UNIVERSITAT DE BARCELONA
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

TEORIA D'HOMOLOGIA I TEOREMES DE PUNT FIX

Autor: Marçal Ainsa i Bertran

Director: Dr. Javier Gutiérrez Marín
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 20 de juny de 2019

Abstract

We have done a study focused at the simplicial homology to acquire the tools needed to proof the fixed-point theorems of Brouwer and Lefschetz. Firstly, we have defined the basic concepts, like simplex, simplicial complex and simplicial approximation. Afterwards, we have studied the concepts chain of simplex and simplicial chain complex in order to reach to the homology groups. The intensive study of the properties of these groups allowed us to characterize topological spaces and finally proof the two fixed-point theorems previously mentioned.

Resum

Hem realitzat un estudi centrat en l'homologia simplicial per tal d'adquirir les eines necessàries per provar els teoremes de punt fix de Brouwer i de Lefschetz. Primerament hem definit els conceptes bàsics, com els símplex, els complexos simplicials i les aproximacions simplicials. Més endavant hem treballat els conceptes de cadenes de símplex i complex de cadenes per tal d'arribar als grups d'homologia. L'estudi intensiu de les propietats d'aquests grups ens ha permès caracteritzar espais topològics i finalment provar els dos teoremes de punt fix mencionats.

2010 Mathematics Subject Classification. 55U10, 55U15

Agraïments

Vull agrair al meu tutor, Dr. Javier Gutiérrez haver-me introduït en el món de la topologia algebraica i haver tingut sempre un tracte cordial i proper. Vull agrair també a la meva família l'anhel de coneixement que em van saber inculcar des de ben petit, l'oportunitat que m'han brindat en costejar els meus estudis i el seu amor i suport sempre incondicionals.

Índex

1 Introducció

La topologia sempre ha estat una branca de les Matemàtiques que m'ha despertat un gran interès com a generalització de la geometria i el seu abast a conceptes més generals. En aquest sentit, durant les classes de topologia de superfícies em va fascinar l'estudi de les homotopies i el grup fonamental, i la informació que ens poden donar sobre els espais topològics. El pas a la topologia algebraica, i més concretament a la teoria d'homologia ha estat doncs bastant natural.

Els teoremes de punt fix de Brouwer i de Lefschetz aborden l'existència de punts fixos en funcions contínues d'un mateix espai. El primer ho fa per espais topològics homeomorfs al n-disc tancat $\mathbb{D}^n$, mentre que el segon ho fa de manera més general per poliedres compactes. Per tal de provar aquests teoremes, és necessari conèixer l'homologia simplicial.

En aquest treball estudiarem en profunditat els complexos simplicials, que són la peça fonamental de la qual parteix l'homologia simplicial. També estudiarem les aproximacions simplicials i les subdivisions baricèntriques, que ens permeten estudiar espais topològics a priori molt generals de manera més senzilla. Associats als complexos simplicials hi ha la clau de volta de l'homologia simplicial: els grups d'homologia. Per definir aquests grups primerament estudiarem els complexos de cadenes simplicials, i un seguit d'aplicacions que els relacionen entre ells. Després de definir els grups d'homologia, n'estudiarem les seves propietats i com es relacionen amb la topologia dels poliedres, demostrant el teorema d'Euler-Poincaré i introduint els nombres de Betti i els coeficients de torsió. En aquests moments ja serem capaços de demostrar el teorema del punt fix de Brouwer, juntament amb el teorema de no-retracció i el d'invariància de dimensió. Posteriorment definirem el grau d'una aplicació i n'estudiarem les propietats. Finalment, usarem tots els coneixements obtinguts per tal de demostrar el teorema del punt fix de Lefschetz, i demostrarem de manera alternativa el teorema del punt fix de Brouwer a partir del de Lefschetz.

2 Complexos Simplicials

2.1 Complexos simplicials finits

El concepte de símplex és fonamental en diverses branques de les matemàtiques com la topologia, la teoria de grafs, l'anàlisi real, etc. Per tal de donar la definició de símplex, primer cal recordar, tal com farem a continuació, un seguit de conceptes importants.

Definició 2.1. *El conjunt $A = \{a_0, a_1, ..., a_k\}$, $k \geq 1$, de punts de $\mathbb{R}^n$ és* ***geomètricament independent*** *si i només si el conjunt $S = \{a_1 - a_0, a_2 - a_0, ..., a_k - a_0\}$ de vectors de $\mathbb{R}^n$ és linealment independent. Un conjunt format per un únic punt es considera geomètricament independent.*

Definició 2.2. *Un subconjunt H de $\mathbb{R}^n$, amb n suficientment gran, és un* ***hiperplà*** *de dimensió k de $\mathbb{R}^n$ si podem trobar un subespai V^k de dimensió k de $\mathbb{R}^n$ i un vector x de $\mathbb{R}^n$ tals que:*

$$H = x + V^k$$

Proposició 2.3. *Un subconjunt $A = \{a_0, a_1, ..., a_k\}, k \geq 1$ de $\mathbb{R}^n$ és geomètricament independent si i només si tots els punts d'A no pertanyen a un hiperplà de dimensió $k - 1$.*

Demostració. Suposem que $A = \{a_0, a_1, ..., a_k\}$ és geomètricament independent, és a dir, el conjunt $\{a_1 - a_0, a_2 - a_0, ..., a_k - a_0\}$ és linealment independent. Considerem H^{k-1} un hiperplà de $\mathbb{R}^n$ de dimensió k-1 que contingui $a_0, a_1, ..., a_k$, és a dir, considerem que existeix un vector $x \in \mathbb{R}^n$ i un subespai V^{k-1} de dimensió k-1 tal que $a_0, a_1, ..., a_k \in x + V^{k-1}$. Per tant, $a_0 - x, a_1 - x, ..., a_k - x \in V^{k-1}$. Si restem el primer vector a la resta, obtenim que

$$a_1 - a_0, ..., a_k - a_0 \in V^{k-1}$$

Però això és una contradicció, ja que un subespai de dimensió k-1 no pot contenir un conjunt de k vectors linealment independents.

Suposem ara que el conjunt $\{a_1 - a_0, a_2 - a_0, ..., a_k - a_0\}$ és linealment dependent. D'aquesta manera, el subespai de $\mathbb{R}^n$ generat per aquests vectors és de dimensió menor o igual que k-1, i per tant podem assumir que existeix un subespai V^{k-1} de dimensió k-1 que conté tots els vectors $a_1 - a_0, ..., a_k - a_0$. Així doncs, considerem l'hiperplà $a_0 + V^{k-1} = H^{k-1}$ que conté a_0. Donat que $a_i - a_0 \in V^{k-1}$ per cada $i = 1, 2, ..., k$, tenim que $a_i \in H^{k-1}$ per $i = 0, 1, ..., k$. Per tant, tots els vectors $a_0, a_1, ..., a_k$ pertanyen a un hiperplà de dimensió k-1. □

Proposició 2.4. *Un subconjunt $S = \{a_0, a_1, ..., a_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ és geomètricament independent si i només si per α_i reals arbitraris,*

$$(i) \sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i = 0 \qquad (ii) \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0$$

impliquen $\alpha_i = 0$ per cada $i = 0, 1, ..., k$.

Demostració. Suposem que S és geomètricament independent, és a dir, el conjunt $\{a_1 - a_0, a_2 - a_0, ..., a_k - a_0\}$ és linealment independent. Si substituïm el valor de α_0 de (ii) en (i), obtenim

$$(-\alpha_1 - \alpha_2 - ... - \alpha_k)a_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0$$

que és equivalent a

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (a_i - a_0) = 0$$

del qual se n'extreu que $\alpha_i = 0$, per cada $i = 1, 2, .., k$. A més, de (ii) es segueix que $\alpha_0 = 0$.

Suposem ara que la condició donada es compleix i provem que S és geomètricament independent. Considerem

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i (a_i - a_0) = 0$$

on β_i són nombres reals. Així doncs, tenim

$$-\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i\right) a_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i a_i = 0$$

Si definim $\beta_0 = -\sum_{i=1}^{k} \beta_i$, obtenim que $\sum_{i=0}^{k} \beta_i a_i = 0$ i a més $\sum_{i=0}^{k} \beta_i a_i = 0$. Per hipòtesi, $\beta_i = 0$ per $i = 0, 1, ..., k$ i per tant el conjunt $\{a_1 - a_0, a_2 - a_0, ..., a_k - a_0\}$ és linealment independent. Això demostra que S és geomètricament independent. □

Proposició 2.5. *Sigui $A = \{a_0, a_1, ..., a_k\}$ un conjunt de $\mathbb{R}^n$ geomètricament independent. Existeix un únic hiperplà de dimensió k que conté tots els punts d'A.*

Demostració. L'existència és immediata, ja que si considerem V^k el subespai de $\mathbb{R}^n$ generat pel conjunt linealment independent $\{a_1 - a_0, a_2 - a_0, ..., a_k - a_0\}$, l'hiperplà $a_0 + V^K$ conté tots els punts $a_0, a_1, ..., a_k$.

Per provar la unicitat, suposem que hi ha dos hiperplans H^k i F^k de dimensió k que contenen els punts $a_0, a_1, ..., a_k$. Això implica que existeixen dos subespais V^k i W^k de dimensió k i dos vectors $x, y \in \mathbb{R}^n$ tals que

$$H^k = x + V^k$$

$$F^k = y + W^k$$

Donat que $a_0, a_1, ..., a_k \in H^k$, se'n dedueix que $a_1 - a_0, a_2 - a_0, ..., a_k - a_0 \in V^k$. De la mateixa manera, $a_1 - a_0, a_2 - a_0, ..., a_k - a_0 \in W^k$. Com que el conjunt $\{a_1 - a_0, a_2 - a_0, ..., a_k - a_0\}$ és linealment independent i V^k i W^k són espais de dimensió k que el contenen, obtenim que $V^k = W^k$. D'aquesta manera, H^k i F^k són dues classes laterals del mateix subespai V^k. La intersecció de dues classes laterals és o bé disjunta o bé idèntica a les classes. Donat que les dues classes laterals contenen els punts $a_0, a_1, ..., a_k$, se'n conclou que $H^k = F^k$. □

Proposició 2.6. *Sigui $A = \{a_0, a_1, ..., a_k\}$ un conjunt de $\mathbb{R}^n$ geomètricament independent. Cada punt de l'hiperplà que passa pels punts d'A es pot expressar de manera única com*

$$h = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i \quad on \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$$

Demostració. L'hiperplà que conté el conjunt A és el conjunt de tots els vectors h que satisfan la condició

$$h = a_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (a_i - a_0)$$

on α_i són nombres reals únics. Això significa que h es pot expressar de manera única com

$$h = \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) a_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = \alpha_0 a_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i$$

on $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$. □

Definició 2.7. *Sigui $A = \{a_0, a_1, ..., a_k\}$ un conjunt de $\mathbb{R}^n$ geomètricament independent, i sigui h un punt qualsevol de l'hiperplà que conté $a_0, a_1, ..., a_k$. Si escrivim h de la forma*

$$h = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i \quad on \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$$

*els nombres reals $a_0, a_1, ..., a_k$ estan unívocament determinats per A i s'anomenen les **coordenades baricèntriques** del punt h respecte el conjunt A.*

Un cop hem considerat aquests conceptes, podem introduir la definició de símplex.

Definició 2.8. *Sigui $A = \{a_0, a_1, ..., a_k\}$ un conjunt de $\mathbb{R}^n$, $n \geq k$ geomètricament independent. El **símplex de dimensió k** o **k-símplex** definit pel conjunt A i denotat per σ^k és el conjunt de tots els punts $x \in \mathbb{R}^n$ tals que*

$$x = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i \quad on \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0$$

per cada $i = 0, 1, ..., k$.

És a dir, el k-símplex σ^k definit per A és el conjunt de tots els punts de l'hiperplà que passa per A que tenen coordenades baricèntriques respecte a A no negatives, i per tant és l'envolupant convexa d'aquests punts. Els punts $a_0, a_1, ..., a_k$ s'anomenen els **vèrtex** del símplex σ^k. Així doncs, els 0-símplex són punts, els 1-símplex són segments, els 2-símplex són triangles, etc. Normalment escriurem $\sigma^k = \langle a_0, a_1, ..., a_k \rangle$ per indicar que σ^k és el k-símplex de vèrtex $a_0, a_1, ..., a_k$.

Definició 2.9. *Sigui $\sigma^k = \langle a_0, a_1, ..., a_k \rangle$ un k-símplex. El conjunt de punts de σ^k que tenen coordenades baricèntriques estrictament positives s'anomena el **símplex obert** σ^k.*

Definició 2.10. *Siguin σ^p, σ^q, $p \leq q \leq n$ dos símplex de $\mathbb{R}^n$. σ^p és una **cara p-dimensional** de σ^q si cada vèrtex de σ^p és també un vèrtex de σ^q. Les cares 1-dimensionals s'anomenen **arestes**.*

Definició 2.11. *Un **complex simplicial (finit)** K és un conjunt finit de símplex de $\mathbb{R}^n$ que satisfà les condicions següents:*

(i) Si $\sigma \in K$, totes les cares de σ també són de K.

(ii) Si σ i τ són símplex de K, llavors o bé $\sigma \cap \tau = \emptyset$ o bé $\sigma \cap \tau$ és una cara comuna de σ i τ.

*Definim també la **dimensió** d'un complex simplicial K, que denotarem dim K, la qual serà -1 si $K = \emptyset$ o bé $n \geq 0$ si n és el major enter tal que K té un n-símplex.*

Definició 2.12. *Sigui σ^k un símplex. Definim la* ***clausura*** *de σ^k, Cl(σ^k), com el complex simplicial format per totes les cares de σ^k.*

2.2 Poliedres i triangulacions

Definició 2.13. *Sigui K un complex simplicial. Sigui $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ la unió de tots els símplex de K. $|K|$ és un subespai de $\mathbb{R}^n$ per alguna n i s'anomena* ***poliedre simplicial geomètric*** *associat a K.*

Definició 2.14. *Un espai topològic X s'anomena* ***poliedre*** *si existeix un complex simplicial K tal que $|K|$ és homeomorf a X. En aquest cas, l'espai X es diu que és* ***triangulable*** *i K s'anomena una* ***triangulació*** *de X.*

Proposició 2.15. *Siguin U un subconjunt obert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, acotat i convex, i $w \in U$.*

(i) Cada semi-raig L originat en w interseca la frontera d'U en un únic punt.

(ii) Existeix un homeomorfisme d'$\bar{U}$ amb el disc unitat $\mathbb{D}^n$ que envia la frontera d'U a l'esfera unitat $\mathbb{S}^{n-1}$.

Demostració. (i) Sigui L una semirecta fixada que comenci en w. Considerem la intersecció de L amb l'obert U. Clarament, aquesta intersecció és convexa, acotada i un obert de L i per tant la podem escriure com

$$\{w + t \cdot p : t \in [0, a)\}$$

on p és el vector unitat en la direcció de L. Per tant, L interseca la clausura $\bar{U}$ d'U en un punt $x = w + a \cdot p$. Per provar la unicitat del punt x, suposem que y és un altre punt de la intersecció. Així, $y = w + b \cdot p$ per algun $b > a$ i x es troba entre w i y en la recta L, és a dir, $x = (1-t)w + ty$, on $t = a/b$. Expressant w en funció de t obtenim $w = (x - ty)/(1-t)$. Prenem una successió $\{y_n\}$ de punts d'U que convergeixi en y. D'aquesta manera, obtenim que $w_n = (x - ty_n)/(1-t)$ convergeix a w. Per tant, existeix una n de manera que $w_n \in U$. Però això és una contradicció ja que si U és convex $x = (1-t)w_n + ty_n$ ha de pertànyer a U.

(ii) Podem assumir sense pèrdua de generalitat que w és l'origen. L'aplicació $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ definida per $f(x) = x/\|x\|$ és exhaustiva i contínua. Per (i) la restricció de f a la frontera $Fr(U)$ defineix una bijecció de $Fr(U)$ en $\mathbb{S}^{n-1}$, la qual és un homeomorfisme ja que $Fr(U)$ és un compacte. Sigui $g : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow Fr(U)$ la seva inversa. Estenem g a $G : \mathbb{D}^n \longrightarrow \bar{U}$ mitjançant

$$G(x) = \begin{cases} \|g(x/\|x\|)\| \cdot x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

De fet, G envia el segment de $\mathbb{D}^n$ que uneix l'origen amb un punt u de $\mathbb{S}^{n-1}$ a un segment d'U que uneix l'origen amb $g(u)$. Per tant, G és una bijecció contínua, i per tant és un homeomorfisme, i la seva restricció en $\mathbb{S}^{n-1}$ és l'aplicació g. $\square$

Definició 2.16. *Sigui K un complex simplicial de dimensió k. Per cada r, $0 \leq r \leq k$, sigui K^r el conjunt de tots els símplex de K que tenen dimensió $\leq r$. K^r és un complex simplicial i rep el nom d'**esquelet** r-dimensional de K.*

Observem que si K és un complex simplicial, llavors $|K|$ és un espai mètric compacte, ja que és la unió d'un nombre finit de símplex, que són compactes. D'aquí se'n dedueix que qualsevol poliedre és compacte. Tanmateix, no sempre és fàcil donar un complex simplicial finit que sigui homeomorf a un poliedre. Sovint, és més senzill caracteritzar poliedres usant complexos simplicials abstractes, que definim a continuació:

Definició 2.17. *Un **complex simplicial abstracte** és una col·lecció K de conjunts finits no buits tals que, si A és un element de K, tot subconjunt no buit d'A també és un element de K.*

En els complexos simplicials abstractes, els singletons de K s'anomenen **vèrtex** de K. El conjunt de vèrtex d'un complex simplicial abstracte K pot ser infinit. Donat que cada n-símplex $\sigma = \langle v_0, v_1, ..., v_n \rangle$ es pot identificar amb un símplex de $\mathbb{R}^n$, i cada $\mathbb{R}^n$ està inclòs en $\mathbb{R}^\infty$, obtenim que $|K| = \bigcup \{\sigma | \sigma \in K\}$ és un subconjunt de $\mathbb{R}^\infty$.

