FONTS VIETIANES A L'*ARITHMETICA UNIVERSAL* (1669) DE JOSEP SARAGOSSÀ

Anna Eroles
anna.eroles@gmail.com
M. Rosa Massa-Esteve
m.rosa.massa@upc.edu
Mònica Blanco
monica.blanco@upc.edu

1.- Introducció[1].

Una de les principals novetats a les matemàtiques del segle XVII va ser l'articulació de l'àlgebra i la geometria, que alguns anomenen el procés d'algebrització de les matemàtiques[2]. En aquest procés, la creació del llenguatge simbòlic per tractar amb equacions algebraiques, construccions geomètriques i corbes és essencial. La publicació l'any 1591 de l'obra *In Artem Analyticen lsagoge* de François Viète (1540-1603) i la seva difusió van constituir un punt clau en el desenvolupament d'aquest llenguatge simbòlic a les matemàtiques. A més, Viète va introduir un nou mètode d'anàlisi (art analítica) amb una logística especiosa, que permetia plantejar i resoldre tot tipus de problemes, ja fossin aritmètics, geomètrics o trigonomètrics, mitjançant el seu nou llenguatge simbòlic[3].

Al segle XVII, a Espanya, Josep Saragossà (1627-1679), jesuïta i professor del Col·legi Imperial de Madrid, va publicar l'obra: *Arithmetica universal que comprehende el Arte Menor y Maior, Álgebra Vulgar y especiosa* (1669) (d'ara en endavant *Arithmetica*), que ja en el títol sembla fer referència a l'àlgebra

1 Aquesta recerca està inclosa en el projecte HAR2016-75871-R del Ministerio de Economıa y Competitividad español. Es basa en el treball final de grau de Matemàtiques de la Universitat Politècnica de Catalunya d'Anna Eroles Crivillé defensat el 16 de Setembre de 2019 amb la qualificació d'excel·lent. Vegeu EROLES (2019).

2 Per a més informació, vegeu MAHONEY (1980), 141-156 i MANCOSU (1996), 84-86. Les dues grans transformacions a les matemàtiques del segle XVII, la creació de l'àlgebra analítica i el germen del càlcul infinitesimal van obtenir el seu poder excepcional de l'establiment de les correspondències entre expressions algebraiques i corbes i entre operacions algebraiques i construccions geomètriques.

3 VIÈTE (1591); BOS (2001), MASSA-ESTEVE (2008) i (2012a) i OAKS (2018).

especiosa de Viète. Algunes obres de Saragossà han estat estudiades per diversos historiadors, com Patricio Peñalver i Albert Dou, que en destaquen l'excepcionalitat de l'obra matemàtica[4]. La tesi doctoral d'Eduard Recasens (1991) descriu el mètode baricèntric de Saragossà, tot analitzant la seva obra *Geometria Magna in Minimis* (1674)[5]. Més tard, Víctor Navarro Brotons ha estudiat també l'obra astronòmica de Saragossà i la seva influència en la renovació científica valenciana[6]. Tanmateix el contingut de l'*Arithmetica* de Saragossà encara no ha estat analitzat en profunditat, ni se n'ha intentat esbrinar les fonts i les novetats que introdueix.

Per tant, l'objectiu d'aquest article és aportar evidències de la introducció de l'àlgebra de Viète a Espanya, a través de l'anàlisi de l'*Arithmetica* de Saragossà. Aquesta anàlisi mostra com l'autor adapta alguns elements d'aquesta àlgebra, com empra el llenguatge simbòlic i com resol les equacions, a la vegada que es fa palesa la gran qualitat matemàtica de l'autor.

En la secció següent d'aquest article presentem de manera introductòria el context històric de l'obra dins del desenvolupament de l´àlgebra del segle XVII a Espanya. La secció 3 la dediquem exclusivament a l'autor, presentant algunes dades biogràfiques i detalls d'algunes de les seves obres publicades. Les seccions restants tracten del contingut de l'*Arithmetica*: en la secció 4 s'explica el contingut de l'obra i s'analitza el seu llenguatge simbòlic; la secció 5 se centra en l'anàlisi de la part algebraica, la idea d'àlgebra i el mètode de resolució d'equacions; la secció 6 resol alguns problemes, mostrant els seus mètodes algebraics; i, finalment, adjuntem unes reflexions sobre algunes evidències de fonts vietianes i del significat d'aquesta obra en el context de les matemàtiques a l'Espanya del segle XVII, tant pel que fa a la seva interpretació del mètode analític, com per l'ús del llenguatge simbòlic, o bé pel seu mètode de resolució d'equacions en els problemes finals.

2.- Context històric.

El desenvolupament dels procediments algebraics del segle XVI està fortament lligat a la difusió de certs textos aritmètics. Així, la publicació l'any 1494

4 PEÑALVER (1930); DOU (1990).

5 RECASENS (1991) i (1994).

6 NAVARRO BROTONS (1996).

de l'influent text de Luca Pacioli (1447-1517), *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità,* i la seva difusió tingueren un paper decisiu en la introducció de regles algebraiques per a resoldre problemes en els treballs aritmètics del segle XVI. De fet, l'obra de Pacioli tracta d'aritmètica i de geometria, i a la *Distinctio* 8 també tracta amb " la part més necessària per a la pràctica de l'aritmètica i també de la geometria dita comunament pel vulgar Art Major, o bé Regla de la Cosa o bé, Àlgebra i Almucabala"[7]. Aquesta idea és la que es va mantenir a algunes aritmètiques de l'Europa renaixentista, que van venir marcades pel pas de l'aritmètica a una mena d'àlgebra o "Art Major", on es comencen a presentar les igualtats (nosaltres diríem equacions) abreviades, i s'intensifica l'ús del simbolisme, alleugerint d'alguna manera la redacció retòrica emprada anteriorment en els textos aritmètics-algebraics de l'època[8].

A Espanya, la introducció d'aquesta "Art Major" es va donar a través de textos comercials i mercantils[9]. El primer tractat aritmètic imprès a Espanya que conté qüestions algebraiques va ser el *Libro Primero de Arithmetica Algebratica* (1552) de Marco Aurel. De les fonts analitzades que van poder influir en aquesta publicació d'Aurel, cal destacar la connexió que existeix amb el text alemany *Behend vnnd Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeincklich die Coss genennt werden* (1525) de Christoff Rudolff (1494-1543). Recentment Romero-Vallhonesta i Massa-Esteve han mostrat com Aurel es va impregnar de l'obra de Rudolff per crear i introduir aquesta primera idea d'àlgebra com "Art Major" a Espanya[10], idea que serà desenvolupada al llarg del segle XVI. De fet, es van introduir alguns procediments de resolució d'equacions, sota el nom d'"Art Major", a través de les obres d'Aurel, Juan Pérez de Moya (1513-1596) i Antic Roca (c. 1530-1580), entre d'altres. Aquestes obres, seguint les tendències europees, resolien les equacions amb 8 tipus (4 simples i 4 compostos), de grau qualsevol les simples

7 PACIOLI (1494), f. 111^{v} : "la parte maxime necessaria a la pratica de Arithmetica e anche de Geometria detta del vulgo comunemente Arte Magiore over la regola de la cosa over Algebra e Almucabala".

8 Pacioli anomena l'àlgebra, com art major (*Arte Magiore*), en referència a una art que tracta amb problemes més complicats que els de l'aritmètica, com art menor, que és més per resoldre problemes de mercaders. Vegeu MASSA-ESTEVE (2012b), 103.

9 Els textos aritmètics els podem dividir en dos grans grups en funció de les seves característiques: aritmètiques especulatives o acadèmiques, que eren textos escrits en llatí que tracten l'estudi de números i proporcions sense cap referència a l'àlgebra; o bé, aritmètiques pràctiques, que eren textos escrits en la llengua pròpia de l'entorn que tracten eines per resoldre problemes mercantils amb un característic estil directe i senzill. Vegeu SALAVERT (1994), 52.

10 ROMERO-VALLHONESTA; MASSA-ESTEVE (2018).

i amb certes condicions sobre les relacions entre els graus les compostes, i empraven lletres o paraules abreviades, sense exponents, que representaven només la incògnita[11].

A l'Europa del segle XVII el desenvolupament de l'àlgebra fou possible gràcies a la introducció d'un nou llenguatge simbòlic i del mètode analític, a través de la difusió de l'obra *In artem analyticen isagoge*, de 1591 (en endavant *Isagoge*) de Viète. L'art analítica de Viète es va desenvolupar a partir de la logística especiosa, càlculs amb "espècies", que tractava, a més, amb magnituds geomètriques, en contrast amb la logística nombrosa, càlculs només amb nombres, emprada des del Renaixement.

L'objectiu de Viète era obtenir un mètode de resolució analítica que es pogués aplicar a tots els problemes plantejats. Per explicar aquest mètode, Viète va donar-li l'enfoc de la metodologia de l'anàlisi grega. El procediment consisteix en assumir el problema resolt i allò que busquem com si fos ja admès i treballar a través de les conseqüències cap a allò que és reconegut com a vertader[12]. Aquest mètode a l'obra de Viète es desenvolupava en tres formes amb noms concrets: zetètica, porística i exegètica. La zetètica transforma la informació del problema i la presenta en forma d'igualtat (nosaltres diríem equació) tot representant les quantitats conegudes i les incògnites amb símbols o "espècies" que operen amb la suma, la diferència, el producte i la divisió, donant altres símbols com a resultat. Ens referim a "espècies" com a tipus o classes d'elements, magnituds, ja siguin numèriques, com ara els nombres naturals o racionals o geomètriques com les longituds, àrees, volums o angles. La porística consisteix en aplicar les diferents regles o teoremes ja coneguts a l'equació resultant per convertir-la en una equació en forma general o en una identitat. Per últim, la més important, l'exegètica, treballa amb l'estructura de l'equació per poder aïllar la incògnita i trobar la solució desitjada. El seu objectiu final, segons Viète, és resoldre amb aquesta art analítica tot tipus de problemes:

> *"Finalment, l'art analítica, dotada de les seves tres formes zetètica, porística i exegètica, reclama per a ell mateix la solució del problema més gran de tots*

11 Sobre l'Art major al segle XVI a Espanya, vegeu MASSA-ESTEVE (2012b). Vegeu també un estudi més extens i aprofundit sobre les aritmètiques que introdueixen l'àlgebra el segle XVI a Espanya a la tesi doctoral de ROMERO-VALLHONESTA (2018).

12 VIÈTE (1591), 4r. Cal dir que al segle XVI, algunes aritmètiques també havien començat a fer unes primeres explicacions d'aquest mètode, encara que menys acurades, vegeu ROMERO-VALLHONESTA (2018).

que és solucionar tots els problemes[13]*."*

L'obra de Viète va tenir una gran difusió a l'Europa de principis del segle XVII[14]. La resolució d'equacions es va veure transformada amb les noves expressions algebraiques de Viète, marcades pel rigor i la generalització de la seva forma. Encara que presentava mancances com l'absència del signe d'igualtat, del producte o els exponents, aquesta nova manera de tractar l'àlgebra es va anar imposant i fent comú a partir de mitjan segle XVII, tot i que aquest procés no va ser lineal ni en el temps ni en l'espai.

A Espanya, l'obra del jesuïta Saragossà, de l'any 1669, que tot seguit analitzem, mostra també algunes evidències de l'intent de l'autor d'introduir elements de l'àlgebra especiosa de Viète.

3. – Algunes dades biogràfiques de Josep Saragossà.

Josep Saragossà i Vilanova (1627-1679)[15] va néixer a Alcalà de Xivert, Castelló de la Plana, el 1627. Es va doctorar en Teologia a València, tot i que la seva gran passió era l'estudi de les matemàtiques i l'astronomia. Es va unir a la Companyia de Jesús el 1651 i al llarg de la seva vida va donar classes de retòrica, filosofia i teologia en diferents ciutats d'Espanya, com Calatayud, Mallorca, Barcelona, València i Madrid[16]. Finalment es va traslladar a Madrid per ocupar una càtedra de Matemàtiques als Reials Estudis del Col·legi Imperial, dirigit per jesuïtes, i per ajudar l'infant rei Carles II en la seva educació científica. Saragossà mor el 1679 a Madrid, un mes abans de complir els 52 anys[17].

El 1669 Saragossà publicà a València la seva obra *Arithmetica universal que*

13 "Denique fastuosum problema problematum ars Analytice, triplicem Zetetices Poristices & Exegetices formam, tàndem induta, iure sibi adrogat, Quod est, nullum non problema solvere." VIÈTE (1591), 9r.

