



# Optimisation de l'étape de chauffage infrarouge en thermoformage à l'aide de méta-heuristiques

Par

Kahina Bachir-Cherif

Sous la direction de :

Fouad Erchiqui	Professeur	UQAT	Directeur
Djamal Rebaine	Professeur	UQAC	Codirecteur
Issouf Fofana	Professeur	UQAC	Codirecteur

Thèse présentée à l'Université du Québec à Chicoutimi en vue  
de l'obtention du grade de doctorat en ingénierie

Soutenue le : 16 septembre 2019

Jury :

Yasar Kocaefe	Professeur	UQAC	Président du Jury
Pierre Baptiste	Professeur	PolyMtl	Membre externe
Mustapha Nour El Fath	Professeur	LAVAL	Membre externe
Fouad Erchiqui	Professeur	UQAT	Directeur
Issouf Fofana	Professeur	UQAC	Codirecteur

Québec, Canada

© Kahina Bachir-Cherif, 2019



## RÉSUMÉ

En thermoformage, l'étape de chauffage infrarouge des structures thermoplastiques joue un rôle essentiel dans la qualité de l'objet formé. Pour cette étape de chauffage, il est important de sélectionner d'une manière adéquate les températures à assigner aux éléments chauffants du four. Pour ce faire, nous proposons dans ce travail une procédure d'optimisation permettant de choisir les températures à affecter aux zones radiantes, du four de thermoformage, dans le but de générer une meilleure répartition de la température à la surface du matériau polymérique. Dans un premier temps, nous avons proposé une étude comparative à travers l'utilisation de quatre méta-heuristiques : Recuit Simulé, Recherche avec Tabous, Optimisation de la Migration d'Oiseaux et la Recherche avec Harmonie. De cette étude, il s'est avéré que les algorithmes basés sur l'Optimisation de la Migration d'Oiseaux et le Recuit Simulé ont été les plus efficaces. Ensuite, dans le but de réduire le temps d'exécution et améliorer la qualité des solutions générées, une approche basée sur l'hybridation des deux dernières méthodes a été réalisée.

Les résultats des simulations numériques obtenus avec la méthode hybride dépassent de loin les solutions produites par les méta-heuristiques séparément. Le critère retenu pour évaluer la qualité d'une solution (fonction objectif) est celui basé sur la minimisation des

écarts d'énergie interceptée par la surface de la feuille polymérique exposée aux sources radiantes. Les investigations que nous avons menées ont été réalisées sur deux types de thermoplastiques : i) ABS (Acrylonitrile butadiène styrène) supposé opaque et ii) PET (Polyéthylène téréphtalate) semi-transparent. Les résultats obtenus, avec le modèle d'optimisation développé, montrent que le flux radiatif intercepté à la surface de chacune des deux feuilles thermoplastiques est mieux distribué. Les écarts de températures entre les zones des feuilles sont réduits considérablement comparés à ceux d'un chauffage non optimisé. Les bords des deux feuilles sont mieux chauffés et atteignent la plage de formage. Ceci n'est pas le cas avec un chauffage non optimisé, générant ainsi des produits mal formés.

## **ABSTRACT**

In thermoforming, the infrared heating step of the thermoplastic structures plays a vital role in the quality of the object formed. For this heating step, it is important to properly select the temperatures to be assigned to the oven heaters. To do this, we propose an optimization procedure to choose the temperatures to be assigned to the radiating areas of the thermoforming furnace, in order to generate a better distribution of the temperature on the surface of the polymeric material. We first proposed a comparative study on the use of four meta-heuristics : Simulated Annealing, Taboo Search, Migration Bird Optimization and Harmony Search. From this study, it was found that algorithms based on Bird Migration Optimization and Simulated Annealing were the most effective. Then, in order to reduce the execution time and improve the quality of the generated solutions, an approach based on the hybridization of the last two methods was developed.

The result of the numerical simulations obtained with the hybrid method far exceeds the solutions produced by the meta-heuristics separately. The criterion used to evaluate the quality of a solution (objective function) is based on the minimization of energy deviations intercepted by the surface of the polymeric sheet exposed to the radiating sources. Our

investigation was carried out on two types of thermoplastics : i) ABS (Acrylonitrile butadiene styrene) supposed opaque and ii) PET (polyethylene terephthalate) semi-transparent. The results obtained, with the optimization model that we developed, show that the radiative flux intercepted on the surface of each of the two thermoplastic sheets is much better distributed. The temperature differences between the leaf areas are significantly reduced compared to the non-optimized heating. The edges of the two sheets are better heated and reach the forming range. This is not the case with the non-optimized heating, thus generating poorly formed products.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Résumé</b>	<b>2</b>
<b>abstract</b>	<b>5</b>
<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	1
1.2 Problématique . . . . .	3
1.3 Objectifs et méthodologie . . . . .	6
1.4 Originalité . . . . .	9
1.5 Organisation de la thèse . . . . .	10
<b>2 Généralités sur la mise en forme des thermoplastiques</b>	<b>13</b>
2.1 Principaux procédés de mise en forme . . . . .	13
2.1.1 Injection . . . . .	14
2.1.2 Injection - étirage-soufflage . . . . .	15
2.1.3 Extrusion . . . . .	15
2.1.4 Extrusion-soufflage . . . . .	16
2.1.5 Thermoformage . . . . .	16
2.2 Matériaux utilisés en thermoformage . . . . .	19
2.3 État de l'art sur l'étape de chauffage en thermoformage . . . . .	20
2.3.1 Modélisation du chauffage infrarouge . . . . .	21
2.3.2 Surfaces de radiations mutuelles . . . . .	23
2.3.3 Optimisation de l'étape de chauffage . . . . .	25
2.4 Conclusion partielle . . . . .	28
<b>3 Modélisation de l'étape de chauffage</b>	<b>31</b>
3.1 Description du four de thermoformage . . . . .	32
3.2 Modélisation de l'étape de chauffage . . . . .	34
3.2.1 Mise en équation du chauffage infrarouge . . . . .	35

3.2.2	Hypothèses . . . . .	36
3.2.3	Équation de conservation d'énergie . . . . .	37
3.2.4	Divergence du flux radiatif . . . . .	39
3.2.5	Flux intercepté par la feuille thermoplastique . . . . .	40
3.2.6	Flux absorbé par la préforme . . . . .	43
3.3	Surfaces de radiations mutuelles . . . . .	44
3.3.1	Méthode de Monte Carlo . . . . .	46
3.3.2	Méthode d'aire d'intégration . . . . .	49
3.3.3	Méthode d'intégration de surface . . . . .	50
3.3.4	Méthode de contour . . . . .	51
3.3.5	Méthode semi-analytique . . . . .	52
3.3.6	Méthode analytique . . . . .	53
3.3.7	Étude comparative . . . . .	54
3.4	Modélisation par éléments finis de l'étape de chauffage . . . . .	56
3.4.1	Maillage et fonctions d'interpolation . . . . .	57
3.4.2	Formulation du problème discret . . . . .	58
3.4.3	Assemblage . . . . .	59
3.4.4	Schéma d'intégration dans le temps . . . . .	60
3.4.5	Résolution numérique de l'équation de conservation d'énergie . . . . .	62
3.4.6	Validation numérique de l'équation de conservation d'énergie . . . . .	62
3.5	Conclusion partielle . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Notions d'optimisation combinatoire</b>	<b>71</b>
4.1	Théorie de la complexité . . . . .	72
4.2	Méthodologie de résolution . . . . .	74
4.3	Problème d'affectation quadratique . . . . .	76
4.4	Méthodes Approchées . . . . .	77
4.4.1	Heuristiques . . . . .	78
4.4.2	Méta-heuristiques . . . . .	78
4.4.3	Classification des méta-heuristiques . . . . .	80
4.4.4	Recuit Simulé (SA) . . . . .	83
4.4.5	Recherche avec Tabous (TS) . . . . .	85
4.4.6	Optimisation de la Migration d'Oiseaux (MBO) . . . . .	88
4.4.7	Recherche avec Harmonie (HSA) . . . . .	90
4.5	Méta-heuristiques hybrides . . . . .	91
4.5.1	Classification de méta-heuristiques hybrides . . . . .	92
4.6	Conclusion partielle . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Application de SA et HSA pour le thermoformage</b>	<b>95</b>
5.1	Modèle d'optimisation de l'étape de chauffage . . . . .	96
5.2	Application de SA et HSA . . . . .	101
5.2.1	Application de SA . . . . .	105
5.2.2	Application de HSA . . . . .	108



5.2.3	Configuration initiale et voisinage d'une solution . . . . .	111
5.3	Simulation numérique avec SA et HSA . . . . .	113
5.3.1	Description des exemples de l'étude . . . . .	114
5.3.2	Réglage des paramètres de SA . . . . .	114
5.3.3	Réglage des paramètres de HSA . . . . .	115
5.3.4	Résultats et discussion . . . . .	118
5.3.5	Comparaison entre SA et HSA . . . . .	121
5.4	Conclusion partielle . . . . .	122
<b>6</b>	<b>Application de MBO et TS pour le thermoformage</b>	<b>125</b>
6.1	Modèle d'optimisation de l'étape de chauffage . . . . .	126
6.2	Application de MBO et TS . . . . .	127
6.2.1	Application de MBO . . . . .	127
6.2.2	Application de TS . . . . .	131
6.2.3	Configuration initiale et voisinage d'une solution . . . . .	133
6.3	Simulation numérique avec MBO et TS . . . . .	135
6.3.1	Description des exemples de la simulation . . . . .	135
6.3.2	Configuration initiale et construction du voisinage . . . . .	136
6.3.3	Réglage des paramètres de MBO . . . . .	138
6.3.4	Réglage des paramètres de TS . . . . .	141
6.3.5	Résultats et discussion . . . . .	142
6.3.6	Comparaison entre les méta-heuristiques . . . . .	144
6.4	Conclusion partielle . . . . .	146
<b>7</b>	<b>Hybridation des méta-heuristiques</b>	<b>149</b>
7.1	Hybridation des méta-heuristiques . . . . .	150
7.1.1	Conception d'une méthode hybride . . . . .	150
7.1.2	Comparaison entre la méthode hybride, SA et MBO . . . . .	152
7.2	Simulation numérique avec la méthode hybride . . . . .	153
7.2.1	Simulation sur une feuille PET . . . . .	154
7.2.2	Simulation sur une feuille ABS . . . . .	157
7.3	Conclusion partielle . . . . .	161
<b>8</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>163</b>
8.1	Conclusion . . . . .	163
8.2	Perspectives . . . . .	166
8.3	Retombées potentielles . . . . .	167
	<b>Publications issues de la thèse</b>	<b>169</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>171</b>



## TABLE DES FIGURES

1.1 Répartition non uniforme de l'énergie thermique . . . . .	3
1.2 Optimisation des températures de mise en chauffage de la feuille . . . . .	8
2.1 Étapes de thermoformage . . . . .	17
2.2 Moules de thermoformage . . . . .	18
3.1 Four de thermoformage [64] . . . . .	33
3.2 Émittance du corps noir pour différentes températures . . . . .	34
3.3 Modes de transferts thermiques . . . . .	35
3.4 Spectre de transmittivité d'un matériau PET [21] . . . . .	44
3.5 Définition géométrique de la surface de radiation mutuelle . . . . .	45
3.6 Facteur de forme entre deux surfaces parallèles . . . . .	54
3.7 Disposition des points de deux surfaces . . . . .	55
3.8 Types de maillage . . . . .	55
3.9 Validation de l'équation de conservation d'énergie d'un milieu semi-transparent . . . . .	65
3.10 Validation de l'équation de conservation d'énergie d'un milieu opaque . . . . .	67
4.1 Classe de problèmes d'optimisation . . . . .	74
4.2 Analyse d'un problème d'optimisation combinatoire . . . . .	76
4.3 Classification des méta-heuristiques . . . . .	82
4.4 Forme en 'V' du vol d'oiseaux [117] . . . . .	88
4.5 Classification des méta-heuristiques hybrides . . . . .	93
5.1 Disposition des éléments du four . . . . .	97
5.2 Affectation des températures aux éléments du four . . . . .	99
5.3 Solution matricielle des éléments du four . . . . .	102
5.4 Symétrie des éléments du four . . . . .	103
5.5 Cas particulier de la symétrie des éléments du four . . . . .	104
5.6 Permutation de deux températures . . . . .	112
5.7 Affectation d'une température de $\tau$ à la solution . . . . .	112
5.8 Influence du paramètre PAR . . . . .	116
5.9 Influence du paramètre HMCR . . . . .	117
5.10 Influence du paramètre HMS . . . . .	117
5.11 Distribution de flux radiatif intercepté par la surface de la feuille . . . . .	120

6.1	Permutation de trois températures . . . . .	134
6.2	Affectation d'une température de $\tau$ à la solution . . . . .	134
6.3	Choix de la solution initiale . . . . .	137
6.4	Choix du voisinage . . . . .	138
6.5	Effet de la variation de la taille du vol . . . . .	139
6.6	Effet de la variation du nombre de voisins évalués . . . . .	139
6.7	Effet de la variation du temps de vol du leader en tête . . . . .	140
6.8	Effet de la variation du nombre de voisins partagés . . . . .	140
6.9	Effet de la variation de la taille de la liste taboue . . . . .	141
6.10	Effet de la variation de la durée qu'une solution reste taboue . . . . .	142
6.11	Meilleure solution en fonction du nombre d'itérations . . . . .	146
7.1	Distribution du flux radiatif et de la température sur une feuille PET . . .	157
7.2	Distribution du flux radiatif et de la température sur une feuille ABS . . .	160

## LISTE DES TABLEAUX

2.1	Plages de formabilité des principaux polymères utilisés en thermoformage (A : amorphe, SC : semi-cristallin) [19] . . . . .	20
3.1	Valeur du facteur de forme . . . . .	55
3.2	Validation de l'équation d'énergie d'un milieu opaque . . . . .	66
4.1	Analogie entre MBO et le phénomène de migration . . . . .	89
4.2	Analogie entre l'improvisation en musique et l'optimisation . . . . .	91
5.1	Procédure de permutation de deux températures . . . . .	113
5.2	Températures des 36 éléments . . . . .	118
5.3	Températures des 49 éléments . . . . .	119
5.4	Résultats générés par SA . . . . .	121
5.5	Résultats générés par HSA . . . . .	121
6.1	Procédure de permutation de trois températures . . . . .	135
6.2	Instances de la simulation . . . . .	136
6.3	Solution de l'instance 1 . . . . .	143
6.4	Solution de l'instance 2 . . . . .	143
6.5	Solution de l'instance 3 . . . . .	143
6.6	Résultats générés par MBO . . . . .	144
6.7	Résultats générés par TS . . . . .	145
6.8	Résultats générés par SA . . . . .	145
7.1	Résultats obtenus par la méthode hybride, SA et MBO . . . . .	153
7.2	Propriétés thermophysiques de la feuille PET . . . . .	155
7.3	Températures des éléments du four . . . . .	155
7.4	Propriétés thermophysiques de la feuille ABS ( Zhen-Zhe L (2010)) . . . . .	158
7.5	Températures des éléments du four . . . . .	159



## Remerciements

Je présente premièrement mes remerciements à mon directeur de recherche, le professeur Fouad Erchiqui, de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT), pour son soutien, ses conseils précieux tout au long de cette thèse.

Je remercie également mon codirecteur de thèse, le professeur Djamel Rebaine, de l'Université du Québec à Chicoutimi (UQAC), le premier qui m'a donné la chance d'entrer dans le monde de la recherche. Je voudrais lui témoigner toute ma gratitude pour sa disponibilité, sa rigueur et ses conseils qui m'ont permis de réaliser cette thèse.

J'aimerais aussi remercier le professeur Isouf Fofana, de l'Université du Québec à Chicoutimi (UQAC), mon second codirecteur, pour son appui scientifique, ses conseils et sa disponibilité.

J'exprime aussi mes plus sincères remerciements aux membres du Groupe d'Études et de Recherche en Analyse des Décisions (GERAD) à l'Université de Montréal, pour leur accueil au sein de leur équipe.

Mes derniers remerciements iront à mes proches. Je tiens particulièrement à exprimer ma gratitude envers mon conjoint pour son soutien, son encouragement quotidien et sa patience. Je me fais un devoir de témoigner ma gratitude et mon respect à mes chers parents qui m'ont soutenue et encouragée pour réaliser ce travail. At last, but not least, que les membres de ma famille et belle-famille trouvent ici ma reconnaissance pour leurs encouragements.





## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION GÉNÉRALE

#### 1.1 INTRODUCTION

Les polymères, par leurs caractéristiques chimiques et physiques, ont dominé presque la quasi-totalité des secteurs manufacturiers œuvrant dans le domaine du plastique tel que l'électronique, l'automobile, l'emballage, l'aérospatial, la médecine, la défense, et la construction [1]. Plusieurs produits à base de matériaux classiques tels que le bois, le métal et le verre sont substitués par le plastique. On compte aujourd'hui plus de 30 sortes de polymères différents [2].

Toutefois, la mise en forme des polymères en produits finis (plasturgie) nécessite des connaissances approfondies en chimie, en physique et en procédés de fabrication. Néanmoins, du point de vue thermomécanique, les polymères peuvent être classifiés en deux grandes catégories : les polymères thermodurcissables et les polymères thermoplastiques. La première catégorie englobe principalement les polyuréthanes et polyesters insaturés. Ce sont des matériaux généralement très rigides qui restent indéformables sous l'effet de la chaleur, contrairement aux polymères thermoplastiques, qui sont linéaires à caractéristique réversible. Pendant le processus de chauffage, la matière thermoplastique devient souple, malléable et durcit à nouveau quand elle est refroidie. Comme cette

transformation est réversible, ces matériaux conservent leurs propriétés et sont facilement recyclables.

La mise en forme des polymères en produits finis dépend du design recherché, des caractéristiques mécaniques et physiques du matériau plastique utilisé ainsi que du moule considéré. Dans le cas des procédés tels que l'injection, le soufflage et l'extrusion, les matières utilisées sont des granulés polymériques. Pour ce qui est du procédé de thermoformage, les produits utilisés sont semi-finis sous forme de feuilles ou plaques de polymères. Dans ce travail, il sera question uniquement du procédé de thermoformage.

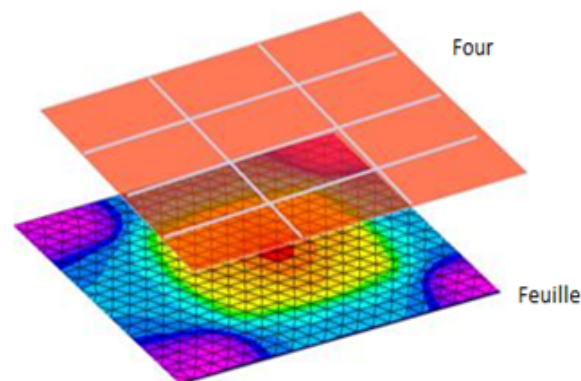
Le principe du procédé de thermoformage consiste essentiellement à former, à l'aide d'un moule, une feuille thermoplastique ramollie par chauffage. La feuille ainsi déformée épouse la forme du moule et, en se refroidissant, conserve la forme de ce moule. En général, un appareil de thermoformage est constitué d'un poste de chauffage, d'un poste de formage, d'un poste de découpe et d'un poste d'empilage. Ces machines sont généralement équipées d'automates ou commandées par ordinateur pour le réglage et le suivi des principales opérations.

Malgré l'apparente simplicité du processus de thermoformage, il est difficile d'optimiser ces étapes. Pour éviter des pertes durant ce processus, le défi majeur à relever est d'arriver à contrôler toutes les étapes. La plupart des études se sont focalisées sur la première étape, c'est-à-dire l'étape de chauffage de la matière thermoplastique [7, 8]. En effet, une répartition non contrôlée de la température, lors du chauffage infrarouge, a un effet direct sur la qualité de l'objet moulé.

## 1.2 PROBLÉMATIQUE

L'une des principales difficultés, à laquelle font face les professionnels du thermoformage, concerne essentiellement la maîtrise de la phase de chauffage. Les conditions en température de la thermoformabilité du polymère dépendent de sa nature (opaque ou semi-cristallin), de son comportement thermomécanique et de ses propriétés thermophysiques. L'état thermique dans lequel se trouve le polymère conditionne fortement la qualité de la phase de mise en forme.

Le choix des températures du four dépend de plusieurs paramètres tels que : le design de l'objet, les propriétés optiques et thermophysiques du polymère ainsi que son comportement viscoélastique. Pour les pièces plus au moins plates, la mise en température du polymère doit se faire de manière la plus homogène possible pour arriver à des conditions de formage similaires sur la totalité du polymère. En revanche, pour les formes irrégulières, l'homogénéité n'est pas forcément désirée.



**Figure 1.1: Répartition non uniforme de l'énergie thermique**

Dans notre étude, nous nous sommes intéressés au chauffage homogène d'une feuille thermoplastique. Les éléments du four et la feuille à thermoformer sont centrés et placés

dans une position parallèle. Il est clair que la zone centrale de la feuille reçoit plus d'énergie thermique que ses parties extrêmes. Cela conduit, sous l'effet conjugué de la température et des forces de gravité, inévitablement à une zone centrale plus épaisse que le reste de la feuille (voir Figure (1.1) pour illustration. Les différentes couleurs représentent chacune l'intensité de la chaleur reçue par la feuille thermoplastique).

La méthode utilisée dans l'industrie de thermoformage pour choisir les températures des éléments chauffants pour un chauffage homogène est empirique. Pour chaque élément chauffant, un ensemble de températures, qui lui est possible de prendre, est à considérer à partir de  $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_p\}$ . Un opérateur humain effectue plusieurs expériences afin de trouver une combinaison satisfaisante de températures à assigner aux éléments du four de façon à avoir la distribution d'énergie plus ou moins la même sur les zones de la feuille thermoplastique. Il est clair que cette manière de procéder ne permet pas d'avoir un résultat optimal pour le choix de températures. De plus, par ces essais, la perte en énergie et en feuilles peut être considérable. Par conséquent, la modélisation et l'optimisation numérique se sont avérées être une approche judicieuse pour réduire (idéalement minimiser) le plus possible la variation des énergies (reçues par la préforme) et donc de ses épaisseurs, réduisant ainsi le nombre de pièces rejetées lors des essais. Cela permet de prévoir avec précision l'état de la distribution de l'énergie, et peut donc ainsi réduire significativement le nombre de pièces rejetées lors des essais.

Pour l'étape de chauffage, un moyen efficace pour obtenir une distribution uniforme de la chaleur reçue par la surface de la feuille polymérique, est de réduire (idéalement minimiser) les écarts d'énergie interceptée et absorbée par les différentes zones de la feuille thermoplastique. Notre étude s'inscrit dans cette problématique de contrôle et d'optimisation de l'énergie distribuée sur la surface de la feuille thermoplastique. Autrement dit, notre travail a essentiellement pour objectif de trouver une répartition la

plus uniforme possible de la chaleur reçue par la feuille thermoplastique afin d'obtenir une surface la moins gondolée possible.

## **MOTIVATIONS**

Pour des raisons de compétitivité et de productivité, le critère de qualité des produits finis est évidemment une préoccupation majeure dans l'industrie et il est souvent en constante amélioration; l'industrie de thermoformage n'en est pas exempte. Bien que ce procédé ait été développé pendant plusieurs décennies, il existe encore quelques problèmes non résolus entravant le succès global de cette technologie.

En effet, la déformation des pièces produites a un impact direct sur le coût de la production. Cette problématique peut causer une perte de production considérable qui peut atteindre les 15%, voire même plus [1], mais aussi une consommation d'énergie inutile. Le défi à relever dans le procédé de thermoformage est de réduire ces pertes liées à la production et la consommation d'énergie tout en conservant la qualité du produit thermoformé.

Les utilisateurs des procédés de thermoformage sont confrontés depuis le début à la problématique de la déformation des objets fabriqués. La distribution non uniforme des épaisseurs de l'objet thermoformé est la cause principale de son élimination du cycle de production. Pour obtenir une qualité acceptable de l'objet, il est important de contrôler toutes les étapes du procédé de thermoformage. Le réglage des paramètres de l'étape de chauffage est décisif; toute déformation de la matière est irrécupérable dans les étapes suivantes. Ces réglages diffèrent d'un formage à un autre selon le type du four et la matière thermoplastique. La déformation de l'objet final dépend de plusieurs paramètres tels que la durée de l'exposition, la distribution de l'énergie sur la face réceptrice de la feuille, la force de gravité, les propriétés de la feuille du polymère (thermophysiques et

thermomécaniques) ainsi que le type de chauffage [9].

En conséquence, la modélisation et l'optimisation numérique s'avèrent être une approche judicieuse pour réduire (idéalement minimiser) le plus possible le nombre d'objets rejetés. La modélisation intégrée de thermoformage (étapes de chauffage, de formage, de refroidissement, etc.) permet de prévoir avec précision l'état de la distribution de l'énergie et des épaisseurs. Cela permet de réduire le nombre de pièces rejetées lors des essais. Notre étude s'inscrit dans cette problématique de contrôle et d'optimisation des températures de chauffage de la matière thermoplastique.

### **1.3 OBJECTIFS ET MÉTHODOLOGIE**

L'objectif principal de cette thèse est la détermination des meilleures températures à affecter à des zones radiantés pour générer une meilleure répartition de la chaleur à la surface du matériau polymérique. Pour cela, nous considérons une étude comparative à travers l'utilisation de quatre méta-heuristiques : Recuit Simulé, Recherche avec Tabous, Optimisation de la Migration d'Oiseaux et la Recherche avec Harmonie. Ensuite, dans le but de réduire le temps d'exécution et améliorer la qualité des solutions générées, une approche basée sur l'hybridation de deux dernières méthodes est proposée.