Definició 2.18. *Sigui K un complex simplicial. Un complex simplicial L és un subcomplex de K si L⊂K. La **frontera** d'un complex simplicial K, es defineix com*

$$\partial K = \left\{ \tau | \tau \, \textit{és una cara d'un símplex } \sigma^k \in K \textit{el qual pertany a un únic (k+1)-símplex de K} \right\}$$

És a dir, ∂K està formada per totes les cares dels símplex maximals de K, excloent els símplex maximals en si. Així doncs, ∂K és un subcomplex de K de dimensió $dim(\partial K) = dim(K) - 1$.

Definició 2.19. *Siguin K i L dos complexos simplicials. Una **aplicació simplicial** $f : K \longrightarrow L$ és una aplicació f que envia els vèrtex de K als vèrtex de L de manera que si $\langle a_0, a_1, ..., a_k \rangle$ és un símplex de K, llavors $f(a_0), f(a_1), ..., f(a_k)$ són vèrtex d'un símplex de L. És a dir, $\langle f(a_0), f(a_1), ..., f(a_k) \rangle$ és un símplex de L sempre que $\langle a_0, a_1, ..., a_k \rangle$ sigui un símplex de K.*

Definició 2.20. *Una aplicació simplicial $f : K \longrightarrow L$ és un **isomorfisme** si és bijectiva en els vèrtex i compleix que $\langle a_0, a_1, ..., a_k \rangle$ és un símplex de K si i només si $\langle f(a_0), f(a_1), ..., f(a_k) \rangle$ és un símplex de L. Dos complexos simplicials K i L són isomorfs si existeix un isomorfisme simplicial $f : K \longrightarrow L$.*

Proposició 2.21. *Sigui $f : K \longrightarrow L$ una aplicació simplicial. Existeix una aplicació contínua induïda $|f| : |K| \longrightarrow |L|$ que es defineix de la manera següent:*

Si $x \in |K|$, llavors x pertany a l'interior d'un únic símplex $\langle a_0, a_1, ..., a_k \rangle$. Escribim $x = \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i$ i definim $|f|(x) = \sum_{i=0}^k \alpha_i f(a_i)$.

Demostració. Primerament definirem $|f|$ en cada símplex $|\sigma|$ usant la fórmula següent: si $x = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_k a_k$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$, llavors $|f|(x) = \alpha_0 f(a_0) + \alpha_1 f(a_1) + ... + \alpha_k f(a_k)$. Això assegura que $|f|$ està ben definida. Si x pertany a la intersecció $|\sigma| \cap |\tau|$ de dos símplex σ i τ, llavors les coordenades baricèntriques de x depenen només dels vèrtexs comuns $a_0, a_1, ..., a_l$ de $|\sigma| \cap |\tau|$. Per tant, $|f|(x) = \alpha_0 f(a_0) + \alpha_1 f(a_1) + ... + \alpha_k f(a_k)$ és única independentment de si considerem x com un punt de $|\sigma|$ o com un punt de $|\tau|$. Així, és suficient provar que $|f|_{|\sigma|}$ és contínua per cada símplex $\sigma \in K$. Veiem que les coordenades baricèntriques de $|f|(x)$ són α_i, $i = 0, 1, ..., k$ o la suma d'aquestes coordenades depenent de si cada $f(a_i)$ són tots diferents o no. En qualsevol cas, si considerem la composició $q_i \circ |f| : |\sigma^k| \longrightarrow \mathbb{R}$ on $q_i : \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ són les projeccions canòniques, aquesta composició és l'aplicació projecció $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k) \mapsto \alpha_i$ o bé una suma d'aquestes projeccions. Així dons, $q_i \circ |f|$ és contínua per cada $i = 0, 1, 2, ..., k$. Això implica que $|f| : |K| \longrightarrow |L|$ és contínua. □

Definició 2.22. *Un complex simplicial K és* ***connex*** *si per cada parella de vèrtex $a, b \in K$, existeix una seqüència de 1-símplex $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$ per $i = 0, 1, 2, ..., p-1$ en K tals que $a = a_0$, $b = a_p$.*

Els subcomplexos connexos maximals d'un complex simplicial s'anomenen les ***components combinatòries*** *del complex.*

2.3 Aproximació simplicial

Definició 2.23. *Sigui K un complex simplicial i v un vèrtex de K. Definim l'**estrella** de v, que denotarem $st(v)$, el següent subconjunt de K:*

$$st(v) = \{\sigma : \sigma \text{ és un símplex de } K \text{ i } v \text{ és un vèrtex de } \sigma\}$$

*Definim l'**estrella oberta** de v, que denotarem $ost(v)$, el següent subconjunt de $|K|$:*

$$ost(v) = \bigcup \{int(\sigma) : \sigma \text{ és un símplex de } K \text{ i } v \text{ és un vèrtex de } \sigma\}$$

Definició 2.24. *Sigui $h : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicació contínua. Una aplicació simplicial $g : K \longrightarrow L$ és una **aproximació simplicial** de h si per cada vèrtex v de K, $h(ost(v)) \subset ost(g(v))$.*

Proposició 2.25. *Sigui $g_1 : K \longrightarrow L$ una aproximació simplicial de $f_1 : |K| \longrightarrow |L|$ i $g_2 : L \longrightarrow M$ una aproximació simplicial de $f_2 : |L| \longrightarrow |M|$. La composició $g_2 \circ g_1 : K \longrightarrow M$ és una aproximació simplicial de $f_2 \circ f_1$.*

Demostració. La composició $g_2 \circ g_1 :$ és clarament simplicial. Sabem que per cada vèrtex v de K, $f_1(ost(v)) \subset ost(g_1(v))$, i que per cada vèrtex w de L, $f_2(ost(w)) \subset ost(g_2(w))$. Donat que $g_1(v)$ és un vèrtex de L, es compleix que $f_2(ost(g_1(v))) \subset ost(g_2(g_1(v)))$. Això implica que $f_2 \circ f_1(ost(v)) \subset ost(g_2 \circ g_1(v))$, que conclou la demostració. □

Definició 2.26. *Siguin K i L dos complexos simplicials i $f : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicació contínua. Diem que K està **estrelladament relacionat** amb L respecte f, si per cada vèrtex v de K, hi ha un vèrtex v' de L tal que*

$$f(ost(v)) \subset ost(v')$$

Proposició 2.27. *Un conjunt $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ de vèrtex d'un complex simplicial K forma un símplex de K si i només si el conjunt $\bigcap_{i=0}^{n} ost(v_i)$ és no buit.*

Demostració. Sigui $\sigma^n = \langle v_0, v_1 ..., v_n \rangle$ un símplex de K. Sabem que $int(\sigma^n) \subset ost(v_i)$ per cada $i = 0, 1, ..., n$ i per tant $\emptyset \neq int(\sigma^n) \subset \bigcap_{i=0}^{n} ost(v_i)$.

Suposem ara que $\bigcap_{i=0}^{n} ost(v_i) \neq \emptyset$ i veiem que aquests vèrtex formen un símplex de K. Sigui x un punt d'aquesta intersecció. Per cada $i = 0, 1, ..., n$, hi ha un símplex σ_i en K tal que $x \in int(\sigma_i)$ i v_i és un vèrtex de σ_i. Donat que el conjunt dels interiors de tots els símplex d'un complex simplicial K és una partició de $|K|$, hi ha un únic símplex de K tal que el seu interior contingui x, és a dir, $\sigma_0 = \sigma_1 = ... = \sigma_n$. Això implica que $v_0, v_1, ..., v_n$ són vèrtex del símplex σ_0. □

Teorema 2.28. *Sigui $f : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicació contínua. Suposem que K està estrelladament relacionat amb L respecte f. Hi ha una aplicació simplicial $g : K \longrightarrow L$ tal que g és una aproximació simplicial de f. En particular, $|g| : |K| \longrightarrow |L|$ és homòtopa a f.*

Demostració. Donat que K està estrelladament relacionat amb L respecte f, podem definir una aplicació g des dels vèrtex de K cap als vèrtex de L de la manera següent: per cada vèrtex v de K, $g(v)$ és un vèrtex de L tal que

$$f(ost(v)) \subset ost(g(v))$$

Provem ara que l'aplicació g de fet envia un símplex de K a un símplex de L. Siguin $v_0, v_1, ..., v_n$ els vèrtex d'un símplex de K. Per la proposició anterior, es compleix que

$$\bigcap_{i=0}^{n} ost(v_i) \neq \emptyset$$

Per tant,

$$\emptyset \neq f(\bigcap_{i=0}^{n} ost(v_i)) \subset \bigcap_{i=0}^{n} f(ost(v_i)) \subset \bigcap_{i=0}^{n} ost(g(v_i))$$

és a dir, $\bigcap_{i=0}^{n} ost(g(v_i))$ és no buit, i per tant $g(v_0), ..., g(v_n)$ són vèrtex d'algun símplex de L. Això prova que $g : K \longrightarrow L$ és una aplicació simplicial i per tant g és una aproximació simplicial de f.

Finalment, cal provar que $|g|$ és homòtopa a f. Sigui $x \in |K|$ i sigui $\sigma = \langle v_0, v_1, ..., v_k \rangle$ el símplex de menor dimensió que conté x. Sigui v_i un vèrtex qualsevol de σ. Veiem que $x \in ost(v_i)$ i per tant $f(x) \in f(ost(v_i)) \subset ost(g(v_i))$. Així, obtenim que $f(x) \in int \langle g(v_0), ..., g(v_k) \rangle$. D'altra banda, si escrivim

$$x = \alpha_0 v_0 + ... + \alpha_k v_k, \ \alpha_i > 0, \ \forall i$$

llavors $|g|(x) = \alpha_0 g(v_0) + ... + \alpha_k g(v_k)$, on alguns dels $g(v_i)$ poden ser iguals. En qualsevol cas, el coeficient de $g(v_i)$ serà estrictament positiu, és a dir, $|g|(x) \in int \langle g(v_0, ..., g(v_k)) \rangle$. Això significa que per cada $x \in |K|$, tant $f(x)$ com $|g|(x)$ són del mateix símplex de L. Donat que un símplex és un conjunt convex, podem definir una aplicació $H : |K| \times I \longrightarrow |L|$ on $H(x,t) = (1-t)f(x) + t\,|g|(x)$. H és contínua ja que tant f com $|g|$ ho són i $|L|$ és un subconjunt d'un espai Euclidià. Per tant, H és una homotopia de f a $|g|$. $\square$

2.4 Subdivisió baricèntrica - Teorema d'aproximació simplicial

Subdividir un complex simplicial K és un mètode molt útil per canviar l'estructura simplicial de K sense alterar el conjunt $|K|$ o la seva topologia. Hi ha un tipus de subdivisió que és especialment útil donada la seva naturalesa iterativa i rep el nom de subdivisió baricèntrica.

Definició 2.29. *Sigui $\sigma = \langle v_0, v_1, ..., v_k \rangle$ un k-símplex en $\mathbb{R}^n$. El* ***baricentre*** *de σ, que denotarem $\dot{\sigma}$, està definit com el punt de σ que ve donat per*

$$\dot{\sigma} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k+1} v_i$$

És a dir, el baricentre $\dot{\sigma}^k$ del k-símplex σ^k és el punt de σ^k que té totes les coordinades baricèntriques respecte cada vèrtex de σ^k iguals.

Definició 2.30. *Sigui K un complex simplicial. Sigui $K^{(1)}$ un complex simplicial els vèrtex del qual són baricentres de tots els símplex de K, i per cada símplex diferent $\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_n$ de K, $\langle \dot{\sigma}_0, \dot{\sigma}_1, ..., \dot{\sigma}_n \rangle$ és un símplex de $K^{(1)}$ si i només si σ_i és una cara de σ_{i+1} per cada $i = 0, 1, 2, ..., n-1$.*

$K^{(1)}$ s'anomena la ***primera subdivisió baricèntrica*** *de K. Per inducció, definim la* ***n-èssima subdivisió baricèntrica*** *$K^{(n)}$ de K com la primera subdivisió baricèntrica de $K^{(n-1)}$ per cada $n > 1$. Per conveniència, també usarem $K^{(0)} = K$.*

Observem que $\left|K^{(n)}\right| = |K|$ per tot $n \geq 0$. Observem també que si prenem la primera subdivisió baricèntrica $K^{(1)}$ d'un complex de dimensió positiva K, els símplex de $K^{(1)}$ són estrictament més petits que els de K.

Recordem que si A és un subconjunt de $\mathbb{R}^n$, llavors

$$diam(A) = sup\,\{d(x,y) : x, y \in A\}$$

és el diàmetre d'A, on $d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$, on $x = (x_1, ..., x_n)$ i $y = (y_1, ..., y_n)$.

Definició 2.31. *Sigui K un complex simplicial. Definim la* ***xarxa*** *de K, que denotarem $mesh(K)$, de la manera següent:*

$$mesh(K) = max\,\{diam(\sigma) : \sigma \text{ és un símlpex de } K\}$$

Lema 2.32. *Sigui σ un símplex de dimensió positiva. Llavors $diam(\sigma) = \|v - w\|$ per alguna parella de vèrtex v i w de σ. És a dir, el diàmetre d'un símplex σ és la llargada de la major de les seves arestes.*

Demostració. Siguin $\sigma = \langle v_0, v_1, ..., v_q \rangle$ i $x, y \in \sigma$. Sigui $y = \sum_{i=0}^{q} b_i v_i$, on b_i són les coordenades baricèntriques de y. Llavors

$$\|x-y\| = \left\| \left(\sum_{i=0}^{q} b_i\right) x - \sum_{i=0}^{q} b_i v_i \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{q} b_i (x - v_i) \right\| \leq \sum_{i=0}^{q} b_i \|x - v_i\|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{q} b_i \cdot max\,\{\|x - v_i\| : 0 \leq i \leq q\} \leq max\,(\|x - v_i\| : 0 \leq i \leq q)$$

Si substituïm x per v_i i y per x, obtenim

$$\|x - v_i\| \leq max\,\{\|v_j - v_i\| : 0 \leq j \leq q\}$$

Per tant, si comparem ambdues expressions trobem que

$$\|x - y\| \leq max\,\{\|v_j - v_i\| : 0 \leq j,\ i \leq q\}$$

Això implica que $diam(\sigma) = \|v_r - v_s\|$ per alguns vèrtex v_r i v_s del símplex σ. ☐

Teorema 2.33. *Sigui K un complex simplicial de dimensió positiva. Es compleix que $\lim_{n\to\infty} mesh(K^{(n)}) = 0$.*

Demostració. Suposem que $dim(K) = m$. Comparem la xarxa de $K^{(1)}$ amb la xarxa de K. Com que $mesh\left(K^{(1)}\right)$ està determinada per la llargària del seu major 1-símplex, considerem qualsevol 1-símplex $\langle\dot{\sigma}, \dot{\tau}\rangle$ de $K^{(1)}$ on σ, τ són símplex de K i σ és una cara estricta de $\tau = \langle v_0, v_1, ..., v_p\rangle$. Sabem que

$$\dot{\tau} = \frac{1}{(p+1)}\sum_{i=0}^{p} v_i$$

i per tant, donat que $\dot{\sigma}$, $\dot{\tau}$ són ambdós punts de τ, pel lema anterior existeix un vèrtex v de τ tal que

$$\|\dot{\tau} - \dot{\sigma}\| \leq \|\dot{\tau} - v\|$$

Per tant, donat que $p \leq m$

$$\|\dot{\tau} - \dot{\sigma}\| \leq \|\dot{\tau} - v\| = \left\| \frac{1}{p+1}\left(\sum_{i=0}^{p} v_i\right) - v \right\| = \left\| \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}(v_i - v) \right\|$$

$$\leq \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}\|v_i - v\| \leq \frac{1}{p+1}\left(p \cdot mesh(K)\right) \leq \frac{m}{m+1} \cdot mesh(K)$$

Això implica que $mesh\left(K^{(1)}\right) \leq \frac{m}{m+1} \cdot mesh(K)$. Si raonem per inducció, trobem que $mesh\left(K^{(n)}\right) \leq \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \cdot mesh(K)$. Com que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{m+1}\right)^n = 0$$

queda demostrat el teorema. $\square$

Teorema 2.34 (Teorema d'aproximació simplicial). *Sigui $f : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicació contínua. Hi ha una subdivisió baricèntrica $K^{(k)}$ de K i una aplicació simplicial $g : K^{(k)} \longrightarrow L$ tals que g és una aproximació simplicial de f. En particular, $|g| : |K^{(k)}| = |K| \longrightarrow |L|$ és homòtopa a f.*

Demostració. Els complexos simplicials que estem considerant són finits, i per tant $|K|$ i $|L|$ són subconjunts compactes de $\mathbb{R}^n$. Ja hem provat en el teorema 2.28 que si K està estrelladament relacionat amb L respecte $f : |K| \longrightarrow |L|$ llavors existeix una aplicació simplicial $g : K \longrightarrow L$ tal que $|g|$ és homòtopa a f. Estudiem doncs el cas en què K no està estrelladament relacionat amb L respecte f. Com que $|L|$ és un espai mètric compacte, apliquem el lema del recobriment de Lebesgue (Tot recobriment obert d'un espai mètric compacte admet un nombre real δ -nombre de Lebesgue- tal que tota bola $B(x, \delta)$ centrada en qualsevol punt de l'espai mètric està continguda en algun obert del recobriment.) al recobriment obert $\{ost(v) : v \text{ és un vèrtex de } L\}$ de $|L|$ per tal d'obtenir un nombre de Lebesgue $\eta > 0$ tal que tota bola oberta de $|L|$ de radi η centrada en qualsevol punt de $|L|$ està continguda en $ost(v)$ on v és un vèrtex de L. Donat que tota aplicació contínua d'un espai mètric compacte en un altre espai qualsevol és uniformement contínua, l'aplicació $f : |K| \longrightarrow |L|$ és també uniformement contínua. Això significa que podem trobar un nombre positiu δ tal que $\|x - y\| < \delta$ en $|K|$ que impliqui $\|f(x) - f(y)\| < \eta$ en $|L|$. Prenem un k prou gran de manera que la xarxa de la subdivisió baricèntrica $K^{(k)}$ de K siqui menor que $\delta/2$. Si v és un vèrtex de $K^{(k)}$, llavors $ost(v)$ està inclosa en una bola de diàmetre δ, i per tant $f(ost(v))$ està inclosa en una bola de diàmetre η, és a dir, $f(ost(v)) \subset ost(v')$

per algun vèrtex v' de L. Així doncs, $K^{(k)}$ està estrelladament relacionat amb L respecte $f : \left|K^{(k)}\right| = |K| \longrightarrow |L|$ i pel teorema 2.28 queda demostrat que g és una aproximació simplicial de f. $\square$

Recordem que un espai X és simplement connex si X és arc-connex i $\pi_1(X)$ és trivial. Això és equivalent a afirmar que qualsevol aplicació de $\mathbb{S}^0$ en X i de $\mathbb{S}^1$ en X són homòtopes a constant. Podem generalitzar aquesta noció de la manera següent:

Definició 2.35. *Un espai X és **n-connex** $(n \geq 0)$ si per cada $k \leq n$, tota aplicació de $\mathbb{S}^k$ en X és homòtopa a constant.*

D'aquesta manera, ser 0-connex és equivalent a ser arc-connex, i ser 1-connex és equivalent a ser simplement connex.