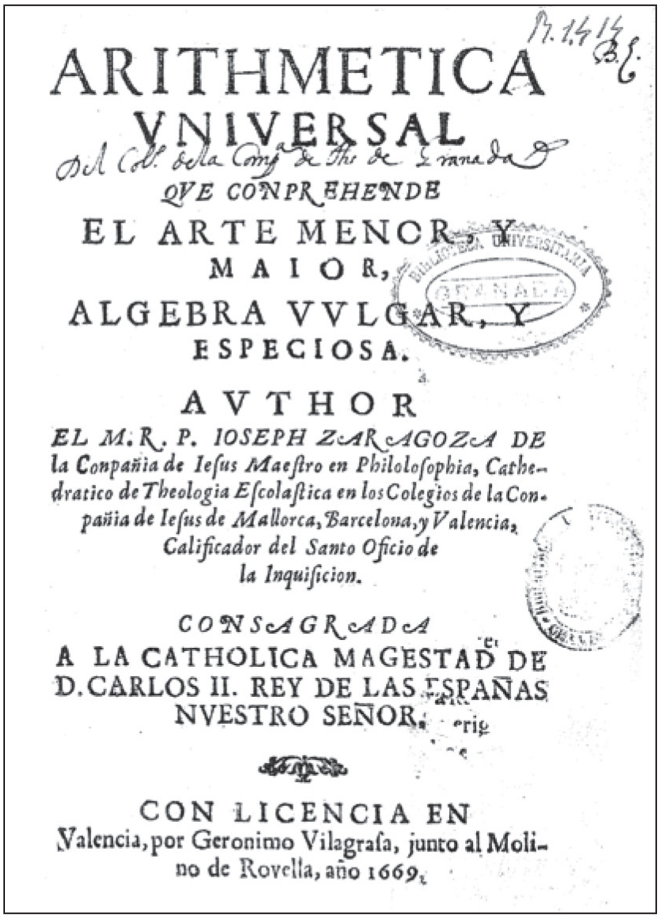
14 A França, per exemple, es va difondre a través del *Cursus Mathematicus* (1634, 1637,1642) de Pierre Hérigone (1580 – 1643), vegeu MASSA-ESTEVE (2008). També es pot citar a Itàlia, la *Geometriae Speciosae Elementa* (1659) de Pietro Mengoli (1626/7 – 1686) que empra l'àlgebra de Viète a la geometria, vegeu MASSA-ESTEVE (2006).

15 Existeixen altres referències sobre el seu nom: José Zaragoza, José de Zaragoza o José Zaragozá. Una síntesi de la trajectòria de Saragossà: NAVARRO BROTONS (2018).

16 El 1660 torna a la seva terra natal, València. A partir d'aquest moment, la trajectòria científica de Saragossà comença a créixer gràcies a les tertúlies que organitzava amb cercles de persones interessades en les matemàtiques i l'astronomia. Per a més informació, vegeu EROLES (2019), 17-18.

17 Per a més informació, vegeu RECASENS (2010).

comprehende el Arte Menor y Maior, Álgebra vulgar y especiosa (Figura 1). Al llarg del llibre s'intueixen diferents lloances a l'Àlgebra com una branca en ella mateixa, fonamentada en l'"Arte Menor" o Aritmètica, i l'"Arte Maior".


ARITHMETICA VNIVERSAL

Del Col. de la Comp. de Jhs de Granada

QVE CONPREHENDE EL ARTE MENOR, Y MAIOR, ALGEBRA VVLGAR, Y ESPECIOSA.

AVTHOR

EL M. R. P. IOSEPH ZARAGOZA DE la Conpañia de Iesus Maestro en Philolosophia, Cathedratico de Theologia Escolastica en los Colegios de la Conpañia de Iesus de Mallorca, Barcelona, y Valencia, Calificador del Santo Oficio de la Inquisicion.

CONSAGRADA A LA CATHOLICA MAGESTAD DE D. CARLOS II. REY DE LAS ESPAÑAS NVESTRO SEÑOR.

CON LICENCIA EN Valencia, por Geronimo Vilagrasa, junto al Molino de Rovella, año 1669.

Figura 1. Portada de l'*Arithmetica*

Un altre vessant de l'estudi matemàtic de Saragossà va ser la recuperació de la geometria clàssica. Així, després de la publicació de *l'Arithmetica,* Saragossà va redactar dues versions dels *Elements* d'Euclides: *Geometría especulativa y práctica de los planos y sólidos* (València, 1671) i *Euclides Nuevo-Antiguo. Geometria especulativa y práctica de los planos y sólidos* (Madrid, 1678)[18].

18 Vegeu NAVARRO LOIDI (2005). El 1672, Saragossà publica a Mallorca *Trigonometría española, resolucion de triangulos planos i esfericos. Fabrica y uso de los senos y logaritmos. Canon Trigonometricus y Tabula logarithmica,* un dels primers llibres a Espanya on s'explica què són els logaritmes, les seves propietats, la manera de calcular-los i la seva aplicació en la resolució de triangles. Vegeu NAVARRO LOIDI; LLOMBART (2008). Cal assenyalar que en aquesta obra Saragossà cita Clavius i Herigonius (suposem que es refereix a Hérigone, qui va difondre l'àlgebra de Viète). En especial, la recuperació del llibre perdut d'Apol·loni (262 – 190 a.C.) del segle III aC, *De Locis Planis* (Dels Llocs Plans), que tractava dels espais geomètrics

L'autor també va definir el concepte de "Centre mínim d'un sistema de punts geomètrics amb classes de polígons associats"[19], concepte central d'una de les seves principals obres matemàtiques, la *Geometria Magna in Minimis*, publicada el 1674 a Toledo. El 1675 va publicar *Esphera en común celeste y terráquia.* A més, aquest mateix any, Saragossà va redactar un petit i curiós llibre sobre la construcció d'instruments matemàtics, *Fabrica y uso de varios instrumentos matématicos* i en va construir alguns de senzills[20].

4. - Anàlisi de l'Arithmetica Universal.

En l'*Arithmetica* de Saragossà predomina l'ús d'una nova simbologia i un nou tractament de les equacions amb una metodologia analítica adaptada de l'anàlisi vietiana, per identificar la incògnita buscada. L'obra està estructurada en ordre creixent de complexitat: així comença presentant l'"Arte Menor", de fet l'aritmètica, del qual mantindrà l'estil per introduir l'"Arte Maior" i aquest pas li servirà com esglaó per a culminar amb la descripció de la seva àlgebra[21]. Saragossà comença citant l'àlgebra com l'esperit i ànima de la matemàtica, però, a mesura que avança el discurs, observem com lloa l'aritmètica com la branca de les matemàtiques que ocupa el primer lloc.

> *"Goza la Arithmetica el primer lugar por superior, y transcendente a todas las Mathematicas; sube por sus grados hasta la suprema cumbre[22]".*

A continuació presentem les idees de Saragossà sobre l'aritmètica i l'àlgebra a la introducció, no paginada, de l'*Arithmetica*, juntament amb una descripció de la seva estructura, i analitzem el llenguatge simbòlic que empra.

4.1.- Introducció de l'Arithmetica.

En aquesta introducció Saragossà destaca la importància de l'aritmètica

resolubles a partir de rectes i circumferències.

19 Per a més informació, vegeu RECASENS (1991, 1994).

20 Vegeu EROLES (2019), 20-22.

21 "La nobleza del Algebra busca en los Reales pies de V. Magestad su centro: y como espiritu que transciende, y anima todo el cuerpo de las Mathematicas, unidas en si las rinde todas para su mayor gloria". SARAGOSSÀ (1669), Dedicatòria. Per a més informació, vegeu EROLES (2019).

22 SARAGOSSÀ (1669), Dedicatòria.

en el cos de les matemàtiques i n'assenyala el caràcter propedèutic: obre les portes al coneixement de les matemàtiques i, a la vegada, el seu coneixement demana estendre les quantitats discretes a les contínues, com deia Viète, i aplicar l'aritmètica a altres branques de la matemàtica, com la geometria. A més, Saragossà coincideix amb Viète en la menció de Plató com el pare que descriu el camí a la veritat[23]. En les seves paraules:

> *"La Arithmetica es la primera, y ultima de las Mathematicas. Primera en orden, por ser la llave de estas sublimes ciencias, ò puerta segun Platón de las otras facultades maiores. Ultima, porque su entera noticia pide el conocimiento de todas, pues las operaciones de la Cantidad discreta, se estienden a la continua, y no ay problema Geometrico, donde no tenga su devido lugar el numero[24]".*

Més endavant, enllaça novament amb l'aplicació de l'àlgebra a la geometria i deixa explícita la profunditat i extensió que permet aquesta articulació de l'àlgebra i la geometria, que no presentarà en detall en l'*Arithmetica* per no dificultar la lectura. Tot i així, considera que hi ha suficient matèria, juntament amb altres curiositats, per a un nou llibre.

> *"**La aplicacion del Algebra à la Geometria.***
> *Se ha dexado de industria, por no hazer la obra mas ardua, y no enredar a los que estan poco versados en lineas: pero si veo que el Lector se aficiona a esta ciencia, y desea su aplicacion a todas las otras partes de la Mathematica; facilmente me reduzire a disponer este punto, que con muchas otras curiosidades, serà bastante materia para nuevo libro[25]".*

En l'inici de les seves explicacions, Saragossà divideix l'Aritmètica en dues: la menor i la major. El primer llibre de l'*Arithmetica* el dedica a l'"Arte menor", mentre que el segon se centrarà en l'aritmètica major o "Arte maior". Aquesta separació dels dos "Artes" era usual en l'època, sobretot després de Pacioli, encara que en un altre sentit. L'Art major del segle XVI, com expliquem en la secció 2, s'identifica amb l'àlgebra i amb la "Regla de la cosa" i inclou regles per a la resolució d'equacions i un simbolisme abreviat, només

23 Així, Viète, en el primer capítol de l'obra *In artem analyticen isagoge,* explica: "Hi ha una certa manera de buscar la veritat en matemàtiques que es diu que Plató va descobrir primer".VIÈTE (1591), 4.

24 SARAGOSSÀ (1669), Introducció.

25 SARAGOSSÀ (1669), Introducció. Aquest paràgraf i un altre relacionat amb els seus logaritmes són les dues evidències de la vinculació de l'àlgebra i la geometria.

per a la incògnita i per a problemes aritmètics. Per Saragossà, l'Art major resol arrels de potències numèriques, que compon resolent equacions de fins a sisè grau, la qual cosa servirà de fonament a l'àlgebra com una part independent, que es reserva per desenvolupar algunes idees de Viète. L'originalitat rau en què l'autor emfatitza la necessitat de l'aritmètica menor en l'aplicació i ús de la major i, conseqüentment, en l'àlgebra, totes tres considerades parts de la seva aritmètica universal[26]. Saragossà també reflecteix la visió analítica i el tractament dels símbols que començava a aflorar a la resta d'Europa i que havia introduït Viète[27].

> *"La maior sube a las Potestades numericas, examina sus composiciones, inquiere sus raizes, como principal fundamento del Algebra. Esta nobilisima ciencia es verdadera Analytica, que con superior artificio suponiendo un Caracter en lugar de la Cantidad continua, ò discreta incognita, llega a determinar el valor del Caracter supuesto y a resolver con el la magnitud, de que se dudaba[28]".*

Saragossà presenta l'àlgebra amb gran admiració, definint-la com divina, com el Sol i la llum de les Matemàtiques. La considera com un descobriment que aporta valor i certesa a la resolució de qualsevol problema, ja que ens ajuda a determinar falses suposicions i a verificar el resultat trobat[29]. De fet, s'observa que l'objectiu de l'autor en publicar l'*Arithmetica* és la didàctica i la difusió del coneixement de la seva àlgebra, que incorporava algunes de les idees de Viète.

4.2.- Estructura de l'Arithmetica.

L'*Arithmetica* de Saragossà està constituïda per un total de 448 pàgines organitzades en una introducció, que hem detallat en la secció anterior, i

26 Per a més informació, vegeu EROLES (2019).

27 A més observem el detall en tractar la incògnita tant discreta com contínua, també propi de Viète.

28 SARAGOSSÀ (1669), Introducció.

29 "La Sutileza del Algebra. Excede los terminos de la eloquencia, y aun no cabe en el dilatado oceano de la imaginacion. Muchos no dudaron llamarla divina. Es el Sol entre las Mathematicas, de quien todas han recibido luzidos aumentos. No ai enigma a que no dè luz, ni problema, que no resuelva, y esto con tan singular industria, que sola entre todas las facultades halla la verdad por un numero falso, y consigue la certeza por una suposición incierta". SARAGOSSÀ (1669), Introducció.

quatre llibres: *Libro I. De la Arithmetica menor,* amb 152 pàgines, *Libro II. De las Raizes,* amb 112 pàgines, *Libro III. De la Álgebra,* amb 81 pàgines, i *Libro IV. De los Enigmas,* amb 103 pàgines[30]. Ha estat en aquesta primera presa de contacte on ja hem notat algunes influències de l'àlgebra de Viète, com la importància del llenguatge simbòlic ("caràcters"), l'ús d'"espècies" en algunes definicions o la universalitat de l'àlgebra. En finalitzar l'exposició dels quatre llibres, Saragossà presenta un índex amb els capítols que formen cada llibre i la seva paginació i un índex de continguts ordenats alfabèticament per facilitar al lector la cerca dels conceptes clau. Aquest fet, poc habitual en les obres de l'època, ens mostra el caràcter didàctic de l'obra. A més, també adjunta al final una taula de caràcters de la qual en parlem en la secció 4.3.

