УДК 621.791.927.7
М. Михайлишин, В. Михайлишин
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

ОПТИМІЗАЦІЯ ІНДУКЦІЙНОГО НАГРІВУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

UDC 621.791.927.7
M. Mykhailyshyn, V. Mykhailyshyn
(Ternopil I.Pulyu National Technical University, Ukraine)

OPTIMIZATION OF THE INDUCTION HEATING OF THE CYLINDER SHELLS

Для виконання деякого технологічного процесу необхідно нагріти зовнішню поверхню циліндричної оболонки до деякої заданої температури за заданий час шляхом індукційного нагріву. При симетричному поверхневому нагріві в області деталі створюються внутрішні теплові джерела, розподіл густини яких можна представити у вигляді $w(t,r) = u(t)v(r)$. Тут $u(t)$ представляє собою величину потоку активної енергії, яка може бути виділена у вигляді тепла, а функція $v(r)$ показує розподіл густини джерел за просторовою координатою r. Функція $v(r)$ як правило вважається відомою. Розглядається керований процес, який в області $Q = \{R_1 \le r \le R_2,\ 0 \le t \le \tau\}$ описується функцією $T(r,t)$, яка задовольняє всередині області рівнянню

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{\lambda}u(t)v(r), \qquad (1)$$

початковим і граничним умовам

$$T = 0 \text{ при } t = 0,\ \frac{\partial T}{\partial r} - k_1 T = 0 \text{ при } r = R_1,\ \frac{\partial T}{\partial r} + k_2 T = 0 \text{ при } r = R_2. \qquad (2)$$

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб знайти $u(t)\epsilon L_2(0,\tau)$ таку, при якій

$$T(r,\tau) = T^*(r) \qquad (3)$$

і функціонал

$$\int_0^\tau u^2(t)dt \qquad (4)$$

приймає мінімальне значення. Функція $T^*(r)$ і величина τ (час нагріву) відомі.

Використовуючи метод Фур'є розв'язок задачі знаходимо у вигляді

$$T(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(r) \int_0^t \frac{a v_k}{\lambda} e^{-a\mu_k^2(t-\tau)} u(\tau)d\tau,$$

де $\psi_k(r) = [k_2Y_0(\mu_kR_2) - \mu_kY_1(\mu_kR_2)]J_0(\mu_kr) - [k_2J_0(\mu_kR_2) - \mu_kJ_1(\mu_kR_2)](Y_0(\mu_kr) -$ власні функції задачі, μ_k –корені характеристичного рівняння

$$[k_2J_0(\mu R_2) - \mu J_1(\mu R_2)] \cdot [k_1Y_0(\mu R_1) - \mu Y_1(\mu R_1)] -$$
$$-[k_1J_0(\mu R_1) + \mu J_1(\mu R_1)] \cdot [k_2Y_0(\mu R_2) - \mu Y_1(\mu R_1)].$$

Забезпечуючи виконання умови (3), приходимо до проблеми моментів

$$\int_0^\tau u(t)e^{-a\mu_k^2(\tau-t)}\,dt = \frac{1}{\|\psi_k\|^2}\int_{R_1}^{R_2} T^*(r)(r)\,\psi_k(r)rdr. \qquad (5)$$

Будуємо функцію $u^m(t)$, яка мінімізує (4) при умовах (5). Так як експоненти в умовах (5) лінійно незалежні, то

$$u^m(t) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n e^{-a\mu_k^2(\tau-t)},$$

де постійні α_n визначаються із системи рівнянь

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k L_{kn} = \frac{1}{a(\mu_n^2 + \mu_k^2)}, \qquad L_{kn} = \int_0^\tau e^{-a(\mu_n^2+\mu_k^2)(\tau-t)}\,dt.$$