Teorema 2.36. *Per cada $n \geq 1$, $\mathbb{S}^n$ és (n-1)-connex.*

Demostració. Sigui $0 \leq k < n$. Cal provar que tota aplicació $f : \mathbb{S}^k \longrightarrow \mathbb{S}^n$ és homòtopa a constant. Siguin σ^{k+1} un (k+1)-símplex i σ^{n+1} un (n+1)-símplex. Si K representa un k-esquelet de $Cl\left(\sigma^{k+1}\right)$i L representa el n-esquelet de $Cl\left(\sigma^{n+1}\right)$, llavors sabem que $|K|$ és homeomorf a $\mathbb{S}^k$ i $|L|$ és homeomorf a $\mathbb{S}^n$. Sigui $h : |K| \longrightarrow \mathbb{S}^k$ i sigui $h' : |L| \longrightarrow \mathbb{S}^n$ homeomorfismes.

$$\begin{array}{ccc} |K| & \longrightarrow & |L| \\ {\scriptstyle h}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle h'} \\ \mathbb{S}^k & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{S}^n \end{array}$$

Sigui $g : K^{(m)} \longrightarrow L$ una aproximació simplicial a l'aplicació $(h')^{-1} \circ f \circ h : |K| \longrightarrow |L|$. Observem que $dim\left(K^{(m)}\right) = k < dim(L) = n$ i que cap aplicació simplicial $g : K^{(m)} \longrightarrow L$ no pot augmentar la dimensió del complex simplicial. Això significa que g no pot ser exhaustiva, i per tant $|g| : \left|K^{(m)}\right| \longrightarrow |L|$ tampoc ho és. Així doncs, existeix un punt $a \in |L|$ tal que $|g| : |K| \longrightarrow |L| \smallsetminus \{a\}$. Donat que $|L| \smallsetminus \{a\}$ és homeomorf a $\mathbb{R}^n$ i aquest és contràctil, $|g|$ és homòtopa a constant. Això implica que $(h')^{-1} \circ f \circ h$ és homòtopa a constant i per tant f és homòtopa a constant. $\square$

Corol·lari 2.37. *La n-esfera $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, és simplement connexa.*

2.5 Complexos simplicials generals

Fins ara hem tractat amb complexos simplicials formats per un nombre finit de símplex. En aquest apartat definirem els complexos simplicials generals, que estaran formats per un nombre arbitrari de símplex que segueixin complint les dues condicions de complex simplicial. En aquest cas el nombre de vèrtex de K pot ser arbitrari i la dimensió de K pot ser infinita. Primerament, definirem els complexos simplicials abstractes de la manera següent:

Definició 2.38. *Un **complex simplicial abstracte** $\mathcal{K} = (\mathcal{V}, K)$ està format per un conjunt $\mathcal{V}$ de vèrtex i un conjunt K de subconjunts finits no buits de vèrtex, anomenats símplex, tals que*

(i) qualsevol conjunt format per un únic vèrtex és un símplex

(ii) cada subconjunt no buit d'un símplex és un símplex

Considerem $|K|$ el poliedre de K. En aquest cas, es diu que $|K|$ és la ***realització geomètrica*** *del complex simplicial abstracte $\mathcal{K}$.*

Observem que cada símplex de $\mathcal{K}$ és un subespai compacte de $\mathbb{R}^k$ i per tant té una topologia pròpia. Així doncs, podem considerar la topologia feble (la topologia més gruixuda en la que tot element del dual topològic segueix sent contínua) en $|K|$ induïda per aquests símplex. Aquesta topologia rep el nom de **topologia coherent** de $|K|$. L'espai resultant $|K|$ rep el nom de **complex simplicial general o poliedre**. Així doncs, la topologia coherent del poliedre $|K|$ és la topologia més gruixuda que manté totes les inclusions dels símplex de K en $|K|$ com aplicacions contínues. És a dir, un subconjunt $F \subset |K|$ és tancat si i només si $F \cap \sigma$ és tancat per cada $\sigma \in |K|$.

Definició 2.39. *Un espai topològic X és* ***triangulable*** *(i per tant és un poliedre) si existeix un complex simplicial K i un homeomorfisme $f : |K| \longrightarrow X$, on $|K|$ té la topologia coherent.*

Suposem que $|K| \subset \mathbb{R}^n$ per algun n. En aquest cas, podem considerar dues topologies en $|K|$: la induïda per ser subespai de $\mathbb{R}^n$ (que és una topologia mètrica) i la topologia coherent definida pels símplex de K. Observem que en aquestes circumstàncies la topologia coherent de $|K|$ sempre és més fina que la topologia de subespai, ja que sempre que F sigui un tancat de $\mathbb{R}^n$ $F \cap \sigma$ serà un tancat en σ per cada símplex $\sigma \in K$, és a dir, $F \cap |K|$ és un tancat en la topologia coherent de $|K|$.

Teorema 2.40. *Siguin X un espai topològic i $f : |K| \longrightarrow X$ una aplicació. f és contínua si i només si $f|_\sigma$ és contínua per cada símplex σ de K.*

Demostració. Donat que la restricció d'una aplicació contínua és contínua, és suficient provar el recíproc. Així doncs, suposem que $f|_\sigma$ és contínua per cada símplex $\sigma \in K$. Sigui F un tancat de X. Per cada σ,

$$(f|_\sigma)^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cap \sigma$$

és un tancat en σ. Per la definició de topologia coherent, $f^{-1}(F)$ és tancat en $|K|$, és a dir, f és contínua. $\square$

Proposició 2.41. *Si L és un subcomplex de K, $|L|$ és un subespai tancat de $|K|$.*

Demostració. Hem de provar dos fets: primerament, si F és un tancat de $|K|$, llavors $F \cap |L|$ és un tancat el $|L|$; en segon lloc, si A és un tancat de $|L|$, llavors $A = F \cap |L|$ per algun conjunt tancat F de $|K|$. La primera part se segueix directament de la definició de topologia coherent de $|K|$ i de $|L|$. Per tal de provar la segona part, provarem un resultat més general: si $A \subset |L|$ és un tancat en $|L|$ llavors A és un tancat en $|K|$. Sigui $\sigma \in K$ un símplex. Sigui τ una cara de σ que estigui en $|L|$. $A \cap \tau$ és un tancat en τ i per tant ho és en σ. D'aquesta manera, $A \cap \sigma$ és la unió finita dels conjunts $A \cap \tau$, on τ és una cara de σ. En tant que unió finita de tancats de σ, $A \cap \tau$ és tancat en σ, i per tant A és tancat en $|K|$. $\square$

Teorema 2.42. *Un poliedre $|K|$ és Hausdorff.*

Demostració. Sigui $x \in |K|$. Donat que x està en l'interior d'un únic símplex $\sigma = \langle v_0, ..., v_k \rangle$, les seves coordenades baricèntriques respecte cada vèrtex de σ són positives, i les seves coordenades baricèntriques respecte qualsevol altre vèrtex de K són zero. Sigui v un vèrtex de K determinat. Podem definir una funció $f_v : |K| \longrightarrow [0,1]$ tal que $f_v(x)$ sigui la coordenada baricèntrica de x respecte el vèrtex v. Observem que $f_v|_\sigma(x)$ és la v-èssima coordenada baricèntrica de x si x pertany a σ o bé és zero si x no és de σ. Així doncs, $f_v|_\sigma$ és contínua per cada $\sigma \in K$, i per tant f_v és contínua. Siguin doncs $x, y \in |K|$ dos punts diferents. Existeix un vèrtex v de K tal que $f_v(x) \neq f_v(y)$. Sigui $r \in \mathbb{R}$ tal que $f_v(x) < r < f_v(y)$. Els conjunts oberts $f_v^{-1}([0, r))$ i $f_v^{-1}((r, 1])$ de $|K|$ són disjunts i separen x i y, de manera que $|K|$ és Hausdorff. □

Proposició 2.43. *Un poliedre $|K|$ és compacte si i només si K és finit. De manera més general, si un subconjunt $A \subset |K|$ és compacte llavors $A \subseteq |L|$ per algun subcomplex finit L de K.*

Demostració. Si K és finit, $|K|$ és la unió finita de símplex, els quals són compactes, i per tant és compacte. Per demostrar el recíproc, suposem que un subconjunt compacte A no està inclòs en cap subcomplex finit de K. Això implica que hi haurà un nombre infinit de símplex $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n, ...\}$ tals que $A \cap \sigma_i \neq \emptyset$ $\forall i$. Escollim un punt $x_i \in A \cap \sigma_i$ $\forall i$ i considerem el conjunt $B = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Donat que la intersecció de B amb cada símplex es dóna només en un nombre finit de punts, $B \cap \sigma_i$ és tancat en σ_i, i per tant B és tancat en A. De fet, tot subconjunt de B és tancat en A, i per tant B és un subconjunt de A infinit, discret i tancat sense punt límit, i per tant entra en contradicció amb la compacitat d'A. □

Teorema 2.44. *Tot poliedre $|K|$ és localment contràctil.*

Demostració. Siguin $x \in |K|$ i U un entorn obert de x en $|K|$. Hem de demostrar que existeix un entorn obert V de x en U tal que V pot ser deformat fins al punt x en U. Suposem que $x = v$ és un vèrtex de K. Sabem que $ost(v) = A$ és un conjunt obert en $|K|$, i existeix una homotopia $H : A \times I \longrightarrow |K|$ definida per

$$H(a, t) = (1 - t)a + tv$$

Aquesta homotopia deforma A fins al punt v de manera que $H(v \times I) = \{v\}$. Donat que U és un entorn de v, H és contínua i I és compacte, existeix un entorn V de v en A tal que $H(V \times I) \subset U$. V és obert en A, el qual és obert en $|K|$, i per tant V és un entorn obert de v que es pot deformar fins al punt v en U. Així queda demostrat que $|K|$ és localment contràctil en cada vèrtex de $|K|$.

Suposem ara que x no és un vèrtex. Sigui σ un símplex de la dimensió mínima que compleixi $x \in int\sigma$. Considerem K' una subdivisió qualsevol de $\dot{\sigma}$. Així, $K' * x$ és una subdivisió de $\bar{\sigma}$ i per tant obtenim una subdivisió K'' de K en la qual x és un vèrtex de K''. Com que $|K''| = |K|$, i $|K''|$ és localment contràctil al seu vèrtex x, obtenim que $|K|$ és localment contràctil en x. □

Corol·lari 2.45. *El sinus del topòleg*

$$T = \{(0, y) \mid |y| \leq 1\} \cup \left\{(x, \sin\frac{1}{x}), x > 0\right\}$$

en el pla $\mathbb{R}^2$ no és triangulable ja que no és arc-connex, i per tant no és localment contràctil.

3 Homologia simplicial

3.1 Orientació de complexos simplicials

Considerem un n-símplex $\sigma^n = \langle v_0, v_1, ..., v_n\rangle$. Suposem que els vèrtex de σ^n estan ordenats $v_0 < v_1 < ... < v_n$. Aquest ordre determina una direcció en els vèrtex de σ^n, i qualsevol altra ordenació d'aquests esdevé una permutació dels vèrtex. Quan considerem el símplex σ^n juntament amb la classe d'equivalència de totes les permutacions parelles dels seus vèrtex, diem que σ^n està **orientat positivament** i ho indiquem usant $+\sigma^n$. D'altra banda, quan considerem σ^n amb la classe de totes les permutacions senars, diem que σ^n està **orientat negativament** i ho indiquem usant $-\sigma^n$. D'aquesta manera, quan diem que σ^n és un **símplex orientat** estem considerant la parella formada pel símplex σ^n i una ordenació dels vèrtex que en determina l'orientació positiva. Un 0-símplex $\langle v_0\rangle$ sempre es considera orientat positivament. Observem que si un símplex és orientat, totes les seves cares s'orienten segons l'ordre induït per l'ordre de σ^n.

Definició 3.1. *Un complex simplicial K està* ***orientat*** *si cada un dels seus símplex té una orientació assignada.*

Un complex simplicial K es pot ordenar de moltes maneres diferents. Si assignem un cert ordre al conjunt de tots els vèrtex de K, aquest ordre induirà un ordre als vèrtex de cada símplex de K, i per tant cada símplex rebrà una orientació, convertint el complex K en un **complex orientat**. Una manera alternativa d'orientar un complex K és assignar una orientació a cada un dels seus símplex de manera independent. En aquest darrer cas, si $\tau \in K$ és una cara de $\sigma \in K$ és possible que la orientació de τ induïda per σ coincideixi o bé sigui la contrària a l'orientació original de τ.

Definició 3.2. *Siguin K un complex simplicial orientat i σ^p, σ^{p+1} dos símplex les dimensions dels quals difereixen en 1. Per cada parella (σ^p, σ^{p+1}), podem associar-hi el seu* ***nombre d'incidència****, que denotarem $[\sigma^{p+1}, \sigma^p]$ de la manera següent: Si σ^p no és una cara de σ^{p+1}, posarem $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 0$. Si σ^p és una cara de σ^{p+1}, etiquetem els vèrtex de σ^p de manera que $+\sigma^p = \langle v_0, v_1, ..., v_p\rangle$. Sigui v el vèrtex addicional de σ^{p+1}. En aquest cas, $\langle v, v_0, v_1, ..., v_p\rangle$ és o bé $+\sigma^{p+1}$ o bé $-\sigma^{p+1}$. Definim*

$$[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = \begin{cases} 1 & si\ \langle v, v_0, ..., v_p\rangle = +\sigma^{p+1} \\ -1 & si\ \langle v, v_0, ..., v_p\rangle = -\sigma^{p+1} \end{cases}$$

Teorema 3.3. *Sigui K un complex simplicial orientat. Si σ^{p-2} és una (p-2)-cara d'un símplex σ^p de K, llavors*

$$\sum_{\sigma^{p-1}\in K} [\sigma^p, \sigma^{p-1}][\sigma^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 0$$

on el sumatori es realitza per tots els (p-1)-símplex σ^{p-1} de K.

Demostració. Siguin $v_0, v_1, ..., v_{p-2}$ els vèrtex de σ^{p-2} se manera que $+\sigma^{p-2} = \langle v_0, ..., v_{p-2}\rangle$ representi l'orientació positiva de σ^{p-2}. Siguin a i b els dos vèrtex addicionals. Sense pèrdua de generalitat podem suposar que $+\sigma^p = \langle a, b, v_0, ..., v_{p-2}\rangle$. Només hi ha dos (p-1)-símplex de K que aportin termes no nuls en el sumatori, que són:

$$\sigma_1^{p-1} = \langle a, v_0, ..., v_{p-2}\rangle\,, \qquad \sigma_2^{p-1} = \langle b, v_0, ..., v_{p-2}\rangle$$

L'ordre indicat dels vèrtex de σ_1^{p-1} i de σ_2^{p-1} donarà o bé l'orientació positiva o bé l'orientació negativa de σ_1^{p-1} i σ_2^{p-1}. Així doncs, hi ha quatre possibles casos que cal considerar:

Cas 1. Suposem que $+\sigma_1^{p-1} = \langle a, v_0, ..., v_{p-2}\rangle$ i $+\sigma_2^{p-1} = \langle b, v_0, ..., v_{p-2}\rangle$. En aquest cas, obtenim que

$$[\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] = -1, \qquad [\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] = +1$$
$$[\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] = +1, \qquad [\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] = +1$$

i per tant els dos termes no nuls del sumatori són -1 i +1 respectivament, i per tant la suma és zero.

Cas 2. Suposem que $+\sigma_1^{p-1} = \langle a, v_0, ..., v_{p-2}\rangle$ i $-\sigma_2^{p-1} = \langle b, v_0, ..., v_{p-2}\rangle$. En aquest cas, obtenim que

$$[\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] = -1, \qquad [\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] = +1$$
$$[\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] = -1, \qquad [\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1$$

i per tant la suma és zero.

Cas 3. Suposem que $-\sigma_1^{p-1} = \langle a, v_0, ..., v_{p-2}\rangle$ i $+\sigma_2^{p-1} = \langle b, v_0, ..., v_{p-2}\rangle$. En aquest cas, obtenim que

$$[\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] = +1, \qquad [\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1$$
$$[\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] = +1, \qquad [\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] = +1$$

i per tant la suma és zero.

Cas 4. Suposem que $-\sigma_1^{p-1} = \langle a, v_0, ..., v_{p-2}\rangle$ i $-\sigma_2^{p-1} = \langle b, v_0, ..., v_{p-2}\rangle$. En aquest cas, obtenim que

$$[\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] = +1, \qquad [\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1$$
$$[\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] = -1, \qquad [\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1$$

i per tant la suma és zero. □

3.2 Complex de cadenes simplicial i homologia

Sigui K un complex simplicial amb una orientació fixada. Sigui $\tilde{S}_q$ el conjunt de tots els q-símplex orientats de K. Com que cada q-símplex, $q \geq 1$, es pot orientar de dues maneres diferents, el nombre d'elements del conjunt $\tilde{S}_q$ és el doble del nombre de q-símplex de K. En el cas dels 0-símplex, donat que aquests sempre se suposen positivament orientats, el nombre d'elements de $\tilde{S}_0$ és el nombre de vèrtex de K.

