikus állapotösszegek alacsony hőmérsékleti viselkedéséből a legalacsonyabb energiájú állapot tömege kinyerhető. A kanonikus állapotösszegeket előállítottam a redukált fermionmátrixnak a komplex egységkör belsejében levő sajátértékei szerinti Taylor-sorfejtés alakjában. Ezek után adtam egy robusztus módszert ezen releváns sajátértékek numerikus meghatározására. A bemutatott spektroszkópiai módszer használhatósága meglehetősen korlátozottnak adódott, a különböző izospin-szektorok alapállapotú energiájának meghatározására viszont alkalmasnak bizonyult. Numerikus számolásokat végezve demonstráltam, hogy a pusztán termodinamikai megfontolások alapján kapott Goldston-pion tömeg megegyezik az euklideszi korrelátoron alapuló spektroszkópiai módszerrel kapottal.

# Hadron Spectroscopic Methods in Lattice Quantum Chromodynamics

Bálint Tóth

– Summary –

In this thesis I present different spectroscopical methods for lattice field theory. First I summarize the main elements of lattice quantum chromodynamics (QCD), then I review the results of the lattice studies of the  $\Theta^+$  pentaquark preceding the work presented in this thesis. Since some of the pentaquark wave functions suggested in the literature cannot be realized using operators with trivial spatial structure, we used extended operators for our calculations. After reviewing the general structure of the operators I present the method I used to project out spin eigenstates from these operators with extended spatial structure. Using this operator basis we managed to find all the nucleon-kaon ( $N - K$ ) scattering states up to above the expected mass of the  $\Theta^+$  pentaquark in both the negative and positive parity channels, but no sign of the  $\Theta^+$  was found. We examined the weights of the different operators in the wave functions of the given states, and showed that all the states around the expected mass of the  $\Theta^+$  are dominated by the  $N - K$  type operators instead of the diquark-diquark-antiquark type ones. This further confirms our findings that the observed states are  $N - K$  scattering states.

One of the most critical steps in lattice hadron spectroscopy is finding the operator that has the best overlap with the wave function of the particle in question. Taking this fact into account we proposed a spectroscopic method based on purely thermodynamic considerations. The method is based on the fact that the mass of the lowest state can be obtained from the low temperature behaviour of the canonical partition functions. I converted the canonical partition functions into Taylor series expansions of the eigenvalues of the reduced fermion matrix lying within the complex unit circle. Then I gave a robust method to numerically obtain these relevant eigenvalues. Although the presented method is able to give the mass of the lowest state of each isospin sector, its applicability is rather limited. I performed numerical simulations and demonstrated that the Goldstone pion mass obtained using purely thermodynamic considerations matches the mass obtained with the spectroscopical method based on Euclidean correlators.