El *Libro I. De la Aritmética Menor,* format per 23 capítols, tracta els aspectes més fonamentals de l'aritmètica bàsica, com era usual en les aritmètiques de l'època. Inclou les proporcions, aliatges, falses posicions, progressions i combinacions, juntament amb les regles bàsiques de la suma, resta, multiplicació i quocient. Treballa les operacions i regles fonamentals i resol molts problemes aritmètics amb els quals el lector s'ha de familiaritzar per tenir clara la metodologia que s'emprarà més endavant[31]. Pel que fa a la notació, en aquest primer llibre tots els termes són numèrics.

El segon llibre, *De las Raizes* ("Arte Maior") format per 14 capítols, té un enfocament rigorós sobre el tractament de les arrels, la seva construcció, càlculs i operacions. Encara que el llibre és titulat "les arrels", en la part superior de les pàgines posa "Arte Maior". En aquest llibre Saragossà descriu l'"Arte Maior", emprant ja la simbologia de les lletres per treballar amb el càlcul de les arrels (*raizes simples*) i la resolució numèrica aproximada d'equacions polinòmiques (*raizes compuestas*). En cada capítol realitza un tractament adequat en funció de si l'arrel a treballar és quadrada o de grau superior (treballa amb arrels fins a grau 6) o si les potències són simples o compostes, o si el signe que hi intervé és

30 A més, l'obra es complementa amb un conjunt de tres seccions que la introdueixen: el prefaci dedicat al rei Carles II; la llicència d'impressió atorgada pel pare Jacint Piquer, provincial de la Companyia de Jesús a Aragó. Aquesta queda segellada al Col·legi de Barcelona el 1667; i finalment, la Censura de l'*Arithmetica* que corre a càrrec del doctor Ivan Bautista Ballester qui alaba el tractament enginyós i universal de l'àlgebra de Saragossà. Per a més informació, vegeu EROLES (2019), 23-26.

31 Els teoremes i regles que Saragossà exposa en el *Libro I. De la Aritmética Menor (Arte Menor)* per introduir les proporcions i aprendre a treballar amb elles són clau, ja que es basen en els principis difosos per Euclides en els *Elements*. Aquestes regles són bàsiques i les veurem aplicades en la majoria de qüestions del *Libro IV. De los Enigmas*, com és el cas de la regla del producte d'extrems igual al producte de mitjos. Vegeu EROLES (2019), 37.

positiu o negatiu. El tractament de les equacions polinòmiques és numèric, no algebraic, a partir del desenvolupament dels binomis segons totes les potències de *Z*, essent *Z* la incògnita. L'algorisme és molt similar al desenvolupat per Viète a l'obra *De Numerosa Potestatum* (1600), de manera retòrica. Tanmateix, a diferència de Viète, Saragossà empra potències de *Z*, de manera simbòlica amb exponents numèrics[32]. Es pot apreciar l'objectiu d'universalitat en aquests procediments i així observem la introducció del terme "fórmula" en moltes de les taules presentades en aquest llibre[33]. Tanmateix, encara que el llibre segon es refereixi a l'Art major, cal assenyalar que el contingut és diferent de les obres d'"Art major" del segle XVI, ja que aquestes incloïen també la resolució d'equacions i s'identificaven amb l'àlgebra (vegeu la secció 2).

El tercer llibre, *Libro III. De la Álgebra* està dedicat exclusivament a introduir al lector en el coneixement de l'àlgebra. L'autor el presenta com un tractament breu i clar de la nova concepció de l'àlgebra, la qual requereix temps i coneixement per profunditzar-la i dominar-la.

> *"La parte mas sutil no solo de la Arithmetica, sino de las Mathematicas, es la Algebra; y la menos entendida de los Arithmeticos, no tanto por su dificultad, quanto por los muchos preceptos con los que los Antiguos confundieron sus operaciones. Estas son el unico objeto de este breve libro; su brevedad alentarà a los mas pusilanimes, pues nadie, creo, se persuadirà, que es inaccesible, ni aun dificultosa la Facultad, que puede ceñirse à tan breves y claros preceptos, como dirà la experiencia, que espero ha de ser el maior desempeño[34]".*

Aquest tercer llibre està dividit en 12 capítols: *I. Definició, estructura i fonaments de l'Àlgebra*; *II i III. Algoritme de caràcters simples i compostos*; *IV. Potències i arrels de caràcters*; *V i VI. Nombres irracionals simples i compostos*; *VII. Arrels universals*; *VIII. Binomis i residus*; *IX. Fraccions*. Els tres últims capítols, X. *Regla única de l'Àlgebra, XI. Reducció de les igualtats i XII. Valor de la lletra*, són els més significatius, ja que en ells explica la metodologia analítica en què es basa la seva àlgebra: obtenció de la igualtat mitjançant el plantejament de la qüestió,

32 RECASENS (2003) descriu de forma detallada l'algorisme emprat per Saragossà per a l'extracció d'arrels. A més de Viète, Thomas Harriot (1560-1621) també treballà la resolució numèrica d'equacions polinòmiques al seu tractat sobre equacions de c. 1605, com mostra STEDALL (2011), 33-44. Fora d'Europa, textos àrabs i xinesos de l'Edat Mitjana descriuen algorismes que actualment podrien considerar-se com a mètodes de resolució numèrica d'equacions polinòmiques. Vegeu, per exemple, RASHED (1974) i CHEMLA (1995).

33 Per a més informació, vegeu EROLES (2019), 31-32.

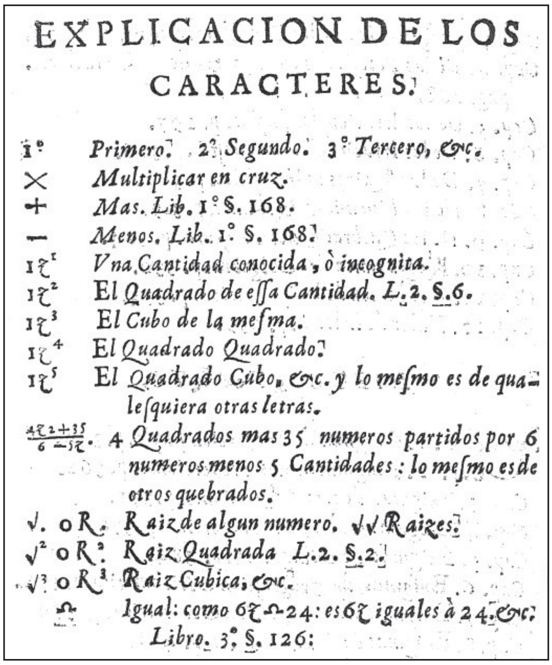
34 SARAGOSSÀ (1669), 265.

reducció de la igualtat per facilitar el treball i l'aplicació dels principis apresos anteriorment, i resolució de l'equació a través del valor de la lletra.

Finalment, el quart i últim llibre, *De los enigmas*, és una col·lecció de 120 problemes resolts, agrupats en 12 capítols que tracten diferents àmbits, recorrent temàtiques com les proporcions simples i compostes descrites en el primer llibre, passant per les progressions fins a arribar al vessant més aplicat amb problemes de geometria, emprant tant racionals com irracionals. L'eina per a la seva resolució és l'àlgebra i els mètodes descrits en els altres llibres. Aquests dos últims llibres s'analitzen a les seccions 5 i 6 d'aquest article.

4.3.- Notació de l'Arithmetica. Ús de caràcters en l'Àlgebra.

Un dels aspectes originals de la notació de l' *Arithmetica* es troba en la taula resum que s'adjunta al final de l'obra i que cita a la introducció afirmant que "es el unico remedio contra el Olvido"[35]. La taula mostra els símbols presentats al llarg de tots els llibres per ajudar al lector i tenir un "diccionari" de referència.


EXPLICACION DE LOS CARACTERES.

1º	Primero. 2º Segundo. 3º Tercero, &c.
×	Multiplicar en cruz.
+	Mas. Lib. 1º §. 168.
−	Menos. Lib. 1º §. 168.
$1z^1$	Vna Cantidad conocida, ò incognita.
$1z^2$	El Quadrado de essa Cantidad. L. 2. §. 6.
$1z^3$	El Cubo de la mesma.
$1z^4$	El Quadrado Quadrado.
$1z^5$	El Quadrado Cubo, &c. y lo mesmo es de qualesquiera otras letras.
$\frac{4z^2+35}{6-5z}$.	4 Quadrados mas 35 numeros partidos por 6 numeros menos 5 Cantidades: lo mesmo es de otros quebrados.
√. o R.	Raiz de algun numero. √√ Raizes.
√² o R²	Raiz Quadrada L. 2. §. 2.
√³ o R³	Raiz Cubica, &c.
♎	Igual: como 6z ♎ 24: es 6z iguales à 24. &c. Libro. 3º §. 126.

Figura 2. Taula dels caràcters emprats en la nova notació[36]

Destaquem el fet d'utilitzar la mateixa lletra per definir tant la incògnita

35 SARAGOSSÀ (1669), Introducció.

36 SARAGOSSÀ (1669), 452.

com la quantitat coneguda, encara que l'autor no escriu ni treballa les equacions amb lletres, sinó que només representa les incògnites i les seves potències. Saragossà considera del tot necessari i essencial l'ús de la simbologia per poder treballar amb l'àlgebra. Ell creu en la universalitat del llenguatge per poder transmetre'n el coneixement. Així, segons ell, el fet que cada autor del segle XVI espanyol utilitzi diferents notacions i, en molts casos, no s'incloguin els "caràcters" en aquestes simbologies, és causa de confusió per al lector. A més, afirma que ell mateix va haver de dissenyar i construir els caràcters tipogràfics de l'àlgebra inexistents en les publicacions espanyoles del moment. Menciona també autors d'Itàlia com Marino Ghetaldi (1568-1626)[37], de França com el pare Jacques De Billy (1602-1679)[38] o d'Alemanya com el pare Gaspar Schott (1608-1666)[39], a qui també els mancava un llenguatge simbòlic de caràcters en les seves terminologies.

> *"**Los Caracteres propios del Algebra***
> *Son el conplemento de su perfeccion: la falta de ellos fue siempre causa de confusion, y prolixidad. Gran motivo tuviera para quexarme de las inpressiones de España, sino viera, que en Italia le faltaron a Marino Ghetaldo, en Francia al P.Billi, y al P-Gaspar Scoto en la superior Alemania. No me pude reduzir a sacar sin este complemento el libro, y viendo que con dinero no se podia remediar el daño, por faltar los artificios, apliquè mi industria, y consegui, lo que solo intentar, pareciò a muchos, temeridad. Hize por mi mano los punzones, matrices y llaves: fundi todos los Caracteres enteros, y quebrados, que juzguè necessarios, sin perdonar a trabajo, ni gasto, por conseguir toda perfeccion*[40]*".*

37 Marino Gethaldi (1568 – 1626) va rebre una educació franciscana des de ben petit i de jove es va interessar per l'estudi matemàtic de l'astronomia. Va rebre influències dels treballs de Christopher Clavius (1538-1612), Viète i Galileo Galilei (1564-1642). L'obra de Gethaldi destaca per l'aplicació de mètodes algebraics en la resolució de problemes geomètrics, com en la seva obra *De resolutione et de compositione mathematica, libri quinque* publicada el 1630. Vegeu CAMPEDELLI (1972), 381-383.

38 Jaques De Billy (1602–1679) va formar part de l'orde jesuïta i la major part de la seva vida la va dedicar a ensenyar matemàtiques i teologia. Va ser amic íntim de Claude Gaspar Bachet de Meuziriac (1581-1638), també jesuïta, i es va cartejar amb Pierre de Fermat (1601-1665) sobre resultats de teoria de nombres. Billy també va ser un dels primers en rebutjar el paper de l'astrologia en la ciència. Vegeu ITARD (1972), 131.

39 Gaspar Schott (1608-1666) va entrar a la Companyia de Jesús l'any 1627 i va ser enviat a la universitat de Würzburg on va estudiar filosofia amb Athanasius Kircher (1602-1680). Va completar els seus estudis a Palerm on va romandre 20 anys; després va anar a Roma i finalment va tornar a Würzburg (Alemanya). Vegeu KELLER (1972), 210-211.

40 SARAGOSSÀ (1669), Introducció.

En el primer llibre sobre l'aritmètica hi ha notació simbòlica per a la suma, la diferència, el producte i l'arrel, però no per a representar incògnites[41]. En el llibre segon es presenta la simbologia dels caràcters (Figura 3) on veiem la primera mostra de la transformació de la notació abreujada del Renaixement a caràcters com els de Viète o Descartes[42].

1. Prog. Geom.	2. Prog. Geom.	3. Prog. Geom.	Expo-nentes.	Nonbres.	1. Carac-teres.	2. Carac-teres.
1	1.	1.	0			
2	4.	8.	1	Raiz.	R.	Z1.
4	16.	64.	2	Quad.	Q.	Z2.
8	64.	512.	3	Cubo.	C.	Z3.
16	256.	4096.	4	Quad.Quad.	QQ.	Z4.
32	1024.	32768.	5	Quad.Cubo.	QC.	Z5.
64	4096.	262144.	6	CuboCubo.	CC.	Z6.
128	16384.	2097152.	7	Q.Q.Cubo.	QQC.	Z7.
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Figura 3. Exemple de les arrels i les seves potències[43]

Tot seguit explica els caràcters de la sisena columna. Són els que identifiquen les diferents potències a les quals els algebristes anomenen caràcters *Cossics* i els moderns (nosaltres diríem Viète i altres), *Magnituds d'Escalars* o *Graduals.* Així les abreviacions es prenen de la primera lletra dels seus noms, *R*. és arrel, o sigui x, Q. és quadrat, C. és cub, etc.