Definició 3.4. *Sigui* $0 \leq q \leq dimK$ *i sigui* $\mathbb{Z}$ *el grup additiu dels enters. Tota aplicació* $f : \tilde{S}_q \longrightarrow \mathbb{Z}$ *que compleixi que si* $q \geq 1$*, llavors* $f(-\sigma^q) = -f(\sigma^q)$ *per cada* $\sigma^q \in \tilde{S}_q$*, s'anomena una* ***q-cadena*** *de K. Per* $q = 0$*, una 0-cadena és simplement una aplicació des del conjunt de tots els 0-símplex de K en* $\mathbb{Z}$*. El conjunt de totes les q-cadenes de K es denota per* $C_q(K)$*. Si* $q < 0$ *o bé* $q > dimK$*, definim* $C_q(K) = 0$*.*

Es pot veure fàcilment que el conjunt $C_q(K)$ de totes les q-cadenes és un grup abelià amb operacions puntuals, és a dir,

$$(f + g)(\sigma^q) = f(\sigma^q) + g(\sigma^q)$$

per cada $\sigma^q \in \tilde{S}_q$. L'aplicació zero $0 : \tilde{S}_q \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida per $0(\sigma^q) = 0$ per tots els q-símplex σ^q és la identitat additiva, i la inversa $-f$ de f està definida per $(-f)(\sigma^q) = -f(\sigma^q)$.

El grup $C_q(K)$ s'anomena el **grup de cadenes q-dimensionals** de K. Si considerem tots els grups de cadenes $C_q(K)$ ordenats de manera descendent, obtenim una seqüència infinita de grups abelians

$$C(K): \qquad ..., 0, C_n(K), C_{n-1}(K), ..., C_q(K), ..., C_0(K), 0, ...$$

on tots els $C_q(K)$ són zero excepte per $q = 0, 1, 2, ..., n = dimK$.

Per cada q-símplex positivament orientat σ^q, definim una q-cadena $\bar{\sigma}^q$:

$$\bar{\sigma}^q(\tau^q) = \begin{cases} +1 & \text{si } \tau^q = \sigma^q \\ -1 & \text{si } \tau^q = -\sigma^q \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

La cadena $\bar{\sigma}^q$ s'anomena una **q-cadena elemental** de K. Pel següent resultat, definim S_q com el conjunt de tots els q-símplex positivament orientats de K.

Proposició 3.5. *Per cada $q \geq 0$, $C_q(K) = \bigoplus \mathbb{Z} \cdot \bar{\sigma}^q$, $\sigma^q \in S_q$.*

Demostració. És suficient provar que cada $f \in C_q(K)$ es pot escriure de manera única com una combinació lineal entera de q-cadenes elementals $\bar{\sigma}^q$. Suposem que $f(\sigma^q) = n_q$, on $\sigma^q \in S_q$. Per definició, $f(-\sigma^q) = -n_q$. Considerem l'element $\sum_{\sigma^q \in S_q} n_q \bar{\sigma}^q$. Provarem que $f = \sum_{\sigma^q \in S_q} n_q \bar{\sigma}^q$, i per a tal cal veure que f i $\sum_{\sigma^q \in S_q} n_q \bar{\sigma}^q$ prenen el mateix valor per cada q-símplex orientat de K. Si $\sigma^q \in S_q$, es compleix

$$\left(\sum_{\sigma^q \in S_q} n_q \bar{\sigma}^q \right) (\sigma^q) = n_q \bar{\sigma}^q(\sigma^q) = n_q = f(\sigma^q)$$

Si $\sigma^q \notin S_q$, llavors $-\sigma^q \in S_q$ i per tant

$$f(\sigma^q) = f(-(-\sigma^q)) = -f(-\sigma^q) = -\left(\sum_{\sigma^q \in S_q} n_q \bar{\sigma}^q \right) (-\sigma^q) = \left(\sum_{\sigma^q \in S_q} n_q \bar{\sigma}^q \right) (\sigma^q)$$

Amb això ja hem provat la igualtat, i només resta veure la unicitat. Suposem $f = \sum_{\sigma^q \in S_q} n_q \bar{\sigma}^q = \sum_{\sigma^q \in S_q} m_q \bar{\sigma}^q$. En aquest cas, $\sum_{\sigma^q \in S_q} (n_q - m_q) \bar{\sigma}^q = 0$ en $C_q(K)$ i per tant $\left(\sum_{\sigma^q \in S_q} (n_q - m_q) \bar{\sigma}^q \right) (\sigma^q) = 0$ en $\mathbb{Z}$. Tanmateix, això significa que $n_q - m_q = 0$. Com que σ^q és arbitrari, trobem que els coeficients corresponents a $\bar{\sigma}^q$ en les dues expressions de f són idèntics. $\square$

Si la orientació del complex K hagués estat diferent, hauríem obtingut un conjunt diferent de generadors de $C_q(K)$, això és, els nous generadors $\bar{\sigma}^q$ seran els mateixos si l'orientació del símplex σ^q es manté o bé seran $-(\bar{\sigma}^q)$ si l'orientació de σ^q canvia. En qualsevol cas, el grup $C_q(K)$ seria isomorf a la suma directa de tantes còpies de $\mathbb{Z}$ com q-símplex hi ha en K, i per tant l'estructura de grup de $C_q(K)$ depèn del complex simplicial K i no de la seva orientació.

Les q-cadenes elementals $\bar{\sigma}^q$ són aplicacions de $\tilde{S}_q$ en $\mathbb{Z}$, però també podríem considerar q-cadenes que siguin aplicacions de $\tilde{S}_q$ en G on G és un grup abelià qualsevol. En aquest cas el grup de cadenes $C_q(K;G)$ seria isomorf a la suma directa de tantes còpies de G com q-símplex hi ha a K. El grup G s'anomena el **grup de coeficients** del grup de cadenes. La relació entre els grups $C_q(K) = C_q(K;\mathbb{Z})$ i $C_q(K;G)$ ve donada en termes del producte tensorial $C(K;G) = C(K) \otimes G$.

La q-cadena elemental $\bar{\sigma}^q$ depèn del q-símlpex σ^q i de la seva orientació. Si fixem una orientació per cada q-símplex σ^q el grup $C_q(K) = \bigoplus_{\sigma^q \in S_q} \mathbb{Z} \cdot \bar{\sigma}^q$ és isomorf al grup $\bigoplus_{\sigma^q \in S_q} \mathbb{Z} \cdot \sigma^q$, on $\mathbb{Z} \cdot \sigma^q$ és el grup cíclic infinit generat pel símplex σ^q. Com que el elements d'aquest segon grup són simplement les combinacions lineals enteres de q-símplex σ^q en lloc de les cadenes elementals $\bar{\sigma}^q$, podem identificar sense pèrdua de generalitat $\bar{\sigma}^q$ amb $\sigma^q = 1 \cdot \sigma^q$ i escriure $C_q(K) = \bigoplus_{\sigma^q \in S_q} \mathbb{Z} \cdot \sigma^q$.

D'ara en endavant, sempre que usem σ^q ens referirem a un q-símplex σ^q orientat positivament.

Definició 3.6. *Per cada q, $0 < q \leq dimK$, definim un homomorfisme $\partial_q : C_q(K) \longrightarrow C_{q-1}(K)$, que anomenarem l'**homomorfisme de frontera**, de la manera següent: en els generadors σ^q de $C_q(K)$, definim*

$$(*) \qquad \partial_q(\sigma^q) = \sum_{i=0}^{q} [\sigma^q, \sigma_i^{q-1}] \sigma_i^{q-1}$$

on σ_i^{q-1} es desplaça per totes les (q-1)-cares positivament orientades de σ^q. Estenent-ho en $C_q(K)$ per linealitat obtenim

$$\partial_q \left(\sum_{i=0}^{q} n_q \sigma^q \right) = \sum_{i=0}^{q} n_q \partial_q(\sigma^q)$$

on $\partial_q(\sigma^q)$ està definit per $(*)$. Per $q \leq 0$ o per $q > dimK$ definim ∂_q com l'homomorfisme zero.

Observem que en la suma $(*)$, σ_i^{q-1} es desplaça per totes les (q-1)-cares de σ^q, però si permetem que es desplaci per tots els (q-1)-símplex de K la suma no varia ja que tots els termes afegits són zero, de manera que podem escriure $(*)$ com

$$\partial_q(\sigma^q) = \sum_{\sigma_i^{q-1} \in K} [\sigma^q, \sigma_i^{q-1}] \sigma_i^{q-1}$$

Si considerem $\sigma^q = \langle v_0, v_1, ..., v_q \rangle$ orientat per l'ordre $v_0 < v_1 < ... < v_q$, σ^q té (q+1) cares $\langle v_0, v_1, ..., \hat{v}_i, ..., v_q \rangle$ on $\hat{v}_i$ indica que el vèrtex v_i s'ha omès. Cada una d'aquestes cares està orientada per l'ordre induït, i per tant el nombre d'incidència $[\sigma^q, \sigma_i^{q-1}]$ és $(-1)^i$ i per tant $(*)$ pren la forma

$$(**) \qquad \partial_q \langle v_0, v_1, ..., v_q \rangle = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle v_0, v_1, ..., \hat{v}_i, ..., v_q \rangle$$

Per tal que ∂_q estigui ben definida per $(**)$ cal assegurar-se que $\partial_q \langle v_0, v_1, ..., v_q \rangle$ sigui independent respecte permutacions parelles π dels subíndex, ja que $\langle v_0, v_1, ..., v_q \rangle =$

$\langle v_{\pi(0)}, v_{\pi(1)}, ..., v_{\pi(q)} \rangle$. A més, també s'ha de complir que per permutacions π senars $\partial_q \langle v_{\pi(0)}, v_{\pi(1)}, ..., v_{\pi(q)} \rangle = -\partial_q \langle v_0, v_1, ..., v_q \rangle$, ja que $\langle v_{\pi(0)}, v_{\pi(1)}, ..., v_{\pi(q)} \rangle = -\langle v_0, v_1, ..., v_q \rangle$. Com que tota permutació es pot escriure com un producte de transposicions, ambdues condicions se segueixen del següent resultat.

Proposició 3.7. *Si π és una transposició dels subíndex $(0, 1, 2, ..., q)$, $\partial_q \langle v_{\pi(0)}, v_{\pi(1)}, ..., v_{\pi(q)} \rangle = -\partial_q \langle v_0, v_1, ..., v_q \rangle$.*

Demostració. Sigui $\sigma^q = \langle v_0, v_1, ..., v_s, ..., v_t, ..., v_q \rangle$, $0 \leq s < t \leq q$ i sigui π la transposició que intercanvia v_s amb v_t. Suposem que $\tau^q = \langle v_0, v_1, ..., v_t, ..., v_s, ..., v_q \rangle$ és el nou símplex orientat per l'ordre indicat. Demostrem que $\partial_q(\sigma^q) = \sum_{i=0}^q [\sigma^q, \sigma_i^{q-1}]\sigma_i^{q-1} = -\sum_{i=0}^q [\tau^q, \tau_i^{q-1}]\tau_i^{q-1} = -\partial_q(\tau^q)$. Si $s \neq i \neq t$, observem que $[\sigma^q, \sigma_i^{q-1}]\sigma_i^{q-1} = (-1)^i \sigma_i^{q-1}$ i $[\tau^q, \tau_i^{q-1}]\tau_i^{q-1} = (-1)^i \tau_i^{q-1}$. Com que per cada i, σ_i^{q-1} es pot obtenir de τ_i^{q-1} mitjançant una transposició, ambdós termes difereixen en el signe. Si $i = s$, $[\sigma^q, \sigma_s^{q-1}]\sigma_s^{q-1} = (-1)^s \langle v_0, ..., \hat{v}_s, ..., v_t, ..., v_q \rangle$ es correspon al terme $[\tau^q, \tau_s^{q-1}]\tau_s^{q-1} = (-1)^s \langle v_0, ..., v_t, ..., \hat{v}_s, ..., v_q \rangle$. Per convertir aquest segon símplex en el primer, calen $(t - s - 1)$ transposicions, i per tant

$$[\sigma^q, \sigma_s^{q-1}]\sigma_s^{q-1} = (-1)^{(t+s)+(t-s-1)}[\tau^q, \tau_t^{q-1}]\tau_t^{q-1} = (-1)^{2t-1}[\tau^q, \tau_t^{q-1}]\tau_t^{q-1} = -[\tau^q, \tau_t^{q-1}]\tau_t^{q-1}$$

Per acabar, si $i = t$, usant un raonament similar obtenim

$$[\sigma^q, \sigma_t^{q-1}]\sigma_t^{q-1} = -[\tau^q, \tau_s^{q-1}]\tau_s^{q-1}$$

Si sumem tots els termes, acabem obtenint el resultat que cercàvem. □

Lema 3.8. *Per cada q, l'homomorfisme composició $\partial_{q-1} \circ \partial_q : C_q(K) \longrightarrow C_{q-2}(K)$ és l'aplicació zero.*

Demostració. Sigui σ^q un generador del grup de cadenes $C_q(K)$. És suficient provar que $\partial_{q-1} \circ \partial_q(\sigma^q) = 0$.

$$\partial_{q-1}(\partial_q(\sigma^q)) = \partial_{q-1}\left(\sum_{\sigma_i^{q-1} \in K} [\sigma^q, \sigma_i^{q-1}]\sigma_i^{q-1}\right) = \sum_{\sigma_i^{q-1} \in K} [\sigma^q, \sigma_i^{q-1}]\partial_{q-1}(\sigma_i^{q-1})$$

$$= \sum_{\sigma_i^{q-1} \in K} [\sigma^q, \sigma_i^{q-1}] \left(\sum_{\sigma_j^{q-2} \in K} [\sigma_i^{q-1}, \sigma_j^{q-2}]\sigma_j^{q-2}\right)$$

Si canviem l'ordre dels sumatoris i reunim els coeficients de cada (q-2)-símplex σ_j^{q-2} el darrer terme esdevé

$$\sum_{\sigma_j^{q-2} \in K} \left(\sum_{\sigma_i^{q-1} \in K} [\sigma^q, \sigma_i^{q-1}][\sigma_i^{q-1}, \sigma_j^{q-2}]\right) \sigma_j^{q-2}$$

Pel teorema 3.3, sabem que

$$\sum_{\sigma_i^{q-1} \in K} [\sigma^q, \sigma_i^{q-1}][\sigma_i^{q-1}, \sigma_j^{q-2}] = 0$$

per cada σ_j^{q-2} i per tant $\partial_{q-1} \circ \partial_q(\sigma^q) = 0$. □

Definició 3.9. *Sigui K un complex orientat. Una q-cadena $z_q \in C_q(K)$ és un* ***cicle q-dimensional*** *de K (o un q-cicle) si $\partial_q(z_q) = 0$. El conjunt de tots els q-cicles de K, que denotarem $Z_q(K)$, és el nucli de l'homomorfisme de frontera $\partial_q : C_q(K) \longrightarrow C_{q-1}(K)$ i per tant és un subgrup de $C_q(K)$. El grup $Z_q(K)$ rep el nom de* ***grup de q-cicles*** *de K. Un element $b_q \in C_q(K)$ és una* ***frontera q-dimensional*** *(o q-frontera) de K si existeix un $c' \in C_{q+1}(K)$ tal que $\partial_{q+1}(c') = b_q$. El conjunt de totes les q-fronteres, en tant que imatge de l'homomorfisme $\partial_{q+1}(C_{q+1}(K))$, és un subgrup de $C_q(K)$, el qual anomenarem* ***grup de q-fronteres*** *de K i el denotarem $B_q(K)$.*

Si ens trobem en el cas que $dimK = n$, observem que hi ha una successió

$$C_*(K): \quad ...0 \to C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} ... \to C_{q+1}(K) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(K) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(K) \to ... \to C_0(K) \to 0 \to ...$$

de grups lliures abelians i homomorfismes de grups tal que la composició de dos homomorfismes consecutius qualssevol és zero pel lema anterior. Aquesta seqüència s'anomena **complex orientat de cadenes simplicials** de K. Donat que $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ per cada q, $Im\partial_{q+1} \subseteq ker\partial_q$, és a dir, $B_q(K) \subseteq Z_q(K)$ i per tant té sentit considerar el grup quocient $Z_q(K)/B_q(K)$.

Definició 3.10. *Sigui K un complex simplicial orientat. El* ***grup d'homologia*** *de dimensió q de K, que denotarem $H_q(K)$, és el grup quocient*

$$H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$$

En el cas en que considerem el complex de cadenes $C_*(K; G)$ on G és un grup de coeficients, definim

$$H_q(K; G) = Z_q(K; G)/B_q(K; G)$$

que anomenarem **grup d'homologia de K amb coeficients en G**.

Recordem que si $q < 0$ o bé $q > dimK$ tots els grups de q-cadenes $C_q(K)$ són trivials, i per tant $H_q(K) = 0$. A més, observem que $B_n(K) = 0$ i $Z_0(K) = C_0(K)$. De tots aquests grups que hem definit al voltant de K, els grups d'homologia $H_q(K)$ són els més rellevants ja que tal com veurem a continuació seran invariants topològics de $|K|$. El elements de $H_q(K)$ s'anomenen **classes d'homologia**, i si són de la forma $z_q + B_q(K)$, on $z_q \in Z_q(K)$, els denotarem per $[z_q]$. Observem que un q-cicle z_q representarà un element no trivial de $H_q(K)$ sempre que aquest no sigui una q-frontera. Si dos q-cicles són de la mateixa classe d'homologia (és a dir, si la seva diferència és una q-frontera), direm que són **homòlegs**. A més, un q-cicle és homòleg a zero si i només si és una q-frontera.