Pour réaliser ce modèle, nous posons trois hypothèses :

1. Milieu froid : cela nous permet de négliger l'intensité radiative émise par la matière chauffée.
2. Épaisseur des feuilles thermoplastiques sont minces : cela nous permet d'utiliser un modèle thermique 1D au lieu de 3D.
3. Les forces de gravité sont négligeables : cela nous permet d'aborder le problème

d'optimisation uniquement du point de vue thermique (la loi de conservation de mouvement n'est donc pas considérée).

4. Le milieu entre l'émetteur et le récepteur est transparent : cela nous permet d'utiliser la notion de facteur de forme (surface d'échange mutuelle).
5. Dans le cas d'un matériau thermoplastique semi-transparent, nous considérons le modèle de Beer-Lambert pour le transfert de chaleur [10].

Pour ce faire, nous proposons un modèle mathématique minimisant les écarts d'énergie reçue par la feuille à thermoformer lors du chauffage. Deux paramètres sont considérés pour guider l'analyse : le temps d'exécution et la qualité de la solution générés par algorithmes proposés.

La démarche proposée est donnée sur la Figure (1.2). Les étapes de cette démarche sont comme suit :

1. Mettre en place un modèle thermique et d'optimisation associés à l'étape de chauffage.
2. Développer des méthodes méta-heuristiques pour la résolution du modèle d'optimisation correspondant.
3. Réaliser, d'une part, des simulations numériques et analyser, d'autre part, l'impact de plusieurs paramètres sur les résultats en lien avec les méta-heuristiques et l'étape de chauffage.
4. Développer une méthode hybride de méta-heuristiques pour améliorer aussi bien la qualité des solutions obtenues que les temps d'exécution.

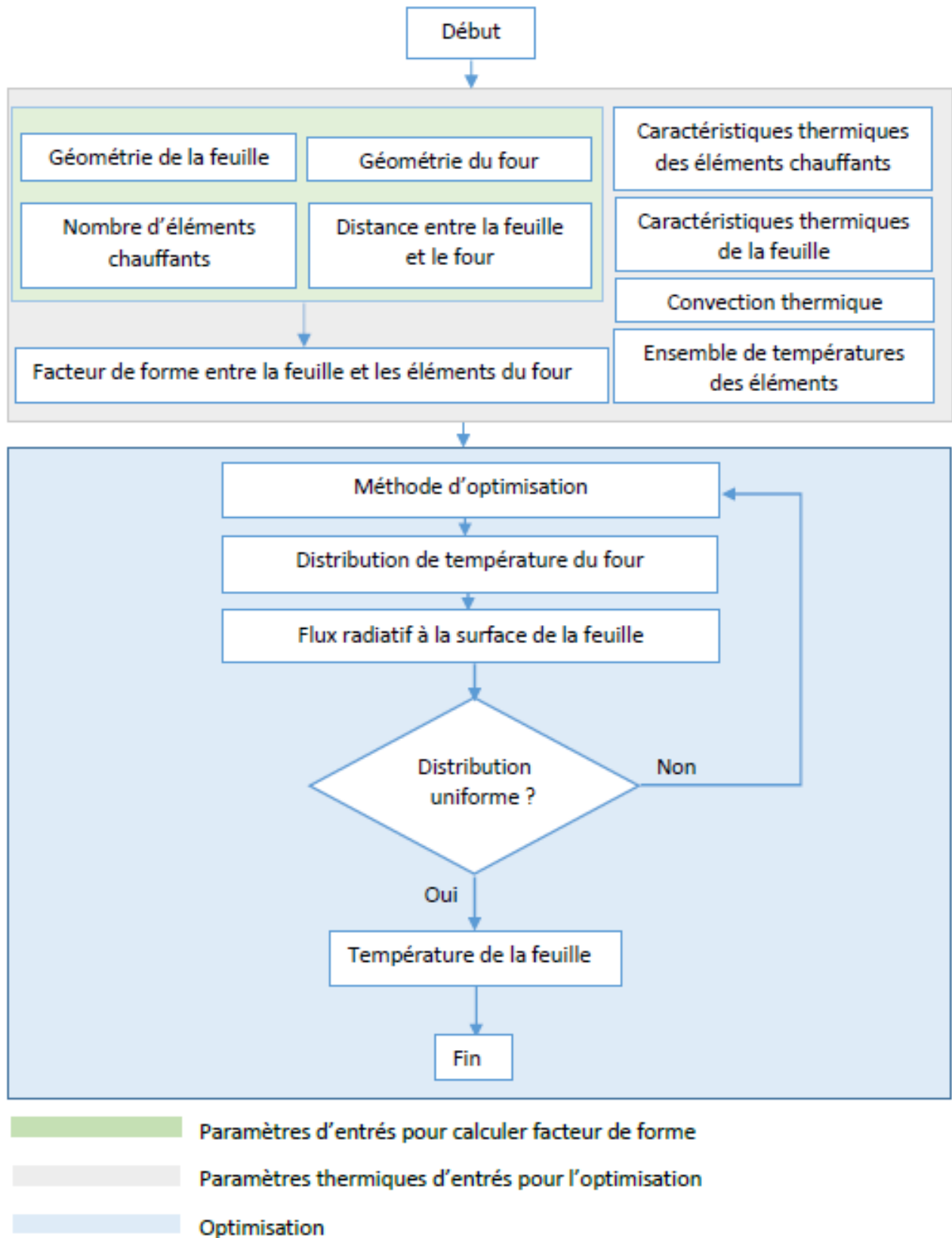


Figure 1.2: Optimisation des températures de mise en chauffage de la feuille



## 1.4 ORIGINALITÉ

Lorsque le four est composé de plusieurs zones chauffantes avec différentes températures, la chaleur interceptée par le matériau thermoplastique est généralement non uniforme avec une zone centrale plus chaude que le reste des zones de la feuille. Une modélisation conduisant à l'optimisation de l'étape de chauffage peut améliorer d'une manière substantielle l'uniformité de la distribution de l'énergie interceptée par la feuille thermoplastique. Pour résoudre cette problématique, nous avons développé un modèle mathématique sous forme d'un problème d'optimisation combinatoire et des méthodes pour le résoudre. Ceci constitue la contribution originale des travaux de recherche que nous avons menés dans cette thèse.

Notre première contribution réside dans le développement d'un modèle d'optimisation améliorant considérablement la répartition uniforme du flux radiatif à la surface de la feuille, par conséquent, la distribution des épaisseurs de l'objet formé. Le but étant de générer une combinaison de températures à assigner aux éléments du four de manière à avoir quasiment la même température partout à la surface de la feuille.

Après avoir proposé un modèle d'optimisation contrôlant le choix des températures du four, le défi réside dans sa résolution de manière efficace. L'enjeu ici est d'arriver à proposer une méthode de résolution qui assure un compromis raisonnable entre deux paramètres : la qualité de la solution générée et le temps d'exécution de la méthode utilisée. En prenant en compte ces deux contraintes, notre deuxième contribution est dans le choix et l'adaptation de méta-heuristiques et leurs implémentations.

L'adaptation des méta-heuristiques : Recuit Simulé, Recherche avec Tabous, Recherche avec Harmonie et Optimisation de la Migration d'Oiseaux à la résolution de notre problématique constitue une des originalités de notre étude. Pour chaque méthode, nous

avons apporté des ajustements et des modifications pour la résolution du modèle étudié. Nous avons mené une étude comparative entre ces méta-heuristiques pour analyser leurs performances sur la qualité des solutions produites et leur temps d'exécution.

En prenant en compte les résultats des simulations numériques des méthodes citées précédemment, notre attention s'est ensuite portée sur l'hybridation de ces différentes méta-heuristiques afin de jumeler les performances de chacune. L'objectif est de proposer une méthode de résolution la plus performante possible en qualité et temps d'exécution.

Parmi les résultats présentés dans cette thèse, certains ont été publiés dans des revues et conférences internationales ([11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18]).

## **1.5 ORGANISATION DE LA THÈSE**

Cette thèse s'articule autour de huit chapitres. Le Chapitre 1 est consacré à la description de la problématique étudiée, les motivations, les objectifs et la méthodologie adoptée ainsi que l'originalité de l'étude.

Le Chapitre 2 vise à présenter les différents procédés de mise en forme des thermoplastiques. Après une présentation non exhaustive des techniques d'injection et d'extrusion, l'accent est mis sur le processus de thermoformage et les matériaux qui y sont utilisés. Un intérêt particulier est accordé à l'analyse de l'étape de chauffage de thermoformage afin de cerner les paramètres qui influencent d'une manière significative la qualité de l'objet thermoformé. Nous passons en revue la littérature de l'ensemble des travaux réalisés en relation directe avec l'étape de chauffage.

Le Chapitre 3 décrit les différents modes de transfert thermique dans le four de thermoformage. Pour simuler les transferts thermiques, un ensemble d'hypothèses est défini.

Ensuite, nous présentons le modèle numérique mis en œuvre pour simuler le chauffage infrarouge des feuilles thermoplastiques, ainsi que sa résolution numérique avec la méthode des éléments finis. Pour calculer les surfaces radiatives mutuelles, nous présentons des méthodes numériques, une méthode semi-analytique et une autre analytique. Pour les méthodes numériques, notre choix s'est porté sur la méthode de Monte Carlo, aire d'intégration, intégration de surface et de contour. Une présentation détaillée de ces méthodes ainsi que leurs utilisations y sont présentées. Dans le but de choisir la méthode la mieux adaptée pour calculer le facteur de forme entre les émetteurs infrarouges et la matière thermoplastique, une étude comparative de ces méthodes est présentée.

Le Chapitre 4 est dédié à l'introduction de quelques concepts de l'optimisation combinatoire, afin de classer la difficulté de résolution de notre problème et justifier ainsi le choix des méthodes de résolution que nous avons retenues. Pour cela, nous procédons par une représentation progressive allant des notions de complexités algorithmiques jusqu'à la méthodologie de résolution d'un problème d'optimisation, en passant par la définition du problème d'affectation quadratique. Notre attention s'est ensuite portée sur l'utilisation des méthodes approchées, les heuristiques et méta-heuristiques ainsi que leurs hybridations. Dans notre étude, nous avons adapté quatre méta-heuristiques : Recuit Simulé, Recherche avec Tabous, Optimisation de la Migration d'Oiseaux et Recherche avec Harmonie.

Au Chapitre 5, une formulation du modèle d'optimisation associé à la problématique étudiée dans cette thèse est présentée. Pour la résolution du modèle développé, deux méta-heuristiques ont été adaptées : la méthode du Recuit Simulé et la méthode de la Recherche avec Harmonie. Pour choisir l'approche la mieux adaptée, nous avons mené une étude comparative entre les résultats générés par les deux méthodes. Pour montrer la qualité des résultats obtenus après l'optimisation de l'étape de chauffage, une étude

comparative entre les résultats avant et après optimisation y est exposée.

Le Chapitre 6 est consacré à l'amélioration du modèle d'optimisation de l'étape de chauffage et à l'application d'autres méta-heuristiques. Ainsi, une nouvelle fonction objectif est développée pour surmonter les faiblesses de la fonction proposée au Chapitre 5. Nous avons adapté deux méta-heuristiques : Recherche avec Tabous et Optimisation de la Migration d'Oiseaux. Ensuite, une simulation de l'optimisation de l'étape de chauffage infrarouge est effectuée. Nous avons mis en évidence l'efficacité des méthodes d'optimisation numérique développée en réalisant des comparaisons avec les résultats obtenus avant l'optimisation. Une étude comparative entre les méthodes développées est réalisée afin de choisir les meilleures d'entre elles en termes de temps d'exécution et de qualité de la solution générée.

Au Chapitre 7, nous avons développé une méthode hybride des méta-heuristiques dans le but d'améliorer le temps d'exécution et la qualité des résultats obtenus. Pour mettre en évidence la qualité de la méthode hybride, une étude comparative entre cette méthode et les deux méta-heuristiques les plus performantes est exposée. Pour clôturer la simulation de l'optimisation de l'étape de chauffage infrarouge, nous avons choisi le chauffage de deux polymères : polyéthylène téréphtalate (PET) et acrylonitrile butadiène styrène (ABS). Des études comparatives entre les résultats de températures et de flux radiatifs obtenus sont confrontées avec les résultats avant l'optimisation.

Le Chapitre 8, quant à lui, est consacré à une conclusion et recommandations que nous pourrions tirer de ce travail de recherche. Ainsi, une discussion sur les travaux que nous avons réalisés dans notre étude et une présentation de perspectives et extensions y sont présentées.

## **CHAPITRE 2**

### **GÉNÉRALITÉS SUR LA MISE EN FORME DES THERMOPLASTIQUES**

Les polymères thermoplastiques sont des matières qui se ramollissent sous l'effet de la chaleur et se durcissent à nouveau au froid. Cette particularité permet un recyclage plus facile de cette catégorie de plastique. Les procédés de mise en forme des polymères thermoplastiques sont directement dépendants des matériaux utilisés et des caractéristiques des produits finis. Principalement, on retrouve la matière thermoplastique sous forme de granulées ou produits semi-finis.

Le but de ce chapitre est de donner un bref aperçu sur les différentes méthodes de mise en forme des polymères thermoplastiques en produits finis. Une attention particulière est accordée au procédé de thermoformage. Une description de ces étapes est exposée ainsi que les matériaux thermoplastiques utilisés dans ce procédé. La qualité du produit formé avec le processus de thermoformage dépend fortement de son étape de chauffage.

#### **2.1 PRINCIPAUX PROCÉDÉS DE MISE EN FORME**

La mise en forme des polymères en produits finaux peut s'effectuer par diverses techniques. Ces techniques sont basées principalement sur trois phases : une étape de

chauffage, suivie par une étape de mise en forme, et le procédé est clôturé par une étape de refroidissement. Le choix adéquat de la technique de mise en forme d'un polymère dépend du type de la matière première utilisée (granulés ou feuille) et de la forme finale de l'objet fabriqué. Selon la matière première utilisée, les techniques sont classées en deux grandes catégories [3] :

- Les procédés utilisant les granulés de polymères, comme l'injection, l'injection-soufflage, l'extrusion et l'extrusion-soufflage.
- Les procédés utilisant des produits semi-finis sous forme de feuilles ou de plaques ; ce type de procédé est connu sous le nom de thermoformage ou simplement formage.

Dans ce qui suit, nous procédons à une description de chacune de ces techniques.

### 2.1.1 INJECTION

Les techniques d'injection utilisent la matière première sous forme de granulés. La matière première est introduite dans une presse à injecter pour le chauffage. Une fois le polymère chauffé et malaxé, il est injecté sous pression dans un moule en acier pour la mise en forme. Cette technique est largement utilisée pour la fabrication d'objets finis ou semi-finis, parfois de forme volumineuse et complexe. Cependant, pour la fabrication de parois supérieures à 6 mm, par exemple les bouteilles et les flacons, cette technique reste inefficace. Pour surmonter cette difficulté, une nouvelle technique a vu le jour : c'est technique d'injection de soufflage [3].

### 2.1.2 INJECTION - ÉTIRAGE-SOUFFLAGE

Le moulage par injection et le soufflage s'adressent essentiellement aux formes des corps creux tels les bouteilles, flacons et biberons. Ce procédé consiste à combiner la technique d'injection avec celle de soufflage. La première étape consiste à former par injection la matière thermoplastique en un tube d'essai. Elle est ensuite conditionnée à température ambiante de manière à pouvoir être stockée. Dans un deuxième temps, la préforme est placée dans un moule de soufflage pour la réchauffer. Puis, un puissant jet d'air est envoyé pour pousser la matière contre les parois du moule qui fera en sorte que la préforme va parfaitement prendre la forme du moule [4].

Ce procédé a pour intérêt principal le découplage parfait entre la fabrication de la préforme et son utilisation pour la fabrication des corps creux. Cela permet une meilleure gestion des flux et surtout des pannes. Cependant, un tel procédé engendre des difficultés telles que le stockage, l'humidité et la préservation de l'état des préformes, mais surtout le réchauffage de la préforme avant la mise en forme.

### 2.1.3 EXTRUSION

Contrairement aux techniques d'injection, l'extrusion est un procédé de transformation en continu. Le processus commence par introduire la matière plastique dans un cylindre pour la chauffer. Ensuite, la matière plastique est poussée par une vis sans fin avant de passer à travers une filière qui lui donne la forme désirée. Le tube, où le profilé sort en continu, est refroidi pour être ensuite coupé à la longueur voulue. Cette technique est utilisée pour la fabrication de produits de grande longueur comme les préformes de canalisation, les câbles, les fibres optiques, les tubes, les grillages, les plaques et les feuilles plastiques [3].

#### 2.1.4 EXTRUSION-SOUFFLAGE

Avec la technique d'extrusion, la fabrication des objets creux, comme les bouteilles et les flacons, est impossible. La technique permettant de fabriquer ces objets est l'extrusion de soufflage. Ce procédé commence par fabriquer un tube à l'aide de la technique d'extrusion. Juste à la sortie du tube de la filière dans l'état chaud, un moule en deux parties se referme autour de lui. Ensuite, un jet d'air comprimé est injecté dans la matière pour la pousser contre les parois du moule et former ainsi l'objet désiré [5].

#### 2.1.5 THERMOFORMAGE

La deuxième catégorie de techniques de mise en forme des polymères de type thermoplastique est la technique de thermoformage [6]. La matière première utilisée est sous forme d'un semi-produit. La première étape de cette technique est la fabrication de la matière première. La seconde étape est l'opération proprement dite de thermoformage qui va conduire à l'objet final, comme illustrée ci-dessous :

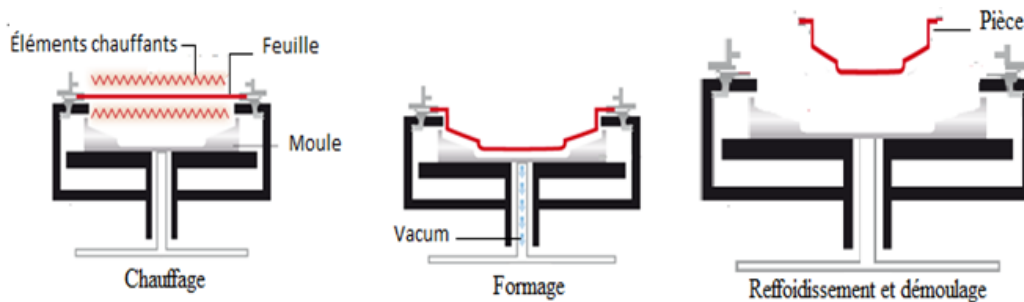
Matière plastique en granulés → Extraction, injection →  
→ Thermoformage → Objet final.

Le thermoformage est une technique qui consiste à prendre un matériau sous forme de feuille (plaque), le chauffer pour le ramollir, et le mettre en forme avec un moule et, quand il se refroidit, il garde cette forme. On utilise pour le thermoformage des matières thermoplastiques qui se déforment lors de la phase de chauffage, et retrouvent leurs propriétés physiques quand ils se refroidissent tout en conservant la forme qu'on leur a ainsi donnée. Cette propriété est intéressante pour leur mise en forme, d'autant plus que



ce phénomène est totalement réversible. Ces matériaux peuvent donc être recyclés très facilement.

Le procédé de thermoformage est principalement constitué de trois phases ; l'illustration est présentée à la Figure (2.1) :

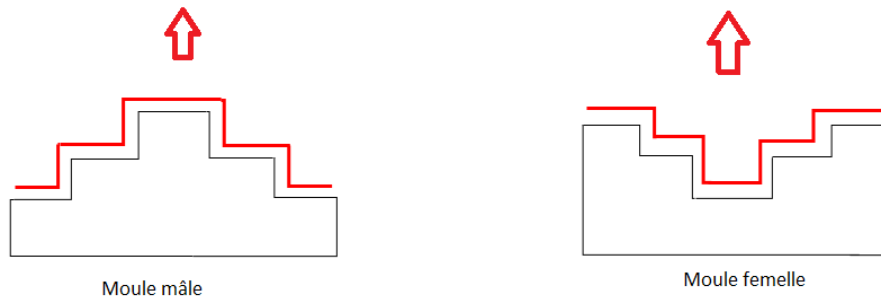


**Figure 2.1: Étapes de thermoformage**

La première étape, étape de chauffage, consiste à soumettre de la chaleur sur la feuille (plaque) à thermoformer, placée dans un four. Les systèmes de chauffage utilisés dans le thermoformage sont principalement de deux types : infrarouge ou par contact. Les systèmes de chauffage par infrarouge utilisent la propriété des polymères à absorber le rayonnement infrarouge ; ils sont les plus fréquents en thermoformage. L'avantage du chauffage par rayonnement infrarouge est qu'il permet une mise en chauffe plus rapide de la feuille (plaque) sans aucun contact. En revanche, il peut poser des problèmes de surchauffe en surface. Contrairement au chauffage avec rayonnements, le chauffage par contact se fait par conduction à partir d'un bloc métallique chaud. Cette technique est fréquemment utilisée pour les matériaux thermoformés à basse température. Il est donc peu utilisé pour les matériaux semi-cristallins qui sont mis en forme au voisinage de leur température de fusion. Cependant, l'avantage de ce type de chauffage est qu'il permet un bon contrôle de la température et limite les problèmes de surchauffe.

La deuxième étape de cette technique, étape de formage, consiste à former l'objet désiré.

Une fois la feuille ramollie, elle peut facilement prendre la forme du moule à laquelle elle est soumise. Il existe généralement trois techniques pour former un objet : i) évacuation d'air pour que la feuille adhère au moule, ii) utilisation d'air pressurisé pour pousser la feuille contre le moule (thermocompression) et iii) utilisation d'une force mécanique assistée par tampon (emboutissage à chaud). Pour le formage, des moules dits mâles (convexes) ou femelles (concaves) peuvent être utilisés pour obtenir la pièce finale (voir Figure (2.2)). Les pièces moulées mâles sont des feuilles qui sont formées sur le moule et qui, par conséquent, doivent être soulevées au démoulage. Inversement les pièces moulées femelles sont formées dans le moule et doivent être extraites du moule au démoulage. Quelle que soit la méthode adoptée, la pièce est formée soit "sur" un moule mâle, soit "dans" un moule femelle. Ainsi, la matière thermoplastique malléable prend l'empreinte du moule et obtient la forme voulue.



**Figure 2.2: Moules de thermoformage**

L'étape qui suit la mise en forme de la matière plastique avec les techniques de formage, étape de refroidissement, est le refroidissement de la préforme. En effet, afin d'éviter la déformation des objets, il est important de laisser la pièce se refroidir suffisamment dans le moule avant le démoulage. Le temps de séjour de la pièce dans le moule dépend de l'épaisseur de la pièce, mais aussi des caractéristiques de la matière thermoplastique utilisée. Généralement, la pièce est retirée quand sa température devient ambiante.

Dans cette présente étude, nous allons nous intéresser exclusivement à la mise en forme de la matière thermoplastique à l'aide de la technique de thermoformage. Dans ce qui suit, une attention particulière est consacrée aux matières premières utilisées dans le thermoformage et à l'analyse de l'étape de chauffage de cette technique. Une revue de la littérature de l'étape de chauffage est ensuite présentée pour clore cette discussion.

## 2.2 MATÉRIAUX UTILISÉS EN THERMOFORMAGE

La matière première utilisée pour le thermoformage est sous forme de feuilles ou de plaques thermoplastiques fabriquées à l'aide de la technique d'extrusion. L'épaisseur de la matière thermoplastique diffère selon le type de la pièce finale à produire. Généralement, l'épaisseur des feuilles varie entre 0,2 mm à 2 mm, et, pour les plaques, elle peut aller jusqu'à 25 mm.

Il existe une grande variété de matériaux thermoplastiques possédant des propriétés diverses. Toutefois, ces matériaux ne sont pas tous thermoformables. Il s'agit principalement des polymères amorphes ou semi-cristallins. Les deux types sont différenciés par la forme de la structure moléculaire de chaque polymère. Le polymère est dit semi-cristallin si l'ensemble des molécules qui le forme est disposé aléatoirement. Dans le cas contraire, il s'agit d'un polymère amorphe.

Les caractéristiques thermiques des polymères amorphes sont essentiellement indiquées par une température de transition vitreuse  $T_g$  qui fait passer le polymère de l'état vitreux à caoutchouteux. Pour les polymères semi-cristallins, ils se caractérisent par une fusion cristalline qui se produit à une température de fusion  $T_f$ . Leur rigidité diminue sans que l'état caoutchouteux ne soit observé, et, ensuite, ils passent à l'état liquide.

La Table (2.1) regroupe les caractéristiques de "thermoformabilité" des principales classes

de polymères utilisées en thermoformage. Leur plage de mise en forme (appelée plage de formage) et leur température caractéristique (température de transition vitreuse<sup>1</sup>,  $T_g$ , ou de fusion,  $T_f$ ).

Polymère	Abréviation	Type	$T_g(^{\circ}C)$	$T_f(^{\circ}C)$	Plage de formage ( $^{\circ}C$ )
Polystyrène	PS	A	90	-	130-182
Poly(chlorure de vinyle)	PVC	A	90	-	100-155
Poly(acryl butadiène styrène)	ABS	A	90-120	-	130-180
Poty(méthylméthacrylate)	PMMA	A	100	-	150-190
Polycarbonate	PC	A	150	-	170-200
Polypropylène	PP	SC	5	165	150-165
Polyéthylène téréphtalate	PET	SC	70	255	120-180
Polyéthylène haute densité	PEhd	SC	-110	134	130-185

**Tableau 2.1: Plages de formabilité des principaux polymères utilisés en thermoformage (A : amorphe, SC : semi-cristallin) [19]**

### 2.3 ÉTAT DE L'ART SUR L'ÉTAPE DE CHAUFFAGE EN THERMOFORMAGE

La qualité des objets fabriqués avec le procédé de thermoformage doit respecter un certain nombre de normes. Pour éviter des pertes, le défi à relever est le contrôle de toutes les étapes du procédé de thermoformage. La plupart des études se sont focalisées sur la première étape, c'est-à-dire l'étape de chauffage infrarouge de la feuille thermoplastique. En effet, les défauts causés dans cette étape sont irréversibles dans la suite du processus. Dans cette section, nous passons en revue les principaux travaux réalisés pour contrôler l'étape de chauffage.