41 L'autor presenta una Taula Triangular equivalent al triangle de Pascal que serà d'una gran rellevància en el càlcul d'arrels. Blaise Pascal (1623 – 1662) defineix per primera vegada aquest triangle com objecte matemàtic en el *Traité du triangle arithmétique* (1653), tot i que civilitzacions anteriors ja l'havien fet servir. Es creu que apareix representat com a triangle per primera vegada a l'obra *De Arithmetica* de Jordanus de Nemorario cap al 1225. També el trobem en la matemàtica xinesa, en l'obra *El mirall preciós* de Txu Xhi-kei (1303). Més tard també l'empra Niccolo Tartaglia (1499 – 1557) un segle anterior a Pascal. Vegeu EDWARDS (2002) i MASSA-ESTEVE; ROMERO-VALLHONESTA (2009).

42 Les tres primeres columnes són tres progressions geomètriques de raó 2, 4 i 8 respectivament. La quarta columna numera els exponents i la cinquena presenta els noms associats a l'exponent per designar cada arrel. Vegeu EROLES (2019), 41.

43 SARAGOSSÀ (1669), 154.

5 La coluna 6. contiene los *Caracteres* con que ſe ſignifican las Poteſtades, a quien los Algebriſtas llaman *Caracteres Coſsicos*, y los modernos *Magnitudes Eſcaleres*, ò *Graduales*. Para maior claridad, y facilidad ſe toman por Caracteres las primeras letras de ſus nonbres: como R. es Raiz: Q. es Quadrado: C. es Cubo: QQ. Quadrado Quadrado: QC. es Quadrado Cubo: CC, es Cubo Cubo &c

Figura 4. Descripció de la taula de caràcters de Saragossà [44]

La columna següent i última mostra una segona versió dels mateixos caràcters, més senzills, clars i fàcils de referenciar amb l'arrel o incògnita, per a la qual cosa utilitza el símbol i l'exponent superior al costat de la lletra (Figura 3), i és la que utilitza al llarg del llibre[45]. En el tercer llibre presenta un vessant més pràctic d'aquest llenguatge simbòlic amb una clara influència de les regles del mètode analític. En la propera secció analitzem la concepció, notació i vinculació d'aquesta àlgebra.

5.- L'Àlgebra i la resolució d'equacions.

El tercer llibre de l'*Arithmetica* presenta una nova àlgebra, on s'amplia l'"Arte Maior" adaptant les idees analítiques vietianes. S'hi exposa una metodologia de resolució de problemes que passa per diferents fases: plantejament de l'equació, simplificació o reducció i substitució del valor de la incògnita, que recorden la zetètica, la porística i l'exegètica de Viète, respectivament. El tractament de les incògnites amb la notació dels caràcters descrits prèviament és un altre indicador de la importància de l'àlgebra per a Saragossà, qui considerava l'ús de la simbologia com un gran avenç per facilitar la comprensió del desenvolupament dels problemes.

44 SARAGOSSÀ (1669), 155.

45 Aquesta manera d'expressar els caràcters també la identifiquem amb la manera com Descartes va presentar la seva simbologia.

5.1.- L'Àlgebra i la seva notació.

En la introducció del tercer llibre, Saragossà afirma que l'àlgebra és "*la parte mas sutil no solo de la Arithmetica, sino de las Mathematicas*"[46]. És justament la dificultat que presenta l'estudi de l'àlgebra el que l'ha empès a escriure el llibre. L'àlgebra de Saragossà neix com a continuació de l'aritmètica i l'"Arte Maior", però, tot i fonamentar-se en elles, existeix de manera pròpia. El capítol I del tercer llibre comença amb la definició d'àlgebra com a sinònim d'anàlisi o resolució, tal com Viète defineix l'Art analítica en la *Isagoge.* Es tracta de la facultat o art que ensenya a resoldre qüestions a través dels termes que la constitueixen:

> *"Álgebra es doctrina analítica, analysis dicción griega es lo mismo que en latín resolutio, y en castellano resolución. Analítica es resolutiva, con que Álgebra es una facultad o arte resolutiva, que enseña a resolver las cuestiones por los mismos términos con que la compusieron*[47]*".*

L'origen de la paraula prové dels àrabs, que feien servir *Àlgebra* per designar restauració i *Almucabala,* per referir-se a oposició de caràcters desconeguts, igualats a quantitats conegudes, com s'explica en l'obra d'al-Khwarizmi, *Hisâb al-jabr w'al-muqqabala* (segle IX). En les paraules de Saragossà:

> *"Los Árabes la llamaron Algebra, que es tanto como restauración, y Almucabala, que es oposición, porque los Caracteres incógnitos en la una parte, se oponen a una Cantidad conocida en la otra parte de la igualación*[48]*".*

Més endavant, els italians la van començar a anomenar la *Regla de la Cosa* i van introduir el terme "arrel" per definir una cosa incerta que substitueix la magnitud real que es desitja trobar[49]. Saragossà recorre a la història de la paraula àlgebra i el seu ús per donar el mèrit als àrabs en la creació d'aquesta ciència, encara que afirma que Diofant d'Alexandria (c.a. 200 – c.a. 284) va ser el primer autor en utilitzar l'àlgebra en ella mateixa a la seva *Arithmetica.*

> *"Atribuyen algunos su invención a cierto Mahomet Árabe, hijo de Moisés, pero sin fundamento, aunque no se puede negar que los árabes ejercitaron*

46 SARAGOSSÀ (1669), 265.

47 SARAGOSSÀ (1669), 265-266.

48 SARAGOSSÀ (1669), 265-266.

49 La *Regla de la Cosa* és la que treballaven Aurel i Rudolff (ROMERO-VALLHONESTA; MASSA-ESTEVE, 2018).

esta ciencia nobilísima (con otras muchas que nos participaron) y le dieron el nombre. Comúnmente se dice que fue su inventor Gebro Astrónomo Árabe, de quien tomó el nombre de Álgebra pero lo más cierto es que el primer autor fue Diophanto Alejandrino por ser el primero que sabemos haber escrito de esta facultad y en el prólogo de Dionisio dice que emprendía la explicación de una ciencia no conocida hasta entonces[50]".

Aquesta narrativa dels seus orígens, citant el pròleg de Dionís, ens recorda el jesuïta Clavius[51] en la seva *Algebra* (1608), on diu:

"Tothom no està d'acord amb l'inventor d'aquesta art. Molts afirmen que és Geber l'astrònom àrab i pretenen que el nom àlgebra ve de Geber. Però veritablement també Johannes Regiomontanus en el prefaci d'Alphraganus atribueix aquesta invenció a Diofant d'Alexandria. En efecte, Diofant, en el prefaci dels tretze llibres que ha escrit sobre aquest tema per Dionís és el primer a proclamar-se inventor d'aquesta ciència [...][52]".

També es pot dir que segueix d'alguna manera a Viète, que a la *Isagoge* menciona a Diofant en la zetètica; però és més probable que Saragossà hagi donat una nova narrativa dels seus orígens adaptant la cita de Clavius sobre el pròleg de Dionís[53].

Saragossà també es refereix a l'àlgebra com Logística, ja que el procediment de plantejament i resolució de problemes segueix una argumentació racional i lògica, la qual cosa permet donar més certesa al mètode. Segons Saragossà, l'àlgebra es divideix en vulgar i especiosa, idea clarament vinculada a la *Isagoge* de Viète i necessita l'ús de caràcters per poder treballar amb les espècies. Saragossà atribueix explícitament la invenció a Viète

50 SARAGOSSÀ (1669), 265-266.

51 Christoph Clavius va ensenyar a Roma. Va fer una edició dels *Elements* (1589) molt coneguda, i citada per Saragossà en les seus *Elements.* També va publicar una obra titulada *Algebra* l'any 1608. Vegeu KNOBLOCH (1988).

52 CLAVIUS (1608), 4.

53 VIÈTE (1591), fol. 8a.10. Zeteticem autem subtilissimè omnium exercuit Diophantus in iis libris qui de re Arithmeticâ conscripti sunt. Eam verò tanquam per numeros, non etiam per species, quibus tamen usus est, institutam exhibuit, quò sua esset magis admirationi subtilitas & solertia, quando quae Logistae numeroso subtiliora aparent, & abstrusiora, ea utique specioso familiaria sunt & statim obvia; "*Diofant va emprar la zetètica més subtilment que tots els llibres que s'han recopilat en l'Arithmetica. Allí segurament exhibeix aquest mètode en números, però no en espècies, tot i que sí les utilitza. A causa d'això, el seu ingeni i rapidesa mental són els més admirables, ja que les coses que pareixen ser molt subtils i abstractes en logística numerosa són bastant familiars i fins i tot fàcils en espècies.*"

d'aquesta àlgebra especiosa (caràcters que són espècies tant numèriques com geomètriques)[54]:

> *"Se divide la Álgebra en Vulgar y Especiosa. La vulgar ejercita su lógica y operaciones con los números conocidos hasta hallar alguna igualación entre los Caracteres incógnitos, y alguna Cantidad conocida, y por su medio resolver la magnitud, o número de que se dudaba. La especiosa deja los números, y en su lugar de vale de ciertas especies, formas o Caracteres, hasta hallar la igualación que busca. Llamase Vietea de su autor Francisco Vieta, a quien debemos esta noble invención[55]".*

Per tal de definir aquestes espècies, s'utilitzen les lletres de l'alfabet, ja siguin majúscules o cursives. En principi, Saragossà recomana definir els nombres coneguts amb les primeres lletres de l'alfabet: a, b, c, etc., i les incògnites amb les darreres lletres: z, y, x, etc. Aquesta manera de designar les incògnites i les quantitats conegudes molt probablement estava inspirada en *La Géométrie* (1637) de Descartes[56]. Tot i així, més endavant, en els exemples continguts en aquest llibre i en la taula resum que apareix al final de l'obra no segueix la norma aquí descrita. En els exemples exposats utilitza diferents lletres, tant majúscules com minúscules, per designar les incògnites o quantitats conegudes. Per exemple, $6B^3$, $5A^6$, $6Z^2$, $15z^2$, $7b^3$, $9a^3$, etc. A més, considera que, si davant de la lletra que defineix com incògnita amb el seu exponent, no apareix cap número, automàticament l'equivalència és la unitat, és a dir, Z és el mateix que $1Z^1$. Aquesta elecció podria relacionar-se amb la visió de Viète, però, de tota manera, en el vessant pràctic de resolució de problemes, utilitza gairebé sempre la unitat acompanyant el caràcter[57].

Els tres últims capítols del tercer llibre descriuen la metodologia de plantejament i resolució de problemes que involucren equacions de caràcters i quantitats conegudes. Aquests capítols es poden treballar una vegada ja s'han

54 Més informació a OAKS (2018).

55 SARAGOSSÀ (1669), 267.

56 Vegeu, per exemple, PLA CARRERA; VIADER CANALS (1999), 18, nota 19.

57 Val la pena remarcar que aquí sembla allunyar-se una mica de la visió de Viète. Michael Stifel (1487 – 1567) i altres autors anteriors, com Aurel o Rudolff, feien servir "1*A*", al contrari que Viète, que l'indica només amb la lletra, "*A*". Per a Stifel, la lletra A significa un tipus de nombre que requereix "1" per esdevenir un valor, mentre que la "*A*" de Viète és per si sola un valor d'una magnitud desconeguda. L'ús de la unitat acompanyant el caràcter és influència de les notacions algebraiques precedents. Vegeu OAKS (2018), 248.

interioritzat els conceptes fonamentals presentats ens els capítols del I al IX[58]. És per això que dediquem la secció següent a analitzar el tractament analític de les equacions que explica en el tres darrers capítols.

5.2.- Resolució d'Equacions.

El capítol X del llibre tercer, titulat *Regla única del àlgebra*, explica la metodologia emprada a l'hora de desenvolupar i resoldre un problema. Aquesta regla té tres fases, que corresponen als tres capítols finals del llibre tercer. El concepte clau consisteix en suposar allò que busquem com si fos ja admès i d'aquesta manera podrem aplicar les operacions que ja coneixem per obtenir una equació (*igualacion*) i operar amb ella per trobar el valor de la incògnita:

> *"**REGLA ÚNICA DEL ALGEBRA***
> *§125. En lugar del número incógnito, que se busca, supóngase una letra del abecedario A, B, C, &c... [1º:] Sea pues la letra 1Z*^{1} *y con ella se harán todas las operaciones sumando, restando, multiplicando o partiendo, conforme el tenor de la cuestión propuesta, hasta hallar alguna igualación. 2º: esta igualación se reducirá si fuere necesario y 3º se buscará el valor de la letra, y ese es el número incógnito, que se busca. En esta breve regla se cifra toda la inmensidad del Álgebra: contiene tres partes, que son igualación, reducción y valor de la letra*[59]*".*

Aquest procediment ens recorda sobretot a l'Art analítica de Viète[60]. Saragossà, com Viète, fa servir les lletres (*caracteres*) per substituir el valor buscat i realitzar les operacions regides per les regles descrites en els capítols anteriors del llibre tercer. Caldrà manipular-la fins arribar a una igualtat més compacta i senzilla i, finalment, caldrà trobar el valor que representa la lletra amb l'objectiu d'obtenir el resultat. Les fases són una adaptació de la zetètica, porística i exegètica presentades per Viète a la *Isagoge*. Saragossà les anomena igualació, reducció i valor de la lletra. A continuació es comenta amb detall cadascuna d'aquestes tres fases.