Teorema 3.11. *Siguin K_1 i K_2 el mateix complex simplicial K amb dues orientacions diferents. $H_q(K_1) \cong H_q(K_2)$, $\forall q \geq 0$.*

Demostració. Si σ^q és un símplex de K qualsevol, aquest té una orientació com a símplex de K_1 i una altra (que pot ser la mateixa o bé la oposada) com a símplex de K_2. Si denotem ${}^i\sigma^q$ el símplex σ^q amb orientació positiva segons K_i, $i = 1, 2$, llavors ${}^1\sigma^q = \phi(\sigma^q) \cdot^2 \sigma^q$, on $\phi(\sigma^q) = 1$ si σ^q té la mateixa orientació en els dos complexos o bé $\phi(\sigma^q) = -1$ si té orientacions diferents. Definim $f_q : C_q(K_1) \longrightarrow C_q(K_2)$ una seqüència d'homomorfismes

$$f_q \left(\sum_i g_i \cdot^1 \sigma_i^q \right) = \sum_i g_i \cdot \phi(\sigma^q) \cdot^2 \sigma_i^q$$

on $c = \sum_i g_i \cdot^1 \sigma_i^q$ és una cadena de $C_q(K_1)$. Aquesta seqüència d'homomorfismes és un homomorfisme de complexos, és a dir, es compleix que $f_q \partial_q = \partial_q f_q$. És suficient provar-ho en les cadenes elementals ${}^1\sigma^q$:

$$f_{q-1}\partial_q({}^1\sigma^q) = f_{q-1}\left(\sum_{\sigma^{q-1}\in K} [{}^1\sigma^q, {}^1\sigma^{q-1}] \cdot^1 \sigma^{q-1}\right) = \sum_{\sigma^{q-1}\in K} \phi(\sigma^{q-1})[{}^1\sigma^q, {}^1\sigma^{q-1}] \cdot^2 \sigma^{q-1}$$

$$= \sum_{\sigma^{q-1}\in K} \phi(\sigma^{q-1})[\phi(\sigma^q)\cdot^2\sigma^q, \phi(\sigma^{q-1})\cdot^2\sigma^{q-1}]\cdot^2\sigma^{q-1} = \sum_{\sigma^{q-1}\in K} \phi(\sigma^{q-1})\phi(\sigma^q)\phi(\sigma^{q-1})[{}^2\sigma^q, {}^2\sigma^{q-1}]\cdot^2\sigma^{q-1}$$

$$= \phi(\sigma^q)\left(\sum_{\sigma^{q-1}\in K} [{}^2\sigma^q, {}^2\sigma^{q-1}] \cdot^2 \sigma^{q-1}\right) = \partial_q(\phi(\sigma^q) \cdot^2 \sigma^q) = \partial_q f_q({}^1\sigma^q)$$

Definim també un homomorfisme de complexos $g_q : C_q(K_2) \longrightarrow C_q(K_1)$ assignant

$$g_q({}^2\sigma^q) = \phi(\sigma^q) \cdot^1 \sigma^q$$

a les q-cadenes elementals i estenent-lo linealment a $C_q(K_2)$. Com que $\phi(\sigma^q)\cdot\phi(\sigma^q) = 1$, els dos homomorfismes de complexos $\{f_q\}$ i $\{g_q\}$ són l'invers l'un de l'altre. Per tant, l'homomorfisme induït $f_* : H_q(K_1) \longrightarrow H_q(K_2)$ és un isomorfisme per tot $q \geq 0$, provant el teorema. $\square$

Teorema 3.12. *Sigui K un complex simplicial. $H_0(K)$ sempre és un grup abelià lliure. De fet, si K té r components combinatòries K_i, $i = 1, ..., r$ i escollim un vèrtex de cada K_i, llavors $H_0(K)$ és isomorf a la suma directa $\bigoplus_1^r \mathbb{Z}$ de r còpies de $\mathbb{Z}\cdot\{v_i\}$.*

Demostració. Observem que totes les 0-cadenes v_i són 0-cicles. Sigui $w \in K_i$ un altre vèrtex qualsevol. Com que K_i és una component combinatòria de K, existeix una seqüència $a_0, a_1, ..., a_n$ tal que $w = a_0$, $v_i = a_n$ i $\langle a_i, a_{i+1}\rangle$ és un 1-símplex per cada $i = 0, 1, ..., n-1$. La frontera és $\partial\left(\sum_{i=0}^{n-1}\langle a_i, a_{i+1}\rangle\right) = v_i - w$, de manera que w és homòleg a v_i. Això significa que tot 0-cicle $\sum_j n_j w_j$ de la component K_i és homòleg a $\left(\sum_j n_j\right) v_i$. Això implica que tota 0-cadena (que és un 0-cicle) en K és homòloga a una combinació lineal de 0-cadenes elementals v_i.

Provem ara que els cicles $\{v_i\}_{i=1}^r$ són linealment independents, és a dir, cap combinació lineal no trivial $c = \sum_i n_i v_i$ és una frontera. Sigui $c = \partial(d)$ per alguna 1-cadena d. Com que cada 1-símplex de K es troba en una única component K_i, podem escriure $d = \sum_i d_i$, on $d_i \in K_i$. Com que $\partial(d) = \sum_i \partial(d_i)$, obtenim que $\partial(d_i) \in K_i$ i per tant $\partial(d_i) = n_i v_i$, per cada $i = 1, 2, ..., r$. Definim un homomorfisme de $C_0(K)$ en $\mathbb{Z}$ assignant $\epsilon(v) = 1$ a cada vèrtex de K. Es pot veure que per cada 1-cadena elemental $\langle v, w\rangle$, $\epsilon\partial(\langle v, w\rangle) = \epsilon(w - v) = 1 - 1 = 0$. En particular, $0 = \epsilon(\partial d_i) = \epsilon(n_i v_i) = n_i$, per cada $i = 1, 2, ..., r$.

Per la primera part de la demostració, l'homomorfisme $f : \bigoplus_1^r \mathbb{Z} \longrightarrow H_0(K)$ definit segons

$$f(m_1, ..., m_r) = \sum_i m_i \{v_i\}$$

és exhaustiu. Per la segona part de la demostració, sabem que és injectiu. Per tant, $H_0(K) \cong \bigoplus_1^r \mathbb{Z}\cdot\{v_i\}$. $\square$

Ja hem vist que les components combinatòries d'un complex simplicial K es relacionen directament amb les components arc-connexes de $|K|$, i per tant si considerem dos complexos simplicials K i K' tals que $|K|$ sigui homeomorf a $|K'|$, com que el nombre de components arc-connexes de tots dos espais és el mateix, també ho serà el nombre de components combinatòries i per tant $H_0(K) \cong H_0(K')$. Això ens mostra que el grup d'homologia $H_0(K)$ és un invariant topològic de $|K|$.

Definició 3.13. *Sigui K un complex simplicial. Definim un homomorfisme $\epsilon : C_0(K) \longrightarrow \mathbb{Z}$, que anomenarem **aplicació d'augment**, assignant $\epsilon(v) = 1$ a cada vèrtex v de K i estenent linealment a $C_0(K)$.*

Observem que aquest homomorfisme d'augment és exhaustiu. Si $\partial_1 : C_1(K) \longrightarrow C_0(K)$ és l'homomorfisme de frontera, llavors clarament $\epsilon\partial = 0$. El grup quocient $ker\epsilon/Im\partial_1$, que es denota $\tilde{H}_0(K)$, s'anomena el **grup d'homologia reduït** de dimensió zero de K. Si definim $\tilde{H}_p(K) = H_p(K)$ per cada $p \geq 1$, llavors els grups $\left\{\tilde{H}_i(K) : i = 0, 1, ...\right\}$ s'anomenen les **grups d'homologia reduïts** de K. Com que $Im\partial_1 \subset ker\epsilon \subset C_0(K)$, existeix una aplicació inclusió $\tilde{H}_0(K) \longrightarrow H_0(K)$.

Abans d'introduir el proper resultat, cal definir els conceptes de successió exacta i successió exacta dividida. Considerem la successió d'homomorfismes

$$... \to A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \to ...$$

diem que és una **successió exacta** si se satisfà $Im(f_{n+1}) = ker(f_n)$ per totes les n. Una seqüència exacta $0 \to A'' \xrightarrow{\alpha} A' \xrightarrow{\beta} A \to 0$ s'anomena **exacta dividida** si existeix una aplicació $\gamma : A \longrightarrow A'$ tal que $\beta\gamma = I_A$. En aquest cas, es dóna $A' \cong A'' \oplus A$.

Teorema 3.14. *Sigui K un complex simplicial. El seu grup d'homologia reduït de dimensió zero també és un grup abelià lliure, i es compleixen les següents expressions:*

$$H_0(K) \cong \tilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}, \qquad H_p(K) = \tilde{H}_p(K), \;\; p \geq 1.$$

Demostració. La successió

$$0 \to ker\epsilon \to C_0(K) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

és exacta, i per tant

$$0 \to \frac{ker\epsilon}{Im\partial_1} \to \frac{C_0(K)}{Im\partial_1} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

és també exacta. Com que $\mathbb{Z}$ és lliure, la seqüència és exacta dividida i per tant trobem que $H_0(K) \cong \tilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}$. A més, si $\{v_i\}_0^r$ és una base de $H_0(K)$, llavors $\{v_i - v_0\}_1^r$ és una base de $\tilde{H}_0(K)$. □

3.3 Propietats de grups d'homologia amb coeficients enters

Els grups d'homologia amb coeficients en $\mathbb{Z}$ d'un complex simplicial arbitrari K sempre tenen una estructura determinada. Sabem que un complex simplicial K té un nombre finit de símplex. Si $dimK = n$, no hi ha cap q-símplex per $q > n$ i per tant $H_q(K) = 0$ per tot $q > n$. Per cada $q \leq n$, hi ha un nombre finit de q-símplex en K i per tant el grup de q-cadenes $C_q(K)$ és un grup abelià lliure finitament generat de rang igual al nombre de q-símplex de K. Com que $Z_q(K)$ i $B_q(K)$ són subgrups de $C_q(K)$ i un subgrup d'un grup lliure és sempre lliure, aquests grups també són abelians lliures finitament generats. El grup quocient $H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$ és per tant un grup abelià finitament generat, però no necessàriament lliure. En qualsevol cal, el grup d'homologia de dimensió q $H_q(K)$ de K és un grup abelià finitament generat per tot $q \geq 0$.

Segons el teorema d'estructura dels grups abelians finitament generats, $H_q(K)$ és isomorf a la suma directa d'un nombre finit de còpies de $\mathbb{Z}$ i d'un nombre finit de grups cíclics d'ordre descendent:

$$(*) \qquad H_q(K) \cong \overbrace{\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}}^{\text{k còpies}} \oplus \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z}$$

per cada $q \geq 0$, on m_i és divisible per m_{i+1}, $i = 1, ..., n-1$.

Definició 3.15. *Si escrivim $H_q(K) \cong F_q(K) \oplus T_q(K)$, on $F_q(K)$ és la suma directa de còpies de $\mathbb{Z}$ (la qual s'anomena la **part lliure** de $H_q(K)$) i $T_q(K)$ és la suma directa de grups cíclics finits (la qual s'anomena **grup de torsió** de $H_q(K)$) tal com hem vist en $(*)$, el rang de $F_q(K)$ s'anomena el q-èssim **nombre de Betti** del complex simplicial K i el nombres m_i s'anomenen els q-èssims **coeficients de torsió** de K.*

La informació que extraiem de l'estructura dels grups d'homologia ens permet conèixer propietats interessants de l'espai topològic $|K|$. Per exemple, si tots els grups d'homologia de dimensió positiva de K són zero, podem afirmar que $|K|$ no té cap forat en cap dimensió. Més concretament, el q-èssim nombre de Betti de K ens indica la quantitat de forats de dimensió q que hi ha en $|K|$. De manera similar, els coeficients de torsió q-èssims indiquen que hi ha uns altres forats de dimensió q que estan recargolats.

Definició 3.16. *Sigui K un complex en $\mathbb{R}^n$ amb n suficientment gran. Sigui $w \in \mathbb{R}^n$ tal que cada raig emès des de w interseca $|K|$ en un punt com a màxim. Sigui $w * K$ la col·lecció de tots els símplex de la forma $\langle w, a_0, ..., a_p \rangle$, on $\langle a_0, ..., a_p \rangle$ és un símplex de K, juntament amb totes les cares d'aquests símplex. Aquest conjunt $w * K$ és un complex simplicial i s'anomena **con** sobre K de vèrtex w.*

Teorema 3.17. *Sigui K un complex qualsevol. Els grups d'homologia reduïts del con $w * K$ són trivials en totes les dimensions:*

$$H_q(w * K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ q = 0 \\ 0 & altrament \end{cases}$$

Demostració. És suficient provar que els grups d'homologia reduïts $\tilde{H}_q(w*K)$ són trivials en totes les dimensions. Com que el complex $w*K$ és connex, el grup d'homologia reduït de dimensió zero és trivial. Suposem doncs $q > 0$. Sigui z_q un q-cicle qualsevol de $w*K$. Demostrarem que z_q és una frontera. Per qualsevol símplex orientat $\sigma = \langle v_0, ..., v_q \rangle$ de K, sigui $[w, \sigma]$ el símplex orientat $\langle w, v_0, ..., v_q \rangle$ de $w * K$. Aquesta operació (que s'anomena l'**operació claudàtor**) està ben definida i dóna lloc a un homeomorfisme $C_p(K) \longrightarrow C_{p+1}(w * K)$ assignant $[w, \sum_i n_i \sigma_i] = \sum_i n_i [w, \sigma_i]$. Observem que per un símplex σ,

$$\partial[w, \sigma] = \begin{cases} \sigma - w & \text{si } dim\sigma = 0 \\ \sigma - [w, \partial\sigma] & \text{si } dim\sigma > 0 \end{cases}$$

i per tant, de manera més general per una cadena c_q,

$$\partial[w, c_q] = \begin{cases} c_q - \epsilon(c_0)w & \text{si } q = 0 \\ c_q - [w, \partial c_q] & \text{si } q > 0 \end{cases}$$

Sigui $z_d = c_q + [w, d_{q-1}]$ on c_q està format pels termes de z_q que estan en el complex K i d_{q-1} és una cadena de K. Usant la fórmula anterior obtenim

$$z_q - \partial[w, c_q] = c_q + [w, d_{q-1}] - c_q + [w, \partial c_q] = [w, c_{q-1}]$$

on $c_{q-1} = d_{q-1} + \partial c_q$ és una cadena de K. Si apliquem l'operador frontera ∂ a totes dues bandes de la igualtat i tenim en compte que z_q és un cicle, obtenim

$$0 = \begin{cases} c_{q-1} - \epsilon(c_{q-1})w & \text{si } q = 1 \\ c_{q-1} - [w, \partial c_{q-1}] & \text{si } q > 1 \end{cases}$$

Observem que c_{q-1} és una cadena de símplex de K. En canvi, $\epsilon(c_{q-1})w$ i $[w, \partial c_{q-1}]$ són cadenes amb símplex que tenen w com a vèrtex, i per tant no són de K. Això només pot passar si c_{q-1} i les cadenes posteriors són 0-cadenes, és a dir, $c_{q-1} = 0$. Per tant,

$$z_q - \partial[w, c_q] = [w, c_{q-1}] = 0$$

és a dir, z_q és una frontera. □

Corol·lari 3.18. *Sigui $\mathbb{D}^n$ el n-disc euclidià.*

$$H_q(\mathbb{D}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ q = 0 \\ 0 & altrament \end{cases}$$

Demostració. $K = Cl(\sigma^n)$ és una triangulació de $\mathbb{D}^n$, i és un con. □

Teorema 3.19. *Sigui $K(n)$, $n \geq 1$, el n-esquelet del complex $K = Cl(\sigma^{n+1})$.*

$$H_q(K(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ q = 0\ ó\ n \\ 0 & altrament \end{cases}$$

Demostració. És suficient provar que $\tilde{H}_q(K(n)) \cong \mathbb{Z}$ si $q = n$ i és zero en qualsevol altre cas. $K(n)$ és un subcomplex de $K = Cl(\sigma^{n+1})$, i per tant considerem el diagrama commutatiu de complexos de cadenes que defineixen els grups d'homologia de K i $K(n)$. Les aplicacions verticals vénen induïdes per les inclusions.

$$\begin{tikzcd} C_{n+1}(K) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & Cn \arrow[r, "\partial_n"] & ... \arrow[r] & C_0(K) \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbb{Z} \\ 0 \arrow[r] & C_n(K(n)) \arrow[u, "="] \arrow[r, "\partial_n"'] & ... \arrow[r] & C_0(K(n)) \arrow[u, "="'] \arrow[r, "\epsilon"'] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Les dues cadenes de complexos són idèntiques excepte en la dimensió $n+1$. Per tant,

$$\tilde{H}_i(K(n)) \cong \tilde{H}_\cdot(K) = 0$$

per tota $i \neq n$. En el cas de dimensió n, tenim

$$H_n(K(n)) \cong Z_n(K(n)) = ker\partial_n = Im\partial_{n+1}$$

ja que $H_n(K) = 0$. Per tant, $C_{n+1}(K)$ és cíclic infinit generat per σ^{n+1} i ∂_{n+1} és un homeomorfisme no trivial. Així doncs, $Im\partial_{n+1}$ és cíclic infinit ja que $C_n(K)$ no té torsió i per tant $H_n(K(n)) \cong \mathbb{Z}$. □

Corol·lari 3.20. *Sigui $\mathbb{S}^n$, $n \geq 1$ la n-esfera.*

$$H_q(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ q = 0 \text{ ó } n \\ 0 & altrament \end{cases}$$

Demostració. La demostració se segueix directament del teorema anterior ja que $K(n)$ l'n-esquelet de $K = Cl(\sigma^{n+1})$ és una triangulació de $\mathbb{S}^n$. □

Definició 3.21. *Sigui K un complex orientat de dimensió n, i sigui $R_q(K)$ el rang del grup abelià $H_q(K)$ (els nombres de Betti), $q = 0, 1, ..., n$. La suma alternada $\sum_{q=0}^{n}(-1)^q R_q(K)$, que denotarem $\chi(K)$, s'anomena la **característica d'Euler** de K.*

Ja hem vist que si K i K' són dues triangulacions d'un espai X, $H_i(K) \cong H_i(K')$ $\forall i \geq 0$, i per tant la característica d'Euler només depèn de la topologia de l'espai $X = |K|$. És a dir, la característica d'Euler d'un poliedre compacte és un invariant topològic.

En la definició de característica d'Euler hem usat els grups d'homologia de K amb coeficients enters. Si considerem els grups d'homologia amb coeficients racionals $H_i(K;\mathbb{Q})$, cada un d'aquests grups serà un espai vectorial sobre $\mathbb{Q}$, i en aquest cas el rang és la dimensió de l'espai vectorial. Es pot provar que $rang H_i(K;\mathbb{Z}) = dim_{\mathbb{Q}} H_i(K;\mathbb{Q})$ =i-èssim nombre de Betti del complex K. Per tant, la característica d'Euler pot ser definida utilitzant coeficients racionals.