La qualité de l'objet formé est étroitement liée au type du thermoplastique utilisé, ses propriétés thermomécanique et physique ainsi que du moule et des propriétés optiques des zones radiantés et des conditions opératoires de la thermoformeuse. Plusieurs

1. La température de transition vitreuse représente l'intervalle de température à travers lequel la matière passe d'un état caoutchouteux à un état vitreux (solide).

travaux ont été réalisés pour le choix adéquat de ces paramètres pour chaque polymère thermoformé. Pour l'étape de chauffage infrarouge, la revue de la littérature s'articule autour de trois concepts. Premièrement, nous abordons les travaux liés à la modélisation de l'étape de chauffage. Dans un second temps, nous passons en revue les méthodes de calculs du facteur de forme. Pour terminer, nous présentons quelques travaux liés étroitement à l'optimisation de l'étape de chauffage.

### *2.3.1 MODÉLISATION DU CHAUFFAGE INFRAROUGE*

Les phénomènes thermiques entrant en jeu dans l'étape de chauffage sont de trois natures : la radiation, la convection et la conduction. Le modèle thermique utilisé pour la simulation de l'étape de chauffage afin de prédire l'évolution de la température au sein de la préforme est basé sur la résolution des équations de la conservation de l'énergie et de transfert radiatif. La résolution analytique d'un tel modèle est généralement ardue, excepté au prix d'hypothèses importantes dénaturant la validité de la modélisation réalisée[20]. C'est l'une des raisons qui a fait que ces dernières décennies ont été marquées par une utilisation accrue des méthodes numériques pour modéliser l'étape de chauffage. Les méthodes numériques les plus répandues sont la méthode des différences finies [21, 22], la méthode des volumes finis [23, 24] et la méthode des éléments finis [25, 26].

Parmi les premières études réalisées sur la modélisation de l'étape de chauffage avec la méthode des différences finies, nous pouvons citer [21, 22]. La modélisation de l'étape de chauffage proposée dans [21] est basée sur un modèle des différences finies en une dimension 1D. Dans cette étude, une modélisation des émetteurs infrarouges radiatifs (IR) est réalisée pour calculer le flux radiatif reçu par la surface de la préforme afin de déterminer sa température. Dans [22], le calcul de la distribution de températures dans l'épaisseur de la préforme est réalisé à l'aide de la méthode des différences finies en deux

dimensions 2D. Plus tard, dans [23], l'auteur a proposé un modèle en trois dimensions 3D. Il a également développé un logiciel capable de prendre en compte des géométries de préformes complexes. De plus, une modélisation des émetteurs IR est proposée pour calculer le terme source prenant en compte la dépendance spectrale du rayonnement pour résoudre l'équation de la conservation afin d'évaluer la température de la préforme thermoplastique semi-transparente. Une autre étude réalisée avec un modèle 3D, basée sur l'utilisation de la méthode des volumes finis à l'aide du logiciel Plastirad, est proposée dans [24].

L'analyse par éléments finis est largement utilisée en thermoformage. Cette méthode a été adaptée pour la modélisation de l'étape de chauffage sous plusieurs formes, entre autres, les modèles 1D [27, 28], les modèles 2D [29] et les modèles 3D [30]. Dans [25], l'approche par éléments finis est utilisée pour la modélisation des échanges thermiques entre la préforme et le four infrarouge. Le profil de températures à la surface de la préforme chauffée est calculé. Cependant, le gradient des températures à travers l'épaisseur de la préforme n'a pas été pris en compte. Dans [31], la température de la préforme est calculée en prenant en considération le gradient des températures de son épaisseur. Le chauffage de la préforme est modélisé à l'aide du logiciel d'éléments finis ANSYS. La validation des résultats a été réalisée avec des thermocouples implantés dans l'épaisseur de la préforme. Également, une étude numérique et expérimentale a été menée sur une feuille HIPS ( High Impact PolyStyrene) [26]. Les résultats obtenus avec le modèle des éléments finis sont en accord avec les résultats expérimentaux.

La méthode des éléments finis en 3D a été utilisée avec le logiciel Comsol dans [30] pour modéliser le chauffage d'une préforme cylindrique en PET. Cette méthode s'est révélée efficace pour prédire la distribution de la température de la préforme. Dans [32], les auteurs ont utilisé la méthode des éléments finis en 3D pour analyser l'évolution de la

température dans une membrane mince semi-transparente du PET amorphe soumise à une source radiative. Les propriétés thermoplastiques du PET sont fixées à la valeur moyenne et le flux radiatif absorbé à l'intérieur de la préforme est calculé.

Une approche hybride basée sur un couplage de la méthode des éléments finis en 3D et la méthode des ordonnées discrètes est proposée dans [33]. La méthode des éléments finis est adaptée pour l'équation de conservation de l'énergie et la méthode des ordonnées discrète est utilisée pour l'équation de transfert radiatif.

Pour terminer, le défi dans la modélisation thermique de l'étape de chauffage est le calcul du flux radiatif absorbé par la préforme. Dans le cas du thermoplastique semi-transparent, l'hypothèse, la plus répandue dans l'ensemble des études citées ci-dessus, est que le flux radiatif se propage de manière unidirectionnelle dans l'épaisseur de la préforme. La portion de flux radiatif absorbée par la préforme, dans plusieurs études, est estimée par la loi de Beer-Lambert [22, 23, 30, 32] sous l'hypothèse des milieux froids. L'enjeu principal est de démontrer la validité de la loi de Beer-Lambert, mise en œuvre pour calculer l'absorption du rayonnement IR. En effet, plusieurs études et tests expérimentaux ont été réalisés dans ce sens [22, 23].

### 2.3.2 SURFACES DE RADIATIONS MUTUELLES

La prédiction de la température de la préforme dans le four de thermoformage dépend largement des échanges thermiques entre la source de chauffage utilisée, l'environnement et le matériau considéré. Le calcul des échanges radiatifs entre les émetteurs du four et la matière chauffée dépend des propriétés physiques de chaque partie du système émetteur-récepteur et du milieu environnant. Dans le cas d'un milieu ambiant transparent, le problème de calcul des échanges radiatifs se ramène à la recherche de la valeur de

la surface de radiation mutuelle, appelée facteur de forme [34, 35, 36]. L'équation qui régit cette grandeur fait intervenir une intégrale double. Dans quelques cas rares, où les surfaces ont des formes simples et connues, il est possible d'exprimer l'intégrale double de manière analytique [34]. Cependant, pour les surfaces complexes, il est difficile, voire même impossible de calculer le facteur de forme d'une manière analytique. L'utilisation de méthodes d'intégration numérique [37, 38, 39] et la méthode de Monte-Carlo [34, 35, 36, 40] ont permis de surmonter ces difficultés de calculs.

La formulation du facteur de forme avec les méthodes d'intégration numérique est largement répandue. Les plus adaptées sont de deux catégories : l'intégration surfacique [37, 38] et celle de contours [39, 41, 42]. Le calcul numérique de ces intégrales est souvent réalisé à l'aide de la formule de quadrature de Gauss sur des éléments finis de surface ou de contours [37, 43]. L'utilisation des formules d'intégration numérique pour le calcul du facteur de forme conduit à des résultats peu précis, même si un nombre important de points de Gauss est utilisé [37].

Pour surmonter les difficultés rencontrées pour calculer les valeurs du facteur de forme, la méthode probabiliste de Monte-Carlo a été utilisée. Les premiers travaux de l'utilisation de cette méthode ont été introduits dans [44, 45]. L'évaluation du facteur de forme entre deux surfaces consiste à simuler numériquement l'émission d'un nombre élevé de radiations, à partir de la surface émettrice, en comptant le nombre de rayons atteignant la surface réceptrice. Cette méthode a été utilisée intensivement dans plusieurs problèmes ayant des géométries différentes. Néanmoins, pour les problèmes pratiques de grande taille, la méthode de Monte Carlo demeure inefficace. En effet, l'utilisation d'une variable aléatoire génère un bruit statistique réduisant ainsi la précision de la méthode [46]. De plus, le temps de calcul est proportionnel au nombre de rayonnements émis.

Dans le cas où la distance, séparant la matière thermoplastique des éléments chauffants,



n'est pas suffisamment grande, il n'est plus possible d'appliquer les techniques classiques d'intégration numérique. La distance tend vers 0 et la fonction à intégrer devient singulière dans son domaine d'intégration. Les méthodes d'intégrations numériques ne sont plus applicables pour calculer le facteur de forme. Contrairement à ces méthodes, l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo est possible, mais avec un temps de calcul critique. Ces dernières années une nouvelle méthode, dite semi-analytique, a été développée [47]. La méthode est basée sur deux étapes. La première consiste à lever la singularité en résolvant analytiquement la partie singulière du facteur de forme, puis à intégrer numériquement le résultat de cette première étape.

### 2.3.3 OPTIMISATION DE L'ÉTAPE DE CHAUFFAGE

La problématique d'optimisation de l'étape de chauffage de thermoformage a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche dans la littérature sous plusieurs angles d'attaque. Parmi les premières études réalisées sur ce sujet, nous pouvons citer les travaux [48, 49] et [50], qui ont souligné l'importance d'optimiser l'étape de chauffage pour l'obtention d'une meilleure qualité de l'objet. Dans [9] et [51], respectivement, les auteurs ont mis l'accent sur les causes potentielles qui pourraient influencer la qualité de l'objet formé. Dans [25, 52], les auteurs ont conclu que le paramètre qui affecte fortement la température de la feuille est la température des éléments chauffants. Les auteurs ont mentionné l'importance d'optimiser les paramètres d'entrée pour un meilleur contrôle du chauffage de la matière. Pour optimiser l'étape de chauffage, différentes techniques ont été adaptées telles que l'optimisation exacte, réseau de neurones et méthode numériques [53, 54, 55].

L'optimisation des paramètres de l'étape de chauffage a été réalisée dans [53]. Dans ce travail, l'auteur s'est penché sur l'optimisation de l'ensemble des paramètres du four pour le formage des bouteilles en PET. Une étude sur la distribution des températures

utilisant l'algorithme de Nelder-Mead a été réalisée. Cette méthode consiste à modifier itérativement la distribution des températures de la préforme jusqu'à l'obtention d'une distribution d'épaisseur conforme à celle fixée par le fabricant.

Pour prédire les conditions thermiques optimales pour le thermoformage, l'utilisation d'un réseau de neurones inverse a été proposée dans [54, 56]. Les entrées du réseau comprennent la distribution d'épaisseur à différentes positions de la pièce moulée, et, en sortie, les paramètres recherchés du traitement thermique. Le but final de cette étude est d'optimiser le processus de thermoformage. Dans une autre étude, ces mêmes auteurs utilisent les paramètres de chauffage en entrée, pour le réseau de neurones et, en sortie, l'écart entre ces paramètres [57]. Globalement, les résultats générés satisfont les exigences de qualité de l'objet formé.

Dans [25], l'approche utilisée vise à améliorer la qualité de l'objet grâce à la méthode d'incertitude afin de préciser les paramètres adéquats de l'étape de chauffage. Dans un premier temps, une modélisation numérique est utilisée pour effectuer une analyse de sensibilité de la feuille de type ABS lors de l'étape de chauffage ; un seul paramètre est perturbé à la fois pour analyser son influence sur la température de la surface de la feuille. Dans un second temps, une série d'expériences est réalisée pour comparer les résultats obtenus avec les résultats théoriques. De cette analyse de sensibilité, il en ressort que la température de la feuille est fortement affectée par le choix des températures des éléments chauffants et la température ambiante.

Pour optimiser l'étape de chauffage, la méthode présentée dans [24] consiste à modifier d'une manière itérative le pourcentage de la puissance nominale affectée à chacune des lampes halogènes du four, jusqu'à ce que la préforme présente une distribution de température désirée. La résolution du modèle d'optimisation est réalisée à l'aide de l'algorithme SQP (Sequential Quadratic Programming) du solveur d'optimisation de

Matlab. L'inconvénient avec ces méthodes est le temps de calcul qui est de l'ordre de 7h30 minutes, ce qui est un temps très critique.

Les auteurs dans [58] observent que la différence de température entre la surface de la feuille et son centre dépend du temps de chauffage. Pour contrôler cette différence, il y est proposée une solution analytique. Pour un chauffage idéal, la puissance de chauffage devrait être exprimée selon la loi exponentielle de paramètre  $t$  (temps de chauffage) pour diminuer la différence de températures entre la surface et le centre de la feuille. Dans une autre étude [59], il est souligné la difficulté d'obtention des paramètres de cette loi.

Par ailleurs, dans [60], est abordé le problème de la répartition uniforme des épaisseurs dans le cas d'un four ayant des éléments en céramique endommagés. Le modèle d'optimisation proposé consiste à minimiser l'écart de flux radiatif entre les éléments endommagés et ceux en état de fonctionnement, de manière à générer une répartition uniforme des épaisseurs de l'objet. La distribution optimale en régime permanent de la puissance de chauffage est recherchée à l'aide de l'algorithme SQP.

Une étude liée directement à l'optimisation de la répartition uniforme du flux radiatif sur une feuille thermoplastique a été réalisée dans [55]. Dans leur étude, deux méta-heuristiques, le Recuit Simulé [61] et l'Algorithme Génétique [62], ont été utilisées. En se basant sur une étude comparative de la qualité de la solution générée et le temps d'exécution, les auteurs ont conclu que le Recuit Simulé performe mieux que l'Algorithme Génétique.

À la suite de cette revue de la littérature non exhaustive, il est possible de formuler certaines remarques. Malgré les efforts réalisés, dans le but de fournir des modèles d'optimisation de l'étape de chauffage de la feuille thermoplastique, peu d'intérêt est accordé au développement de méthodes algorithmiques permettant de résoudre

de manière efficace cette problématique de thermoformage. En effet, la résolution est principalement réalisée à l'aide du simulateur Matlab. La seule étude, qui prend en compte l'aspect algorithmique de la résolution du modèle d'optimisation, est celle présentée dans [55].

Notre étude est une généralisation de l'étude réalisée dans [55]. En effet, dans leur étude, la problématique est celle de la répartition uniforme du flux radiatif sur une feuille thermoplastique, lors du chauffage infrarouge, sous la contrainte que le cardinal de l'ensemble des températures est égal à celui de l'ensemble des cellules chauffantes. Il s'ensuit que ce problème est similaire au problème de l'affectation quadratique. Ce problème étant NP-difficile au sens fort, l'utilisation des méta-heuristiques se trouve ainsi justifiée. Dans notre étude, nous considérons la problématique de répartition uniforme du flux radiatif sur une feuille thermoplastique, lors du chauffage infrarouge, sous la contrainte que le cardinal des températures est différent de celui des cellules chauffantes. Nous avons également proposé une autre fonction objectif pour éviter de biaiser le choix des températures.

## **2.4 CONCLUSION PARTIELLE**

Dans ce chapitre, nous avons décrit les principaux procédés de mise en forme des polymères thermoplastiques en mettant l'accent sur le procédé de thermoformage. Après la description des étapes de thermoformage, nous avons présenté les principaux polymères thermoplastiques ainsi que leurs caractéristiques thermiques de formage. Ensuite, nous avons passé en revue les principaux travaux liés à l'étape de chauffage de thermoformage. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés aux modèles numériques développés pour modéliser l'étape de chauffage. Nous sommes passés

ensuite au calcul des surfaces de radiations mutuelles. Nous avons mentionné les principaux travaux en relation avec le calcul analytique et numérique de cette grandeur. Pour terminer, nous nous sommes penchés sur la problématique d'optimisation de l'étape de chauffage.

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, notre étude est étroitement liée à l'étape de chauffage. Au Chapitre 3, nous présentons le modèle numérique mis en œuvre pour simuler cette étape.



## **CHAPITRE 3**

### **MODÉLISATION DE L'ÉTAPE DE CHAUFFAGE**

Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'étape de chauffage du procédé de thermoformage est critique. Par conséquent, la mise en place d'un modèle thermique pour simuler l'étape de chauffage infrarouge est d'un intérêt majeur. Dans ce chapitre, nous présentons le modèle numérique mise en place pour représenter les interactions thermiques, respectivement, entre le four, la feuille et l'environnement. L'objectif principal de notre étude est d'intégrer ce modèle thermique dans le modèle d'optimisation, afin de contrôler l'étape de chauffage infrarouge du procédé de thermoformage.

Ce chapitre débute par la description du four de thermoformage et les différents types d'échanges thermiques mis en jeu dans le cadre de l'étape de chauffage infrarouge. La modélisation du chauffage infrarouge passe par la résolution de l'équation de conservation d'énergie et de transfert radiatif afin connaître la température de la feuille. Sous un ensemble d'hypothèses simplificatrices, mais justifiées, le transfert radiatif, au sein du polymère est estimé. Les équations qui gouvernent le transfert radiatif entre les émetteurs et le récepteur sont régies par la détermination des surfaces radiatives mutuelles. Un ensemble de méthodes de calcul du facteur de forme est présenté; le but étant de choisir la méthode la plus adaptée à notre problématique. Pour la résolution de l'équation de

conservation d'énergie, nous avons adopté la méthode des éléments finis.

### 3.1 DESCRIPTION DU FOUR DE THERMOFORMAGE

Il existe différents types de fours de thermoformage pour les feuilles thermoplastiques. La différence réside essentiellement dans la taille, la forme, le type de chauffage et l'ouverture du four. Le chauffage de la feuille à thermoformer s'effectue d'un seul côté ou des deux côtés et ce, de manière verticale ou horizontale. Les émetteurs sont positionnés sur un seul côté ou sur les deux côtés. Quant à la taille du four, elle dépend du nombre de ses éléments chauffants.

Par ailleurs, selon les émetteurs, nous distinguons trois types de fours : à lampes en quartz, en halogène et en céramique. Pour chaque émetteur correspond un domaine de l'infrarouge. Le spectre d'émission des émetteurs en halogène correspond aux longueurs d'onde courtes comprises entre  $0.78 \mu\text{m}$  et  $1.4 \mu\text{m}$ , celui des émetteurs en quartz correspond aux longueurs d'ondes moyennes comprises entre  $1.4 \mu\text{m}$  et  $3 \mu\text{m}$  et le domaine des émetteurs en céramique correspond aux longueurs d'ondes longues comprises entre  $3 \mu\text{m}$  et  $15 \mu\text{m}$  [63]. Pour les matériaux plastiques, qui sont de mauvais conducteurs de la chaleur, le chauffage par rayonnement infrarouge domine largement le cycle de thermoformage. Toutefois, ce mode de chauffage est considéré comme court, étant donné le caractère diélectrique du plastique. En revanche, il peut poser des problèmes de surchauffe en surface.

Notre étude est essentiellement basée sur les fours de thermoformage ouverts, sans aucun système de ventilation dont le chauffage est réalisé avec des éléments en céramique. Les éléments sont positionnés sur la partie supérieure dite four du haut et sur la partie inférieure dite four du bas. Les éléments sont répartis de manière égale entre le four du



haut et celui du bas.

La feuille thermoplastique est positionnée sur un cadre de serrage (*clamp frame*) ajustable entre le four du haut et celui du bas. Le cadre de serrage possède trois positions : haut, milieu et bas, par rapport au four du haut. Le four du bas n'est pas fixe, il est ajustable par rapport au four du haut. Le cadre de serrage est configuré de telle manière à placer la feuille à thermoformer partout dans le four. Pour une meilleure maîtrise du chauffage, la feuille est souvent positionnée au centre du four. La Figure (3.1) illustre les parties du four considéré dans notre étude.



**Figure 3.1: Four de thermoformage [64]**

Les émetteurs infrarouges considérés dans notre étude sont en céramique. Généralement, la température d'un élément est mesurée par un thermocouple de type K installé à l'intérieur de l'élément [64]. Les éléments du four sont reliés à un panneau de contrôle pour choisir le pourcentage de puissance nominale ou la température correspondante pour chaque élément. La puissance maximale choisie pour chaque élément est atteinte en quelques minutes après l'allumage du four. La température maximale de chaque élément en céramique dépend de ses propriétés optiques ainsi que de la longueur d'onde émise

[65]. Autrement dit, le spectre de rayonnement infrarouge des émetteurs en céramique (éléments chauffants) n'est pas nécessairement celui d'un corps noir. Dans le cas d'une source émettrice noire, l'intensité spectrale maximale de l'émetteur est reliée à la valeur maximale de la longueur d'onde  $\lambda_{max}$  selon la loi de Wien [65] définie comme suit :

$$\lambda_{max}T = 2897.8 \mu\text{mK}.$$

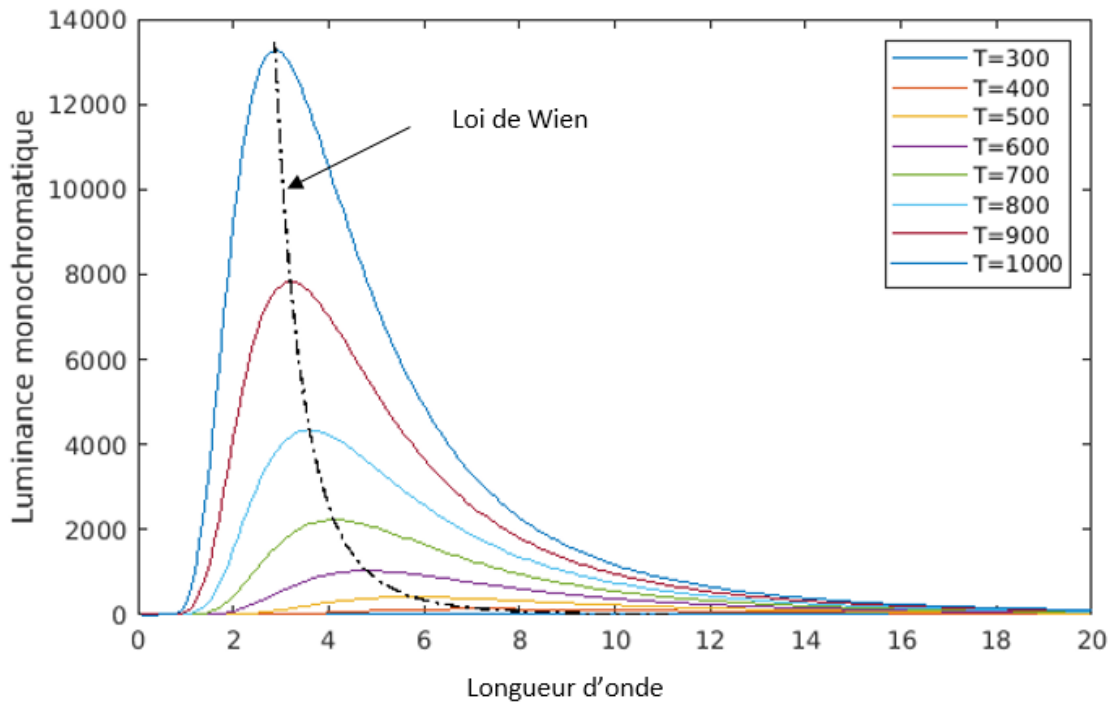


Figure 3.2: Émittance du corps noir pour différentes températures

### 3.2 MODÉLISATION DE L'ÉTAPE DE CHAUFFAGE

L'étape de chauffage infrarouge en thermoformage met en jeu des transferts thermiques de trois natures : radiation infrarouge, conduction et convection, comme illustrées à la Figure (3.3). Le chauffage joue un rôle capital durant la phase de chauffage de la

matière thermoplastique. La différence de températures entre la matière thermoplastique chauffée et l'air ambiant conduit à l'apparition d'un transfert de chaleur par convection. L'apparition d'un troisième type de transfert de chaleur est à l'origine des gradients thermiques générés par les deux premiers types de transfert thermique. Ce type de transfert de chaleur se fait par conduction.

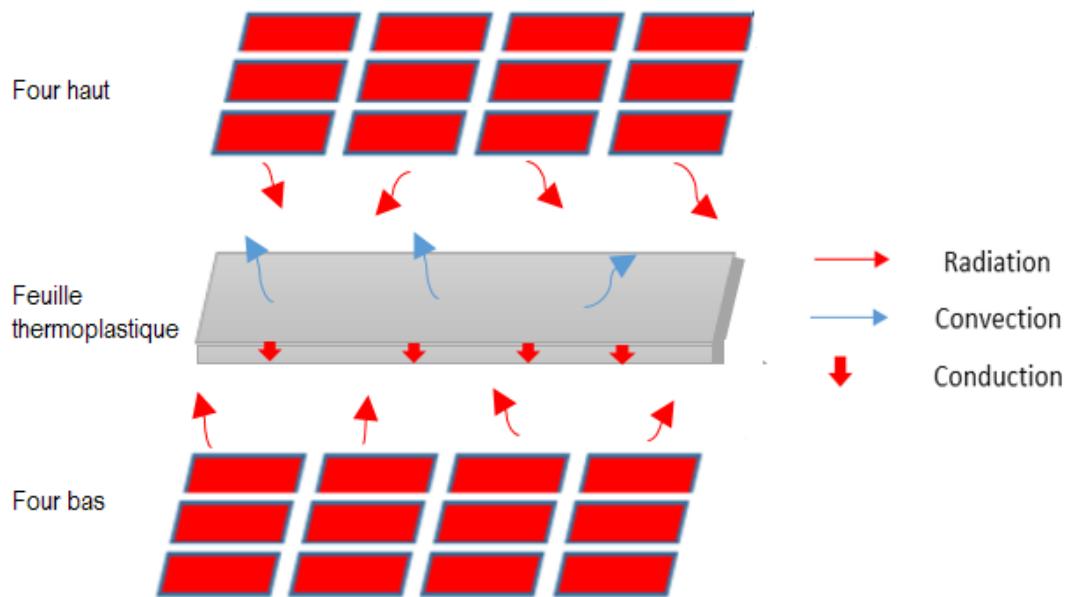


Figure 3.3: Modes de transferts thermiques

### 3.2.1 MISE EN ÉQUATION DU CHAUFFAGE INFRAROUGE

Comme nous l'avons mentionné au début de ce chapitre, la mise en chauffage de la feuille thermoplastique fait intervenir le transfert de chaleur par conduction, convection et radiatif. Dans ce qui suit, nous allons aborder les interactions de ces transferts de chaleur afin de prédire la distribution de température de la feuille chauffée. Dans le four de thermoformage, lors du chauffage de la feuille, le transfert radiatif, la conduction et la convection sont couplés. La modélisation de chauffage infrarouge en thermoformage est basée sur la résolution d'équations de conservation d'énergie et de transfert radiatif. Avant

de présenter les équations thermiques, qui gouvernent l'étape de chauffage infrarouge, nous posons quelques hypothèses simplificatrices.