---

58 Per a una descripció detallada dels capítols I-IX, vegeu EROLES (2019).

59 SARAGOSSÀ (1669), 330.

60 Aurel i altres autors com Pérez de Moya van descriure un procediment embrionari d'aquest, resolent les equacions amb números a les quantitats donades. Vegeu MASSA-ESTEVE (2012b), 123-124.

5.2.1.- Igualació.

La primera fase o igualació equival, segons Saragossà, al plantejament de l'equació a partir de l'enunciat donat de forma retòrica. La igualació és la comparació d'una quantitat amb una altra de semblant, però amb noms diferents. Per tal d'escriure la igualtat en l'equació, Saragossà fa servir $\propto$ o Ω, tot i que generalment farà servir el darrer símbol.

> *"Igualación es la comparación de una Cantidad con otra igual de diferente nombre, o la igualdad de dos Cantidades en el nombre diferentes: como* $1Z^2 + 6Z^1$ *es igual a 16. Denotase la igualdad con este carácter* $\propto$*, de esta suerte* $1Z^2 + 6Z^1 \propto 16$ *, o con este otro* Ω*, así* $1Z^2 + 6Z^1 \ \Omega\ 16$ *,esto es* $1Z^2 + 6Z^1$ *son iguales a* 16. *En adelante con este carácter* Ω *significaré la igualdad por ser en la práctica más fácil*[61]*".*

El primer símbol apareix a *La Géométrie* (1637) de Descartes, mentre que el segon es pot trobar a l'obra de Pérez de Mesa de 1598, *Libro y tratado del arismetica y arte mayor y algunas partes de astrología y matemáticas* (Manuscrit 2294 de la biblioteca de la Universitat de Salamanca)[62]. Viète representa la igualtat amb la paraula *aequatur*.

Saragossà presenta alguns exemples bàsics, d'enunciat senzill, per tal de fer entendre aquest primer pas del plantejament. Per generalitzar la igualació a qualsevol enunciat donat, Saragossà es basa en 9 principis que cal tenir presents en el desenvolupament d'aquesta primera fase:

"Principios generales para la igualacion

1. *El Todo es igual* à *todas sus partes juntas.*
2. *Las Cantidades iguales a otra, son entre si iguales.*
3. *Si* à *iguales se añaden, ò quitã iguales, quedan iguales.*
4. *Y si iguales se multiplican,* ò *parten por iguales.*
5. *El multiplicador,* ò *partidor común no altera la proporción.*
6. *La Proporción directa, es también alterna i conversa.*
7. *Si* à *proporcionales se añaden,* ò *quitan proporcionales semejantes, resultan proporcionales.*

---

61 SARAGOSSÀ (1669), 330.

62 Vegeu ROMERO-VALLHONESTA (2018), 224. En canvi, Viète no especifica cap signe per a la igualtat, però utilitza el símbol "=" per designar la diferència (VIÈTE, 1591, 5v). Més informació sobre la simbologia per designar la igualtat a CAJORI (1928-29), vol. I, 297-308. D'ara en endavant, per facilitar la lectura, s'emprarà el símbol = per a les igualtats, en lloc del símbol Ω que apareix en el text original.

8. *Si ai cuatro proporcionales, el Producto de los extremos es igual al Producto de los medios.*
9. *Si ai tres proporcionales, el Producto de los extremos es igual al Cuadrado del medio*[63]*".*

Aquests principis coincideixen en part amb les regles presentades per Viète en el Capítol II de la *Isagoge,* especificant que són principis ja emprats en els *Elements* d'Euclides, amb el títol *De Symbolis aequalitatum & proportionum* (Figura 5). Viète presenta un total de 16 principis, dels quals Saragossà en presenta només 9. També els reagrupa, així, per exemple, el tercer principi agrupa les regles 3 i 4, i el 7 agrupa les regles 8 i 9 de Viète. Novament es fa palesa la influència de Viète sobre l'*Arithmetica* de Saragossà.

De Symbolis æqualitatum & proportionum. CAPVT II.

SYmbola æqualitatum & proportionum notiora quæ habentur in Elementis adſumit Analytice vt demonſtrata, qualia ſunt ferè,
1 Totum ſuis partibus æquari.
2 Quæ eidem æquantur, inter ſe eſſe æqualia.
3 Si æqualia æqualibus addantur, tota eſſe æqualia.
4 Si æqualia æqualibus auferantur, reſidua eſſe æqualia.
5 Si æqualia per æqualia multiplicentur, facta eſſe æqualia.
6 Si æqualia per æqualia diuidantur, orta eſſe æqualia.
7 Si quæ ſint proportionalia directè, eſſe proportionalia inuerſè & alternè.
8 Si proportionalia ſimilia proportionalibus ſimilibus addantur, tota eſſe proportionalia.
9 Si proportionalia ſimilia proportionalibus ſimilibus auferantur, reſidua eſſe proportionalia.
10 Si proportionalia per proportionalia multiplicentur, facta eſſe proportionalia.
11 Si proportionalia per proportionalia diuidantur, orta eſſe proportionalia.
12 A communi multiplicatore vel diuiſore æqualitatem non immutari, vel rationem.
13 Facta ſub ſingulis ſegmentis æquari facto ſub tota.
14 Facta continuè ſub magnitudinibus, vel ex ijs continuè orta, eſſe æqualia quocumque magnitudinum ordine ductio vel adplicatio fiat.
Κύριον autem æqualitatum & proportionum ſymbolum, omniſque in Analyſibus momenti eſt.
15 Si fuerint tres quatuorve magnitudines, quod autem fit ſub extremis terminis æquale eſt ei quod fit à medio in ſe, vel ſub mediis, ſunt proportionales.
Et è conuerſo,
16 Si fuerint tres quatuorve magnitudines, & ſit vt prima ad ſecundam, ita ſecunda illa, vel tertia quæpiam ad aliam, erit quod fit ſub extremis terminis æquale ei quod fit ſub mediis.
Itaque proportio poteſt dici cōſtitutio æqualitatis. Æqualitas, reſolutio proportionis.

Figura 5. Sobre els símbols de les equacions i les proporcions[64].

63 SARAGOSSÀ (1669), 331-332.

64 VIÈTE (1591), 4 r-v. La traducció anglesa de Witmer ho diu com "Regles fonamentals de les equacions i proporcions", WITMER (1983), 14.

A més dels principis generals que cal seguir per plantejar l'equació amb caràcters, Saragossà també presenta alguns casos particulars, deixant oberta la possibilitat de la no existència de solució, molt útil en problemes geomètrics si la conclusió és l'absurd, o igualacions trivials on falta informació per trobar la incògnita. Menciona la utilització de lletres diferents quan es demanen valors diferents o quan un depèn de l'altre per no utilitzar exponents gaire elevats. Tot i així deixa a elecció del lector utilitzar una o més incògnites en funció del mètode que li resulti més pràctic[65].

5.2.2.- Reducció.

Un cop efectuada la primera fase o igualació, en la majoria de casos s'obté una equació que no permet obtenir de manera fàcil el valor que amaga la lletra o caràcter que busquem. Aquí és on entra en joc la segona fase, *Reducción de la igualación* (capítol XI del tercer llibre). La reducció és el procediment mitjançant el qual aconseguim aïllar la quantitat sense cap caràcter en un costat de l'equació. Per tal d'arribar a aquesta situació, es realitzaran tots els procediments següents possibles: eliminar fraccions, depressió de caràcters o "Hypobibasmo" (simplificació d'incògnites en cas que no hi hagi termes independents), reducció del terme independent en una part de la igualtat (sumant o restant el que faci falta en cada part de la igualtat) i reducció del coeficient més gran a la unitat dividint tots els termes pel coeficient del caràcter amb exponent més alt. En paraules de Saragossà:

> *"No siempre la igualación se halla en términos hábiles, para sacar el valor de la letra, y es necesario reducirla de suerte, que en la una parte de la igualación se halle el numero solitario sin Carácter alguno, por ser la Cantidad conocida, de quien se ha de sacar el valor de la letra, o por división, o por extracción de raíz; y el Carácter mayor en la otra parte de la igualación, se ha de reducir a unidad. 1º se librará la igualación de Quebrados; 2º se hará depresión de Caracteres, si hay necesidad; 3º se reducirá el número solo a la una parte de la igualación; 4º se reducirá el Carácter mayor a unidad[66]".*

L'ús i definició del concepte "Hypobibasmo" es basa en la Proposició II, capítol V, de la *Isagoge* de Viète. Viète empra aquesta paraula per descriure

65 SARAGOSSÀ (1669), 333-334.

66 SARAGOSSÀ (1669), 334.

la depressió de caràcters i coincideix amb el desenvolupament descrit per Saragossà. Aquest procediment és equivalent a la simplificació de caràcters que coneixem avui en dia.

> *"**Reducción por depresión de Caracteres***
> *Quando todos los términos de la igualación son Caracteres y en ninguna parte hay número sin letra, se hará la depresión de los caracteres, quitando el exponente menor de todos los exponentes; y es lo mismo que partir todos los términos por el Carácter menor, con que es fuerza quede en la una, o en las dos partes número si Carácter: como si $2Z^3=16Z^1$, partiendo los términos por $1Z^1$ quedará $2Z^2=16$ […] De suerte que se quita el Carácter menor y el exponente menor se resta de los mayores: esta depresión, o disminución se llama Hypobibasmo[67]".*

Comparem ara amb la definició de Viète:

> *"L'Hypobibasmo o depressió és una reducció igual de la potència i els termes d'ordre inferior en l'ordre observat de l'escala fins que el terme variable més baix es converteixi en una constant pura amb la qual es puguin comparar la resta. L'equació no varia amb aquesta operació com demostrem en l'exemple següent: donat $A^3+BA^2=Z^pA$, aplicant l'hypobibasmo o depressió obtenim $A^2+AB=Z^p$ [68]".*

Pel que fa a la reducció del coeficient principal a la unitat destaca l'ús de la progressió geomètrica, en aquells casos en què la divisió no sigui entera[69]. Tractem aquesta excepció en particular, ja que s'aplica en els exemples pràctics i ajuda a comprendre aquest procediment. La reducció del caràcter més gran a la unitat consisteix en dividir tots els termes pel coeficient principal per deixar així el caràcter més gran acompanyat de la unitat. El cas particular es troba quan aquesta divisió no és entera. En aquesta situació Saragossà proposa construir una progressió geomètrica de raó el coeficient principal, començant amb la unitat. El següent pas és multiplicar els termes de l'equació pels de la progressió en l'ordre establert pels exponents, obtenint així una

67 SARAGOSSÀ (1669), 335.

68 VIÈTE (1591), 7v, Capítol V. En aquest cas, hem fet servir la traducció i adaptació a partir de la versió anglesa de WITMER (1983).

69 "També Hérigone en el llibre VI del *Cursus Mathematicus* presenta una regla no tan general, per reduir el caràcter més gran a la unitat mostrant un exemple numèric. Vegeu HÉRIGONE (1642),15.

equació equivalent a l'original. L'arrel de la primera equació l'aconseguirem dividint l'arrel de l'equació reduïda pel coeficient principal de l'original.

> "***Reducción del Carácter mayor a la unidad***
> *§140. Pártanse todos los términos por el número del Carácter mayor, y quedará reducido: como si* $10z^3 + 30z^2 - 40z^1 = 500$. *El Carácter mayor es* z^3 *y su número* 10, *partiendo todos los números por* 10, *será* $1z^3 + 3z^2 - 4z^1 = 50$. *[…]*
>
> *§141.Cuando la partición no puede venir justa, se formará una progresión Geométrica, que el término 1º sea la unidad; el 2º sea el número del Carácter mayor, el 3º su Cuadrado, el 4º su Cubo… Los términos han de ser tantos como el exponente mayor de la igualación y comenzando por el último se escribirán los exponentes 0, 1, 2, 3… Los términos pues de la igualación, se multiplicarán por los términos de la progresión, que corresponde a su exponente y, dejando el Carácter mayor con la unidad, quedará reducida la igualación, pero la raíz de esta nueva igualación se ha de partir por el número del Carácter mayor, y el Cociente será la raíz verdadera de la primera igualación*[70]".