Teorema 3.22 (Teorema d'Euler-Poincaré). *Sigui K un complex orientat de dimensió n. Suposem que per cada $q = 0, 1, ..., n$, α_q denota el nombre de q-símplex de K. Es compleix*

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q \alpha_q = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q R_q(K)$$

Demostració. Observem que la part dreta de la igualtat està expressada en termes del rang dels grups d'homologia de K, $q \geq 0$. Com hem indicat anteriorment, podem assumir que tots els grups d'homologia tenen coeficients racionals usant $rang H_q(K;\mathbb{Z}) = dim_{\mathbb{Q}} H_q(K;\mathbb{Q})$. En aquest context, els grups $C_q(K)$, $Z_q(K)$, $B_q(K)$ i $H_q(K)$ associats al complex K són espais vectorials sobre $\mathbb{Q}$. Considerem la cadena de complexos

$$0 \to C_n(K) \to ... \to C_{q+1}(K) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(K) \to ... \to C_0(K)$$

Observem que $\alpha_q = dim C_q(K)$, $q \geq 0$. A més,

$$B_q = Im(\partial_{q+1}) \cong C_{q+1}/ker \partial_{q+1} = C_{q+1}/Z_{q+1}$$

Així doncs, per tot $q \geq 0$, tenim

$$dim B_q = dim C_{q+1} - dim Z_{q+1}$$

D'altra banda, $H_q \cong Z_q/B_q$ i per tant

$$dim H_q = dim Z_q - dim B_q$$

Si substituïm el valor de $dim B_q$, obtenim que per tot $q \geq -1$

$$dim C_{q+1} = dim Z_q - dim H_q + dim Z_{q+1}$$

Prenent $q = -1, 0, ..., n$ i fent la suma alternada, obtenim

$$\sum_{q=0}^{n} (-1)^q dim C_q = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q dim H_q$$

Com que $dim C_q = \alpha_q$ i $dim H_q = R_q(K)$, queda provat el teorema. $\square$

Definició 3.23. *P és un **poliedre rectilini** en l'espai euclidià de dimensió 3 si P és un sòlid de $\mathbb{R}^3$ que té com a frontera la unió mitjançant arestes de polígons convexos de dimensió 2. El polígons de la frontera reben el nom de **cares** de P, la intersecció de dues cares rep el nom d'**aresta** de P i la intersecció de dues arestes rep el nom de **vèrtex**. El poliedre P és **simple** si la seva frontera és homeomorfa a la 2-esfera $\mathbb{S}^2$. Un poliedre rectilini és **regular** si les seves cares són polígons regulars congruents i tots els angles poliedrals són iguals.*

Teorema 3.24 (Teorema d'Euler). *Si S és un poliedre simple amb V vèrtex, A arestes i C cares, llavors $V - A + C = 2$.*

Demostració. La frontera de S és un complex K consistent en la unió adequada de polígons convexos 2-dimensionals. Si tots els polígons de la frontera són triangles, llavors K és un complex simplicial tal que $|K|$ és homeomorf a $\mathbb{S}^2$. Com que $V = \alpha_0$, $A = \alpha_1$ i $C = \alpha_2$ el resultat s'obté directament del teorema d'Euler-Poincaré. Considerem doncs el cas en el que K té cares no triangulars. Sigui τ una d'aquestes cares, i siguin n_0 el nombre de vèrtex i n_1 el nombre d'arestes que té. Per la cara τ, $V - A + C = n_0 - n_1 + 1$. Com que τ és convex, el podem subdividir en triangles prenent un vèrtex v de l'interior de τ i unint v amb cada vèrtex de τ. En la triangulació de τ que hem obtingut, hi ha un nou vèrtex i n_0 noves arestes. A més, la cara τ s'ha reemplaçat per n_0 triangles. Així, la contribució de τ en el càlcul és $v - a + c = (n_0 + 1) - (n_1 + n_0) + n_0 = n_0 - n_1 + 1$, que no ha variat. Per tant, podem assumir que K és un complex simplicial i el teorema és conseqüència del teorema d'Euler-Poincaré ja que $V - A + C = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ és la característica d'Euler $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$. Per tant, $V - A + C = 2$ per tot poliedre simple. $\square$

Teorema 3.25. *Només hi ha cinc poliedres regulars simples.*

Demostració. Sigui S un poliedre regular simple amb V vèrtex, A arestes i C cares. Siguin m el nombre d'arestes que interseqüen en un mateix vèrtex, i n el nombre d'arestes de cada cara de S. Observem que es compleix $mV = 2A = nC$. Pel teorema d'Euler $V - A + C = 2$, i si substituïm usant l'expressió anterior obtenim que $(nC)/m - (nC)/2 + C = 2$ és a dir, $C(2n - nm + 2m) = 4m$ i per tant $2n - mn + 2m > 0$. Com que $n \geq 3$, tenim que $2m > n(m-2) \geq 3(m-2) = 3m - 6$ i per tant $m < 6$, és a dir, el nombre màxim d'arestes que poden compartir un vèrtex és 5. Si tenim en compte que $n \geq 3$ i $m < 6$ la igualtat $C(2n - nm + 2m) = 4m$ permet els següents valors de $(m, n, C) = (3, 3, 4)$, $(3, 4, 6)$, $(4, 3, 8)$, $(3, 5, 12)$ i $(5, 3, 20)$, que es corresponen als cinc sòlids platònics: el tetraedre, el cub, l'octaedre, el dodecaedre i l'icosaedre. $\square$

3.4 Homomorfismes induïts

Definició 3.26. *Sigui $f : K \longrightarrow L$ una aplicació simplicial. Per cada $q \geq 0$, definim un homomorfisme $f_\# : C_q(K) \longrightarrow C_q(L)$ assignant*

$$f_\#(\langle v_0, ..., v_q \rangle) = \begin{cases} \langle f(v_0), ..., f(v_q) \rangle & \textit{si els } f(v_i) \textit{ són diferents} \\ 0 & \textit{altrament} \end{cases}$$

per cada símplex $\langle v_0, ..., v_q \rangle$ de K i estenent linealment en $C_q(K)$.

Proposició 3.27. *Sigui $f : K \longrightarrow L$ una aplicació simplicial. La successió induïda $\{f_\# : C_q(K) \longrightarrow C_q(L)\}$ d'homomorfismes commuta amb l'homomorfisme de frontera ∂ del complex de cadenes. Per tant $f_\#$ indueix un homomorfisme $f_* : H_q(K) \longrightarrow H_q(L)$ en cada dimensió q.*

Demostració. Considerem el següent diagrama per $q \geq 1$:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & C_q(K) & \xrightarrow{\partial} & C_{q-1}(K) & \longrightarrow \\ & {\scriptstyle f_\#}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_\#} & \\ \longrightarrow & C_q(L) & \xrightarrow[\partial]{} & C_{q-1}(L) & \longrightarrow \end{array}$$

Hem de provar que $f_\#\partial = \partial f_\#$, és a dir,

$$(*) \qquad f_\#(\partial \langle v_0, ..., v_q \rangle) = \partial(\langle f(v_0), ..., f(v_q) \rangle)$$

per cada q-símplex orientat $\langle v_0, ..., v_q \rangle$ de K. Com que hi poden haver repeticions en els vèrtex $f(v_0), ..., f(v_q)$, considerem τ el símplex de L format per aquests vèrtex i veiem que $dim\tau \leq q$. Considerem tres casos:

Cas 1: $dim\tau = q$. En aquest cas tots els vèrtex $f(v_0), ..., f(v_q)$ són diferents i per tant el resultat se segueix directament de la definició de $f_\#$ i ∂.

Cas 2: $dim\tau \leq q - 2$. En aquest cas ambdues bandes de $(*)$ són zero ja que en el conjunt de vèrtex $f(v_0), ..., f(v_q)$ n'hi ha almenys tres d'idèntics.

Cas 3: $dim\tau = q - 1$. En aquest cas dos vèrtex de $f(v_0), ..., f(v_q)$ són idèntics. Suposem que $f(v_0) = f(v_1)$ i la resta són diferents. Per definició, la banda esquerra de $(*)$ és zero. La banda dreta només té dos termes no nuls, que són

$$\langle f(v_1), f(v_2), ..., f(v_q) \rangle - \langle f(v_0), f(v_2), ..., f(v_q) \rangle$$

Com que $f(v_0) = f(v_1)$ aquests termes també es cancel·len i per tant la banda esquerra és zero.

Per provar que per cada $q \geq 0$, $f_\#$ indueix un homomorfisme $f_* : H_q(K) = H_q(L)$, tenim en compte que $H_q(\cdot) = Z_q(\cdot)/B_q(\cdot)$. Es comprova fàcilment que $f_\#(Z_q(K)) \subseteq Z_q(L)$ i $f_\#(B_q(K)) \subseteq B_q(L)$, és a dir, $f_\#$ envia els cicles a cicles i les fronteres a fronteres. Per tant, $f_\#$ indueix l'homomorfisme $f_* : H_q(K) \longrightarrow H_q(L)$ definit per $f_*(\{z_q\}) = \{f_\#(z_q)\}$. $\square$

De la definició d'homomorfisme induït se'n dedueix el teorema següent:

Teorema 3.28. *(a) Sigui $I_K : K \longrightarrow K$ l'aplicació simplicial identitat. L'homomorfisme induït $(I_K)_* : H_q(K) \longrightarrow H_q(K)$ és la identitat per cada $q \geq 0$.*

(b) Siguin $f : K \longrightarrow L$ i $g : L \longrightarrow M$ aplicacions simplicials. Per cada $q \geq 0$

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_q(K) \longrightarrow H_q(M)$$

Sabem que una aplicació simplicial f que envia un complex K a un complex L indueix una aplicació contínua $|f|$ de $|K|$ en $|L|$. En canvi, donada una aplicació contínua h :

$|K| \longrightarrow |L|$, volem saber si existeix un homomorfisme induït $h_* : H_q(K) \longrightarrow H_q(L)$. Si l'aplicació h està induïda per una aplicació simplicial, sabem que sí existeix. Si, per contra, h no està induïda per cap aplicació simplicial, podem prendre una aproximació simplicial $g : K^{(k)} \longrightarrow L$ d'h la qual indueix una aplicació contínua $|g| : |K^{(k)}| \longrightarrow |L|$ que és homòtopa a h. Sabem que existeix un homomorfisme induït $g_* : H_q(K^{(k)}) \longrightarrow H_q(L)$. Si provéssim que existeix un isomorfisme $\mu : H_q(K) \longrightarrow H_q(K^{(k)})$ per qualsevol enter k i que donades dues aproximacions simplicials d'h $g : K^{(k)} \longrightarrow L$ i $g' : K^{(m)} \longrightarrow L$ llavors $g_*\mu = g'_*\mu'$, podríem definir un homomorfisme $h_* : H_q(K) \longrightarrow H_q(L)$ usant la commutativitat del diagrama

$$\begin{tikzcd} H_q(K) \arrow[r, "h_*"] \arrow[d, "\mu"'] & H_q(L) \\ H_q(K^{(k)}) \arrow[ur, "g_*"'] & \end{tikzcd}$$

és a dir, definim $h_* = g_* \circ \mu$.

Més endavant provarem que efectivament aquestes dues propietats es compleixen. També assumirem el següent teorema:

Teorema 3.29. *(a) L'aplicació identitat $I_{|K|} : |K| \longrightarrow |K|$ indueix l'homomorfisme identitat $I_{H_q(K)} : H_q(K) \longrightarrow H_q(K)$ per tota dimensió q.*

(b) Siguin $f : |K| \longrightarrow |L|$ i $g : |L| \longrightarrow |M|$ dues aplicacions contínues. Per cada $q \geq 0$

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_q(K) \longrightarrow H_q(M)$$

La demostració d'aquest teorema la donarem més tard amb la prova d'existència de l'homomorfisme induït per una aplicació contínua.

Teorema 3.30. *Siguin X un poliedre i K, L dues triangulacions de X. Per cada $q \geq 0$, $H_q(K) \cong H_q(L)$.*

Demostració. Donat que K i L són triangulacions de l'espai X, existeixen homeomorfismes $f : |K| \longrightarrow X$ i $g : |L| \longrightarrow X$. Això significa que $h = g^{-1} \circ f : |K| \longrightarrow |L|$ és un homeomorfisme. Sigui $h^{-1} : |L| \longrightarrow |K|$ la inversa d'h. Considerem l'homomorfisme induït $h_* : H_q(K) \longrightarrow H_q(L)$ i la seva inversa $h_*^{-1} : H_q(L) \longrightarrow H_q(K)$. Sabem que $h^{-1} \circ h = I_{|K|}$ i que $h \circ h^{-1} = I_{|L|}$. Així doncs, pel teorema anterior $h_*^{-1} \circ h_* = I_{H_q(K)}$ i $h_* \circ h_*^{-1} = I_{H_q(L)}$ i per tant h_* és un isomorfisme. □

El teorema anterior ens assegura que els grups d'homologia són independents de la triangulació del poliedre compacte X, de manera que podem definir $H_q(X) = H_q(K)$ on K és una triangulació qualsevol de X, els qual estan ben definits llevat d'isomorfisme.

La n-esfera $\mathbb{S}^n$ i el n-disc $\mathbb{D}^n$ són poliedres compactes, i n'hem calculat els grups d'homologia d'una de les seves triangulacions. Per tant, podem afirmar que els grups d'homologia d'aquests espais són:

$$H_q(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \text{ ó } n \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

$$H_q(\mathbb{D}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

És important observar que si $f : X \longrightarrow Y$ és una aplicació contínua d'un poliedre X en un poliedre Y, i escollim triangulacions $h : |K| \longrightarrow X$ i $k : |L| \longrightarrow Y$, l'aplicació contínua $k^{-1}fh : |K| \longrightarrow |L|$ indueix un homomorfisme $f_* : H_q(X) \longrightarrow H_q(Y)$ assignant $f_* = (k^{-1}fh)_*$. Aquesta definició és correcta sempre que estudiem grups d'homologia fins a isomorfisme.

3.5 Algunes aplicacions: invariància de dimensió, teorema de la no-retracció i teorema del punt fix de Brouwer

Teorema 3.31 (Invariància de dimensió). *Si $m \neq n$, llavors:*

(a) $\mathbb{S}^m$ no és homeomorf a $\mathbb{S}^n$

(b) $\mathbb{R}^m$ no és homeomorf a $\mathbb{R}^n$

Demostració. (i) Suposem que hi ha un homeomorfisme $f : \mathbb{S}^m \longrightarrow \mathbb{S}^n$. Siguin $h : |K| \longrightarrow \mathbb{S}^m$ i $k : |l| \longrightarrow \mathbb{S}^n$ triangulacions de $\mathbb{S}^m$ i $\mathbb{S}^n$ respectivament. Anteriorment ja hem calculat els grups d'homologia de K i L. Com f és un homeomorfisme, l'aplicació $g = k^{-1}fh : |K| \longrightarrow |L|$ també és un homeomorfisme. Sigui $g^{-1} : |L| \longrightarrow |K|$ la seva inversa. Considerem els homomorfismes induïts $g_* : H_m(K) \longrightarrow H_m(L)$ i $g_*^{-1} : H_m(L) \longrightarrow H_m(K)$. Donat que $g^{-1}g = I_{|K|}$, pel teorema 3.29 obtenim

$$g_*^{-1}g_* = (g^{-1}g)_* = (I_{|K|})_* = I_{H_m(K)}$$

Pel mateix raonament trobem que $g_*g_*^{-1}$ també és la identitat de $H_m(L)$. Per tant, g_* és un isomorfisme. Tanmateix, això és una contradicció, ja que $H_m(K) = \mathbb{Z}$ però $H_m(L) = 0$ ja que $m \neq n$.

(ii) Suposem que $\mathbb{R}^m$ és homeomorf a $\mathbb{R}^n$. Com que ambdós espais són Hausdorff localment compactes, les seves compactificacions d'Alexandroff ($\mathbb{S}^m$ i $\mathbb{S}^n$ respectivament) també són homeomorfes, però això entra en contradicció amb (i). Per tant, si $m \neq n$, $\mathbb{R}^m$ no pot ser homeomorf a $\mathbb{R}^n$. □

La frontera del n-disc tancat $\mathbb{D}^n$ és homeomorfa a la (n-1)-esfera $\mathbb{S}^{n-1}$, de manera que $\mathbb{S}^{n-1}$ és un subconjunt compacte de $\mathbb{D}^n$. Ens podem preguntar, doncs, si $\mathbb{S}^{n-1}$ és un retracte de $\mathbb{D}^n$ (és a dir, si existeix una aplicació contínua $r : \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ tal que $r(a) = a$ per $a \in \mathbb{S}^{n-1}$). Pel cas $n = 1$ és immediat veure que no, ja que $\mathbb{D}^1 = [-1, 1]$ és connex però $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ no. Per tal de respondre aquesta pregunta per dimensions superiors, demostrarem el teorema de no-retracció.