### 3.2.2 HYPOTHÈSES

Dans notre étude, nous considérons le chauffage de deux types de matériaux : Acrylonitrile Butadiène Styrène (ABS) et PolyÉthylène Téréphtalate (PET). La feuille ABS est supposée opaque [66] et la feuille PET semi-transparente [23]; la détermination de la portion de flux radiatif absorbé est primordiale. Les hypothèses suivantes sont considérées :

1. **Hypothèse du milieu non-diffusant** : Plusieurs travaux confirment que le polymère PET amorphe peut être considéré comme un milieu non diffusant [21, 23, 67]. Néanmoins, quelques auteurs considèrent que la cristallisation thermique du PET cause l'apparition de structures cristallines de type sphérolitique suffisamment volumineuses pour provoquer la diffusion des rayonnements thermiques ([22, 68]). La vitesse de chauffage est toutefois rapide par rapport au processus de cristallisation du PET [21]. Ainsi, l'apparition de ce phénomène est rapidement limitée.
2. **Hypothèse du milieu froid** : En thermoformage, les températures des éléments chauffants sont largement supérieures à la température de la feuille. En effet, la température de formage d'une feuille PET n'excède pas en général la température de 398 K, ce qui est largement inférieure aux températures des éléments du four utilisées pour l'étape de chauffage qui pouvant atteindre 2000 K. Dans ces conditions, l'utilisation de l'hypothèse d'un milieu froid est légitime [32, 53]. Cette hypothèse permet de négliger l'intensité radiative totale émise par la surface de la feuille.
3. **Loi de Beer-Lambert** : Les feuilles PET utilisées dans notre étude sont considérées minces. Nous avons également supposé que la propagation du rayonnement est

effectuée dans la direction normale. Il s'ensuit que la transmission de la densité de flux à travers la profondeur de la feuille PET s'effectue suivant la loi ci-dessous de Beer-Lambert [10] :

$$q_{\lambda}(z) = q_{0,\lambda} e^{-k_{\lambda} z}. \quad (3.1)$$

Cette équation traduit le fait que la densité  $q_0$  de flux radiatif incident à la surface de la feuille, dont le taux d'absorption est  $k_{\lambda}$ , est absorbée selon une loi exponentielle décroissante. L'indice  $\lambda$  représente la longueur d'onde.

4. **Émetteurs infrarouges sont supposés des corps noirs** : En conséquence, l'énergie émise par les émetteurs infrarouges (les éléments chauffants du four) en fonction de sa température absolue  $T$  est donnée par la loi de Stefan-Boltzmann [65] :

$$E_b(T) = \sigma T^4,$$

où  $\sigma$  la constante Stefan-Boltzmann de valeur  $5.67.10^{-8} \text{ W/m}^2.\text{K}^4$ .

### 3.2.3 ÉQUATION DE CONSERVATION D'ÉNERGIE

En général, en thermoformage, les feuilles de polymères utilisées sont avec des épaisseurs petites par rapport à la longueur et largeur de ces dernières. Dans ces conditions, pour connaître l'évolution de la température en tout point de la feuille thermoplastique, et à chaque instant, l'analyse unidimensionnelle de la conduction est suffisante [21]. Il est important de noter que la présence du cadre de serrage introduit un important gradient des températures, négligé dans la modélisation unidimensionnelle de la phase de réchauffage de la feuille.

La résolution de l'équation de conservation d'énergie permet de connaître l'évolution de

la température en tout point de la feuille thermoplastique. Cette évolution en fonction du temps est régie par l'équation suivante [69] :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = -\nabla \overrightarrow{q_{rad}}, \quad (3.2)$$

où  $c_p$  ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) est la chaleur spécifique,  $\rho$  ( $\text{kg.m}^{-3}$ ) la masse volumique de la feuille et  $k$  ( $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) la conductivité thermique du polymère supposé isotrope. Dans notre étude, ces paramètres sont considérés constants et indépendants de la température. Le terme  $\nabla \overrightarrow{q_{rad}}$ , dit divergence du flux radiatif, représente l'énergie radiative absorbée par unité de volume au niveau du point de la matière chauffée.

Comme nous l'avons évoqué précédemment, en plus des échanges de chaleur par convection, les surfaces supérieures et inférieures de la feuille thermoplastique sont exposées à des échanges de chaleur par radiation provenant des éléments du haut et du bas du four. Ces deux phénomènes sont mis sous forme de conditions aux limites pour l'équation de conservation d'énergie. La condition de frontière considérée, dans cette modélisation, est comme suit :

$$k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] .n + h(T - T_\infty) - \overrightarrow{q_{rad}} \cdot \vec{n} = 0. \quad (3.3)$$

Le terme  $h(T - T_\infty)$  représente le transfert de chaleur par convection à partir de la surface de la feuille vers le milieu ambiant dont la température est  $T_\infty$ , et  $h$  ( $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ) le coefficient de convection.

Notons que le four considéré dans notre étude ne possède aucun système de ventilation et la convection est de type naturel. La valeur du paramètre  $h$  pour la convection naturelle est entre 2 et 10  $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  [70]. Lors du chauffage de la feuille, cette valeur varie en fonction du temps de chauffage, la température ambiante et la face de la feuille dans le

four [25]. La valeur de  $h$  est estimée entre 2 et 3.5 W.m<sup>-2</sup>.K<sup>-1</sup> pour le côté bas de la feuille, et entre 6.5 et 7.5 W.m<sup>-2</sup>.K<sup>-1</sup> pour le côté haut. Cette valeur augmente très lentement vers la fin de la phase de chauffage de la feuille [25]. Dans notre étude, le paramètre  $h$  est fixé à la valeur moyenne.

Un autre paramètre qui pouvant être un facteur important dans la détermination du transfert thermique dans la feuille, est la variation de la température ambiante  $T_\infty$  dans le four. Dans notre étude, nous considérons des feuilles thermoplastiques relativement minces. Le temps de chauffage de ces feuilles est suffisamment faible pour que la température de l'environnement ne change pas de manière à affecter le modèle [71]. La température ambiante est alors considérée constante.

### 3.2.4 DIVERGENCE DU FLUX RADIATIF

La divergence du flux radiatif, représentant la source radiative  $\nabla \overrightarrow{q_{rad}}$ , apparaissant à l'Équation (3.2), correspond à l'énergie radiative absorbée à l'intérieur du milieu semi-transparent. Son équation est comme suit :

$$S_{rad}(r) = -\nabla \overrightarrow{q_{rad}}(r),$$

où  $r$  représente la position de l'intensité spectrale.

L'expression du flux rayonné en fonction de l'intensité spectrale  $I_\lambda$  dans le cas d'un milieu homogène est comme suit [35] :

$$\overrightarrow{q_{rad}}(r) = \int_0^\infty \int_{4\pi} I_\lambda(r, \vec{\Omega}) \vec{\Omega} d\Omega d\lambda. \quad (3.4)$$

En effectuant un bilan net d'énergie radiative au sein d'un petit volume élémentaire du milieu semi-transparent homogène dont le coefficient d'absorption spectral est  $k_\lambda$ , l'équation de la divergence spectrale du flux rayonné est comme suit [65] :

$$S_{rad}(r) = - \int_{\Omega} [\text{émis} - \text{absorbé}] d\Omega = - \int_0^\infty \left[ 4\pi k_\lambda I_{b,\lambda}(T) - k_\lambda \int_{4\pi} I_\lambda(r, \vec{\Omega}) d\Omega \right] d\lambda, \quad (3.5)$$

À partir de l'hypothèse de milieu froid, l'intensité radiative émise par la feuille chauffée est négligée. En considérant que les feuilles chauffées sont minces et la propagation du rayonnement est effectuée dans la direction normale  $z$ , la densité du flux radiatif (Équation 3.4) est exprimée par la loi de Beer-Lambert (Équation 3.1). La divergence du flux radiatif de l'Équation 3.5, s'écrit sous la forme :

$$S_{rad}(r) = -k_\lambda q_{0,\lambda} \exp^{-k_\lambda z}, \quad (3.6)$$

où  $q_{0,\lambda}$ ,  $k_\lambda$  et  $\lambda$  représentent, respectivement, la densité de flux radiatif incident à la surface de la feuille, le taux d'absorption de la feuille et la longueur d'onde.

### 3.2.5 FLUX INTERCEPTÉ PAR LA FEUILLE THERMOPLASTIQUE

Le rayonnement incident sur une surface peut être absorbé, transmis ou réfléchi en différentes proportions. Un corps qui absorbe la totalité des rayonnements incidents à sa surface quelles que soient leur longueur d'onde et leur direction, serait aussi celui qui rayonnerait le maximum d'énergie thermique à chaque température et à chaque longueur d'onde. Ce corps, dit idéal, est appelé corps noir. Pour une température et une longueur d'onde données, le corps noir ne réfléchit et ne transmet aucun rayonnement ; c'est le corps qui émet le plus d'énergie. Le rayonnement émis par le corps noir est



isotrope<sup>1</sup>. La distribution d'énergie rayonnée par ce corps est donnée par l'émittance monochromatique définie par la loi de Planck [35] :

$$E_{b,\lambda}(T) = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\left[ \exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]}$$

où  $T(K)$  est la température absolue du corps,  $C_1$  et  $C_2$  les constantes de Planck données par :  $C_1 = 3.742 \times 10^8 \text{ W} \cdot \mu\text{m}^4/\text{m}^2$  et  $C_2 = 1.439 \times 10^4 \mu\text{mK}$ .

Étant donné un émetteur infrarouge, de température  $T_s$ , l'énergie spectrale émise par cette source, dont une partie est reçue par la surface thermoplastique réceptrice, est donnée par la relation suivante :

$$E_\lambda(T_s) = \varepsilon_\lambda(T_s)E_{b,\lambda}(T_s). \quad (3.7)$$

où  $\varepsilon_\lambda(T_s)$  représente l'émissivité spectrale de la source chauffante. Dans l'Équation 3.6, l'émittance noire est normalement multipliée par l'absorptivité. Selon la loi de Kirchoff, l'absorptivité monochromatique est égale à l'émissivité monochromatique.

Dans notre étude, le milieu qui sépare la source de la matière thermoplastique est supposé transparent au rayonnement et la surface de la source est diffuse. Pour tenir compte des géométries arbitraires des éléments du four et de la feuille thermoplastique, nous subdivisons leurs surfaces en petites surfaces élémentaires simples. La quantité d'énergie  $q_{0,\lambda}$ , interceptée par une surface finie thermoplastique  $A_j$ , envoyée à partir d'une source de surface finie  $A_i$ , est donnée par la relation suivante [32] :

$$q_{0,\lambda}(T_s) = \frac{A_i}{A_j} F_{ij} E_\lambda(T_s). \quad (3.8)$$

---

1. L'intensité lumineuse est la même dans toutes les directions (source Lambertienne).

$F_{ij}$  est le facteur de forme, présenté à la Section 3.3. La radiation totale interceptée par la surface thermoplastique est obtenue en intégrant sur la totalité des longueurs d'onde. En utilisant la formule (3.7), la relation (3.8) devient :

$$q_0(T_s) = \frac{A_i}{A_j} F_{ij} \int_0^\infty \varepsilon_\lambda(T_s) I_{b,\lambda}(T_s) d\lambda. \quad (3.9)$$

Nous avons considéré que la surface de la feuille est grise (l'absorptivité moyenne est égale à l'émissivité moyenne). Dans le cas d'une source qui rayonne de façon isotrope, l'émissivité moyenne de la source chauffante est :

$$\bar{\varepsilon}(T_s) = \frac{\int_{\Delta\lambda} \varepsilon_\lambda(T_s) d\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Dans ce cas, le rayonnement total intercepté par la surface de thermoplastique, donnée par l'Équation (3.9), devient :

$$q_0(T_s) = \sigma \frac{A_i}{A_j} F_{ij} \bar{\varepsilon}(T_s) T_s^4, \quad (3.10)$$

où  $\sigma$  est la constante Stefan-Boltzmann de valeur  $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ . Le terme  $\sigma T_s^4$ , quant à lui, représente l'émittance du corps noir, soit :

$$\int_0^\infty I_{b,\lambda}(T) d\lambda = \int_0^\infty \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\left[ \exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]} d\lambda = n^2 \sigma T_s^4.$$

Dans notre modèle, nous avons considéré que la surface des éléments chauffants est noire et celle de la feuille est grise. Dans ce cas, l'expression qui représente la chaleur radiative absorbée par la surface de la feuille prend une forme compliquée. Pour la simplifier, nous avons utilisé l'Équation 3.10. Étant donné que les émissivités des feuilles sont élevées (présentées au Chapitre 7), cette approximation est justifiée.

### 3.2.6 FLUX ABSORBÉ PAR LA PRÉFORME

Dans le four infrarouge, le flux radiatif incident à la surface de la feuille peut être réfléchi, transmis et/ ou absorbé totalement ou partiellement suivant le type de la feuille.

Dans le cas d'une feuille opaque, telle que la feuille ABS, les radiations sont absorbées sur une fine partie de la surface de la feuille thermoplastique. Dans ce cas, le coefficient de transmission est supposé nul. Le transfert de chaleur à travers l'épaisseur de la feuille est considéré par conduction. À la surface de la feuille, le rayonnement et la convection sont pris en considération comme conditions aux limites. Certains polymères comme la feuille PET permettent la propagation de rayonnements dans leur épaisseur et sont accompagnés par une absorption.

Dans le cas d'une feuille PET mince, l'absorption spectrale du rayonnement dans le polymère est fonction du coefficient d'absorption spectrale  $\kappa_\lambda$  et de la profondeur  $z$  du milieu semi-transparent. Ce coefficient d'absorption peut être obtenu par la connaissance du spectre de transmissivité du matériau. Si nous supposons que la propagation du rayonnement s'effectue dans la direction normale à la feuille PET et la réflexion négligeable, la loi de Beer-Lambert nous permet d'écrire :

$$\kappa_\lambda = -\frac{\ln[\tau_\lambda(\lambda)]}{L},$$

où  $L$  est l'épaisseur de la feuille thermoplastique utilisée pour obtenir le spectre de transmissivité du matériau en fonction de la longueur d'onde. Pour les feuilles PET à faible épaisseur, entre 0.5 mm et 1.5 mm, les spectres de transmissivité limités à l'infrarouge court représentent 90% à 95% du rayonnement émis par des sources infrarouges à des températures aux environs de 2300 K, et pour lesquelles la longueur d'onde est,

généralement, comprise dans l'intervalle  $\Delta\lambda = [0.2 - 10] \mu\text{m}$  [32]. La transmissivité du PET dans l'intervalle  $\Delta\lambda = [0.25 - 2.5] \mu\text{m}$  est illustrée par la Figure (3.4).

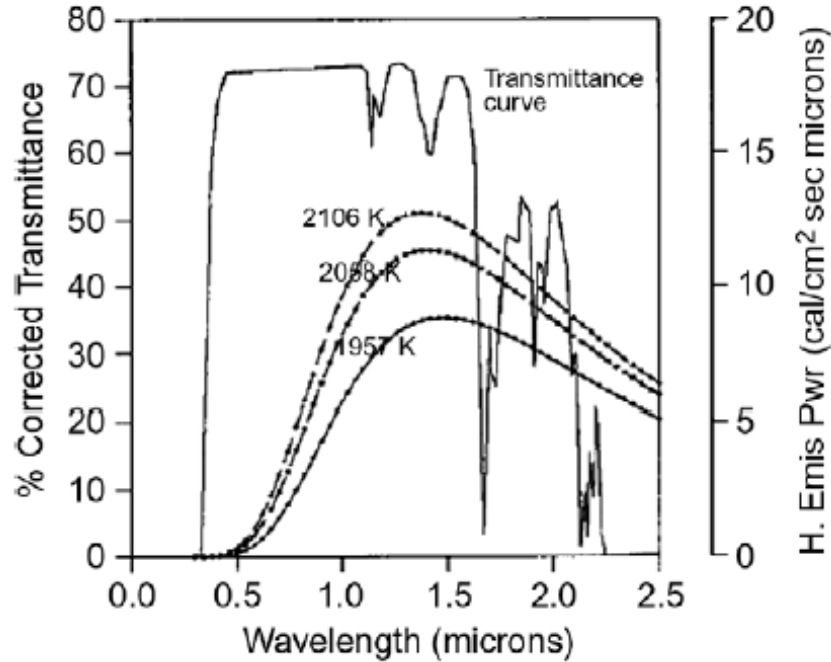


Figure 3.4: Spectre de transmittivité d'un matériau PET [21]

Rappelons que l'expression du flux absorbé par la feuille PET, dont le taux d'absorption moyen est  $k$ , est donnée par la loi de Beer-Lambert est comme suit :

$$q(z) = q_0 \cdot e^{-k \cdot z},$$

où  $q_0$  est le flux radiatif intercepté par la surface de la feuille.

### 3.3 SURFACES DE RADIATIONS MUTUELLES

Les transferts radiatifs dans le processus de thermoformage dépendent des échanges thermiques entre la source utilisée de chauffage et la matière chauffée. La prédiction des

énergies échangées par rayonnement, entre le polymère et les éléments du four, dépend, d'une part, des propriétés physiques de la feuille et les éléments du four, et, d'autre part, de l'environnement du milieu. Dans le cas d'un milieu ambiant transparent, le problème de calcul de l'échange radiatif entre deux surfaces, placées arbitrairement dans l'espace, se ramène à la recherche de la valeur de la surface de radiation mutuelle connue sous le nom du facteur de forme,  $F_{ij}$ , représentant le pourcentage d'énergie émis par la source de surface  $A_i$  et atteignant la surface réceptrice  $A_j$  [69].

Le facteur de forme est en fait une quantité purement géométrique. Ce paramètre dépend uniquement de la forme et la position des surfaces émettrice  $A_i$  et réceptrice  $A_j$ . Dans le cas de surfaces placées arbitrairement dans l'espace, l'expression du facteur de forme  $F_{ij}$  est calculée comme suit [45] :

$$F_{ij} = \frac{\text{Fraction de flux quittant } A_i \text{ et arrivant sur } A_j}{\text{Flux total quittant } A_i}.$$

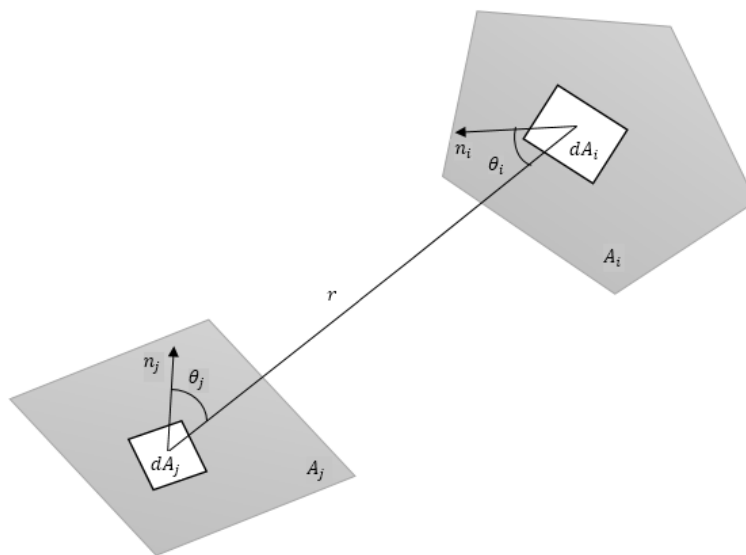


Figure 3.5: Définition géométrique de la surface de radiation mutuelle

La formulation mathématique du facteur de forme entre deux surfaces  $A_i$  et  $A_j$  est donnée par l'expression suivante :

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_i \times dA_j. \quad (3.11)$$

Les angles  $\theta_i$  et  $\theta_j$  sont formés, respectivement, par le vecteur  $r$  porté par la direction de la radiation incidente quittant l'émetteur et arrivant sur la surface du récepteur thermoplastique et les deux vecteurs normaux aux surfaces  $n_i$  et  $n_j$ , respectivement (voir Figure (3.5)).

L'équation de la surface radiative mutuelle fait intervenir une intégrale double. Dans quelques cas rares, où les surfaces ont des formes simples, il est possible d'exprimer l'intégrale double de manière analytique. Cependant, pour des surfaces plus complexes, il est difficile de calculer le facteur de forme d'une manière analytique. Pour surmonter cette difficulté, des méthodes numériques d'approximation ont été introduites pour calculer la surface radiative mutuelle [72]. Ces méthodes sont de deux types : déterministe et probabiliste. Dans notre étude, nous nous sommes intéressés à quatre méthodes numériques : la méthode de Monte Carlo, d'intégration d'aire, d'intégration de surfacique et de contour. Dans le cas de la singularité de l'intégrale du facteur de forme, une méthode semi-analytique est suggérée.

### 3.3.1 MÉTHODE DE MONTE CARLO

Cette méthode est parmi les premières méthodes numériques adaptées au calcul de la surface radiative mutuelle. Notons qu'il n'y pas une méthode unique de Monte Carlo, mais plutôt différentes approches statistiques [44]. Cette méthode a démontré son efficacité même pour les géométries plus complexes.

La méthode de Monte Carlo est une méthode probabiliste basée sur un processus stochastique, répétitif, de trois étapes. À la première étape, un point d'émission est choisi aléatoirement de la surface émettrice à l'aide d'une variable aléatoire uniformément distribuée sur  $[0, 1]$ . Ensuite, une direction d'émission est sélectionnée via l'angle polaire formé par la direction d'émission et la normale, ainsi que l'angle azimutal. Le point d'interaction du rayon avec la surface réceptrice est déterminé à partir du point et la direction d'émission. Enfin, pour chaque rayon lancé, un test est réalisé pour déterminer s'il est intercepté ou non par la surface réceptrice. Un compteur est incrémenté pour chaque rayon arrivé à la surface de la surface réceptrice.

Concrètement, pour calculer le facteur de forme  $F_{ij}$  entre deux surfaces  $A_i$  et  $A_j$ , le principe de base de la méthode consiste à lancer un nombre  $N$  élevé de rayonnements à partir d'une surface émettrice  $A_i$  et compter le nombre de rayons  $n$  atteignant la surface réceptrice  $A_j$ . Le facteur de forme représente le rapport du nombre de rayonnements qui atteignent la surface réceptrice sur le nombre total de rayons générés à partir de la surface émettrice, donné par la formule suivante :

$$F_{ij} \approx \frac{n}{N}.$$

Pour des parois homogènes, à propriétés d'émissions isotropes, la direction d'émission est définie par l'angle polaire, noté  $\theta$ , et l'angle azimutal, noté  $\varphi$ . L'émission des rayons ne peut se faire que selon des directions comprises dans une demi-sphère caractérisée par  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  et  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Le choix des angles  $\theta$  et  $\varphi$  se fait selon les distributions de probabilité, respectivement,  $R_\theta$  et  $R_\varphi$  qui prennent leurs valeurs selon une distribution uniforme entre 0 et 1. Les angles  $\theta$  et  $\varphi$  sont choisis comme suit :

$$\theta = \arcsin \sqrt{R_\theta}.$$

$$\varphi = 2\pi R_\varphi.$$

La position du point d'émission du rayon est choisie de la surface émettrice selon une loi de distribution uniforme définie sur  $[0, 1]$ . Les coordonnées du point d'intersection du rayon avec la surface réceptrice sont déterminées comme suit :

$$x_i = x + r \cos(\varphi) \tan(\theta),$$

$$y_i = y + r \sin(\varphi) \tan(\theta),$$

où  $r$  est la distance entre la surface émettrice et réceptrice, et  $(x, y)$  le point d'émission donné par :

$$x = rand \times L_{1i},$$

$$y = rand \times L_{2i},$$

où  $L_{1i}$  et  $L_{2i}$ , respectivement, représentent la longueur et la largeur de la surface émettrice et  $rand$  est une valeur générée d'une manière aléatoire entre 0 et 1.

La méthode de Monte Carlo a été adaptée à tout type de milieu, notamment, les plus complexes [45]. En effet, la théorie de la méthode est relativement simple à implémenter. En revanche, elle demeure moins efficace pour les problèmes pratiques de grande taille. En effet, d'une part, la méthode est basée sur des variables aléatoires. Un bruit statistique est par conséquent généré. Ainsi, la précision de la méthode est réduite [46]. D'autre part, la précision des valeurs calculées par cette méthode dépend du nombre de rayons lancés. Pour résoudre ce problème, il est nécessaire d'ajuster ce paramètre afin de limiter le temps de calcul tout en gardant une précision satisfaisante [44].