Per il·lustrar aquest procediment, presentem l'exemple següent[71]:

Tenim l'equació $10z^6 + 5z^4 - 2z^3 - 100z^2 + 200z^1 = 10040000$. L'exponent més gran és 6 i el coeficient que l'acompanya o principal és 10. Per tant, escriurem la progressió geomètrica de raó 10 amb 6 termes i numerarem els exponents de 0 a 5 en ordre invers (Taula 1).

Progressió	1	10	100	1000	10000	100000
Exponents	5	4	3	2	1	0

Taula 1. Exemple de Reducció del Caràcter a la unitat quan la divisió no és entera[72]

Ara ens queda multiplicar els termes de la igualtat pels de la progressió: multiplicarem $5z^4$ x 10, corresponent a l'exponent 4, $2z^3$ x 100 (exponent 3), $100z^2$ x 1000 (exponent 2), $200z^1$ x 10000 (exponent 1), 1004000 x 100000 (terme independent). Recordem que hem de deixar el caràcter més gran acompanyat de la unitat. D'aquesta manera l'equació reduïda que resulta és:

70 SARAGOSSÀ (1669), 338.

71 SARAGOSSÀ (1669), 338, exemple 1. Aquest exemple presenta una errada; com es veu en el desenvolupament posterior, s'ha d'afegir un 0 al final del terme independent.

72 SARAGOSSÀ (1669), 338.

$1z^6 + 50z^4 - 200z^3 - 100000z^2 + 2000000z^1 = 1004000000000$

Es pot comprovar que això equival a fer el canvi de variable $z' = z/10$ en l'equació original. El que s'aconsegueix en aquesta fase és deixar l'equació de tal manera que aïllem en un costat el caràcter amb coeficient 1, deixant la resta de termes a l'altra banda de l'equació, com procediríem avui en dia, de tal manera que només quedi realitzar el càlcul de l'arrel en qüestió.

5.2.3.- Valor de la lletra.

Finalment, en el capítol XII del tercer llibre Saragossà explica com trobar el valor del caràcter que estem buscant. La situació que ha deixat l'última fase o reducció és precisa i còmoda per poder realitzar el càlcul de l'arrel aplicant la metodologia descrita en el segon llibre. Per a Saragossà, igual que per a Viète, el tractament analític de les equacions culmina amb la tercera fase, ja que la simbologia que s'ha emprat es pot substituir pel valor real que havíem suposat cert d'entrada.

> *"Este es el fin de todo el trabajo antecedente, pues como la letra se supone en lugar del numero incognito, que se pide, sabido el valor de la letra, se sabe el numero, y queda la cuestión resuelta, y descifrado el enigma*[73]*".*

En aquesta forma d'expressar-se de Saragossà observem que és possible que només estigui entenent el valor de la lletra com un valor numèric, però recordem el seu desig de treballar amb la notació simbòlica per a identificar qualsevol magnitud numèrica o geomètrica, com havia après de Viète.

En aquesta última fase distingeix dues regles per obtenir el valor de la lletra: la Regla General i la Regla Particular. La Regla General descriu explícitament com procedir quan hi ha un únic caràcter i distingeix entre exponent 1 o més gran que 1. En el primer cas els termes que queden a la part dreta de l'equació representen ja la quantitat desitjada i en el cas d'un exponent més gran que 1, cal realitzar el càlcul de l'arrel corresponent, per trobar novament la quantitat cercada, és a dir, el valor de la lletra.

> *"**§146. REGLA GENERAL***
> *Si el carácter es solo, y su exponente 1, se partirá la Cantidad por el número*

73 SARAGOSSÀ (1669), 339.

del carácter; si el exponente es 2, 3, 4... se sacará la $\sqrt[2]{}, \sqrt[3]{}, \sqrt[4]{}$ *... y si hay muchos caracteres compuestos con afirmación, o negación, se sacará la raíz conforme al exponente mayor por el Libro 2º. El Cociente o raíz hallada será el valor de la letra*[74]*".*

Tornant a l'exemple vist en l'apartat anterior, l'arrel de la nova equació és 100, seguint les instruccions del capítol X del segon llibre[75]. Ara bé, cal dividir-la per 10, coeficient que acompanya el caràcter més gran, obtenint el quocient 10 que correspon a l'arrel de l'equació original. Aquest darrer pas es pot entendre com a conseqüència d'haver aplicat el canvi de variable $z' = z/10$.

La Regla Particular descriu la fórmula de l'arrel d'una equació que es pot reduir a segon grau[76]. Aquesta es pot aplicar únicament en el cas particular en què l'equació segueix la següent estructura en notació actual: $ax^{2n} + bx^{n} = c$, per a qualsevol n positiu, és a dir, quan l'exponent del caràcter més gran sigui el doble de l'exponent del caràcter petit. En aquest cas, sempre podem reduir l'equació a una equació de segon grau. Saragossà descriu minuciosament tots els passos de forma retòrica, anomenant quantitat (*cantidad*) a c, i *número* als coeficients que acompanyen x^{n} (caràcter menor) i x^{2n} (caràcter major). A més, considera a =1, ja que en la fase de reducció hem dividit tota l'equació pel coeficient principal.

"§148. REGLA PARTICULAR

Cuando en la igualación dos caracteres, y el exponente mayor es duplo del menor: 1º al Cuadrado del numero del carácter menor, añádase, o quítese el Cuádruplo de la Cantidad, según el signo del carácter mayor; 2º sacada la $\sqrt[2]{}$ *de la suma, o resta, si el carácter menor tiene el signo +, se tomará la diferencia de su número, y de esta raíz, y si -, se tomará la suma. 3º la mitad de esta diferencia, o suma es el valor del carácter menor.*

Si el Carácter mayor tiene el signo -, tendrá el Carácter menor dos valores, y la suma de los dos es igual a su numero, con que la diferencia de su numero, y del valor 1º, será el valor del 2º algunas veces los dos satisfacen a la cuestión,

74 SARAGOSSÀ (1669), 339.

75 Cal remarcar que es tracta d'una equació de sisè grau, amb coeficients negatius i positius.

76 Saragossà esmenta els diferents tipus de solucions de l'equació de segon grau. És possible que les dues arrels siguin solució, que només ho sigui una d'elles o que l'equació no tingui solució. En el context històric en què ens trobem, encara no es treballava amb els nombres negatius, i per tant, no consideraven solucions negatives ni complexes.

otras veces solo el uno, y esto se debe examinar[77]*"*.

A continuació presenta tot un seguit d'exemples, alguns amb solucions irracionals, però tant el caràcter menor, coeficient de x^n, com el terme independent (*cantidad*) són números. La diferència entre l'*Arithmetica* i els textos anteriors rau en què l'autor intenta donar una regla general per a tots els casos. Saragossà emfatitza la gran utilitat d'aquesta fórmula, ja que serà la més treballada en els problemes del *Libro IV. De los Enigmas*[78]. En la secció següent analitzem com s'aplica l'àlgebra per resoldre alguns dels problemes presentats en el llibre quart.

6.- Ús de l'àlgebra en la resolució de problemes.

L'últim llibre de l'*Arithmetica*, *De los enigmas*, està exclusivament dedicat a l'ús de l'àlgebra en la resolució de molts tipus de problemes i en presenta 120 resolts. Les temàtiques van des de les proporcions simples i compostes i les progressions descrites en el primer llibre, fins a arribar al vessant més aplicat, amb problemes de geometria, emprant tant racionals com irracionals.

En la presentació d'aquest últim llibre de l'*Arithmetica*, l'autor afirma que l'àlgebra és l'eina que ajuda en aquest desenvolupament d'enginy per resoldre problemes. Els problemes s'anomenen enigmes, degut a que són confusos i ocults i només la subtilesa d'aquesta ciència divina, l'àlgebra, pot resoldre'ls.

> *"Enigma es una cuestión obscura y difícil, que pide mucho ingenio su resolución. Propiedad, que se halla en las cuestiones del Álgebra, y les mereció el nombre de Enigmas, pues son tan confusas y ocultas, que menos la sutileza de esta divina ciencia, nadie puede llegar a descifrar la verdad, que en la pregunta se esconde*[79]*"*.

També observem la intenció de l'autor de desenvolupar un mètode nou, ja que coneix que han estat molts els autors que han escrit sobre l'"Arte Maior" i considera una bona oportunitat de proposar també ell una nova manera de treballar aquests enigmes que no solament resol, sinó que també en proposa

77 SARAGOSSÀ (1669), 340.

78 En els casos en què no es puguin aplicar directament les dues regles exposades, caldrà procedir a l'extracció de l'arrel tal i com s'explica en el *Libro II. De las Raizes*. Vegeu SARAGOSSÀ (1669), 343-344.

79 SARAGOSSÀ (1669), 345.

de nous. Tot i així ens recorda que no abandona l'estil de l'"Arte Menor" que s'ha emprat en el primer llibre, amb la qual cosa deixa establert el vincle entre l'aritmètica i la seva àlgebra.

> *"En la disposición de las cuestiones hay tanta diversidad, como en los ingenios de los Autores que de la materia escribieron. Esto me dio licencia para intentar nuevo método, con que el Aritmético aprenda a resolver juntamente, y proponer los Enigmas. Guardando pues el estilo del Libro primero, y Arte menor trataremos enigmáticamente de la Proporción simple y compuesta, Alligaciones, Progresiones y Combinaciones*[80]*".*

6.1.- Sobre els enigmes.

En els capítols I al VIII d'aquest llibre d'enigmes, resol problemes de progressions aritmètiques i geomètriques, aliatges, combinacions i proporcions, sempre diferenciant les igualacions (equacions) simples i les compostes. Saragossà aplica totes les regles i principis que ha explicat en els llibres anteriors. Així planteja i resol problemes amb equacions de grau quart completes com ara, en el problema 29: $1Z^4 - 200\ Z^3 + 5740\ Z^2 + 28800\ Z^1 = 1440000$, tot citant el capítol 10 del llibre II *Composición de muchas raíces con negación directa*, on resol arrels d'equacions que tenen un terme negatiu[81]. O bé resol numèricament una equació de grau sis completa, com ara, en el problema 73: $72 = 816\ Z^3 + 408\ Z^2 - 96\ Z^6 - 48\ Z^5 - 204\ Z^1$, tot citant el capítol 13 del llibre II *Negación inversa de las otras potestades,* on resol numèricament arrels d'equacions amb molts termes negatius[82].

En el capítol X *Enigmas Miscellaneos* (problemes 84 al 107), resol el famós problema de Diofant que més tard donaria lloc al Teorema de Fermat (problema 101 de l'*Arithmetica*). L'enunciat és el mateix que presenta Diofant: "*Partir un número quadrado (16) en dos, o tres Quadrados & c.*[83]". El resol amb dues suposicions diferents de partició, i afegeix al final: "*Y variando la suposición, se hallaran infinitas soluciones a la question*[84]". Tot i que s'adona que hi ha infinites solucions, ho resol emprant el llenguatge simbòlic, però no escriu una

80 SARAGOSSÀ (1669), 345.

81 SARAGOSSÀ (1669), 369.

82 SARAGOSSÀ (1669), 407.

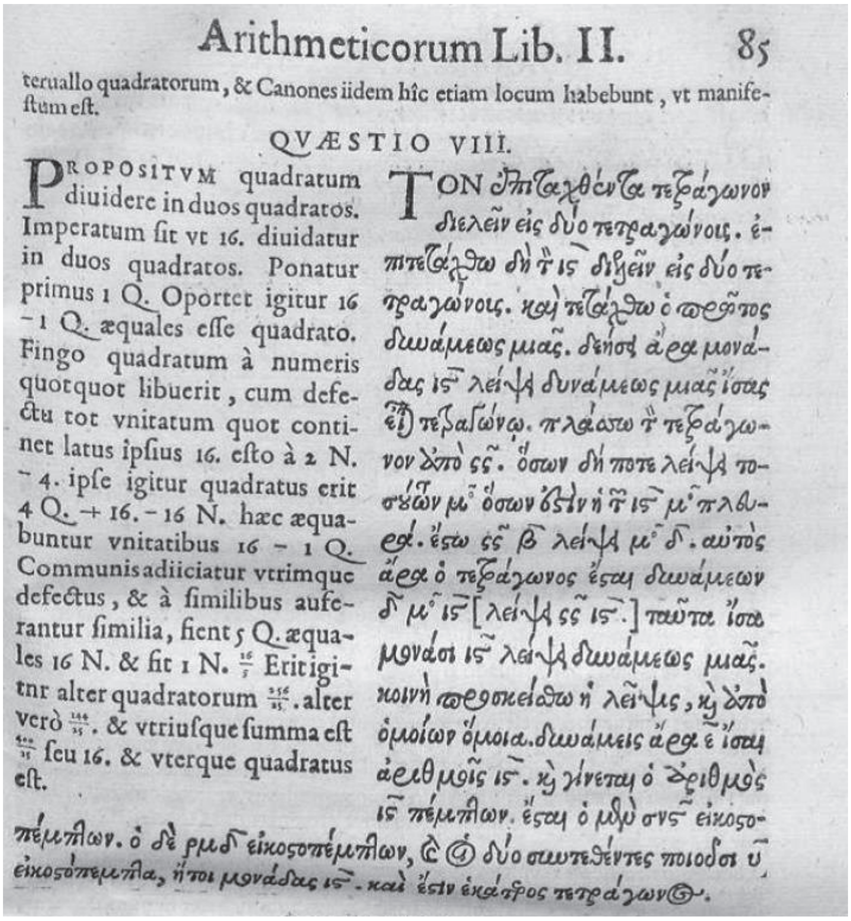
83 SARAGOSSÀ (1669), 434.