Teorema 3.32 (Teorema de no-retracció). *L'esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ no pot ser un retracte de $\mathbb{D}^n$ per cap $n \geq 1$.*

Demostració. Suposem que existeix una retracció $r : \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$. Sigui $i : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{D}^n$ l'aplicació inclusió. Clarament, $ri = I_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Pel cas $n = 1$ això és impossible ja que $\mathbb{D}^1$ és connex però $\mathbb{S}^0$ no. Suposem que $n > 1$. Siguin $h : |K| \longrightarrow \mathbb{D}^n$ i $k : |L| \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ triangulacions del disc i l'esfera. Observem que tenim aplicacions contínues $k^{-1}rh : |K| \longrightarrow |L|$ i $h^{-1}ik : |L| \longrightarrow |K|$ tals que la seva composició és la identitat. Això significa que la composició

$$\mathbb{Z} = H_{n-1}(L) \to H_{n-1}(K) \to H_{n-1}(L) = \mathbb{Z}$$

és la identitat en $\mathbb{Z}$ pel teorema 3.29. Tanmateix, això és una contradicció, ja que $H_{n-1}(K) = 0$. □

Teorema 3.33 (Teorema del punt fix de Brouwer). *Sigui $f : \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}^n$, $n \geq 1$, una aplicació contínua. f té almenys un punt fix.*

Demostració. Suposem que f no té punts fixos. Això implica que per cada $x \in \mathbb{D}^n$, $f(x) \neq x$. Definim l'aplicació $g : \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ de la manera següent: per cada $x \in \mathbb{D}^n$, considerem el segment que uneix $f(x)$ amb x i l'estenem més enllà de x fins que intersequi amb $\mathbb{S}^{n-1}$ en un únic punt, que serà $g(x)$. Veiem que $g : \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ és contínua. Per cada x, el vector no nul $x - f(x)$ es pot multiplicar per un únic escalar positiu λ de manera que $g(x) = f(x) + \lambda(x - f(x))$. Com que $g(x)$ és un punt de $\mathbb{S}^{n-1}$, té norma 1 i per tant $\|f(x) + \lambda(x - f(x))\| = 1$. Això implica que

$$\|f(x)\|^2 + \lambda^2\|(x - f(x))\|^2 + 2\lambda f(x) \cdot (x - f(x)) = 1$$

que és una equació quadràtica en λ amb una única arrel real positiva. Per tant, obtenim que $\lambda = \frac{-f(x)\cdot(x-f(x))}{\|x-f(x)\|^2}$. Això demostra que λ és una funció de x contínua i per tant g és una funció contínua. Tanmateix, g és clarament una retracció de $\mathbb{D}^n$ en $\mathbb{S}^{n-1}$ que és una contradicció amb el teorema de no-retracció. $\square$

3.6 Grau d'una aplicació i utilitat

Un homomorfisme $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ del grup cíclic infinit està completament determinat per la imatge del seu generador $1 \in \mathbb{Z}$, de manera que f és la multiplicació per un enter $f(1) = n$.

Definició 3.34. *Siguin $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$, $(n \geq 1)$ una aplicació contínua i $h : |K| \longrightarrow \mathbb{S}^n$ una triangulació de $\mathbb{S}^n$. Sabem que f indueix un homomorfisme $(h^{-1}fh)_* : H_n(K) \longrightarrow H_n(K)$. Com que $H_n(K) \cong \mathbb{Z}$, existeix un únic enter d tal que per cada element $\alpha \in H_n(K)$, $(h^{-1}fh)_*(\alpha) = d\alpha$. Aquest enter d s'anomena el* ***grau*** *de f i es denota $degf$.*

És important veure que el grau no depèn de la triangulació escollida. Siguin doncs $h : |K| \longrightarrow \mathbb{S}^n$ i $k : |L| \longrightarrow \mathbb{S}^n$ dues triangulacions de $\mathbb{S}^n$. Veiem que $\phi = k^{-1}h : |K| \longrightarrow |L|$ i $\phi^{-1} = h^{-1}k : |L| \longrightarrow |K|$ són homeomorfismes. Per tant, $(k^{-1}fk)_*(\alpha) = (k^{-1}h)_*(h^{-1}fh)_*(h^{-1}k)_*(\alpha) = \phi_*(h^{-1}fh)_*\phi_*^{-1}(\alpha) = \phi_*(d\cdot(\phi^{-1})_*(\alpha)) = \phi_*(\phi^{-1})_*(d\cdot\alpha) = d \cdot \alpha$ que ens indica que $(k^{-1}fk)_*$ és també una multiplicació per d.

Proposició 3.35. *(a) L'aplicació identitat $I_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ té grau +1.*

(b) Si $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ i $g : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ són aplicacions contínues, llavors $deg(g \circ f) = degg \cdot degf$.

(c) El grau de tot homeomorfisme és ± 1.

Demostració. (a) Se segueix directament del fet que l'aplicació identitat $I_{\mathbb{S}^n}$ indueix l'aplicació identitat en l'homologia.

(b) Sigui $k : |K| \longrightarrow \mathbb{S}^n$ una triangulació de $\mathbb{S}^n$. Suposem que $degf = n_1$ i $degg = n_2$. Per tot $\alpha \in H_n(K)$ tenim

$$(k^{-1}g \circ fk)_*(\alpha) = (k^{-1}gk)_*\left((k^{-1}fk)_*(\alpha)\right) = (k^{-1}gk)_*(n_1\alpha) = n_2(n_1\alpha) = (n_2n_1)\alpha$$

I per tant, $deg(g \circ f) = degg \cdot degf$.

(c) Sigui $h : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ un homeomorfisme. Llavors $h^{-1} \circ h = I_{\mathbb{S}^n}$ i usant (a) obtenim

$$deg(h^{-1} \circ h) = 1 = degh^{-1} \cdot degh$$

Com que $degh$ i $degh^{-1}$ són enters, necessàriament $degh = degh^{-1} = +1$ o bé -1. □

Ara provarem que si $f, g : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ són dues aplicacions homòtopes llavors tenen el mateix grau. Fixem-nos que si $h : |K| \longrightarrow \mathbb{S}^n$ és una triangulació de $\mathbb{S}^n$, llavors $h^{-1}fh, h^{-1}gh : |K| \longrightarrow |K|$ també són homòtopes. Provarem que dues aplicacions homòtopes indueixen homomorfismes idèntics en l'homologia, i per tant haurem provat que tenen el mateix grau. Per tal de fer aquesta demostració, és més útil utilitzar la definició clàssica de grau d'una aplicació introduïda per L.E.J. Brouwer.

Definició 3.36. *Siguin $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ una aplicació contínua i $h : |K| \longrightarrow \mathbb{S}^n$ una triangulació de $\mathbb{S}^n$. Sigui $\phi : K^{(k)} \longrightarrow K$ una aproximació simplicial de f, on $K^{(k)}$ és la k-èssima subdivisió baricèntrica de K. Per qualsevol n-símplex orientat positivament $\tau \in K$, sigui p el nombre de símplex positivament orientats $\sigma \in K^{(k)}$ tals que $\phi(\sigma) = \tau$ i sigui q el nombre de símplex orientats negativament $\sigma \in K^{(k)}$ tals que $\phi(\sigma) = \tau$. L'enter $p - q$ és independent de la tria de τ, K, $K^{(k)}$ i ϕ. Aquest enter rep el nom de **grau** de l'aplicació f.*

Es pot provar que aquestes dues definicions de grau d'una aplicació són de fet equivalents, però no ho veurem en aquest treball. De la definició de Brouwer se'n deriva que l'aplicació $f(z) = z^n$ té grau n, que l'aplicació constant té grau zero i que la identitat té grau u.

Teorema 3.37. *Si dues aplicacions contínues $f, g : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ són homòtopes, llavors $degf = degg$.*

Demostració. Sigui $H : \mathbb{S}^n \times I \longrightarrow \mathbb{S}^n$ una homotopia de f a g. Si considerem $H(x,t) = h_t(x)$, $x \in \mathbb{S}^n$, $t \in I$, h_t és contínua i $h_0 = f$, $h_1 = g$. És suficient provar que l'aplicació $I \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida per $t \mapsto degh_t$ és constant. Per tal de provar-ho, veurem que l'aplicació $I \longrightarrow \mathbb{Z}$ és contínua, ja que I és connex i $\mathbb{Z}$ té la topologia discreta. Sigui K una triangulació de $\mathbb{S}^n$ i considerem el recobriment obert $\{ost(w_i) : w_i \text{ és un vèrtex de } K\}$. Sigui ϵ el nombre de Lebesgue del recobriment. Donat que H és uniformement contínua, podem trobar un real positiu δ tal que $A \subset \mathbb{S}^n$, $B \subset I$ amb $diam(A) < \delta$, $diam(B) < \delta$ i per tant que $diam(H(A \times B)) < \epsilon$. Sigui $K^{(k)}$ una subdivisió baricèntrica de K amb una xarxa inferior a $\delta/2$ de manera que per cada vèrtex v de $K^{(k)}$, $diam(ost(v)) < \delta$. Prenem una partició $0 = t_o < t_1 < ... < t_q = 1$ de I tal que $|t_j - t_{j-1}| < \delta$, $\forall j = 0, 1, ..., q$. Llavors per cada vèrtex v_i de K el conjunt $h(ost(v_i) \times [t_{j-1}, t_j])$ té un diàmetre menor que ϵ per cada j. Per tant, existeix un vèrtex w_{ij} de K tal que $h(ost(v_i) \times [t_{j-1}, t_j]) \subseteq ost(w_{ij})$. Així doncs, per cada $t \in [t_{j-1}, t_j]$, podem definir una aplicació simplicial ϕ_t assignant $\phi_t(v_i) = w_{ij}$, que és una aproximació simplicial de h_t per tot $t \in [t_{j-1}, t_j]$. Com ϕ_t és independent de $t \in [t_{j-1}, t_j]$, de la definició de grau d'una aplicació de Brouwer se'n dedueix que l'aplicació h_t té el mateix grau per tot $t \in [t_{j-1}, t_j]$, provant que $t \mapsto degh_t$ és una aplicació contínua. □

Definició 3.38. *Sigui $\mathbb{S}^n$ la n-esfera unitària inclosa en $\mathbb{R}^{n+1}$. L'aplicació $A : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ definida per $A(x) = -x$, $x \in \mathbb{S}^n$ s'anomena l'**aplicació antipodal**.*

Teorema 3.39. *El grau de l'aplicació antipodal $A : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ és $(-1)^{n+1}$, $n \geq 1$.*

Demostració. Sabem que $\mathbb{S}^n = \left\{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\}$. Una aplicació $r_i : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ definida per $r_i(x_1, ..., x_i, ..., x_{n+1}) = (x_1, ..., -x_i, ..., x_{n+1})$ s'anomena una reflexió. Provarem que la reflexió $r = r_{n+1}$ té grau -1, i per tant cada reflexió r_i té grau -1. Definim h com l'homeomorfisme de $\mathbb{S}^n$ que intercanvia les coordenades x_i i x_{n+1} per una i fixa, de manera que $h^{-1}rh = r_i$ i per tant $degr_i = degh^{-1} \cdot degr \cdot degh = degr$. Això provarà que tota reflexió té grau (-1). Com que l'aplicació antipodal $A = r_1 \circ r_2 \circ ... \circ r_{n+1}$, obtindrem que $degA = (-1)^{n+1}$. Per a tal efecte, prendrem $S(K)$ una triangulació de $\mathbb{S}^n$ i $g : S(K) \longrightarrow S(K)$ una aplicació simplicial que ens indueixin l'aplicació r. Sigui K una triangulació de $\mathbb{S}^{n-1}$ inclosa en $\mathbb{S}^n$ de la manera estàndard. Siguin w_0 i w_1 dos vèrtex diferents dels cons $w_0 * K$ i $w_1 * K$ i definim $S(K) = (w_0 * K) \cup (w_1 * K)$. Sigui g l'aplicació simplicial de $S(K)$ en si mateix que intercanvia els vèrtex w_0 i w_1 mantenint la resta fixats. Sigui $h : |K| \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ un homeomorfisme de triangulació. Definim $k : |S(K)| \longrightarrow \mathbb{S}^n$ de la manera següent: Si $y = (1-t)x + tw_0$ per algun $x \in |K|$, definim $k(y) = \left(\sqrt{1-t^2}h(x), t\right)$, i si $y = (1-t)x + tw_1$, definim $k(y) = \left(\sqrt{1-t^2}h(x), -t\right)$. Així doncs k és un homeomorfisme que fa que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} |S(K)| & \xrightarrow{k} & \mathbb{S}^n \\ {\scriptstyle g}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle r} \\ |S(K)| & \xrightarrow[k]{} & \mathbb{S}^n \end{array}$$

sigui commutatiu. Per tant, és suficient provar que $degg = -1$. Sigui z un n-cicle de $S(K)$. Llavors z és una cadena de la forma $z = [w_0, c_m] + [w_1, d_m]$, on c_m i d_m són cadenes de K i $m = n-1$. Suposem que $n > 1$. Com que z és un cicle, tenim

$$0 = \partial(z) = c_m - [w_0, \partial c_m] + d_m - [w_1, \partial d_m]$$

Si restringim aquesta cadena a K, obtenim $0 = c_m + d_m$ i per tant

$$z = [w_0, c_m] - [w_1, c_m]$$

Com que g només intercanvia w_0 i w_1, obtenim que

$$g_*(z) = [w_1, c_m] - [w_0, c_m] = -z$$

i per tant, $degg = -1$. El cas $n = 1$ es prova de manera similar. $\square$

3.7 Invariància dels grups d'homologia

En aquesta part provarem un resultat que ja hem anunciat anteriorment: les subdivisions baricèntriques d'un complex K no canvien la seva homologia simplicial.

Per provar la invariància dels grups d'homologia d'un complex K en passar a una subdivisió baricèntrica, definirem dos homomorfismes de complexos. El primer serà l'**homomorfisme subdivisió de complexos** $\mu_q : C_q(K) \longrightarrow C_q(K^{(1)})$, que definirem mitjançant de definició de subdivisió baricèntrica $K^{(1)}$ de K. El segon serà l'**homomorfisme estàndard de complexos** $\theta_q : C_q(K^{(1)}) \longrightarrow C_q(K)$, que definirem usant una aplicació simplicial $\theta : K^{(1)} \longrightarrow K$. Provarem que aquests homomorfismes de cadenes indueixen homomorfismes en la homologia inversos l'un de l'altre, i per tant trobarem que els grups d'homologia de K i $K^{(1)}$ són isomorfs.

Teorema 3.40. *Sigui $K^{(1)}$ la primera subdivisió baricèntrica d'un complex simplicial K. $H_q(K) \cong H_q(K^{(1)})$ per tot $q \geq 0$.*

Demostració. Recordem que els vèrtex de $K^{(1)}$ són els baricentres $\dot{\sigma}^q$ de tots els símplex σ^q de K, $q \geq 0$, i per cada símplex $\sigma_{t(1)}, ..., \sigma_{t(q-1)}$ de K, $'\sigma^q = \langle \dot{\sigma}_0, \dot{\sigma}_1, ..., \dot{\sigma}_q \rangle$ és un q-símplex de $K^{(1)}$ si i només si σ_i és una cara de σ_{i+1} per cada $i = 0, 1, 2, ..., n-1$. Un vèrtex v_i de K és un 0-símplex σ^0 de K. El baricentre $\dot{\sigma}^0$ de σ^0 és el mateix σ^0, de manera que tots els vèrtex de K són vèrtex de $K^{(1)}$. Per qualsevol q-símplex σ^q de K, denotarem la 1-cadena elemental $1 \cdot \sigma^q$ per σ^q. Finalment, si $\sigma^q = \langle v_0, ..., v_q \rangle$ i v és un altre vèrtex de manera que $\{v, v_0, ..., v_q\}$ és un conjunt geomètricament independent, denotarem el (q+1)-símplex $\langle v, v_0, ..., v_q \rangle$ per $v \cdot \sigma^q$. En general, per una q-cadena $c = \sum_i n_i \sigma_i^q$, denotarem $v \cdot c$ la (q+1)-cadena $\sum_i n_i (v \cdot \sigma_i^q)$. D'aquesta manera, per qualsevol cadena c de $C_q(K)$, $\partial(v \cdot c) = c - v\partial(c)$. Definim l'homomorfisme subdivisió de complexos $\mu_q : C_q(K) \longrightarrow C_q(K^{(1)})$ per $q \geq 0$ per inducció en q. Donat un vèrtex v_i de K, definim $\mu_0(v_i) = \dot{v}_i$, i estenem linealment a $C_0(K)$. Sigui $\sigma^1 = \langle v_0, v_1 \rangle$ un 1-símplex de K positivament orientat. Definim $\mu_1(\sigma^1) = \left\langle \dot{\sigma}^1, \dot{v}_1 \right\rangle - \left\langle \dot{\sigma}^1, \dot{v}_0 \right\rangle$ i estenem linealment a $C_1(K)$. Observem que per cada 1-símplex de K

$$\partial\mu_1(\sigma^1) = \partial(\left\langle \dot{\sigma}^1, \dot{v}_1 \right\rangle) - \partial(\left\langle \dot{\sigma}^1, \dot{v}_0 \right\rangle) = \dot{v}_1 - \dot{\sigma}^1 - \dot{v}_0 + \dot{\sigma}^1 = \mu_0(\langle v_1 \rangle) - \mu_0(\langle v_0 \rangle) = \mu_0\partial(\sigma^1)$$

Això significa que $\partial\mu_1 = \mu_0\partial$ i per tant μ_0 i μ_1 satisfan la condició d'homomorfisme de complexos. Suposem ara que μ_q s'ha definit per tot $q < p$, $(p > 1)$, satisfent la condició $\partial\mu_q = \mu_{q-1}\partial$ per totes les q-cadenes de $C_q(K)$. Sigui σ^p un p-símplex de K i definim $\mu(\sigma^p) = \dot{\sigma}^p \mu_{p-1}\partial(\sigma^p)$. Així,

$$\partial\mu_p(\sigma^p) = \partial(\dot{\sigma}^p \mu_{p-1}\partial(\sigma^p)) = \mu_{p-1}(\partial(\sigma^p)) - \dot{\sigma}^p \partial\mu_{p-1}\partial(\sigma^p) = \mu_{p-1}\partial(\sigma^p)$$

ja que per hipòtesi d'inducció $\partial\mu_{p-1}\partial = \mu_{p-2}\partial\partial = 0$. Per tant també està definida μ_p complint la condició $\partial\mu_p = \mu_{p-1}\partial$. Així, per inducció $\mu_q : C_q(K) \longrightarrow C_q(K^{(1)})$ està definit per tot $q \geq 0$ i és homomorfisme de complexos.