### 3.3.2 MÉTHODE D'AIRE D'INTÉGRATION

La méthode d'aire-intégration, dite subdivision des surfaces, est une technique qui consiste à remplacer la forme intégrale du facteur de forme définie par l'Équation (3.11) par une double sommation sur des opérations vectorielles des cosinus directeurs. Cette technique engendre la discrétisation des surfaces  $A_i$  et  $A_j$  en petites surfaces élémentaires [35]. Les termes  $\cos \theta_i$  et  $\cos \theta_j$  sont remplacés par leur écriture vectorielle :

$$\cos \theta_i = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}_i}{r} \quad \text{et} \quad \cos \theta_j = -\frac{\vec{r} \cdot \vec{n}_j}{r}.$$

Le calcul du facteur de forme se fait sur un ensemble de surfaces élémentaires  $\Delta A_l$  et  $\Delta A_k$ . La formule numérique associée à l'Équation (3.11) est alors :

$$F_{ij} \approx -\frac{1}{A_i \pi} \sum_l \sum_k \frac{(\vec{n}_i \cdot \vec{r})(\vec{n}_j \cdot \vec{r})}{(\vec{r} \cdot \vec{r})^2} \Delta A_l \Delta A_k. \quad (3.12)$$

La convergence de la méthode dépend du raffinement du maillage, mais au prix d'un temps de calcul qui peut devenir assez élevé. En effet, pour chaque géométrie rectangulaire plate divisée en  $N^2$  surfaces élémentaires, l'expression à l'intérieur de la sommation de la formule du facteur de forme donnée par l'Équation (3.12) sera évaluée  $N^4$  fois. L'algorithme de calcul du facteur de forme, dans ce cas, est par conséquent en  $O(N^4)$ . Le temps de calcul, ainsi que la précision du facteur de forme, augmentent considérablement avec  $N$ .

### 3.3.3 MÉTHODE D'INTÉGRATION DE SURFACE

Cette méthode est basée sur l'utilisation de la quadrature de Gauss et la méthode des éléments finis. Dans un premier temps, la méthode des éléments finis est utilisée pour discrétiser les surfaces mères  $A_i$  et  $A_j$  en petites surfaces dites éléments finis [38]. Les facteurs de forme sont calculés entre chaque paire de surfaces en fonction de leurs valeurs en certains points donnés. Puis, un processus d'assemblage prenant en compte les interactions entre les éléments voisins est construit. Dans un second temps, l'intégrale double de la formule du facteur de forme est transformée en une somme pondérée grâce à l'utilisation de la quadrature de Gauss. Cette méthode est basée sur l'utilisation des points et poids de Gauss. La précision de cette méthode dépend fortement du choix et du nombre de points d'intégration. Quand le nombre de points est considérable, la méthode de Gauss devient plus lente et plus précise [37].

Concrètement, une discrétisation est réalisée sur les deux surfaces  $A_i$  et  $A_j$ , respectivement, en  $N$  et  $M$  surfaces élémentaires. Pour chaque couple de surfaces élémentaires  $A_{ik}$  et  $A_{jl}$ , respectivement, des surfaces  $A_i$  et  $A_j$ , un facteur de forme  $F_{ikjl}$  est calculé. Ensuite, une sommation de ces termes est réalisée pour déduire le facteur de forme total entre les deux surfaces mères. Cette méthode a démontré son efficacité pour des géométries complexes. Le facteur de forme entre les surfaces  $A_i$  et  $A_j$  est alors donné par l'expression suivante :

$$F_{ij} \approx \frac{1}{A_i} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N A_{ik} F_{ikjl}.$$

Le calcul des facteurs de formes élémentaires est réalisé à l'aide de la quadrature de Gauss [38]. Les surfaces réelles ( $A_{ik}$ ,  $A_{jl}$ ) d'un repère de référence sont exprimées à l'aide des déterminants de la matrice Jacobienne. Ensuite, l'intégration du facteur de forme

est transformée en une double sommation à l'aide de la quadrature de Gauss sur les éléments de référence. Pour chaque couple de surface de références et un ensemble  $n_g$  de points et poids de Gauss, l'évaluation du facteur de forme est effectuée à l'aide de la formule suivante :

$$F_{ijkl} \approx \frac{1}{2\pi A_{ik}} \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} w_i \cdot w_j f(\xi_i, \eta_j) \times \det(J(\xi_i)) \det(J(\eta_j)),$$

où  $\xi_i, \eta_j$  et  $w_i, w_j$  représentent, respectivement, les points et les poids d'intégration de Gauss, et le terme  $f(\xi_i, \eta_j)$  désigne la fonction à intégrer. L'exactitude de la quadrature de Gauss dépend fortement du nombre de points de Gauss. Pour l'intégration exacte d'un polynôme de degré  $m$ , le choix du nombre de points de Gauss  $n_g$  est tel que :  $2m - 1 \leq n_g \leq m^2$ .

### 3.3.4 MÉTHODE DE CONTOUR

La double intégrale de l'équation du facteur de forme, de l'Équation (3.11), est transformée en une intégrale à l'aide du théorème de Stokes. La formule du facteur de forme entre les contours des deux surface  $A_i$  et  $A_j$  s'écrit [41] :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \oint_{\partial A_i} \oint_{\partial A_j} \ln r \, d\vec{r}_i \, d\vec{r}_j, \quad (3.13)$$

où  $r$  représente la distance entre les vecteurs position  $\vec{r}_i$  et  $\vec{r}_j$ . Pour un point quelconque  $a$  du contour  $\partial A_i$  de la surface  $A_i$  et un point quelconque  $b$  du contour  $\partial A_j$  de la surface  $A_j$ , la distance  $r$  est donnée par :

$$r = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}.$$

Pour évaluer l'intégrale de contour, plusieurs méthodes d'intégration numériques ont été adaptées, entre autres, la méthode de Gauss, Simpson et trapèze [42]. La quadrature de Gauss est la plus répandue pour transformer cette intégrale du fait qu'elle conduit à des résultats précis dans un laps de temps très court. En effet, des études ont montré que pour des plaques parallèles centrées, la méthode de contour converge beaucoup plus rapidement que la méthode de l'intégrale de surface [73]. L'expression de l'Équation (3.13) s'écrit [42] :

$$F_{ij} \approx \frac{1}{2\pi A_i} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (a_{x1,i} \cdot a_{x2,j} + a_{y1,i} \cdot a_{y2,j} + a_{z1,i} \cdot a_{z2,j}) \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q (W^k W^l \ln(d(\xi_k, \eta_l))),$$

où  $a_{1,i}$  et  $a_{2,j}$  représentent les transformations spatiales des coordonnées des points de contour des surfaces  $A_i$  et  $A_j$  vers les coordonnées locales à l'aide de la méthode de Gauss. Les nombres  $p$  et  $q$  représentent, respectivement, les points de Gauss fixés pour chaque surface.

### 3.3.5 MÉTHODE SEMI-ANALYTIQUE

Dans le cas de deux surfaces arbitraires très voisines, le calcul numérique du facteur de forme conduit à des résultats divergents. La méthode semi-analytique permet de surmonter cette difficulté tout en réduisant le nombre d'opérations de calcul numérique. La méthode est basée sur l'intégration de contour. En utilisant le théorème de Stokes [41], la formule du facteur de forme de l'Équation (3.11) s'écrit :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \oint_{\partial A_i} \oint_{\partial A_j} \ln r \, d\vec{r}_i \, d\vec{r}_j, \quad (3.14)$$

où  $r$  représente la distance entre les vecteurs positions  $\vec{r}_i$  (respectivement  $\vec{r}_j$ ) d'un point quelconque appartenant au  $\partial A_i$  (respectivement  $\partial A_j$ ) de la surface  $A_i$  (respectivement  $A_j$ ) donnée par :

$$r = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}.$$

Cette approche développée dans [47] consiste dans un premier temps à lever la singularité en intégrant analytiquement la partie singulière. Ensuite, intégrer numériquement le résultat de l'étape précédente. L'expression de facteur du forme est alors comme suit :

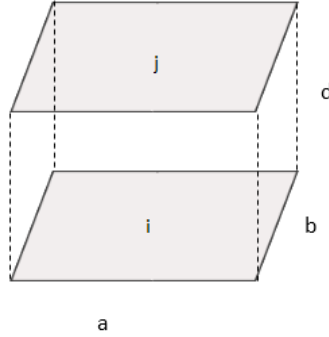
$$F_{ij} \approx \frac{1}{2\pi A_i} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (e_i \cdot e_j) (\Gamma_{ij}^a + \Gamma_{ij}^b + \Gamma_{ij}^c),$$

où  $e_i$  et  $e_j$  sont des vecteurs unitaires appartenant respectivement aux segments de contour  $L_i$  et  $L_j$  formant les frontières  $\partial A_i$  et  $\partial A_j$ . Les fonctions  $\Gamma_{ij}^a$ ,  $\Gamma_{ij}^b$  et  $\Gamma_{ij}^c$  expriment les propriétés géométriques des segments de contour [47].

### 3.3.6 MÉTHODE ANALYTIQUE

Dans cette étude, la feuille à chauffer et les éléments du four sont parallèles, de formes rectangulaires, et placés à une distance suffisamment grande. Le calcul du facteur de forme de manière analytique est alors possible [74]. Étant données deux surfaces parallèles  $A_i$  et  $A_j$  de longueur  $a$  et de largeur  $b$ , placées à une distance  $d$  (voir Figure (3.6)), et considérant  $X = a/d$  et  $Y = b/d$ , la formule du facteur de forme s'écrit comme suit [75] :

$$F_{ij} = \frac{2}{\pi XY} \left\{ \begin{array}{l} \ln \left[ \frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2} \right]^{1/2} + X(1+Y^2)^{1/2} \tan^{-1} \frac{X}{(1+Y^2)^{1/2}} \\ + Y(1+X^2)^{1/2} \tan^{-1} \frac{Y}{(1+X^2)^{1/2}} - X \tan^{-1} X - Y \tan^{-1} Y \end{array} \right\}. \quad (3.15)$$



**Figure 3.6: Facteur de forme entre deux surfaces parallèles**

### 3.3.7 ÉTUDE COMPARATIVE

Pour valider le calcul numérique du facteur de forme avec les méthodes numériques, nous avons opté pour une étude comparative entre ces méthodes et la solution analytique calculée à l'aide de l'Équation (3.15). Le cas étudié est celui de deux carrés unitaires placés à une distance unitaire. La méthode intégration de surface est testée pour les valeurs 3, 7 et 10 points de Gauss. La valeur du facteur de forme est estimée avec la méthode aire intégration selon les trois cas de maillage, comme illustré à la Figure (3.7) [47]. Pour la méthode de Monte Carlo, nous l'avons exécutée avec 1000, 10 000 et 30 000 rayonnements lancés. Les résultats des trois méthodes sont résumés à la Table (3.1).

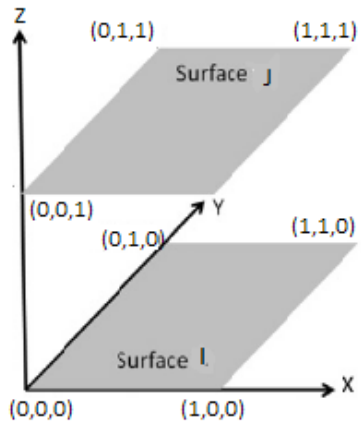


Figure 3.7: Disposition des points de deux surfaces

Intégration de surface	Valeur numérique	Erreur (%)
3	0.197238	1.2937
7	0.200129	0.1520
10	0.19998	0.0775
Aire d'intégration		
Maillage M1	0.31831	59.2524
Maillage M2	0.216804	8.4909
Maillage M3	0.204724	2.4499
Monte Carlo		
1000	0.1980	0.9217
10 000	0.1984	0.7182
30 000	0.2000	0.0708
Intégration de contour		
3	0.197238	1.2937
7	0.20013	0.1525
10	0.199825	-
Valeur exacte	0.199825	

Tableau 3.1: Valeur du facteur de forme

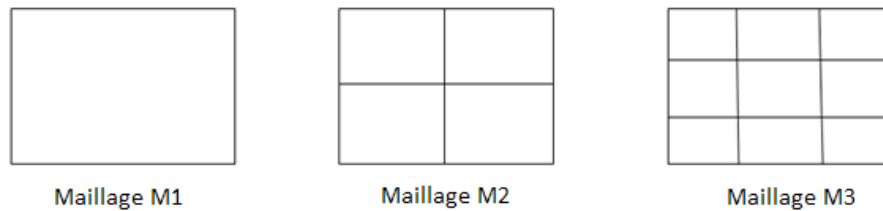


Figure 3.8: Types de maillage

Nous avons estimé l'erreur en pourcentage entre la solution exacte et approchée avec l'équation suivante [47] :

$$\frac{F_{ij(\text{numérique})} - F_{ij(\text{analytique})}}{F_{ij(\text{analytique})}} \times 100.$$

Les résultats de la Table (3.1) montrent que la performance des méthodes d'intégration de surface et de contour dépend du nombre de points de Gauss utilisés. En effet, plus ce nombre est important, plus la valeur du facteur de forme numérique s'approche de la

valeur exacte et l'erreur relative tend vers 0. Pour la méthode d'intégration de contour, elle est exacte pour un nombre de 10 points de Gauss. Par ailleurs, les résultats obtenus par la méthode d'aire d'intégration sont relatifs au maillage utilisé. Plus le maillage est raffiné, meilleurs sont les résultats. Quant à la méthode de Monte Carlo, ses résultats dépendent du nombre de rayons lancés à partir de la surface émettrice. Plus ce nombre est grand, meilleure est la précision du résultat. Pour le calcul des facteurs de forme, les méthodes d'intégration de contour et de Monte Carlo sont retenues. Ce choix est surtout motivé par la précision des résultats obtenus par ces méthodes, mais aussi par le fait qu'elle s'adapte facilement à la méthode des éléments finis.

### **3.4 MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DE L'ÉTAPE DE CHAUFFAGE**

La résolution de l'équation de conservation d'énergie (Équation (3.2)) de manière analytique n'est pas toujours possible. Généralement, une alternative est l'utilisation des méthodes numériques. Il existe plusieurs techniques permettant de résoudre l'équation de conservation d'énergie de manière numérique, la plus utilisée est la méthode des éléments finis [76, 77].

La méthode des éléments finis est un algorithme discret permettant de trouver une solution approchée d'un problème aux dérivées partielles sur un domaine compact avec les conditions aux limites. Son principe s'appuie sur un découpage du domaine continu en éléments géométriques simples sans chevauchement dont la surface est connue, appelé élément fini. L'approximation est construite sur chaque élément à partir des valeurs de la fonction en certains points, appelés nœuds, tout en gardant certaines conditions de régularité de l'approximation globale sur tout le domaine. Puis, un processus d'assemblage, réalisé en prenant en compte les interactions entre les éléments



voisins, mène à la construction d'un ensemble d'équations.

### 3.4.1 MAILLAGE ET FONCTIONS D'INTERPOLATION

Le four de thermoformage par construction est formé de  $m$  éléments chauffants rectangulaires en céramiques. Pour la feuille thermoplastique, nous considérons à sa surface un maillage uniforme avec des éléments rectangulaires isopérimétriques à quatre nœuds. À travers l'épaisseur de la feuille, nous considérons un maillage unidimensionnel avec  $p$  nœuds. La température à l'intérieur de la feuille est estimée pour chaque élément à partir des valeurs qu'elles prennent aux nœuds qui lui sont associés. Ces valeurs sont comme suit :

$$T = [N]\{T\}, \quad (3.16)$$

où  $\{T\}$  est le vecteur des températures nodales et  $[N]$  la matrice des fonctions d'interpolation définis sont suit :

$$\{T\} = [T_1 \ T_2]^T, \quad \{N\} = \left[ \frac{1-\xi}{2} \quad \frac{1+\xi}{2} \right].$$

À partir de cette estimation, le gradient des températures s'écrit comme suit :

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial z} \right] = [B]\{T\}, \quad (3.17)$$

avec  $[B]$  étant la matrice des gradients des fonctions d'interpolation :

$$[B] = \left( \frac{\partial N}{\partial \xi} \right) \left[ \frac{\partial z}{\partial \xi} \right]^{-1}$$

### 3.4.2 FORMULATION DU PROBLÈME DISCRET

L'équation de conservation d'énergie définie précédemment (Équation (3.2)) peut être approchée avec une formule discrète à l'aide de la méthode de Galerkin [78]. Avec l'introduction des conditions aux limites définies par l'Équation (3.3) et en substituant les fonctions d'interpolation des Équation (3.16) et (3.17), la formulation de l'équation de conservation d'énergie, Équation (3.2), s'écrit comme suit :

$$\sum_e \left( \int_{\Omega^e} \rho c_p \frac{\partial T_j}{\partial t} N_j N_i dV + \int_{\Omega^e} k [B]^T [B] \{T\} dV \right) = \sum_e \left( \int_{\Omega^e} S_{rad}(z) N_i dV - \int_{\partial\Omega_{haut}^e} h_{haut} (T_j N_j - T_\infty) N_i dS - \int_{\partial\Omega_{bas}^e} h_{bas} (T_j N_j - T_\infty) N_i dS \right), \quad (3.18)$$

où  $T_\infty$  représente la température de milieu ambient,  $h_{haut}$  et  $h_{bas}$  les coefficients de convection à la face supérieure et inférieure d'une feuille, respectivement. Le terme  $S_{rad}$  correspond à l'énergie radiative absorbée à l'intérieur du milieu semi-transparent, donnée par l'Équation 3.6.

À partir de l'écriture matricielle des fonctions d'interpolation et vectorielles, l'Équation (3.18) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\sum_e ([C]^e \{\dot{T}\}^e + [K]^e \{T\}^e) = \sum_e \{Q\}^e, \quad (3.19)$$

où  $\{\dot{T}\}^e$  représente le vecteur des dérivées de la température par rapport au temps ;  $\{Q\}^e$  est le vecteur flux élémentaire ;  $[C]^e$  et  $[K]^e$  sont respectivement la matrice de capacité élémentaire et la matrice de conductivité élémentaire avec le coefficient de convection considéré homogène. Ces grandeurs sont définies comme suit :

$$[C]^e = \int_{\Omega^e} \rho c_p [N]^T [N].$$

$$[K]^e = \int_{\Omega^e} k[B]^T [B] dV + \int_{\partial\Omega_{haut}^e} h_{haut} [N]^T [N] dS + \int_{\partial\Omega_{bas}^e} h_{bas} [N]^T [N] dS.$$

$$\{Q\}^e = \int_{\Omega^e} S_r(z) - \int_{\partial\Omega_{haut}^e} h_{haut} T_{\infty} [N]^T dS - \int_{\partial\Omega_{bas}^e} h_{bas} T_{\infty} [N]^T dS.$$

### 3.4.3 ASSEMBLAGE

Les quantités mises en évidence dans l'Équation (3.19) sont calculées pour l'ensemble des nœuds de chaque élément. Toutefois, le champ de températures recherché concerne l'ensemble du milieu étudié. L'opération d'assemblage de ces quantités élémentaires permettra de construire un système global. Ainsi, l'Équation (3.19) se réécrit après assemblage sous la forme :

$$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = \{Q\}, \quad (3.20)$$

où

$$[C] = \sum_e [C]^e : \text{la matrice globale de capacité.}$$

$$[K] = \sum_e [K]^e : \text{la matrice globale de conductivité.}$$

$$\{Q\} = \sum_e \{Q\}^e : \text{le vecteur global de charge thermique.}$$

À l'instant initial  $t = 0$ , la température de la feuille  $T_0$  est connue. Cette condition initiale s'écrit :

$$T(x, y, t = 0) = T_0, \quad \forall(x, y).$$

### 3.4.4 SCHEMA D'INTÉGRATION DANS LE TEMPS

La résolution du système différentiel de l'Équation (3.20) permet d'obtenir l'évolution de la température de la feuille au cours du temps de chauffage. Une façon de faire est de discrétiser le temps de chauffage en petites durées et résoudre le système pas à pas dans le temps. En effet, la durée du chauffage est subdivisée en une suite d'intervalles  $[t_k, t_{k+1}]_{0 \leq k-1}$  avec un pas de discrétisation  $\Delta t$  constant qui s'exprime comme suit :

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k,$$

en définissant une paramétrisation linéaire sur l'intervalle de temps  $[t_n, t_{n+1}]$ , fonction d'un paramètre  $\theta$ , comme suit [78] :

$$t_\theta = t_k + \theta \Delta t, \quad \theta \in [0, 1],$$

étant données les températures  $\{T\}_{k+1}$  et  $\{T\}_k$ , respectivement, des instants  $t_{k+1}$  et  $t_k$ .

À l'aide d'un schéma aux différences finies, la vitesse de variation de la température aux nœuds du maillage par rapport au temps s'écrit comme suit :

$$\{\dot{T}\}_\theta = \frac{\{T\}_{k+1} - \{T\}_k}{\Delta t}, \quad \theta \in [0, 1].$$

Ainsi, les grandeurs du système de l'Équation (3.20) aux instants  $t_{k+1}$  et  $t_k$  sont comme suit :

- Vecteur de températures :  $\{T\}_\theta = (1 - \theta)\{T\}_k + \theta\{T\}_{k+1}$ .
- Vecteur global de charge thermique :  $\{Q\}_\theta = (1 - \theta)\{Q\}_k + \theta\{Q\}_{k+1}$ .

- Matrice globale de capacité :  $[C]_{\theta} = (1 - \theta)[C]_k + \theta[C]_{k+1}$ .
- Matrice globale de conductivité :  $[K]_{\theta} = (1 - \theta)[K]_k + \theta[K]_{k+1}$ .

L'incorporation des ces expressions dans l'Équation (3.20) permet d'obtenir les températures nodales du maillage à l'instant  $t_{k+1}$ , à partir des températures aux nœuds du maillage à l'instant  $t_k$ . La nouvelle écriture de l'Équation (3.20) est donc comme suit :

$$[\hat{C}] \{T\}_{k+1} = [\hat{K}] \{T\}_k + \{\hat{Q}\}, \quad (3.21)$$

avec :

$$[\hat{C}] = ([C]_{k+1} + \theta \cdot \Delta t \cdot [K]_{k+1}).$$

$$[\hat{K}] = ([C]_k - (1 - \theta) \cdot \Delta t \cdot [K]_k).$$

$$\{\hat{Q}\} = \Delta t \cdot [(1 - \theta) \cdot \{Q\}_k + \theta \cdot \{Q\}_{k+1}].$$

Il existe un grand nombre de schémas d'intégration implicites et explicites [76]. Pour notre étude, nous avons opté pour un schéma implicite de Crank-Nicholson qui présente l'avantage d'être inconditionnellement stable [35]. La valeur du paramètre  $\theta$  est fixée à  $\frac{1}{2}$ , aucune composante ne diverge. La température reste donc finie partout et à tout instant.

Les matrices  $[\hat{C}]$  et  $[\hat{K}]$  sont supposées constantes et ne dépendent pas des températures. Le pas de temps est considéré constant. Ainsi, ces matrices restent constantes au cours du temps, et la matrice  $[\hat{C}]$  à inverser dans le système est évaluée une seule fois.

### 3.4.5 RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE CONSERVATION D'ÉNERGIE

Pour résoudre le système d'Équation (3.21), nous avons adopté la technique de factorisation LU à chaque pas de temps pour calculer la température  $T^{n+1}$ . Généralement, la convergence de la solution est assurée pour un pas de temps inférieur ou égal à 0.01 [78]. Les étapes de la résolution numérique de l'équation de conservation d'énergie, Équation (3.21), par la méthode des éléments finis, sont résumées par l'Algorithme 1.

---

#### **Algorithme 1** : Résolution numérique de l'équation de conservation d'énergie

---

##### **Entrées :**

- Les propriétés thermiques et géométriques des surfaces;
- Les conditions aux limites;

##### **Initialiser :**

- Discrétisation des surfaces;
- Discrétisation par rapport au temps par la méthode du schéma implicite de Crank Nicholson;

##### **répéter**

- Détermination des matrices  $[\hat{C}]$  et  $[\hat{K}]$ ;
- Détermination du vecteur  $\{\hat{Q}\}$ ;
- Assemblage de  $[\hat{C}]$ ,  $[\hat{K}]$  et  $\{\hat{Q}\}$ ;
- Résolution du système d'équations avec la technique de factorisation LU;

**jusqu'à ce que le critère de convergence soit inférieur ou égal au seuil de tolérance;**

---

### 3.4.6 VALIDATION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE CONSERVATION D'ÉNERGIE

Cette partie est consacrée à la validation de la solution numérique à l'aide de la méthode des éléments finis de l'équation de conservation d'énergie. Le but est de s'assurer de la validité du code de calcul avant de l'introduire dans le modèle d'optimisation. Cette validation est réalisée entre la solution numérique produite par la méthode des éléments

finis 1D et la solution analytique. Le calcul de la répartition de la température à travers l'épaisseur de la matière est réalisé à partir de l'équation de chaleur transitoire 1D, respectivement, avec et sans source radiative interne.