84 SARAGOSSÀ (1669), 435.

solució general. A la pàgina següent, Saragossà cita el llibre que està emprant, l'edició greco-llatina de Diofant del jesuïta Gaspar Bachet de Méziriac de l'any 1621, *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libris ex, et de Numeris Multangulis liber unus. Nunc primum Graecè et Latinè editi, atque absolutissimis comentariis illustrati. Auctore Claudio Gaspare Bacheto Meziriaco Sebusiano, V. C. Lutetiae Parisiorum, sumptibus Hieronymi Drouart, via Jacobea, sub scuto Solari*. Saragossà el menciona explícitament:

> *"Para muchas otras questiones admirables de Quadrados, y Cubos vease a Diophanto Libro 2º y 3º & c. Con las notas de Gaspar Bacheto: donde hallarà el curioso sutilísimas questiones de igualación simple*[85]*".*

Si comparem la resolució de Saragossà amb la de Bachet (Figura 6), les diferències són clares.



Arithmeticorum Lib. II. 85

teruallo quadratorum, & Canones iidem hîc etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

Propositvm quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quot continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$. & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ιϛ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος δυνάμεως μιᾶς. δεήσει ἄρα μονάδας ιϛ λεῖψει δυνάμεως μιᾶς ἴσας εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς. ὅσων δή ποτε λεῖψει τοσούτων μο ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν ιϛ μο πλευρά. ἔστω ςς β λεῖψει μο δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ μο ιϛ [λεῖψει ςς ιϛ.] ταῦτα ἴσα μονάσι ιϛ λεῖψει δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. δυνάμεις ἄρα ε ἴσαι ἀριθμοῖς ιϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν σνϛ εἰκοσοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ εἰκοσοπέμπτων, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι υ εἰκοσόπεμπτα, ἤτοι μονάδας ιϛ. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

Figura 6. Problema VIII del llibre 2n de Diofant (edició de Bachet), famós a causa del teorema de Fermat[86]

85 SARAGOSSÀ (1669), 436.

86 BACHET (1621), 85.

De fet, Saragossà, amb el mateix enunciat i procediment que Bachet en el seu Diofant, no empra el mateix número per multiplicar la incògnita i restar-li 4 i, per tant, li dóna un altre resultat. A l'obra de Saragossà[87] els quadrats que sumen 16 són: 1600/676 i 9216/676, i comprova que la seva suma és 10816/676 = 16.

En el capítol XI, *Enigmas de segundas raízes* (problemes 108 al 113), Saragossà resol problemes amb vàries incògnites, és a dir, resol sistemes d'equacions. Comença definint que s'anomenen segones arrels a la segona, tercera i quarta lletra que representen la incògnita, totes diferents, en les seves paraules:

> *"Segundas Raizes se llaman, la segunda, tercera y quarta letra &c. Que tal vez se suponen para resolver la question: porque si los números, que se han de hallar, son muchos, es necessario suponer por el 1º 1z, por el 2º 1y, por el 3º 1x & c., o qualesquiera otras letras del Abecedario; pues sin ellas, o no se puede resolver la question, o ha de ser con mucha confusion y Trabajo[88]".*

Cal remarcar que a l'època no era usual emprar sistemes d'equacions i, menys encara, de tres equacions amb tres incògnites representades amb tres lletres diferents[89]. De fet, Saragossà planteja dues equacions i les redueix a una incògnita. Aplica aquests resultats resolent la tercera equació.

Presentem ara l'enunciat de la qüestió de tres incògnites (Qüestió 113): "*Hallar 3 numeros que el producto del 1º y 2º + el Qº del 1º sea 48, y el producto del 1º y 3º – el Qº del 1º sea 32: y los Quadrados del 1º y 3º al Qº del 2º tengan la proporción que 5 à 2* [90]". Sigui el 1er *1z*, el 2on *1y*, el 3r *1x* . La resolució consisteix en plantejar la primera equació que és $1zy + 1z^2 = 48$; la segona equació $1zx - 1z^2 = 32$ i aïllar la *z* per construir la tercera equació i resoldre-la. La solució és 4, 8 i 12.

Més interessants són altres capítols, com ara el capítol IX dedicat als enigmes de geometria, on resol problemes de geometria de manera retòrica amb equacions algebraiques i sense dibuixar cap figura geomètrica. Per poder resoldre'ls, presenta primer tot un seguit de principis i teoremes que cal dominar, relacionats amb la mesura de figures, reducció d'una figura a una altra i l'augment i disminució en qualsevol proporció. Les regles generals que cita al començament estan inspirades en la seva versió dels *Elements*

87 SARAGOSSÀ (1669), 434.

88 SARAGOSSÀ (1669), 439.

89 Sobre la resolució d'equacions amb més d'una incògnita vegeu HEEFFER (2010) i ROMERO-VALLHONESTA (2011).

90 SARAGOSSÀ (1669) , 444.

d'Euclides[91]:

"***Reglas Generales***

1º Todas las Superficies semejantes, tienen entre si la proporción que los Cuadrados de los lados semejantes.

2º Todos los Cuerpos sólidos semejantes tienen entere si la proporción que los Cubos de sus lados semejantes.

3º La circunferencia de una Columna igualmente gruesa (cuadrada, o redonda) multiplicada por su altura da la Superficie.

4º La Superficie de la base de una columna cuadrada, o redonda, multiplicada por su altura, da la solidez de la Columna.

5º La Superficie de la base de una pirámide cuadrada, o redonda, multiplicada por 1/3 de su altura, da la solidez de la pirámide[92]".

Resol tres problemes d'igualació simple i tres d'igualació composta, tots ells amb una magnitud contínua com incògnita. Tots demanen una mesura d'una dimensió, ja sigui un costat, un radi, una altura o una base d'una figura geomètrica.

A continuació presentem la resolució del problema 81 de Geometria que empra aquestes regles, amb una igualació (equació) composta[93]: "*Dos Espheras, o globos tienen las superficies como 9 à 16; y la diferencia de los radios es 2. Pidense los radios*"[94] (Figura 7). En particular, Saragossà empra la primera d'aquestes regles generals i també altres principis, com ara l'algorisme de resolució de l'equació de segon grau[95] i la reducció del caràcter més gran a la unitat, ja explicats en la secció anterior d'aquest article.

Sigui el radi de l'esfera menor $1Z^1$, el radi de l'esfera major serà $1Z^1 + 2$. Els seus respectius quadrats seran $1Z^2$ i $1Z^2 + 4Z^1 + 4$. Seguint la primera

91 El propi Saragossà les presentà de nou, però per separat, en la seva versió *Euclides Nuevo-Antiguo. Geometria especulativa y pràctica de los planos y sólidos* (1678) posterior a l'*Arithmetica*. De fet, Saragossà cita el capítol 9 del llibre 4 de la seva *Arithmetica* (SARAGOSSÀ,1678: 152).

92 SARAGOSSÀ (1669), 421-422.

93 També resol problemes relacionats amb una igualació simple, on intervé un únic caràcter. Així és l'enunciat de la qüestió (problema) 78 de Geometria (Igualació simple): "*Dentro de un circulo, ai un Triangulo equilatero, la suma de su lado, y del semidiametro es 10: pidese al lado, y semidiametro*" (SARAGOSSÀ, 1669: 422). Vegeu demostració completa a EROLES (2019).

94 SARAGOSSÀ (1669), 423.

95 Exemple IV de la *Regla Particular del Valor de la Lletra*: Sigui $1Z^2–3Z^1=40$. El quadrat de 3 és 9; el quàdruple de 40 és 160 que, afegit a 9, serà 169 i la seva $\sqrt{3}$ és 13. Com que el caràcter menor $3Z^1$ té el signe – se sumaran 3 i 13, donant 16, i la seva meitat són 8, valor de la Z^1. (SARAGOSSÀ, 1669: 341).

regla general, les superfícies de les esferes seran proporcionals als seus quadrats, degut a que la proporció de les superfícies és 9 a 16, també ho serà la dels quadrats. Així $1Z^2 : 1Z^2 + 4Z^1 + 4$ com 9 : 16. Aplicant el principi del producte de mitjos és igual al producte dels extrems, obtenim: $16Z^2 = 9Z^2 + 36Z^1 + 36$. Restant $9Z^2 + 36Z^1$ a cada banda, quedarà $7Z^2 - 36Z^1 = 36$. Reduïm l'equació pel §141 del llibre tercer, que és la reducció del caràcter més gran a la unitat, i queda $1Z^2 - 36Z^1 = 252$. La solució d'aquesta equació és 42 per l'apartat §152 del llibre III: El quadrat de 36 és 1296 i el quàdruple de 252 és 1008 que, sumat a 1296 dóna 2304 . La seva $\sqrt{}^2$ és 48. Com que el caràcter menor 36 Z^1 té signe negatiu, sumarem 36 i 48, obtenint 84 i la seva meitat és 42, el valor de Z^1. Ara falta dividir aquesta arrel de l'equació reduïda per 7, per desfer el canvi de variable, d'acord amb el principi descrit a la secció anterior (§141 del llibre III). Obtenim el valor $Z^1 = 6$, que correspon al radi de la esfera menor. Sumant-li $Z^1 + 2$, obtenim 8 per al radi de l'esfera major.

143 *Queſtion 81 de Geometria.*

Dos Eſpheras, ò globos tienen las ſuperficies como 9 à 16; y la diferencia de los radios es 2. Pidenſe los radios.

Sea el radio del globo menor $1ʒ^{1}$, y del maior $1ʒ^{1} + 2$: ſus Quadrados ſeràn $1ʒ^{2}$ y $1ʒ^{2} + 4ʒ^{1} + 4$: y pues las ſuperficies ſon proporcionales a los Quadrados (§.139.) ſiendo las ſuperficies como 9 a 16; ſeràn tanbien los Quadrados como 9 a 16: aſsi $1ʒ^{2}$ a $1ʒ^{2} + 4ʒ^{1} + 4$: y el Producto de los medios $16ʒ^{2}$ igual al de los eſtremos $9ʒ^{2} + 36ʒ^{1} + 36$: quitando de cada parte $9ʒ^{2} + 36ʒ^{1}$, quedaràn $7ʒ^{2} - 36ʒ^{1}$ ∽ 36: reduzida la igualacion (*Lib.*3.§.141.) ſerà $1ʒ^{2} - 36ʒ^{1}$ ∽ 252: la $\sqrt{}^{2}$ de eſta igualacion (*Lib.*3.§.152.) es 42: partida por 7: (*Lib.*3.§.141.) ſale 6 valor de $1ʒ^{1}$, que es el radio del globo menor, + 2 ſerà 8 el otro radio.

Figura 7. Resolució de la Qüestió 81 de Geometria[96]

96 SARAGOSSÀ (1669), 424.

En la resolució podem observar clarament com fa servir la metodologia d'Igualació (planteig de l'equació), Reducció (deixa el terme de la potència més gran amb coeficient la unitat) i Valor de la Lletra (resol l'equació), que recorden les tres fases de l'àlgebra de Viète: zetètica, porística i exegètica. En la Igualació identifica les incògnites amb la simbologia de $1Z^1$, notació on apareix la unitat acompanyant el caràcter, empra el llenguatge simbòlic per identificar, en aquest cas, el radi de dues esferes. Aquesta simbologia, com hem comentat anteriorment, s'associa més a autors anteriors com Aurel que no pas a Viète, el qual usaria tan sols la Z. A continuació, utilitza els principis i teoremes coneguts relacionats amb proporcions que s'han presentat prèviament per manipular l'equació fins aïllar el caràcter que busquem resoldre en un costat de l'equació. D'aquesta manera la "Quantitat" que es mostra a l'altra banda de l'equació és el "Valor de la Lletra". Notem que en aquest cas el llenguatge simbòlic el fem servir per identificar el radi d'un cercle, valor que considera una especie geometrica. Tot i així a l'*Arithmetica* l'autor no treballa amb altres magnituds com àrees o volums.

També resol un problema de geometria amb resultat irracional, en l'últim capítol, capítol XII, *Enigmas de números irracionales* (problemes 114 al 120). Veiem ara l'enunciat i la resolució de la qüestió (problema) 119 dels irracionals que tracta de geometria: "*Hallar el lado y diametro de una quadrado dada la suma 10*[97]". Procedim a detallar la resolució del problema tal i com ho fa Saragossà, sense dibuixar cap figura geomètrica. Sigui el costat $1Z$, i el diàmetre $10–1Z$: el quadrat del costat $1Z$ és $1Z^2$ el quadrat del diàmetre $10–1Z$ és $100–20\ Z + 1Z^2$ i doncs el quadrat del diàmetre és doble del quadrat del costat (Llib. 3. Apartat 130) serà $100–20\ Z + 1Z^2 = 2Z^2$. Aplica la reducció i resol l'equació (troba el valor de la lletra emprant el llibre III[98]), donant-li el costat $\sqrt{200}–10$ i el diàmetre $20–\sqrt{200}$. I tot seguit en fa la prova.