Definim un homomorfisme de complexos $\theta : C(K^{(1)}) \longrightarrow C(K)$ el qual ve induït per una aplicació simplicial $\theta : K^{(1)} \longrightarrow K$ (utilitzem el mateix símbol θ per conveniència, ja que no hi ha confusió). Sigui $\dot{\sigma}^q$ un vèrtex qualsevol de $K^{(1)}$. Escollim un vèrtex v_0 de σ^q i definim $\theta(\dot{\sigma}^q) = v_0$. Això indueix una aplicació simplicial $\theta : K^{(1)} \longrightarrow K$. Per tal de provar-ho, observem que si $\sigma^1 = \langle v_0, v_1 \rangle$ és un 1-símplex, θ envia $\dot{\sigma}^1$ a un vèrtex v_0 de σ^1, i envia $\dot{v}_0$, $\dot{v}_1$ a v_0 i v_1 respectivament. És a dir, el símplex $\left\langle \dot{\sigma}^1, v_1 \right\rangle$ va a parar al 1-símplex $\langle v_0, v_1 \rangle$, però el 1-símplex $\left\langle v_0, \dot{\sigma}^1 \right\rangle$ va a parar al 0-símplex $\langle v_0 \rangle$. Si $\sigma^2 = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ és un 2-símplex, i definim $\theta(\dot{\sigma}^2) = v_0$, si suposem que $b(v_1, v_2)$ va a parar a v_2 (on $b(\cdot, \cdot)$ indica el baricentre de $\langle \cdot, \cdot \rangle$) trobem que el 2-símplex $\left\langle v_1, b(v_1, v_2), \dot{\sigma}^2 \right\rangle$ va a parar a $\langle v_1, v_2, v_0 \rangle$ mentre que el 2-símplex $\left\langle v_2, b(v_1, v_2), \dot{\sigma}^2 \right\rangle$ va a parar al 1-símplex $\langle v_2, v_0 \rangle$. Podem comprovar que la resta de 2-símplex de σ^2 també van a parar a un 1-símplex o a un 0-símplex de σ^2, i per tant queda clara la definició de $\theta('\sigma^q)$. És evident que θ no està unívocament definit. De totes maneres, un cop hem fixat la tria per cada q-símplex de $K^{(1)}$, $q \geq 0$, θ és una aplicació simplicial ben definida i per tant indueix un homomorfisme de complexos $\theta : C(K^{(1)}) \longrightarrow C(K)$, $q \geq 0$. De fet, l'aplicació simplicial θ és una aproximació simplicial de l'aplicació identitat $|K'| \longrightarrow |K|$.

Observem que l'homomorfisme de complexos $\theta \circ \mu : C(K) \longrightarrow C(K)$ és l'aplicació identitat ja que per cada q-símplex σ^q de K, de tots els símplex que passen per $\mu(\sigma^q)$, només hi ha un q-símplex en $K^{(1)}$ que es torni a enviar cap a σ, i la resta col·lapsen en símplex de menor dimensió, no contribuint a $\theta\mu(\sigma^q)$, és a dir, $\theta\mu(\sigma^q) = \sigma^q$, provant la nostra afirmació.

Finalment, provarem que l'homomorfisme de complexos $\mu\theta : C(K^{(1)}) \longrightarrow C(K^{(1)})$ és un homomorfisme homòtop a la identitat en $C(K^{(1)})$. Definirem una seqüència homotòpica $D_q : C_q(K^{(1)}) \longrightarrow C_{q+1}(K^{(1)})$ tal que $\partial D_0(\dot{\sigma}) = \dot{\sigma} - \mu\theta(\dot{\sigma})$. Per tal de comprovar-ho, veiem que $\theta(\dot{\sigma})$ és un vèrtex v_0 de σ. Per tant, $\mu\theta(\dot{\sigma}) = \langle \dot{v}_0 \rangle = \langle v_0 \rangle$. Així, $\langle v_0, \dot{\sigma} \rangle$ és un 1-símplex de $K^{(1)}$ i assignem $D_0(\dot{\sigma}) = \langle v_0, \dot{\sigma} \rangle$, que compleix la propietat desitjada, i estenem D_0 a totes les 0-cadenes en $C_0(K^{(1)})$ linealment. Havent definit D_0 suposem que D_q està definida per tot $q < p$, $(0 < p)$ de manera que satisfà

$$\partial D_q(\sigma') + D_{q-1}\partial(\sigma') = \sigma' - \mu\theta(\sigma')$$

per tots els q-símplex σ' de $K^{(1)}$. Observem que $'\sigma^p - \mu\theta('\sigma^p) - D_{p-1}\partial('\sigma^p)$ és una seqüència en un con $\mu(\sigma^k) = \dot{\sigma}^k \cdot \mu(\partial\sigma^k)$ per algun $\sigma^k \in K$ que és acíclic. Per tant, qualsevol cicle d'aquest con serà una frontera. Calculem

$$\begin{aligned}\partial['\sigma^p - \mu\theta('\sigma^p) - D_{p-1}\partial('\sigma^p)] &= \partial('\sigma^p) - \partial\mu\theta('\sigma^p) - \partial D_{p-1}\partial('\sigma^p) \\ &= \partial('\sigma^p) - \partial\mu\theta('\sigma^p) - [\partial('\sigma^p) - \mu\theta\partial('\sigma^p) - D_{p-2}\partial\partial('\sigma^p)]\end{aligned}$$

per hipòtesi d'inducció. Com $\partial\partial = 0$, i donat que $\mu\theta$ és un homomorfisme de complexos, la part dreta de la igualtat anterior és zero, és a dir, $'\sigma^p - \mu\theta('\sigma^p) - D_{p-1}\partial('\sigma^p)$ és un cicle. Tanmateix, acabem de veure que hi ha un cicle en el con $\mu(\sigma^k) = \dot{\sigma}^k\mu\partial(\sigma^k)$ i per tant aquest ha de ser una frontera en el con, és a dir, podem trobar una cadena c en $\mu(\sigma^k)$ tal que $\partial(c)$ és el cicle mencionat. D'aquesta manera, definim $D_p(\sigma^p) = c$, que ens porta a

$$\partial D_p('\sigma^p) =' \sigma^p - \mu\theta('\sigma^p) - D_{p-1}\partial('\sigma^p)$$

Aquest resultat finalitza la demostració inductiva de la seqüència homotòpica D_q, $q \geq 0$, satisfent la propietat desitjada. Per tant, existeixen homomorfismes $\mu_* : H_q(K) \longrightarrow H_q(K^{(1)})$ i $\theta_* : H_q(K^{(1)}) \longrightarrow H_q(K)$ induïts pels homomorfisme de complexos μ i θ respectivament els quals són un l'invers de l'altre. És a dir, $H_q(K) \cong H_q(K^{(1)})$ $\forall q \geq 0$.
$\square$

Observem que si $K = K^{(0)}$, $K^{(1)}$, $K^{(2)}$,...,$K^{(m)}$ són subdivisions baricèntriques successives de K i $\mu_i : C(K^{(i)}) \longrightarrow C(K^{(i+1)})$ són els homomorfismes de subdivisió de complexos, llavors la composició $\mu_{m-1} \circ ... \circ \mu_1 \circ \mu_0$ és també un homomorfisme de complexos, que denotem $\mu : C(K) \longrightarrow C(K^{(m)})$ i anomenem homomorfisme de subdivisió de complexos. Cada homomorfisme μ_i té una cadena homotòpica inversa $\theta_i : C(K^{(i+1)}) \longrightarrow C(K^{(i)})$ induïda per una aplicació simplicial i per tant la seva composició $\theta = \theta_0 \circ \theta_1 \circ ... \circ \theta_{m-1} : C(K^{(m)}) \longrightarrow C(K)$ serà una cadena homotòpica inversa a μ. L'aplicació simplicial composta $\theta : K^{(m)} \longrightarrow K$ s'anomena **aplicació simplicial estàndard**. Combinant aquests resultat, s'obté:

Corol·lari 3.41. *Sigui $K^{(m)}$ la m-èssima subdivisió baricèntrica del complex K. $H_q(K) \cong H_q(K^{(m)})$, $\forall q \geq 0$.*

3.8 Teorema del punt fix de Lefschetz

Ja hem arribat a la culminació de tot el treball fet en aquesta memòria: ens disposem a provar el teorema del punt fix de Lefschetz, un dels teoremes de punt fix més importants de la topologia algebraica.

Siguin X un poliedre compacte i $f : X \longrightarrow X$ una aplicació contínua. Associat a aquesta aplicació, definim un nombre enter $\lambda(f)$, anomenat el **nombre de Lefschetz**, el qual ens assegura que si $\lambda(f) \neq 0$, f té un punt fix.

Per tal de definir el nombre de Lefschetz $\lambda(f)$, prenem una triangulació $h : |K| \longrightarrow X$ de X, on $dimX = n$, i considerem els grups homologia $H_q(K;\mathbb{Q})$ de K amb coeficients racionals. La composició $h^{-1}fh : |K| \longrightarrow |K|$ indueix un homomorfisme $(h^{-1}fh)_* : H_q(K;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_q(K;\mathbb{Q})$, per tot $q \geq 0$. Donat que els grups d'homologia $H_q(K;\mathbb{Q})$ són espais vectorials, $(h^{-1}fh)_*$ és una transformació lineal per cada q. Considerem la suma alternada de les traces de totes aquestes transformacions lineals per cada $q \geq 0$ i definim el nombre de Lefschetz

$$\lambda(f) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q Tr(h^{-1}fh)_*$$

On n denota la dimensió del complex K. La suma és finita ja que $H_q(K) = 0 \ \forall q > n$.

Per veure que $\lambda(f)$ està ben definit, cal provar que $\lambda(f)$ és independent de la triangulació h. Sigui doncs $k : |L| \longrightarrow X$ una altra triangulació de X. És suficient veure que les dues aplicacions lineals $(h^{-1}fh)_* : H_q(K;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_q(K;\mathbb{Q})$ i $(k^{-1}fk)_* : H_q(L;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_q(L;\mathbb{Q})$ tenen les mateixes traces per cada $q \geq 0$. Observem que

$$k^{-1}fk = (k^{-1}h)(h^{-1}fh)(h^{-1}k)$$

i per tant, a nivell homològic

$$(k^{-1}fk)_* = (k^{-1}h)_*(h^{-1}fh)_*(k^{-1}h)_*^{-1}$$

on $(k^{-1}h)_* : H_q(K;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_q(K;\mathbb{Q})$ és un isomorfisme. Tanmateix, aquesta igualtat indica que les matrius de les aplicacions lineals $(h^{-1}fh)_*$ i $(k^{-1}fk)_*$ són similars i per tant tenen les mateixes traces.

Per tal de demostrar el teorema, necessitem provar primer la **fórmula de la traça de Hopf**. Sigui

$$C : \qquad 0 \to C_n \to C_{n-1} \to ... \to C_1 \to C_0 \to 0$$

un complex de cadenes finit format per espais vectorials finits sobre $\mathbb{Q}$, i sigui $\phi_q : C_q \longrightarrow C_q$, $0 \leq q \leq n$ un homomorfisme de complexos. Considerem el nombre $\sum_{q=0}^{n}(-1)^q Tr(\phi_q)$. Com que aquest homomorfisme de complexos indueix un homomorfisme $\phi_{q*} : H_q(C) \longrightarrow H_q(C)$ per tot q, $0 \leq q \leq n$, també tenim el nombre $\sum_{q=0}^{n}(-1)^q Tr(\phi_{q*})$. La fórmula de Hopf ve donada per

Proposició 3.42. *Sigui C un complex de cadenes de longitud finita n en el qual cada C_q és un espai vectorial finit sobre $\mathbb{Q}$. Per qualsevol aplicació $\phi : C \longrightarrow C$*

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q Tr(\phi_q) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q Tr(\phi_{q*})$$

Demostració. Escollim una base adequada de l'espai vectorial C_q. $B_q \subset Z_q \subset C_q$ són els subespais de q-fronteres, q-cicles i q-cadenes. Partint d'una base $\partial c_1^{q+1}, ..., \partial c_{r_{q+1}}^{q+1}$ de B_q, l'estenem a una base de Z_q afegint q-cicles $z_1^q, ..., z_{\beta_q}^q$, i l'estenem a una base de C_q afegint q-cadenes $c_1^q, ..., c_{r_q}^q$. Així doncs, per cada q, tenim una base de C_q:

$$B = \left\{\partial c_1^{q+1}, ..., \partial c_{r_{q+1}}^{q+1}, z_1^q, ..., z_{\beta_q}^q, c_1^q, ..., c_{r_q}^q\right\}$$

Els elements de la diagonal de la matriu de ϕ_q respecte aquesta base s'obtenen prenent un element qualsevol w de la base, expressant $\phi_q(w)$ com una combinació lineal d'elements de B i trobant els coeficients de w en $\phi_q(w)$. Si denotem aquest coeficient usant $\lambda(w)$, la traça de ϕ_q és

$$\sum_j \lambda\left(\partial c_j^{q+1}\right) + \sum_j \lambda\left(z_j^q\right) + \sum \lambda\left(c_j^q\right)$$

Com que ϕ és un homomorfisme de complexos, trobem que $\lambda\left(\partial c_j^{q+1}\right) = \lambda\left(c_j^{q+1}\right)$. Per tant,

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q Tr(\phi_q) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q \sum_{j=0}^{\beta_q} \lambda\left(z_j^q\right)$$

ja que la resta de termes es cancel·len dos a dos. Com que $\{z_1^q\}, ..., \{z_{\beta_q}^q\}$ és una base de $H_q(C)$, obtenim

$$\sum_{j=1}^{\beta_q} \lambda\left(z_j^q\right) = \text{traça de } \phi_{q*}$$

Que demostra la fórmula. □

Teorema 3.43 (Teorema del punt fix de Lefschetz). *Si X és un poliedre compacte i $f : X \longrightarrow X$ és una aplicació contínua tal que $\lambda(f) \neq 0$, f té un punt fix.*

Demostració. Siguin $h : |K| \longrightarrow X$ una triangulació de X i $f : X \longrightarrow X$ la funció contínua. $g = h^{-1} \circ f \circ h : |K| \longrightarrow |K|$ té un punt fix si i només si f té un punt fix. Provarem el teorema per reducció a l'absurd. Suposem que g no té punts fixos. Sigui d la mètrica de $|K|$ entès com a subespai d'algun espai euclidià. Com $|K|$ és un espai compacte i la aplicació contínua definida per $x \mapsto d(x, g(x))$ no és mai zero, té un mínim positiu, que anomenarem $\delta > 0$. Si prenem una subdivisió baricèntrica d'ordre prou gran, podem assumir que $meshK$ és menor que $\delta/3$. Sigui $s : |K^{(m)}| \longrightarrow |K|$ una aproximació simplicial de g. i sigui $\mu : C(K;\mathbb{Q}) \longrightarrow C(K^{(m)};\mathbb{Q})$ l'homomorfisme de subdivisió de complexos. Donat que per tot $q \geq 0$ $g_{q*} : H_q(K) \longrightarrow H_q(K)$ és la composició $g_{q*} = s_{q*}\mu_{q*}$, per la fórmula de la traça de Hopf és suficient provar que la traça de $s_q \circ \mu_q : C_q(K) \longrightarrow C_q(K)$ és zero, ja que això implicaria que $\lambda(f) = 0$, que és una contradicció.

Sigui σ un q-símplex orientat de K i sigui τ un q-símplex de $K^{(m)}$ que estigui en la cadena $\mu_q(\sigma)$. Així doncs, τ està contingut en σ. Si $x \in \tau$, $d(s(x), g(x)) < \delta/3$ ja que s és una aproximació simplicial de g. D'aquesta manera, com que $d(x, g(x)) \geq \delta$, obtenim que

$$d(x, s(x)) \geq d(x, g(x)) - d(g(x), s(x)) > \delta - \delta/3 = 2\delta/3$$

Si $y \in \sigma$, $d(x, y) < \delta/3$, i pel que acabem de veure,

$$d(y, s(x)) \geq d(s(x), x) - d(x, y) > 2\delta/3 - \delta/3 = \delta/3$$

Això significa que $s(x)$ i y no són del mateix símplex de K i per tant $s(\tau) \cap \sigma = \emptyset$ per cada cara $\tau \subset \sigma$. D'aquesta manera, en la cadena $s_q \circ \mu_q(\sigma)$ el coeficient de σ és zero, i per tant la traça de $s_q \circ \mu_q$ és zero, completant la demostració. □

És interessant assenyalar que la fórmula de la traça de Hopf per una aplicació simplicial $f : K \longrightarrow K$ és una generalització del teorema d'Euler-Poincaré quan $f = I_K$. També observem que en el cas d'una aplicació simplicial $g : |K| \longrightarrow |K|$, donat que té la propietat de que per cada $\sigma \in K$, $\sigma \cap g(\sigma) = \emptyset$, la fórmula de la traça de Hopf dirà que $\lambda(g) = 0$. Per tant, l'objectiu del teorema del punt fix de Lefschetz era provar que sota determinades condicions, si f no té punts fixos, pot ser aproximada per una aplicació simplicial g que té la propietat que hem esmentat.

Corol·lari 3.44 (Teorema del punt fix de Brouwer). *Sigui X un poliedre compacte i contràctil. Tota aplicació contínua $f : X \longrightarrow X$ té un punt fix.*

Demostració. Com que X és contràctil, $H_0(X;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ i $H_q(X) = 0$ $\forall q > 0$. A més, l'homomorfisme induït $f_* : H_0(X;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_0(X;\mathbb{Q})$ és l'aplicació identitat. Per tant, $\lambda(f) = 1 \neq 0$ i f té un punt fix pel teorema del punt fix de Lefschetz. $\square$

4 Conclusions

Durant aquest projecte he tingut l'oportunitat d'aprendre els fonaments de l'homologia simplicial, i començar a aprofundir en alguns dels seus resultats. M'he familiaritzat amb els poliedres i les triangulacions d'aquests, he après a calcular els grups d'homologia a partir de complexos simplicials, i comprendre la relació entre la seva estructura i les propietats topològiques del poliedre. He estudiat també les successions d'homomorfismes i les seves propietats. Tot això m'ha permès assolir l'objectiu de demostrar el teorema del punt fix de Brouwer i el teorema del punt fix de Lefschetz. A més, m'ha motivat per seguir aprofundint en la matèria, despertant el meu interès per l'homologia singular i la cohomologia com eines més potents.

Referències

[1] Navarro, V.; Pascual, P.: *Topologia Algebraica*, 1a edició,
Edicions de la Universitat de Barcelona, 1999.

[2] Deo, S.: *Algebraic Topology: a Primer*, 2a edició,
Springer Nature Singapore Pte Ltd. and Hindustan Book Agency, 2018.

[3] Maunder, C.R.F.: *Algebraic topology*,
Dover Publications, Inc, 1996.

[4] Hatcher, A.: *Algebraic topology*, 1a edició,
Cambridge University Press, 2002.