### 3.6.7.1 MILIEU SEMI-TRANSPARENT

Dans cette partie, nous considérons une feuille PET semi-infinie à parois adiabatiques, d'épaisseur  $z = 0.01 \text{ m}$ , soumise à une densité de flux radiatif uniforme  $q_0''$ , calculée à l'aide de l'Équation (3.10), supposée constante pour une durée de 35 s. La feuille est discrétisée en 10 éléments linéaires suivant son épaisseur. L'atténuation d'une source volumique  $q_0'''$ , en fonction de l'épaisseur ( $z$ ), est estimée par la loi de Beer-Lambert :

$$q_0''' = q_0'' \beta \cdot \exp^{-\beta z},$$

où  $\beta$  est le coefficient moyen d'absorption. L'équation de transfert de chaleur s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_0'''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \text{ avec } 0 < z < \infty.$$

Les conditions aux limites et initiales à imposer à la surface sont :

$$T(z, t = 0) = T_0 ; \lim_{z \rightarrow \infty} T = T_0 ; \frac{\partial T}{\partial z} |_{z=0} = q_0''.$$

Sous ces conditions aux limites, la solution analytique de l'Équation (3.4.6) est comme

suit [53] :

$$\begin{aligned}
 T(z,t) = T_{ini} - \frac{q_0'''}{k\beta} \exp^{-\beta z} + q_0''' \sqrt{\alpha t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \\
 + \frac{q_0'''}{2k\beta} \exp^{(\beta^2 \alpha t + \beta z)} \operatorname{erfc}\left(\beta \sqrt{\alpha t} + \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \\
 + \frac{q_0'''}{2k\beta} \exp^{(\beta^2 \alpha t - \beta z)} \operatorname{erfc}\left(\beta \sqrt{\alpha t} - \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right).
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

où

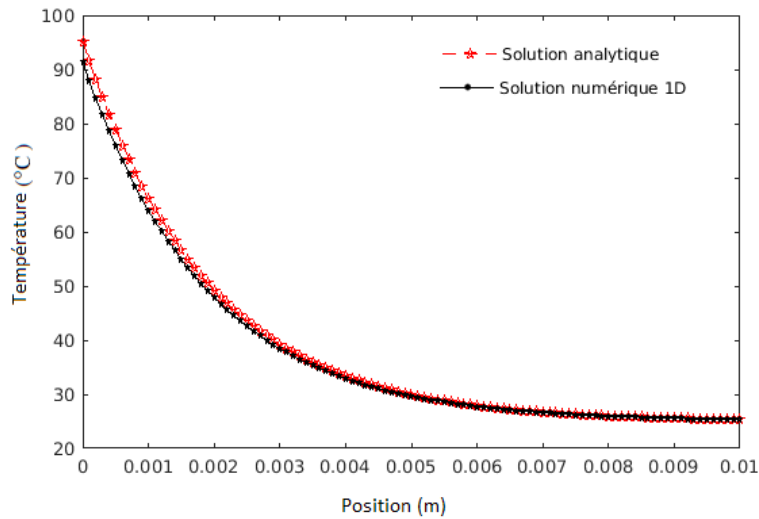
$$L = \frac{z}{2}, \quad \alpha = \frac{k}{\rho c}.$$

Les paramètres thermophysiques utilisés pour cette simulation sont résumés par la table ci-dessous [32] :

Propriétés thermiques	valeurs
Diffusion thermique $\alpha$ ( $ms^{-2}$ )	$1.183 \cdot 10^{-7}$
Densité $\rho$ ( $kg \cdot m^{-3}$ )	1400
Chaleur spécifique $c_p$ ( $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ )	1750
Conductivité thermique $k$ ( $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ )	0.29
Flux, $q_0$ ( $W/m^2$ )	10 000
Température initiale $T_0$ (K)	25
Coefficient moyen d'absorption (longueur d'onde [0.2 – 10] $\mu m$ ) $m^{-1}$	2660

La Figure (3.9) montre les résultats obtenus par la méthode des éléments finis 1D et la solution analytique de l'Équation (3.22). Il est facile d'observer une similitude entre la solution analytique et numérique avec une erreur relative inférieure à 0.1%.





**Figure 3.9: Validation de l'équation de conservation d'énergie d'un milieu semi-transparent**

### 3.6.7.2 MILIEU OPAQUE

Dans cette partie, nous nous intéressons à la validation de la solution numérique avec la méthode des éléments finis 1D dans le cas où la source interne radiative est négligée. L'étude est menée sur une feuille ABS semi infinie, d'épaisseur  $2L = 0.02 \text{ m}$ , sa surface est soumise à une densité de flux radiatif,  $q_0 = 10\,000 \text{ W/m}^2$ , constante pour une durée de chauffage  $t = 35 \text{ s}$ . La feuille est discrétisée en 10 éléments linéaires suivant son épaisseur. L'équation analytique de transfert de chaleur s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \text{ avec } 0 \leq z \leq L.$$

Les conditions aux limites et initiales à imposer à la surface sont :

$$T(z, t = 0) = T_0 ; \lim_{z \rightarrow \infty} T = T_0 ; \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\pm L} = q_0''.$$

Sous ces conditions aux limites, la solution analytique de l'Équation (3.4.6) est comme suit [20] :

$$T(z,t) = T_{\text{init}} - \frac{q_0 L}{k} \left[ F_0 + \frac{Z^2}{2} + \frac{1}{6} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^2} \exp(-\lambda_n^2 F_0) \cos(\lambda_n Z) \right], \quad (3.23)$$

où

$$\lambda_n = n\pi, \quad Z = \frac{z}{L}, \quad \alpha = \frac{k}{\rho c}, \quad F_0 = \frac{\alpha t}{L^2}.$$

Les propriétés thermophysiques utilisées pour cette simulation sont résumées par la table ci-dessous [66].

Propriétés thermiques de ABS	valeurs
Densité $\rho$ ( $kg.m^{-3}$ )	1050
Chaleur spécifique $c_p$ ( $J.kg^{-1}.k^{-1}$ )	2590
Conductivité thermique $k$ ( $W.m^{-1}.k^{-1}$ )	0.174

**Tableau 3.2: Validation de l'équation d'énergie d'un milieu opaque**

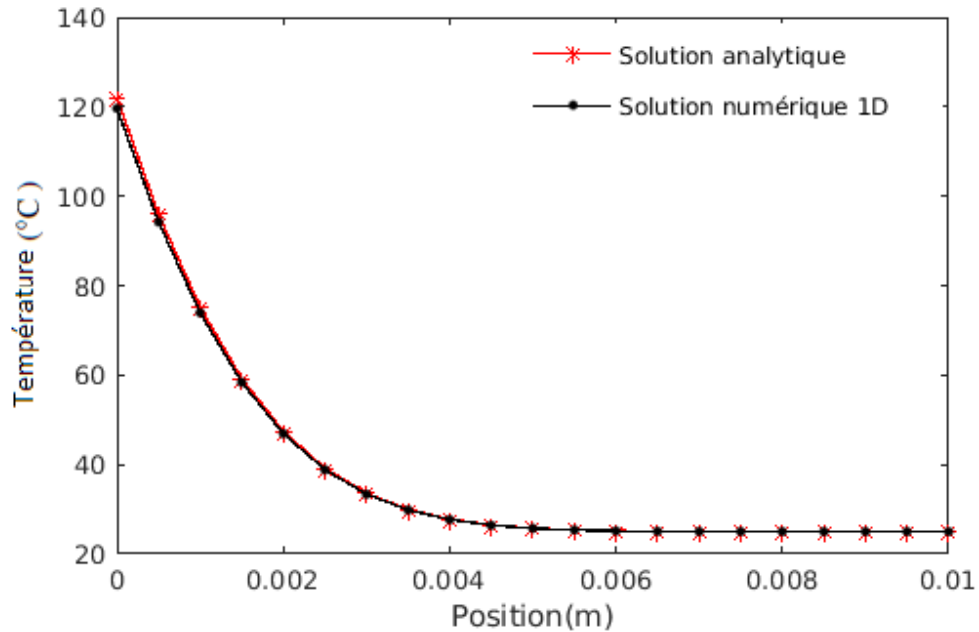


Figure 3.10: Validation de l'équation de conservation d'énergie d'un milieu opaque

Les résultats obtenus par la méthode des éléments finis 1D et la solution analytique de l'Équation (3.23) sont résumés par la Figure (3.10). Les résultats montrent une similarité entre la solution analytique et numérique avec une erreur relative inférieure à 0.01%.

### 3.5 CONCLUSION PARTIELLE

Dans de ce chapitre, nous avons abordé les notions de modélisation thermiques de l'étape de chauffage en thermoformage. Dans un premier temps, nous avons présenté sommairement le four de thermoformage et les modes de transfert thermique qui interviennent lors de chauffage d'une feuille thermoplastique.

La détermination du transfert radiatif dans la profondeur de la matière est une tâche complexe. Son calcul est possible seulement au prix d'un ensemble d'hypothèses. Dans le cas de la feuille PET, le transfert radiatif à travers la profondeur de la matière est

estimé par la loi de Beer Lambert sous l'hypothèse du milieu froid et non diffusant du polymère. Dans le cas d'une feuille ABS, supposée opaque, le mode de transfert est principalement par conduction. L'équation du transfert radiatif est couplée avec l'équation de conservation d'énergie afin de déterminer la température de la feuille en fonction du temps sous les conditions aux limites de convection et radiation. Pour la validation numérique par la méthode des éléments finis, une étude comparative 1D, avec la solution analytique pour deux cas, est réalisée : i) milieu semi-transparent et ii) milieu opaque.

Les échanges thermiques entre les éléments du four et la feuille thermoplastique sont gouvernés par le calcul des surfaces radiatives mutuelles. Pour déterminer les échanges radiatifs mutuels entre les deux surfaces, nous avons présenté quatre méthodes numériques : intégration de surface, aire d'intégration, intégration de contour et la méthode de Monte Carlo. Pour notre étude, nous avons retenu deux méthodes : la méthode d'intégration de contour et la méthode de Monte Carlo. Ce choix est motivé par la précision des résultats obtenus par les deux méthodes et, surtout, elles s'adaptent à des maillages par la méthode des éléments finis que nous avons retenue également pour notre étude.

Il est évident que le modèle thermique que nous avons choisi, pour la mise en oeuvre de notre étude, reste limité du fait de l'ensemble des hypothèses auxquels il est soumis. Cependant, compte tenu de notre objectif, qui, rappelons-le, consiste à développer des méthodes de résolution pour notre modèle d'optimisation couplé au modèle thermique que nous venons de présenter, ce dernier est largement représentatif des paramètres influençant la distribution de la température de la feuille.

Ce modèle thermique numérique développé dans ce chapitre relie les températures du four et celle de la feuille. Il est clair que la température de la feuille est conditionnée par

l'optimisation des températures affectées aux éléments du four. D'autre part, un critère important permettant de contrôler, *a priori*, la température de la feuille est le flux radiatif incident à la surface de la feuille. L'homogénéité de la distribution de températures de la feuille est induite directement par celle du flux radiatif.



## CHAPITRE 4

### NOTIONS D'OPTIMISATION COMBINATOIRE

La résolution d'un problème d'optimisation revient à trouver une solution qui minimise (ou maximise, c'est selon le contexte) un certain critère. Le terme combinatoire qualifie généralement les problèmes d'optimisation dont la résolution se heurte à une explosion du nombre de solutions à explorer. La difficulté dans cette classe de problèmes réside dans l'efficacité de sa résolution, qui dépend fortement du temps et de l'espace requis pour son exécution. Quand le nombre de solutions explorées devient exponentiel par rapport à la taille du problème, le temps d'exécution devient rapidement critique. Le choix d'une méthode de résolution d'un problème d'optimisation combinatoire passe, tout d'abord, par l'étude de sa difficulté de résolution, autrement dit, par la connaissance ou la détermination de sa complexité intrinsèque.

Ce chapitre débute par une brève introduction à la théorie de la complexité qui constitue un cadre formel permettant la classification des problèmes selon leur difficulté intrinsèque de résolution ; trois classes de problèmes y sont présentées. Ensuite, une méthodologie de résolution des problèmes d'optimisation combinatoires est exposée. Après avoir présenté le problème d'affectation quadratique, qui, notons-le, est une forme restreinte du problème considéré dans notre étude, nous passons en revue les méthodes de résolution

de type heuristique, qui sont les mieux adaptées à sa résolution.

#### 4.1 THÉORIE DE LA COMPLEXITÉ

Pour résoudre un problème d'optimisation combinatoire, plusieurs algorithmes peuvent être mis à disposition. Pour savoir lequel est le plus efficace, il faudrait les comparer par rapport à leur temps d'exécution. Pour ce faire, nous utilisons une mesure, appelée complexité temporelle, qui nous renseigne sur le temps mis pour résoudre le problème en question [79].

La complexité algorithmique est une évaluation du temps, souvent dans le pire cas, d'un algorithme de résolution d'un problème donné en fonction de la taille de ses données [80]. Il existe plusieurs types de complexité algorithmique. Nous pourrions citer la complexité en temps constant, linéaire, logarithmique et exponentielle.

Selon leur difficulté de résolution, nous distinguons trois classes fondamentales de problème [81]. La première est celle des problèmes dits faciles, notée par  $\mathcal{P}$ , qui englobe les problèmes d'optimisation pour lesquels un algorithme de complexité polynomiale existe pour leur résolution. Nous disons de ces algorithmes qu'ils sont efficaces. À titre d'exemples, nous pourrions citer le problème du plus court chemin, le problème de la détermination de l'arbre de recouvrement de poids minimum, problème de flot de coût minimum et les problèmes de couplages dans les graphes [81].

La deuxième classe, notée  $\mathcal{NP}$ , est celle dont l'ensemble des solutions est borné par une fonction exponentielle, mais dont on ne sait toujours pas trouver la solution désirée en un temps polynomial. Autrement dit, dans le pire cas, on n'a qu'à faire une recherche exhaustive pour arriver à la solution recherchée [82].



La question centrale consiste à déterminer si  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ . Il va de soi que  $\mathcal{P} \subset \mathcal{NP}$  est triviale. Toute la difficulté est de savoir si  $\mathcal{NP} \subset \mathcal{P}$  est vraie ou non. Cette question est toujours ouverte et ce, depuis cinquante ans. Il est largement admis que  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ , autrement dit que certains problèmes de  $\mathcal{NP}$  ne peuvent pas être résolus en un temps polynomial [83]. Cette supposition est supportée par l'existence de la classe des problèmes dite  $\mathcal{NP}$ -difficile.

La classe des problèmes  $\mathcal{NP}$ -complets contient les problèmes le plus difficiles de la classe  $\mathcal{NP}$ , en ce sens qu'il suffit de montrer qu'un de ces problèmes est facile pour conclure que toute la classe  $\mathcal{NP}$  se réduit à la classe  $\mathcal{P}$ . Les seules solutions que nous avons pour les résoudre ont des temps d'exécution exponentiels. À ce jour, aucun problème de cette classe n'a pu être résolu par un algorithme polynomial, malgré les efforts continuels de plusieurs générations de chercheurs.

Pour tout problème d'optimisation, il est toujours possible de lui associer un problème de décision, dont la solution prendra la forme d'un oui ou d'un non. Alors, les deux classes de problèmes pourront être analysées de la même manière, car un problème de décision n'est pas plus difficile d'un point de vue de la complexité de calculs que le problème d'optimisation auquel il est associé. Ceci permet de conclure qu'une résolution polynomiale d'un problème d'optimisation permet la résolution polynomiale du problème de décision qui lui est associé. Inversement, si le problème de décision est "difficile" à résoudre, le problème d'optimisation auquel il est associé le sera aussi.

Pour montrer qu'un problème de décision  $\Pi$ , est  $\mathcal{NP}$ -complet, il faut qu'il appartienne à la classe  $\mathcal{NP}$ . Dans un deuxième temps, il faudra choisir un problème déjà  $\mathcal{NP}$ -complet, disons  $\Pi'$ , et construire une réduction de complexité polynomiale montrant que  $\Pi'$  est un cas particulier de  $\Pi$  [84].

Sous la conjecture  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ , ces trois classes peuvent être schématisées comme suit [83] :

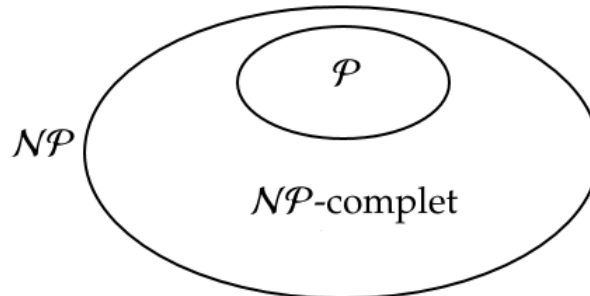


Figure 4.1: Classe de problèmes d'optimisation

## 4.2 MÉTHODOLOGIE DE RÉOLUTION

La résolution d'un problème d'optimisation revient à déterminer la meilleure solution de l'espace de solutions. Nous parlons alors de solution optimale globale. Toutefois, il peut exister des solutions intermédiaires, qui sont également des optimums, mais uniquement pour une région de l'espace de solutions. Dans ce cas, on parle d'optimums locaux.

Pour la résolution d'un problème d'optimisation, nous trouvons dans la littérature un large éventail de méthode de résolution. Pour arriver à atteindre l'optimum global d'un problème d'optimisation, le choix adéquat d'une méthode de résolution est crucial. Dans cette section, nous présentons la démarche à suivre.

Dans un premier temps, il faut vérifier si le problème à résoudre appartient à la classe  $\mathcal{P}$ . Le seul et unique moyen de le faire est d'exhiber une solution de complexité polynomiale. Dans ce cas, ce qu'on peut faire, est d'essayer d'en améliorer la complexité de résolution, soit dans le pire des cas, soit dans le cas moyen. Ce processus d'amélioration se poursuit jusqu'à atteindre une borne inférieure en deçà delà de laquelle on ne peut faire mieux.

Dans le cas d'un problème qui n'appartient pas à la classe  $\mathcal{P}$ , il faut d'abord vérifier s'il a

déjà été prouvé  $NP$ -difficile. Si ce n'est pas le cas, il faudra le démontrer avant de procéder plus loin. Si nous parvenons à cette démonstration, cela ne doit pas nous empêcher d'essayer de trouver une solution au problème en question. Pour cela, des méthodes et des techniques ont été développées telles que les heuristiques, les méta-heuristiques et les hyper-heuristiques et leurs hybridations [85, 86]. Ces méthodes permettent de trouver une solution de qualité au problème en un temps raisonnable sans en garantir l'optimalité. Il existe d'autres approches pour surmonter la difficulté de résolution de ces problèmes :

1. Relâcher certaines contraintes du problème et étudier si la difficulté qui en résulte est modifiée. Cette manière de procéder nous renseigne sur le degré de difficulté de résolution du problème considéré. Par ailleurs, la solution obtenue pourrait être considérée comme une approximation acceptable de la solution du problème de départ.
2. Utiliser les méthodes exactes telles la programmation mathématique, la programmation dynamique, branch and bound et ses variantes [87]. Dans le cas d'un problème  $NP$ -difficile au sens faible, un algorithme de complexité pseudo polynomiale peut être construit. Ce dernier produit les résultats désirés d'une manière efficace pour des instances moyennes.

Cette méthodologie de résolution d'un problème d'optimisation combinatoire est résumée par la Figure (4.2) [88].

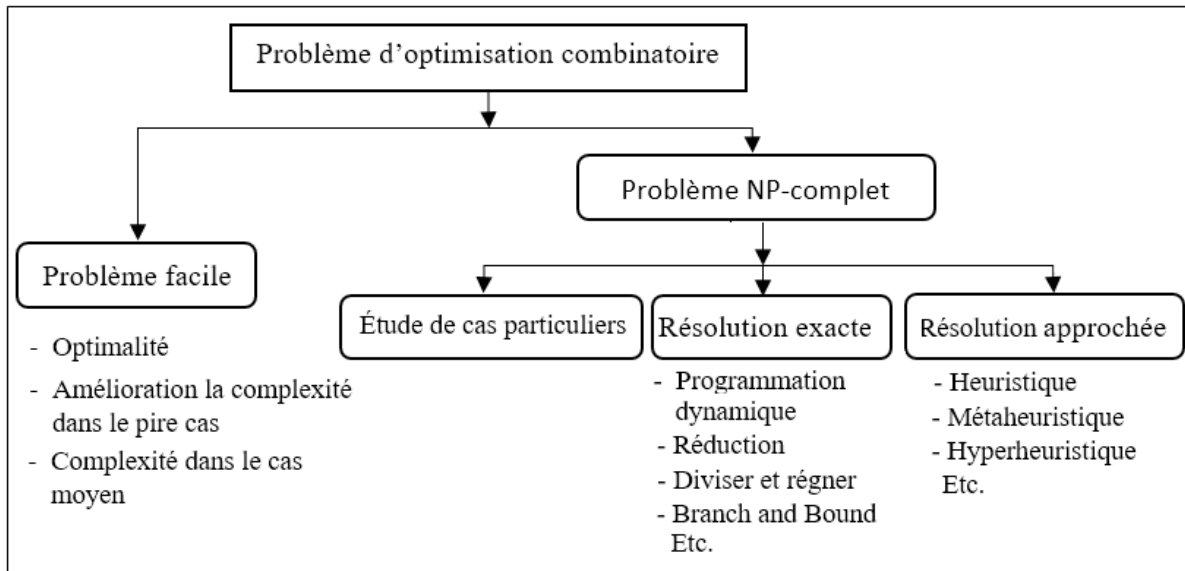


Figure 4.2: Analyse d'un problème d'optimisation combinatoire

### 4.3 PROBLÈME D'AFFECTION QUADRATIQUE

Comme on le verra plus loin, la problématique étudiée dans cette thèse est une extension du problème d'affectation quadratique. C'est la raison pour laquelle nous réservons cette section à ce problème.

Le problème d'affectation quadratique (PAQ) est un problème d'optimisation combinatoire qui a été introduit pour la première fois en 1957 par Koopmans et Beckmann [89]. Ce problème a de nombreuses applications pratiques tant en informatique, gestion, électronique qu'en transport. Il permet également de modéliser des problèmes classiques comme le problème du voyageur de commerce, d'ordonnancement, de la clique, etc.

Un problème d'affectation quadratique consiste à réaliser une bijection entre les éléments  $i$  de l'ensemble  $I$  et les éléments  $j$  de l'ensemble  $J$  de même cardinal de manière qu'une fonction objectif quadratique soit minimale, tout en respectant un ensemble de contraintes linéaires. La fonction objectif dépend de chaque choix de couple  $(i, j)$ , avec  $i \in I$  et  $j \in J$ .

Une variante du PAQ est le problème d'affectation quadratique généralisé (GQAP) qui consiste à réaliser une affectation entre deux ensembles de cardinal différents [90].

Bien que le PAQ soit simple à modéliser et très utilisé en optimisation combinatoire, sa résolution reste très difficile à atteindre. En effet, ce problème est  $\mathcal{NP}$ -difficile au sens fort [91]. Depuis de nombreuses décennies, un grand intérêt des chercheurs est accordé à la résolution de PAQ à l'aide de méthodes exactes. Cependant, en raison de la forte combinatoire du PAQ, les solutions optimales sont générées pour des problèmes de petite taille. Une alternative pour résoudre les problèmes de moyenne et grande taille est l'utilisation des méthodes approchées.

Comme nous l'avons précisé précédemment, la difficulté des problèmes  $\mathcal{NP}$ -difficiles réside dans l'efficacité de les résoudre. Il est connu que, pour ces problèmes, le temps d'exécution des algorithmes de résolution devient rapidement critique pour les instances de grandes tailles. L'espace des solutions étant très grand, il est hors de question d'en faire une énumération exhaustive. Pour cela, l'utilisation des techniques approchées telles que les heuristiques, les méta-heuristiques, hyper-heuristiques et leurs hybridations est une alternative intéressante. L'apparition de ces méthodes a fait un pas remarquable pour la résolution des problèmes d'optimisation  $\mathcal{NP}$ -difficiles. Différentes méta-heuristiques sont proposées pour résoudre le PAQ; une revue complète de la littérature concernant ce problème est proposée dans [92].

#### **4.4 MÉTHODES APPROCHÉES**

Pour la résolution de la problématique traitée dans cette thèse, nous allons principalement utiliser les méta-heuristiques et accessoirement des heuristiques (pour trouver des solutions initiales) et des méthodes hybrides pour accélérer les temps d'exécution et

éventuellement améliorer la qualité des solutions produites par ces méta-heuristiques. Ces méthodes dites approchées ne garantissent pas l'optimalité des solutions qu'elles génèrent, même si par fois c'est le cas. Il est toutefois attendu que le temps d'exécution soit raisonnable.

#### 4.4.1 HEURISTIQUES

Une heuristique permet d'identifier en temps polynomial au moins une solution réalisable, toutefois sans garantir l'optimalité. Généralement, une heuristique est conçue pour un problème donné. Les heuristiques peuvent être classées en deux catégories :

- Méthodes constructives, dites gloutonnes ou voraces : à partir d'une solution initiale vide, ces méthodes construisent étape par étape la solution finale, à l'aide de règles simples.
- Méthodes de recherche locale (amélioratives), dites aussi méthodes du gradient : à partir d'une solution initiale, ces méthodes améliorent, à chaque étape, la solution courante en parcourant son voisinage. Ce processus est répété jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'amélioration ou alors le critère d'arrêt est atteint.

#### 4.4.2 MÉTA-HEURISTIQUES

D'emblée, il y a lieu de noter que les méthodes de recherche locale n'acceptent pas de détérioration de leur solution courante. Ce qui n'est pas le cas des méthodes méta-heuristiques. Ces méthodes sont des stratégies (basées sur le bon sens) pour se déplacer intelligemment dans l'espace de solutions, afin d'obtenir une solution approchée, la meilleure possible, dans un délai de temps raisonnable, toutefois sans garantie d'optimalité, bien entendu. Ces méthodes peuvent être adaptées pour résoudre divers problèmes d'optimisation

[93]. Elles se prêtent à toutes sortes de problèmes d'optimisation, contrairement aux heuristiques qui sont des méthodes conçues pour un problème spécifique. Elles sont apparues dans les années 1980. Depuis, les chercheurs n'ont cessé d'en développer de nouvelles ; une liste non exhaustive est donnée dans [93].

La plupart des méta-heuristiques utilisent des processus stochastiques et itératifs comme moyen d'exploration efficace et intelligent de l'espace de recherche pour faire face à l'explosion combinatoire. Le mécanisme de fonctionnement des méta-heuristiques s'inspire généralement des phénomènes naturels ou physiques. Leur efficacité réside dans leur force d'éviter de se faire piéger dans les optimums locaux, tout en gardant un compromis acceptable entre la diversification et l'intensification de l'exploration de l'espace de recherche, et aussi la mémorisation, pour converger vers des solutions de qualité. Le mécanisme de fonctionnement d'une méta-heuristique peut être constitué d'une simple recherche locale ou d'un processus d'apprentissage complexe.