Acaba el llibre diferenciant entre exercicis i mètode, assenyalant que el que ensenya i facilita les operacions és fer exercicis i que, pel que fa al mètode analític de resolució, amb aquests 120 problemes d'exemple n'hi ha prou: *El exercicio es Maestro, que enseña, y facilita las operaciones. Para metodo bastan estos exemplos*[99].

97 SARAGOSSÀ (1669), 447.

98 Ell diu apartat 148, que és la regla particular.

99 SARAGOSSÀ (1669), 448.

7.- Reflexions finals.

Les evidències mostrades en l'anàlisi de l'*Arithmetica Universal* (1669) de Saragossà fan palès que aquesta obra adapta idees i fonaments de l'obra *In artem analyticen isagoge* (1591) de Viète. D'una banda, en la resolució d'equacions Saragossà descriu tres fases que ens recorden les presentades per Viète a la *Isagoge* (zetètica, porística, exegètica), tot i que amb noms i desenvolupaments diferents. Tot el procediment analític que descriu i aplica Saragossà en els seus problemes reflecteix la visió de Viète i la seva àlgebra especiosa, encara que deixa de banda les lletres per representar les magnituds donades i l'aplicació de l'àlgebra a la geometria (només resol 6 problemes de geometria) que és fonamental en l'àlgebra de Viète. Així, per exemple, Saragossà fa servir els mateixos principis generals de la *Isagoge* per assolir la fase d'igualació, i la propietat anomenada "hypobibasmo" com a depressió dels caràcters, a la fase de reducció. D'altra banda, Saragossà, com Viète, destaca la rellevància del llenguatge simbòlic explicant els seus nous símbols i comparant-los amb els simbolismes de l'Art Major del segle anterior. Empra la notació de caràcters, sense discriminar entre majúscules, minúscules, primeres o últimes lletres de l'alfabet. Aquests caràcters es fan servir per identificar la incògnita, però també la quantitat coneguda, encara que al llarg del llibre no hem trobat cap equació totalment amb lletres. La metodologia analítica considera cert el caràcter, que pot ser manipulat segons els teoremes ja demostrats. Finalment es determina el valor que amaga la lletra demostrant que la hipòtesi era certa. Sens dubte, l'*Arithmetica* de Saragossà és una mostra del coneixement de l'àlgebra de Viète a Espanya.

Però l'*Arithmetica* de Saragossà també resulta original en relació a la classificació de les matemàtiques i, en particular, de l'aritmètica, que és universal. Saragossà tracta en primer lloc l'"Arte Menor" i a continuació l'"Arte Maior" (diferent de l'Art major del segle XVI), i reserva el terme "Àlgebra" per referir-se a l'Art analítica de Viète. De l'"Arte Menor", o Aritmètica, cal aprendre els fonaments de les matemàtiques. L'"Aritmètica major", presentada més endavant com a "Arte Maior", actua com a pas intermedi resolent les arrels, per culminar l'extensió a l'àlgebra. Tracta l'"Arte Maior" independentment de l'"Arte Menor" i en el seu desenvolupament observem la seva intenció de generalitzar els conceptes a través del simbolisme dels caràcters. Finalment, l'àlgebra representa un últim esglaó més complex que l'"Arte Maior", en el qual es fonamenta. Saragossà entén l'àlgebra com a eina analítica de resolució de problemes, cosa que presenta una subtilesa que permet, a qui treballi amb ella, desxifrar qualsevol problema que es plantegi, coincidint amb el desig de Viète de resoldre tots els problemes generalitzant la resolució d'equacions. Aquest interès generalitzador, però, va més enllà de la resolució d'equacions. En la classificació de les matemàtiques, segons Saragossà, l'aritmètica ocupa el primer lloc, en sentit universal, i l'àlgebra està continguda dins l'aritmètica, essent la part més subtil i que es pot aplicar a les altres parts de la matemàtica; tanmateix, tot i que ho afirma i n'és conscient, no desenvolupa aquesta aplicació.

Darrera d'aquesta proposta d'organització de l'aritmètica, la intenció didàctica de Saragossà juga un paper crucial. Diversos són els exemples que il·lustren el seu desig de transmissió del coneixement: l'índex, la taula de continguts i la taula explicativa dels caràcters que es presenten al final de l'obra o la multitud d'advertències que trobem entre línies en tots els capítols.

Pel que fa al significat de l'obra no podem oblidar que ell és jesuïta, per tant coneix i deu haver llegit obres com les de Clavius o Bachet. La seva tasca docent al Col·legi Imperial i altres centres jesuïtes també ens fa preguntar si amb aquesta obra Saragossà pot haver contribuït a la difusió de l'Art analítica de Viète a Espanya. Sigui com sigui, és innegable que el seu intent de desenvolupar una metodologia pròpia en l'àlgebra mereix ser reconegut com un referent de les matemàtiques espanyoles del segle XVII, i una contribució original a la història de l'àlgebra espanyola on, fins aquest moment, es tractava només amb una art major o una regla de la cosa més vinculada a les obres del Renaixement.

8.- Bibliografia.

- BOS, Henk (2001) *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction,* New York, Springer-Verlag.
- CAJORI, Florian (1928-29) *A history of mathematical notations. I. Notations in Elementary mathematics. II. Notations Mainly in Higher Mathematics*, Chicago, The Open Court Publishing Company.
- CAMPEDELLI, Luigi (1972) "Marino Gethaldi". Dins: *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. 5, 381-383.
- CHEMLA, Karine (1995) "Algebraic equations East and West until the

Middle Ages". Dins: HASHIMOTO, K., JAMI, C., SKAR, L. (eds). *East Asian Science: Tradition and Beyond: Papers from the Seventh International Conference on the History of Science in East Asia*, Kyoto, Osaka, Kansai University Press, 83-89.
- DOU, Albert (1990) *Las Matemáticas en la España de los Austrias,* Universitat Autònoma de Barcelona.
- EDWARDS, Anthony William F. (2002) (1987 1ª edició) *Pascal's Arithmetical Triangle*. *The Story of a Mathematical Idea*, New York, Oxford University Press.
- EROLES CRIVILLÉ, Anna (2019) *La introducció de l'àlgebra de Viète a Espanya*, Treball final de grau, Barcelona, FME, Universitat Politècnica de Catalunya. Consultat a: https://upcommons.upc.edu/handle/2117/168366.
- HEEFFER, Albrecht (2010) "From the second unknown to the symbolic equation". Dins: HEEFFER, A. i VAN DYCK, M. (eds.), *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics,* London, College Publications, 57-101.
- HÉRIGONE, Pierre (1642) *Cursus Mathematicus*, vol. VI, Paris, Chez Henry le Gras.
- ITARD, Jean (1972) "Jacques De Billy". Dins: *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. 2, 131.
- KELLER, Agathe (1972) "Gaspar Schott". Dins: *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. 12, 210-211.
- KNOBLOCH, Eberhard (1988) "Sur la vie et l'oeuvre de Christopher Clavius (1538-1612)", *Revue d'histoire des sciences*, vol. XLI-3/4, 331-356.
- MAHONEY, Michael S. (1980) "The beginnings of algebraic thought in the seventeenth century. A: GAUKROGER, S. (ed.) *Descartes. Philosophy, Mathematics and Physics,* Brighton, The Harvester Press, 141-155.
- MANCOSU, Paolo (1997) *Philosophy of Mathematics & Mathematical Practice in the Seventeenth Century,* Oxford, Oxford University Press.
- MASSA-ESTEVE, M. Rosa (2006) "Algebra and Geometry in Pietro Mengoli (1625-1686)", *Historia Mathematica*, 33 (1), 82-112.
- MASSA-ESTEVE, M. Rosa (2008) "Symbolic language in early modern mathematics: The Algebra of Pierre Hérigone (1580 – 1643)", *Historia Mathematica*, 35, 285-301.
- MASSA-ESTEVE, M. Rosa; ROMERO-VALLHONESTA, Fàtima (2009-2010) "El triangle aritmètic de Blaise Pascal (1623 – 1662)", *Biaix,* 28-29, 6-17.

- MASSA-ESTEVE, M. Rosa (2012a) "The role of symbolic Language in the transformation of mathematics", *Philosophica,* 87, 153-193.
- MASSA-ESTEVE, M.Rosa (2012b) "Spanish Arte Mayor in the Sixteenth century". Dins: ROMMEVAUX, S.; SPIESSER, M.; MASSA-ESTEVE, M. R. (eds), *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance*, Paris, Honoré Champions Éditeur, 103-126.
- NAVARRO BROTONS, Víctor (1996) "Los jesuitas y la renovación científica en la España del siglo XVII", *Studia Historica*, 14, 15-44.
- NAVARRO BROTONS, Víctor (2018) "José de Zaragoza", *DB~e*, Real Academia de la Historia, http://dbe.rah.es/biografias/6515/jose-de-zaragoza.
- NAVARRO LOIDI, Juan (2005) *Los Elementos de Euclides en Castellano*. Institut de Batxillerat a Distància de Gipúzcoa. Recuperat de http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=10674:los-elementos-de-euclides-en-castellano&catid=61:libros-matemcos&Itemid=45
- NAVARRO LOIDI, Juan; LLOMBART, Jose (2008) "The introduction of logarithms into Spain", *Historia Mathematica*, 35 (2), 83-101.
- OAKS, Jeffrey A. (2018) "François Viète's revolution in algebra", *Archive for History of Exact Sciences*, 72, 245-302.
- PACIOLI, Luca (1494) *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proporcionalità,* Venice, Paganino de Paganini
- PEÑALVER, Patricio (1930) *Bosquejo de la matemática española en los siglos de la decadencia,* Sevilla, Discurs d'obertura del curs acadèmic 1930-31.
- PLA CARRERA, Josep; VIADER CANALS, Pelegrí (Eds.) (1999) *René Descartes. La geometria*, Barcelona, Institut d'Estudis Catalans.
- RASHED, Roshdi (1974) "Résolution des équations numèriques et algèbre: Sharaf-al-Din al Tusi, Viète", *Archives for History of Exact Sciences*, 12, 244-290.
- RECASENS GALLART, Eduard (1991) *La Geometria Magna in Minimis de J. Zaragoza. El Centre Mínim i el lloc 5è d'Apol·loni* (Tesis Doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona.
- RECASENS GALLART, Eduard (1994) "J. Zaragoza's Centrum Minimum, an Early Version of Barycentric Geometry", *Archive for History of Exact Sciences*, 46, 285-320.
- RECASENS GALLART, Eduard (2007) "El cultivo de las matemáticas puras en la España del siglo XVII". Dins: NAVARRO BROTONS, V. i EAMON, W. (eds), *Más allá de la Leyenda Negra. España y la revolución*

Científica, Valencia, Institut d'Història de la Ciència i Documentació López Piñero.

- RECASENS GALLART, Eduard (2010) *Zaragoza i Vilanova, José (1627 -1674)*. Recuperat de http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=10498:zaragoza-i-vilanova-jose-1627-1674&catid=45:biograf-de-matemcos-espas&Itemid=33
- ROMERO-VALLHONESTA, Fàtima (2011) "The rule of "quantity" in Spanish algebras of the 16th Century. Possible sources", *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica.* Nova època, 4, 93-115.
- ROMERO-VALLHONESTA, Fàtima (2018) *L'àlgebra de la Península Ibèrica al segle XVI* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona. http://hdl.handle.net/10803/650339.
- ROMERO-VALLHONESTA, Fàtima; MASSA-ESTEVE, M. Rosa (2018) "The main sources for the Arte Mayor in sixteenth century Spain", *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 33(2), 73-95.
- SALAVERT FABIANI, Vicent L. (1994) "Aritmética y Sociedad en la España del siglo XVI". Dins: GARMA, S; FLAMENT, D. i NAVARRO, V. (eds.), *Contra los titanes de la rutina. Encuentro en Madrid de investigadores hispano-franceses sobre la historia y la filosofia de la matemàtica,* Madrid, CSIC, 51-69.
- STEDALL, Jacqueline (2011) *From Cardano's great art to Lagrange's reflections: filling a gap in the history of algebra*, Zurich, European Mathematical Society.
- VIÈTE, François (1591) *In artem Analyticen Isagoge. Seorsim excussa ab Opere restitutae mathematicae analyseos, seu àlgebra nova,* Turonis, Apud Iametium Mettayer.
- WITMER, T. (Ed.) (2006) *The Analytic Art. Nine Studies in Algebra, Geometry and Trigonometry from the Opus Restitutae Mathematicae Analyseos, seu Algebrâ Novâ. François Viète*, Mineola, New York, Dover Publications Inc.
- ZARAGOZA, Joseph (1669) *Arithmetica universal que comprehende el Arte Menor y Maior, Algebra vulgar y especiosa*, Valencia, Geronimo Vilagrasa.
- ZARAGOZA, Joseph (1678) *Euclides Nuevo-Antiguo. Geometria especulativa y pràctica de los planos y sólidos, Madrid.* Por Antonio Francisco de Zafra.