Le mécanisme de diversification permet de récolter le maximum d'informations sur l'espace de recherche en explorant des régions non encore visitées. La stratégie de diversification la plus simple consiste à redémarrer périodiquement le processus de recherche, à partir d'une solution générée aléatoirement ou d'une manière stratégique, pour diriger la recherche vers des régions non explorées. Le mécanisme d'intensification est utilisé pour explorer en détail une région, jugée prometteuse, de l'espace de recherche. Sa mise en œuvre réside, le plus souvent, dans l'élargissement temporaire du voisinage de la solution courante. Quant à la mémorisation, elle est utilisée pour éviter que la recherche se bloque dans un minimum local.

Les méta-heuristiques n'étant pas, *a priori*, spécifiques à la résolution de tel ou tel type de problème, leur classification reste assez arbitraire. Cependant, selon le processus de fonctionnement de la méthode et les techniques adaptées, pour échapper aux optimums

locaux, nous pouvons énumérer les classes les plus répandues dans la littérature ; pour de détails, se référer à [94]. La section suivante est donc consacrée aux principales classes de méta-heuristiques.

#### 4.4.3 CLASSIFICATION DES MÉTA-HEURISTIQUES

La classification des méta-heuristiques la plus répandue est réalisée selon le nombre de solutions initiales utilisées. Nous distinguons les méthodes de voisinage et les méthodes avec des populations de solutions. Les méthodes qui exploitent séquentiellement un seul voisinage dites recherche locale et celles qui exploitent plusieurs solutions à la fois dites à populations de solutions. L'utilisation de plusieurs solutions simultanément permet naturellement d'améliorer l'exploration de l'espace de configurations.

La distinction entre les méta-heuristiques est basée sur l'utilisation ou non de l'historique des solutions visitées pour guider la recherche vers des régions prometteuses. Les méthodes à mémoire utilisent l'historique des régions visitées pour décider des futurs mouvements à effectuer. Les mécanismes d'utilisation de la mémoire peuvent être différents d'une méthode à une autre. Principalement, nous différencions l'utilisation de la mémoire à court terme et à long terme. La mémoire à court terme, mémorisant la prise de décisions sur le nouveau mouvement, est basée sur l'historique des itérations effectuées récemment. La mémoire à long terme, quant à elle, sert à mémoriser les paramètres synthétiques de la recherche.

Une autre classification des méta-heuristiques est réalisée selon le changement ou non de la structure de voisinage. En effet, la plupart des méthodes de recherche locale utilisent la même structure de voisinage pour explorer l'espace de recherche. La manière d'explorer



une région ne change pas, contrairement aux méthodes à multiples voisinages qui se basent sur plusieurs structures de voisinage. Ce processus permet de diversifier la recherche en changeant systématiquement de voisinage lors de l'exploration de l'espace de recherche. Ces méthodes sont dites à voisinage variable.

L'une des distinctions importantes entre les différentes méta-heuristiques est de savoir si celles-ci continuent la recherche sur une seule trajectoire ou autorise des sauts d'une région à une autre de l'espace de recherche. Les mouvements dans les méthodes à trajectoire se font entre les voisinages les plus proches de la solution courante, contrairement aux méthodes à des mouvements discontinues qui autorisent de grands sauts d'un voisinage à un autre.

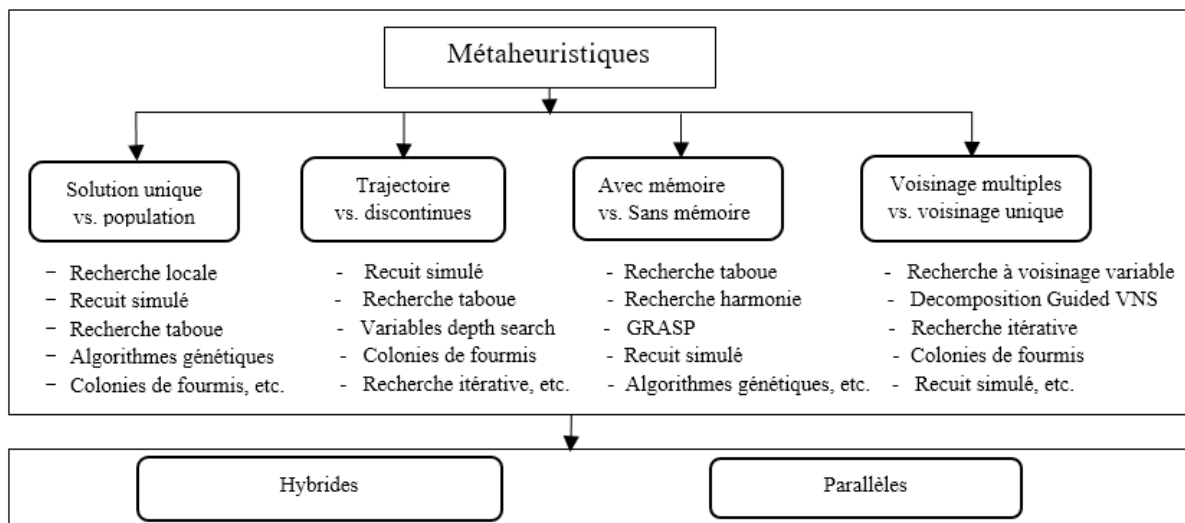
Les méta-heuristiques à trajectoire sont souvent issues des méthodes de la recherche locale et les méthodes à une seule solution qui laissent la recherche sur une seule trajectoire telles que le Recuit Simulé et la Recherche avec Tabous [61, 95]. Les méthodes à population sont principalement à trajectoire discontinue. En effet, ces méthodes génèrent plusieurs points dans l'espace de recherche qui sont améliorés en parallèle dans les itérations qui suivent. La génération de nouvelles solutions correspond à des sauts dans l'espace de recherche par une suite de mouvements discontinus. Les méthodes des Colonies de Fourmis et celle des algorithmes Génétiques en sont de bons exemples [96, 97].

Une autre classe importante à mentionner est la parallélisation des méta-heuristiques. Ces méthodes ont connu un grand succès avec le développement des processeurs. Elles sont apparues dans le but d'améliorer le temps d'exécution des méta-heuristiques. Les calculs étant réalisés en parallèle, le temps du processus se trouve du coup réduit considérablement [98].

Ces dernières années, une nouvelle classe, dite approche hybride, a émergé pour surmon-

ter les difficultés rencontrées par l'utilisation des méta-heuristiques individuellement. Les performances de cette approche sont prometteuses [99, 100, 101]. L'utilisation des méthodes hybrides permet de combiner les avantages des méta-heuristiques dans le but d'améliorer le temps d'exécution et la qualité des résultats obtenus individuellement par chacune des méta-heuristiques [102]. Différents schémas d'hybridation ont été envisagés, entre autres, les hybridations de bas et haut niveaux, à relais et co-évolutionnaire [86]. Les détails de la de construction de ces méthodes seront présentés à la Section 4.5.

La classification des méta-heuristiques est résumée par la Figure (4.3).



**Figure 4.3: Classification des méta-heuristiques**

Pour la résolution du modèle d'optimisation développé dans notre étude, nous avons adapté quatre méta-heuristiques, à savoir le Recuit Simulé (SA), la Recherche avec Tabous (TS), l'Optimisation de la Migration d'Oiseaux (MBO) et la Recherche avec Harmonie (HSA).

Le choix de la méthode du Recuit Simulé repose sur l'étude présentée dans [55]. Une étude comparative entre le Recuit Simulé et l'algorithme Génétique y a été réalisée. Les

résultats ont montré que la méthode de Recuit Simulé surclasse l'algorithme Génétique aussi bien par rapport à la qualité des solutions générées que par rapport au temps d'exécution.

Le choix de la deuxième méthode, à savoir la Recherche avec Tabous, est lié directement aux inconvénients de la méthode du Recuit Simulé. En effet, bien que cette méthode soit bien connue pour sa rapidité à générer une solution de qualité, il n'en demeure pas moins qu'elle reste souvent coincée dans un minimum local sans avoir la possibilité d'en sortir pour aller explorer d'autres régions plus prometteuses. La méthode dite Recherche avec Tabous a été développée avec un mécanisme de mémorisation des solutions déjà visitées. Cette technique dite de mémoire avec tabous permet d'éviter plus souvent les minimums locaux et les trajectoires cycliques [85].

Nous avons choisi deux méthodes de la classe des méthodes utilisant un ensemble de solutions à chaque déplacement dans l'espace de recherche du problème considéré. Après avoir consulté la littérature du domaine, notre choix s'est porté sur la Recherche avec Harmonie et l'algorithme d'Optimisation de la Migration d'Oiseaux qui ont démontré leur efficacité pour la résolution du modèle d'affectation quadratique [103].

Dans ce qui suit, nous procédons à une brève présentation de ces quatre méthodes.

#### 4.4.4 RECUIT SIMULÉ (SA)

La méthode de Recuit Simulé est inspirée de la technique de refroidissement utilisée en métallurgie [61]. Pour conduire un système physique dans un état de basse énergie, les physiciens utilisent la technique du recuit. Cette procédure est une stratégie de contrôle de la température en vue d'approcher un état optimum. Le Recuit Simulé est une procédure qui consiste à introduire en optimisation un paramètre de contrôle jouant le

rôle de la température du recuit. L'état final du système dépend essentiellement de cette température. En effet, si la température est abaissée progressivement et d'une manière contrôlée, le système converge vers son optimum. En revanche, si celle-ci est abaissée trop rapidement, le système s'arrêtera au premier minimum local trouvé.

Pour simuler l'évolution d'un système physique vers son équilibre thermodynamique, à une température donnée, la méthode du Recuit Simulé exploite l'algorithme de Métropolis [104]. Le principe de la méthode est d'éviter des optimaux locaux par acceptation de déplacement détériorant le coût de la fonction objectif  $f$ . La méthode est lancée avec une solution initiale, disons  $s$ , générée aléatoirement ou bien avec une heuristique, une température initiale, disons  $T_0$ . Puis, à chaque itération de l'algorithme, et pour une température  $T$  donnée, une nouvelle disposition est créée en appliquant une modification sur la combinaison actuelle pour générer une solution voisine  $s'$ . Si la modification a pour effet de diminuer la fonction objectif du système, elle est acceptée. Si elle provoque au contraire une augmentation  $\Delta f$  de la fonction objectif, elle est acceptée tout de même, mais avec une probabilité  $\exp(-\Delta f/T)$ .

L'acceptation des mauvaises solutions permet de mieux explorer le voisinage d'une solution, et d'éviter ainsi de se bloquer dans des minimums locaux. En appliquant itérativement la règle d'acceptation, pour un palier donné de températures, une séquence de configuration qui constitue une chaîne Markovienne est générée. Une fois l'équilibre thermodynamique atteint pour cette température, une légère diminution de température de l'algorithme est effectuée pour passer à une autre région de l'espace de recherche. Le processus s'arrête lorsque la solution courante reste inchangée depuis un certain nombre d'itérations.

Sous certaines conditions de choix des paramètres de l'algorithme et la configuration de l'espace de recherche, la méthode de Recuit Simulé converge théoriquement en probabilité

vers un optimum global [105]. Notons que la topologie de l'espace de recherche joue un rôle fondamental dans l'efficacité de la méthode. Plusieurs auteurs se sont penchés sur le développement d'une relation analytique entre certaines propriétés de l'espace des configurations et la convergence du Recuit Simulé [106, 107]. Cependant, les approches développées sont encore à un stade exploratoire et leurs résultats ne sont pas encore généralisables [85].

La qualité de la solution générée par le Recuit Simulé dépend fortement du choix des paramètres de l'algorithme, entre autres, la température initiale, le critère de changement de palier de températures et le critère d'arrêt. Malgré l'intérêt accordé par les chercheurs pour mettre en place une théorie pour fixer ces paramètres, actuellement, la méthode adaptée est empirique. Concernant la loi de décroissance de la température, plusieurs schémas ont été proposés [85]. Cependant, la loi de décroissance géométrique est la plus répandue, en raison de sa simplicité et son efficacité.

#### 4.4.5 RECHERCHE AVEC TABOUS (TS)

Cette méthode a été développée dans le but de surmonter le problème des optima locaux avec l'utilisation d'une liste taboue [108]. La Recherche avec Tabous fonctionne avec une seule solution courante à la fois, mise à jour au cours des itérations successives, et un ensemble de voisins. Pour échapper aux minima locaux, l'algorithme utilise deux stratégies : l'acceptation des solutions qui détériorent le coût de la fonction objectif et l'interdiction de revisiter des solutions déjà visitées pour une période, sous forme d'une liste dite taboue [109]. Le but étant de donner assez de temps à l'algorithme pour lui permettre de sortir d'un minimum local et de ne pas revenir immédiatement à la même configuration. Tout mouvement vers les solutions taboues est interdit, même s'il améliore le coût de la solution courante, sauf s'il améliore la meilleure solution

trouvée précédemment. Cette technique de violer les solutions de la liste taboue est dite critère d'aspiration. Une fois la période taboue terminée, les solutions sont de nouveau disponibles dans la recherche locale.

À chaque itération de la méthode, la solution courante  $s$  est remplacée par la meilleure solution non taboue  $s'$  de l'ensemble des voisins  $N(s)$ , même si  $f(s) < f(s')$ . Ceci permet à cette méthode de poursuivre la recherche de solutions meilleures et de ne pas être bloquée dans un minimum local. L'évaluation complète du voisinage de la solution courante  $N(s)$  s'avère souvent extrêmement coûteuse. Dans ce cas de figure, le choix d'un sous-ensemble  $N'(s)$  à partir de  $N(s)$  est plus avantageux. Ce choix se fait soit d'une manière aléatoire, soit avec de stratégies intelligentes [110].

La performance de la Recherche avec Tabous dépend fortement de la taille de la liste taboue. Si sa valeur est trop élevée alors des configurations non visitées seront injustement inaccessibles et la capacité de la méthode à explorer le voisinage sera réduite. Inversement, si sa valeur est trop faible alors la méthode risque fortement d'être bloquée dans un minimum local. On distingue trois types de mémoire : à court terme, à moyen terme et à long terme. La taille de la liste taboue est en relation avec deux mécanismes : intensification et diversification. En effet, réduire la taille de la liste taboue favorise l'intensification. En revanche, augmenter la taille de la liste taboue crée de la diversification. La taille de la liste taboue peut être modifiée pour améliorer la recherche [111].

Comme son nom l'indique, l'intensification consiste à concentrer la recherche effectuée par l'algorithme dans une région prometteuse de l'espace de solutions. Aussi, elle peut être utile pour interrompre la recherche qui dure trop longtemps sans amélioration et aller explorer une autre région. Plusieurs stratégies d'intensification peuvent être utilisées dépendamment du contexte. La plus simple correspond au retour à l'une des meilleures solutions rencontrées jusque-là, puis à reprendre l'exploration à partir de ce point en

réduisant la longueur de la liste taboue pour un nombre limité d'itérations. Une autre façon de procéder consiste à intensifier la recherche en élargissant le voisinage évalué à chaque itération. Il existe d'autres stratégies, plus élaborées qui exploitent des concepts d'apprentissage, décrites dans [112, 113].

La diversification est une technique complémentaire à l'intensification. Son objectif est de diriger la procédure de recherche vers des régions inexplorées de l'espace de solutions. Plusieurs techniques sont utilisées pour créer une diversification selon le contexte. La plus simple est bien entendu d'interrompre périodiquement la procédure et recommencer à partir d'une nouvelle solution générée aléatoirement ou avec une heuristique de façon à se diriger dans une région non encore visitée. Une autre manière de procéder consiste à biaiser la fonction d'évaluation en introduisant un terme qui pénalise les paramètres permettant de générer les solutions. Inversement, le même genre de technique est utilisé dans le but de favoriser la généralisation des solutions rarement rencontrées [114].

Pour permettre à la Recherche avec Tabous d'atteindre le minimum global ou de s'en approcher le plus possible, il faut lui permettre de revisiter deux fois la même solution [115]. Cependant cette technique doit mémoriser toutes les solutions visitées ultérieurement. Dans la pratique, cette tâche est quasiment impossible. Dans un autre résultat [116], les auteurs considèrent des conditions d'interactions probabilistes inspirées de la méthode de Recuit Simulé. En effet, il est possible de choisir des probabilités d'interactions de telle manière que le processus de recherche soit similaire à celui d'un Recuit Simulé. À partir de cette constatation, le théorème de convergence de la méthode du Recuit Simulé peut bien être adapté à la méthode de la Recherche avec Tabous. Cependant, ces résultats sont de nature théorique ; ils ne sont pas d'un grand intérêt dans la pratique.

#### 4.4.6 OPTIMISATION DE LA MIGRATION D'OISEAUX (MBO)

L'Optimisation de la Migration d'Oiseaux (Migration Birds Optimization - MBO), récemment introduite [103], est une technique de recherche de voisinage à population de solutions. La méthode s'inspire de la forme en 'V' des vols d'oiseaux migrateurs (voir Figure (4.4)). La propriété de ces vols réside dans la conservation d'énergie. En effet, quand un oiseau bat ses ailes, il génère un courant d'air qui fera que les oiseaux derrière lui vont fournir moins d'efforts pour s'élever.

L'organisation des vols d'oiseaux est comme suit : un oiseau en tête (le leader) mène le groupe pour une certaine période, et dépense plus d'énergie que tous les autres oiseaux. Quand il est fatigué, sa position est prise par l'un des oiseaux qui le précédé, et lui se met à l'arrière du groupe.



**Figure 4.4: Forme en 'V' du vol d'oiseaux [117]**

Par analogie, un ensemble  $v$  de solutions est généré aléatoirement ou avec une heuristique. L'une des solutions est placée en tête comme leader et pour laquelle un ensemble  $\alpha$  de solutions voisines est généré. Les  $(v - 1)$  solutions sont placées sous forme d'un vol, en formant deux lignes chacune est composée de  $(v - 1)/2$  solutions. Chaque solution du vol exceptée celle en tête, peut être améliorée par la solution qui est devant elle ou par ses propres solutions voisines. En effet, pour chaque solution du vol, un ensemble  $(\alpha - \beta)$  de voisins est généré, avec le  $\beta$  est les meilleures solutions inutilisées de la solution en avant.



Ensuite, la meilleure solution de l'ensemble des voisins, par rapport à la fonction objectif, remplacera l'actuelle solution. Ce processus d'amélioration est appliqué sur toutes les solutions du vol. Une fois que toutes les solutions dans le groupe sont améliorées, ce processus est répété de nouveau. Après un certain nombre  $\gamma$  d'itérations, la solution leader est déplacée vers l'arrière du groupe, et l'une des solutions derrière ce leader prend sa position. La procédure ci-dessus est répétée jusqu'à ce que la condition d'arrêt soit satisfaite.

La table ci-dessous présente l'analogie entre cette approche d'optimisation et le phénomène naturel de migration des oiseaux.

Vol d'oiseaux migrateurs	MBO
Nombre d'oiseaux	Nombre de solutions $v$
Force induite requise	Nombre de voisins évalués $\alpha$
Distance entre les oiseaux	Nombre de voisins partagés $\beta$
Temps de vol du leader en tête	Nombre d'itération $\gamma$

**Tableau 4.1: Analogie entre MBO et le phénomène de migration**

Le nombre de voisins à évaluer peut être interprété comme la puissance nécessaire pour le vol. Cette puissance est inversement proportionnelle à la vitesse. En effet, avec un plus grand nombre de voisins, nous supposons que les oiseaux volent à basse vitesse, ce qui leur permettra d'explorer les environs en détail et ainsi de mieux explorer l'espace de recherche. Concernant les oiseaux en arrière, ils se fatiguent moins par rapport à ceux qui sont en avant, et économisent ainsi de l'énergie. Pour respecter cette propriété dans l'algorithme MBO, le mécanisme de prestation entre les solutions est utilisé. Pour les solutions en arrière du vol, en générant moins de voisins et en utilisant les voisins des solutions à l'avant, l'algorithme est de mesure de respecter la propriété de conservation

d'énergie. Après un certain temps, le leader est remplacé par un autre, pour respecter cette propriété. La solution en tête garde sa place pour un certain nombre d'itérations.

#### 4.4.7 RECHERCHE AVEC HARMONIE (HSA)

L'algorithme de Recherche avec Harmonie (HSA) est une méta-heuristique inspirée du processus de la recherche d'une meilleure harmonie musicale lors d'une session de musique improvisée [118]. Une harmonie musicale est une notion purement esthétique générée par une combinaison de plusieurs sons émis simultanément. Au même titre qu'un algorithme d'optimisation tend à obtenir une configuration idéale parmi les états de plusieurs variables, selon une fonction d'optimisation donnée, un groupe de musiciens recherche une harmonie parfaite en modulant l'état de chacun des instruments impliqués.

Dans l'improvisation en musique, chaque musicien procède au lancement de notes appartenant à la gamme musicale, créant ainsi l'ensemble des vecteurs d'harmonie. Si tous ces lancements produisent une bonne harmonie, cette expérience est stockée dans la mémoire de chaque musicien, et la possibilité de générer une bonne harmonie est augmentée à l'étape suivante.

De même, dans les techniques d'optimisation, les valeurs des variables constituant la solution sont choisies au départ aléatoirement dans un intervalle de possibilités, composant l'ensemble d'un vecteur de solutions. Si cette solution est de qualité, elle est stockée dans une mémoire, et la possibilité de produire une meilleure solution est également augmentée. La Table (4.2) présente l'analogie entre l'algorithme d'optimisation et l'improvisation en musique.

Processus de composition musicale	Processus d'optimisation
Instrument musical	Variable de décision
Ton	Valeur de la variable de décision
Improvisation musicale	Itération
Harmonie musicale	Fonction objectif
Qualité de l'harmonie musicale	Valeur de la fonction objectif

**Tableau 4.2: Analogie entre l'improvisation en musique et l'optimisation**

L'algorithme de Recherche avec Harmonie s'inscrit dans la catégorie des méta-heuristiques utilisant une mémoire et une population de solutions. En effet, la méthode est basée sur une matrice de solutions de dimension HMS dite mémoire d'harmonie. L'algorithme débute avec un ensemble HMS de solutions stockées dans la mémoire HM. À chaque itération, une nouvelle solution est générée à l'aide de deux paramètres : HMCR (Harmony Memory Considering Rate) et PAR (Pitch Adjusting Rate). Le HMCR, comme son nom l'indique, permet de déterminer si la mémoire HM sera utilisée pour générer une nouvelle solution. Si la mémoire HM est utilisée, le second paramètre PAR est appliqué. Ces paramètres aident l'algorithme à obtenir de meilleures solutions.

#### **4.5 MÉTA-HEURISTIQUES HYBRIDES**

L'utilisation de méta-heuristiques pour la résolution d'un problème ont des forces et des faiblesses. Pour surpasser les difficultés de ces méthodes, l'idée est de voir si leur combinaison peut produire de meilleurs résultats. La technique de combinaison peut se faire en les exécutant soit en série, soit en parallèle, soit encore en incorporant un algorithme dans un autre. L'hybridation de ces méthodes a donné naissance à deux

classes : hiérarchique et à plat [86]. Les détails de cette classification sont présentés dans la section ci-après.

#### 4.5.1 CLASSIFICATION DE MÉTA-HEURISTIQUES HYBRIDES

La classification des méthodes hybrides de méta-heuristiques est réalisée selon les caractéristiques d'hybridation des méthodes qu'elles les forment.

La classification hiérarchique est caractérisée par le niveau et le mode de l'hybridation. D'une part, le niveau d'hybridation peut être bas ou haut. Quand un mécanisme interne d'une méta-heuristique est remplacé par une autre méthode, on parle d'hybridation de bas niveau. En revanche, dans le niveau haut de l'hybridation, chaque méta-heuristique garde son fonctionnement interne au cours de l'hybridation. D'autre part, chacune des deux classes d'hybridation se subdivise en deux autres classes : à relais et co-évolutionnaire.

Lorsque les méta-heuristiques sont exécutées de façon séquentielle, l'une utilisant le résultat de la précédente comme entrée, nous avons une hybridation à relais. L'hybridation co-évolutionnaire se fait lorsque les méthodes fonctionnent en parallèle pour explorer l'espace de solutions. La combinaison de ces caractéristiques conduit à quatre sous-classes différentes : les hybridations bas niveau à relais [119], bas niveau co-évolutionnaire [120], haut niveau à relais [121] et haut niveau co-évolutionnaire [122].

L'autre classification est réalisée selon le type des méthodes hybridées, leur domaine d'application et la nature de leurs fonctions ; cette classe est dite générale ou à plat [86]. Cette classification comporte trois approches : méthodes hybrides homogènes versus hétérogènes, méthodes globales versus partielles et méthodes spécialisées versus générales.

Une hybridation est dite homogène lorsque les méta-heuristiques combinées ont les mêmes caractéristiques et sont de même classe [123]. À l'inverse, une hybridation hétérogène qui combine des méta-heuristiques appartient à des classes différentes [122]. La classification globale et locale des méta-heuristiques est liée à l'implication des méta-heuristiques hybridées dans l'exploration de l'espace de recherche. En effet, quand toutes les méta-heuristiques hybridées opèrent dans l'exploration de l'espace de solutions, l'hybridation est dite globale [122]. Tandis que l'hybridation partielle décompose un problème en sous-problèmes où chacun a son propre espace de recherche [124]. L'hybridation est dite généraliste quand toutes les méta-heuristiques hybridées traitent le même problème [86]. À l'inverse, les hybridations spécialisées ont lieu lorsque chaque méta-heuristique traite un problème différent, c'est le cas de l'utilisation d'une méta-heuristique pour initialiser les paramètres d'une autre méta-heuristique [125]. Plus de détails sont donnés dans [86].

Le diagramme de la Figure (4.5) résume les classes des méta-heuristiques hybrides [126].

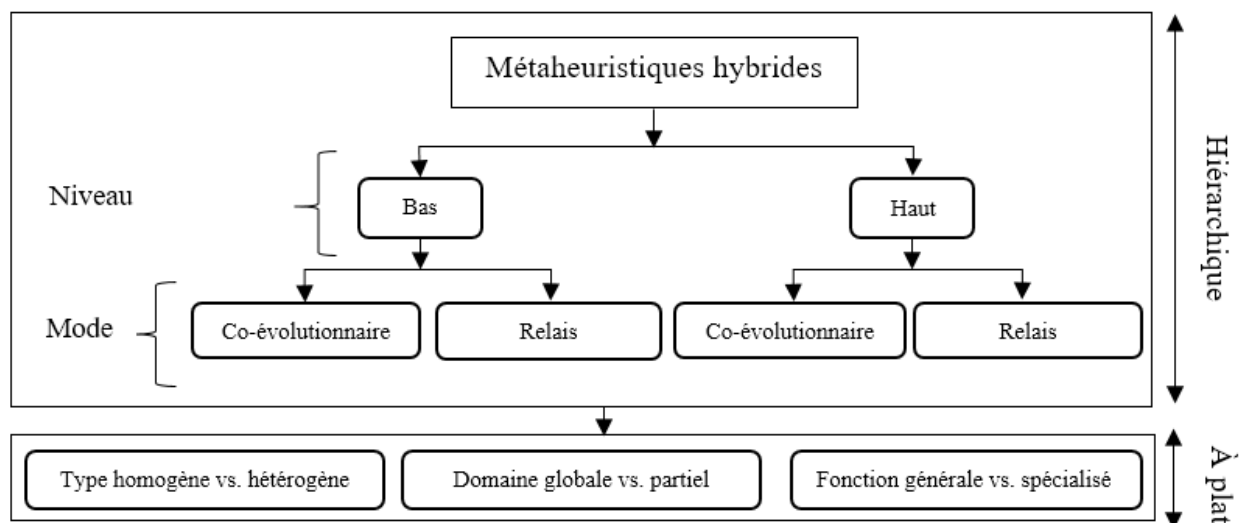


Figure 4.5: Classification des méta-heuristiques hybrides

Dans notre étude, l'hybridation de méta-heuristiques est basée sur les résultats numé-

riques obtenus par chacune des méthodes adaptées dans notre étude.

#### **4.6 CONCLUSION PARTIELLE**

Nous avons introduit dans ce chapitre les notions de l'optimisation combinatoire en mettant l'accent sur les méta-heuristiques et leur hybridation. Dans un premier temps, nous avons exposé les différentes classes de problèmes d'optimisation à travers l'introduction de la notion de complexité algorithmique. La difficulté de résolution d'un problème d'optimisation est mesurée par sa complexité, surtout temporelle. Nous avons présenté, dans un second temps, un aperçu général sur la méthodologie de résolution d'un problème d'optimisation combinatoire. Pour les problèmes dits faciles, l'utilisation des méthodes exactes est indiquée. Dans le cas de problèmes dits difficiles, cette approche devient inefficace, surtout pour les instances de grande taille; l'utilisation des méthodes approchées est pleinement justifiée.

Nous avons présenté quatre méta-heuristiques, à savoir le Recuit Simulé, la Recherche avec Tabous, l'Optimisation de la Migration d'Oiseaux et la Recherche avec Harmonie. Un outil puissant pour l'amélioration de ces méthodes réside dans l'hybridation de ces méta-heuristiques.

## **CHAPITRE 5**

### **APPLICATION DE SA ET HSA POUR LE THERMOFORMAGE**

Comme nous l'avons évoqué dans les chapitres précédents, la distribution de flux radiatif à la surface de la feuille au cours du chauffage infrarouge est un paramètre important qui affecte la forme finale de l'objet thermoformé. Cette distribution est en grande partie commandée par le choix des températures des éléments chauffants du four. Nous présentons ici notre première contribution pour développer une procédure d'optimisation de l'étape de chauffage du procédé de thermoformage.

Ce chapitre est constitué de trois parties. Tout d'abord, nous développons le modèle d'optimisation associé à l'optimisation de l'étape de chauffage de la feuille thermoplastique en réalisant un couplage rayonnement-optimisation. Ensuite, notre attention s'est focalisée sur la résolution de celui-ci, en développant des méthodes adéquates, entre autres, la méthode du Recuit Simulé et la Recherche avec Harmonie. La troisième partie est consacrée à simulation numérique que nous avons réalisée afin de sélectionner la méthode la mieux adaptée à la résolution du modèle proposé.

## 5.1 MODÈLE D'OPTIMISATION DE L'ÉTAPE DE CHAUFFAGE

Rappelons qu'un modèle d'optimisation est défini par un ensemble de variables de décisions, une fonction objectif (ou fonction de coût) et un ensemble de contraintes, définissant ainsi l'ensemble des solutions possibles du problème. C'est dans cet ensemble que s'effectue le processus de recherche d'une ou des solutions du problème considéré. La fonction objectif, étant une expression qui est une fonction des variables de décision, définit le but à atteindre : on cherche à minimiser ou à maximiser celle-ci, selon le contexte. L'ensemble des contraintes est en général un ensemble d'égalités et d'inégalités que les variables de décisions doivent satisfaire.

Le chauffage de la feuille thermoplastique est principalement effectué avec les rayonnements infrarouges incidents à la surface de la feuille. Nous supposons dans un premier temps que les fluctuations de températures sont principalement causées par ce flux radiatif. Le milieu qui sépare la feuille thermoplastique et les éléments chauffants est considéré comme un milieu transparent. La convection entre le milieu ambiant et la surface inférieure (respectivement supérieure) de la feuille est négligeable. L'intensité radiative émise par la surface de la feuille est négligeable. Dans ces conditions, les échanges thermiques à la surface d'une zone de feuille se réduisent au flux radiatif incident donné par l'Équation (5.1).

Lors du chauffage de la feuille, il est évident que la zone centrale va recevoir plus de chaleur par rapport à ses bords. Pour contrôler les fluctuations du flux radiatif à la surface de la feuille, l'idée est de minimiser les écarts d'énergies entre les zones de cette feuille. Pour mettre cette idée sous forme d'un modèle d'optimisation, nous procédons comme suit.

La surface de la matière thermoplastique est subdivisée en petites surfaces élémentaires



simples. Ainsi, la surface de la feuille thermoplastique est discrétisée en  $n = n_1 \times n_2$  zones de surface  $S_{(i,j)}$ ,  $i = 1, \dots, n_1; j = 1, \dots, n_2$ , disposées en matrice de dimension  $(n_1, n_2)$ . D'autre part, nous supposons que le four possède un ensemble  $m$  éléments chauffants, disposés en matrice de dimension  $(m_1, m_2)$  avec bien entendu  $m = m_1 \times m_2$ , sur sa partie supérieure et inférieure, respectivement. Chaque élément est constitué d'une plaque en céramique de surface  $S_{(e,\ell)}$ ,  $e = 1, \dots, m_1; \ell = 1, \dots, m_2$ , recevant une température de l'ensemble  $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_p\}$ .

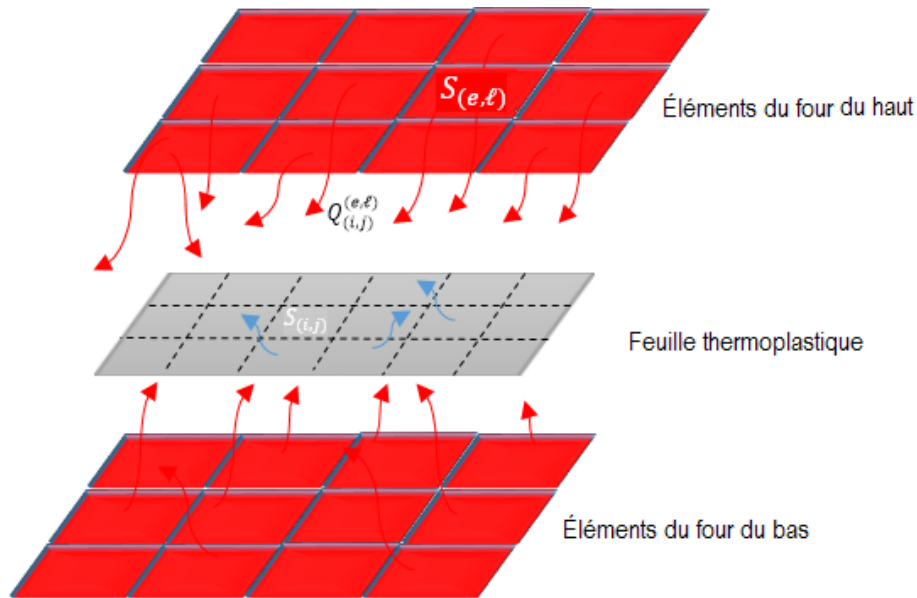


Figure 5.1: Disposition des éléments du four

La quantité de flux d'énergie reçue par une zone  $(i, j)$  de la feuille est donnée par  $Q_{(i,j)}^{(e,\ell)}$ . Cette quantité d'énergie est calculée selon la température  $T_{(e,\ell)}$  de chaque élément chauffant du four (voir Figure (5.1)). La quantité de rayonnements sortant de l'élément de surface  $S_{(e,\ell)}$  et atteignant la zone de surface  $S_{(i,j)}$  est donnée par la formule suivante :

$$Q_{(i,j)}^{(e,\ell)} = F_{(i,j)}^{(e,\ell)} \frac{S_{(e,\ell)}}{S_{(i,j)}} \bar{\epsilon} \sigma T_{(e,\ell)}^4, \quad (5.1)$$

où

- $F_{(i,j)}^{(e,\ell)}$  représente le facteur de forme correspondant aux surfaces  $(i, j)$  et  $(e, \ell)$ .
- $T_{(e,\ell)}$  représente la température de l'élément chauffant  $(e, \ell)$ .
- $\bar{\epsilon}$  représente l'émissivité de la source moyenne.
- $\sigma$  est la constante de Boltzman de valeur  $5.669 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ .

Chaque zone de la feuille thermoplastique reçoit un flux radiatif de tous les éléments du four. La quantité d'énergie reçue par une zone  $(i, j)$  est comme suit :

$$C(i, j) = \sum_e \sum_{\ell} Q_{(i,j)}^{(e,\ell)}.$$

Pour formuler notre problème sous forme d'un programme mathématique en nombres entiers, nous procédons comme suit :

Un élément chauffant  $(e, \ell)$  ne peut recevoir de l'ensemble des températures qu'une seule température. Une température peut être assignée à plusieurs éléments du four. Autrement dit, si nous introduisons la variable de décision  $x_{e,\ell}^k$  définie comme suit :

$$x_{e,\ell}^k = \begin{cases} 1 & \text{si la température } \tau_k \text{ de } \tau \text{ est affectée à l'élément chauffant } (e, \ell) \text{ du four,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, pour une température  $\tau_k$  affectée à l'élément  $(e, \ell)$  du four, la quantité de flux radiatif reçue par la zone  $(i, j)$  de la feuille est comme suit :

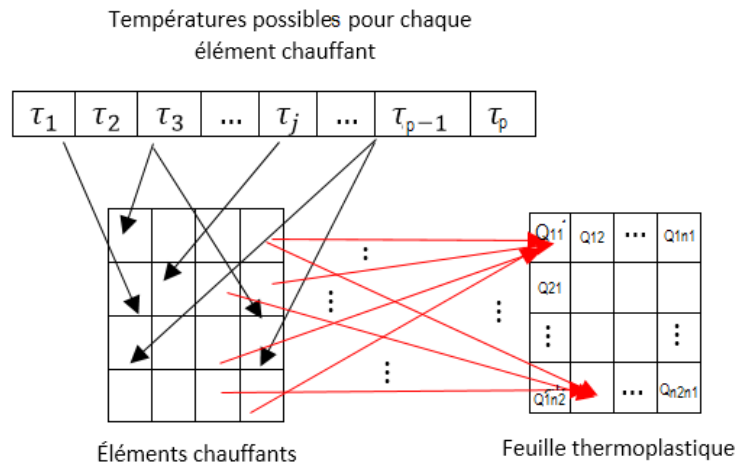
$$Q_{i,j}^{e,\ell,k} = F_{(i,j)}^{(e,\ell)} \frac{S_{(e,\ell)}}{S_{(i,j)}} \bar{\epsilon} \sigma \tau_k^4 \times x_{e,\ell}^k.$$

L'énergie totale reçue par une zone  $(i, j)$  de la feuille à partir de tous les éléments du four

est comme suit :

$$Q_{i,j} = \sum_{e=1}^{m_1} \sum_{\ell=1}^{m_2} Q_{i,j}^{e,\ell,k}; \quad k \in \{1, \dots, p\}. \quad (5.2)$$

Cette quantité d'énergie reçue par chaque zone de la feuille dépend des températures assignées aux éléments du four, ainsi que de la position de la zone de la feuille par rapport aux éléments du four (voir Figure( 5.2)).



**Figure 5.2: Affectation des températures aux éléments du four**

La fonction objectif que nous avons choisie, comme indicateur de la meilleure distribution d'énergie captée par les cellules de la feuille thermoplastique, est celle qui minimise les écarts entre l'énergie reçue par une cellule et la moyenne des énergies reçues par l'ensemble des cellules de la feuille chauffée [55]. Étant donnés  $n_1$  et  $n_2$ , respectivement, le nombre de zones de la feuille en longueur et en largeur, la formulation mathématique de ce problème est alors comme suit :

$$\min f(Q_{i,j}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} (Q_{i,j} - \bar{q})^2}, \quad (5.3)$$

où

- La quantité  $Q_{i,j}$  désigne l'énergie reçue par la zone  $(i, j)$  de la feuille thermoplastique donnée par l'Équation (5.2).
- Le paramètre  $n = n_1 \times n_2$  représente le nombre de cellules de la feuille thermoplastique.
- La quantité  $\bar{q}$  représente la moyenne des flux d'énergie reçus par la feuille à thermoformer. Elle est donnée par la formule suivante :

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} Q_{i,j}.$$

En plus de cette fonction objectif, nous avons inclus trois contraintes au modèle. La première est liée aux choix des températures des éléments du four. En effet, la température  $\tau_k$  d'un élément chauffant  $(e, \ell)$  doit être nécessairement choisie de l'ensemble,  $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_p\}$ , de températures. La contrainte s'écrit comme suit :

$$\tau_k \in \tau; \quad k = 1, \dots, p.$$

La seconde contrainte concerne le fait qu'un élément chauffant  $(e, \ell)$  ne peut recevoir de l'ensemble des températures qu'une seule température. Elle est exprimée comme suit :

$$\sum_{k=1}^q x_{e,\ell}^k = 1; \quad e = 1, \dots, m_1, \quad \ell = 1, \dots, m_2.$$

La troisième contrainte concerne les températures de l'ensemble  $\tau$ . Chacune de ces températures ne peut être utilisée plus de  $m_1 \times m_2$  fois. Son expression est alors comme suit :

$$\sum_{e=1}^{m_1} \sum_{l=1}^{m_2} x_{e,l}^k \leq m_1 \times m_2; \quad k = 1, \dots, p.$$

Le modèle d'optimisation que nous obtenons est donc comme suit [13] :

$$\min f(Q_{i,j}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} (Q_{i,j} - \bar{q})^2},$$

sous les contraintes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^q x_{e,\ell}^k = 1, \quad e = 1, \dots, m_1, \ell = 1, \dots, m_2, \\ \sum_{e=1}^{m_1} \sum_{\ell=1}^{m_2} x_{e,\ell}^k \leq m_1 \times m_2, \quad k = 1, \dots, p, \\ \tau_k \in \tau = \{\tau_1, \dots, \tau_p\}, \quad k = 1, \dots, p. \end{array} \right. \quad (5.4)$$

## 5.2 APPLICATION DE SA ET HSA

Avant d'aborder les étapes de chaque méta-heuristiques et leurs adaptation à la problématique d'optimisation de l'étape de chauffage, à ce stade de la discussion, il est nécessaire de définir la forme générale de la solution qui sera manipulée par chaque méta-heuristique.

En effet, pour rapprocher la forme de la solution générée par la simulation numérique le plus possible de la disposition des éléments chauffants dans le four, la solution manipulée dans cette simulation est une matrice, dont chaque élément représente un élément chauffant du four. Nous considérons un four formé de  $m$  éléments chauffants, tels que  $m_1$

éléments sont disposés en longueur et  $m_2$  en largeur avec  $m = m_1 \times m_2$ . Chaque élément chauffant peut prendre n'importe quelle température de l'ensemble  $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_p\}$ .

La Figure (5.3) montre la forme générale d'une solution, où  $T_{i,j}^{k_u}$  correspond à la température  $\tau_{k_u} \in \tau$  assignée à l'élément chauffant  $(i, j)$ , avec  $u = (i - 1)m_1 + j$  pour  $i = 1, \dots, m_2$  et  $j = 1, \dots, m_1$ .

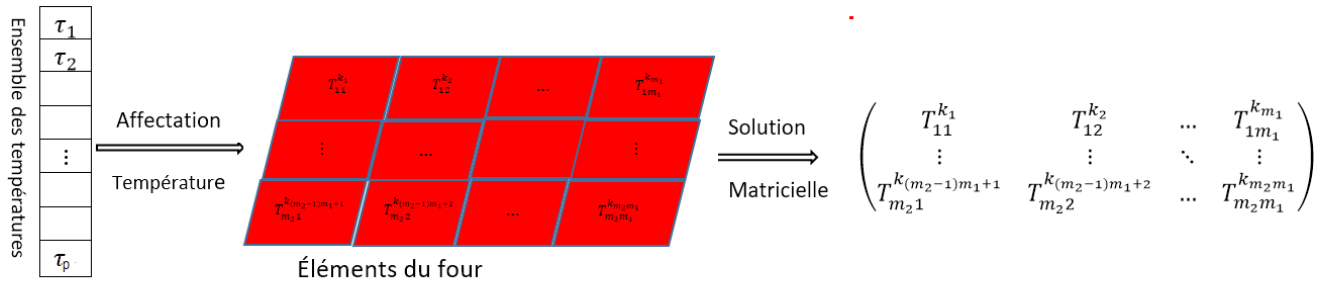


Figure 5.3: Solution matricielle des éléments du four

Pour mieux gérer le temps d'exécution des méta-heuristiques, nous avons réalisé une approximation de la solution recherchée. Notons que cette supposition n'est pas une propriété intrinsèque au problème que nous étudions. Toutefois, elle permet d'accélérer le processus de recherche de la solution.

Le support de la feuille et les éléments du four sont par construction parallèles entre eux. Pour mieux contrôler le chauffage de la feuille thermoplastique, l'axe central de cette dernière est confondu avec celui des éléments chauffants. Dans ce cas, pour une meilleure distribution du flux radiatif sur la surface de la feuille thermoplastique, nous avons supposé une certaine symétrie dans la distribution des températures des éléments du four. Ainsi, chaque élément chauffant et les éléments qui lui sont symétriques vont recevoir la même température, comme illustrée par la Figure (5.4).

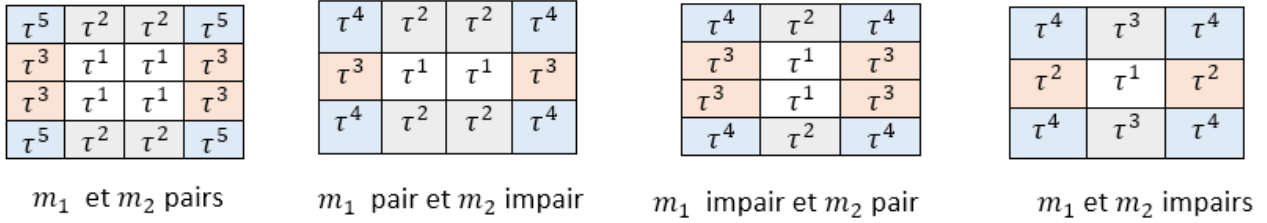


Figure 5.4: Symétrie des éléments du four

La zone centrale des éléments du four est représentée, respectivement, soit par un élément, soit par un ensemble d'éléments, comme le montre la Figure (5.4). Soient  $m_1$  et  $m_2$  respectivement le nombre d'éléments du four en longueur et en largeur. Les formules pour déterminer la zone centrale des éléments du four sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{m_2}{2}, \frac{m_1}{2} \right), \left( \frac{m_2}{2} + 1, \frac{m_1}{2} \right), \left( \frac{m_2}{2}, \frac{m_1}{2} + 1 \right), \left( \frac{m_2}{2} + 1, \frac{m_1}{2} + 1 \right) \text{ si } m_1 \text{ et } m_2 \text{ pairs,} \\ \left( \frac{m_2+1}{2}, \frac{m_1}{2} \right), \left( \frac{m_2+1}{2}, \frac{m_1}{2} + 1 \right) \text{ si } m_1 \text{ pair et } m_2 \text{ impair,} \\ \left( \frac{m_2}{2}, \frac{m_1+1}{2} \right), \left( \frac{m_2}{2} + 1, \frac{m_1+1}{2} \right) \text{ si } m_1 \text{ impair et } m_2 \text{ pair,} \\ \left( \frac{m_1+1}{2}, \frac{m_2+1}{2} \right) \text{ si } m_1 \text{ et } m_2 \text{ impairs.} \end{array} \right.$$

Les cases symétriques d'un élément à la position  $(i, j)$  par rapport à la zone centrale sont comme suit :

$$(m_2 - i + 1, m_1 - j + 1), (m_2 - i + 1, j), (i, m_1 - j + 1).$$

Un cas particulier de cette disposition symétrique est l'assignation de la même température pour un ensemble de cellules d'une ligne, respectivement, d'une colonne (voir

Figure (5.5).

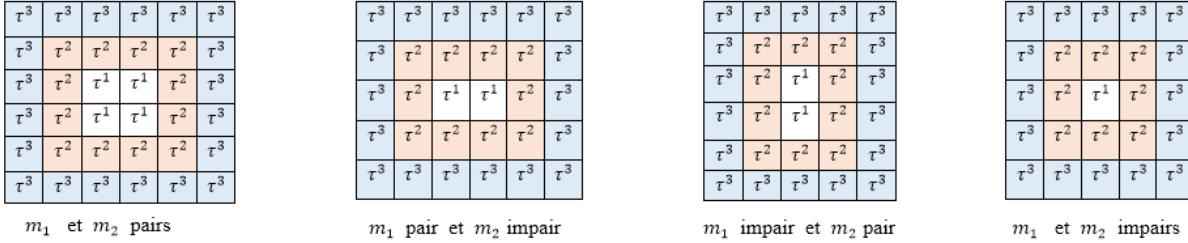


Figure 5.5: Cas particulier de la symétrie des éléments du four

L'ensemble des cellules symétriques de la case  $(i, j)$  sont définis avec l'application [:] comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} [(i, j) : (i, m_1 - j + 1)], \\ [(i, j) : (m_2 - i + 1, j)], \\ [((m_2 - i + 1), j) : (m_2 - i + 1, m_1 - j + 1)], \\ [(m_2 - i + 1, m_1 - j + 1) : (i, m_1 - j + 1)]. \end{array} \right.$$

En considérant cette symétrie, la formulation mathématique présentée par(5.4) ci-dessus devient comme suit :

$$\min f(Q_{i,j}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} (Q_{i,j} - \bar{q})^2},$$

sous les contraintes suivantes :



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^q x_{e,\ell}^k = 1 \\ \sum_{e=1}^{m_1} \sum_{\ell=1}^{m_2} x_{e,\ell}^k \leq m_1 \times m_2 \\ x_{e,\ell}^k = x_{m_2-e+1, m_1-\ell+1}^k = x_{m_2-e+1, \ell}^k = x_{e, m_1-\ell+1}^k \\ \tau_k \in \tau = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\} \end{array} \right. \begin{array}{l} e = 1, \dots, m_1, \ell = 1, \dots, m_2, \\ k = 1, \dots, p, \\ e = 1, \dots, \left\lceil \frac{m_1}{2} \right\rceil, \ell = 1, \dots, \left\lceil \frac{m_2}{2} \right\rceil, \\ k = 1, \dots, p. \end{array}$$

où  $\lceil x \rceil$  représente la valeur par excès de  $x$ .

### 5.2.1 APPLICATION DE SA

Le principe du Recuit Simulé, présenté à la Section (4.4.4), consiste à démarrer l'algorithme avec une température initiale élevée et à contrôler la décroissance de la température au sein de l'algorithme de Metropolis. L'adaptation du Recuit Simulé permet d'avoir des résultats proches de l'optimum global [127].

Plusieurs lois de décroissance de la température peuvent être utilisées en pratique [128]. Dans la présente étude, l'abaissement de la température a été fait selon la loi de décroissance géométrique en raison de sa popularité et son efficacité [85]. Pour un paramètre de décroissance  $\alpha$  constant, la loi de décroissance géométrique est donnée par l'Équation (5.5).

$$T_{k+1} = \alpha.T_k. \quad (5.5)$$

Des travaux, consacrés à l'étude de la convergence du Recuit Simulé, montrent que, après un certain nombre d'itérations, cette méthode se comporte comme une recherche locale [85]. En effet, si la température de l'algorithme atteint une valeur minimale, l'algorithme converge vers une recherche locale. Pour éviter de se lancer dans une telle recherche,

des modifications ont été apportées à la méthode de Recuit Simulé de base. Nous avons introduit un compteur  $I$  permettant de mettre fin à l'algorithme dans le cas où la solution courante n'est pas améliorée après un certain nombre de paliers successifs. Les détails de

la méthode SA sont présentés par l'Algorithme 2.

---

**Algorithme 2 : Recuit Simulé**

---

**Entrées :**

- L'ensemble  $\tau$  de températures de la commande du four ;
- Fixer la valeur de la température initiale  $T_0$ ; le taux de dégradation de la température  $c$  telle que  $0 \leq c \leq 1$  ;
- Fixer les valeurs suivantes : le nombre maximum d'itérations  $K$ ; le nombre maximum d'itérations  $U$  avant de changer de palier; la valeur maximale du compteur  $I$  qui compte le nombre successif de fois que la solution courante n'est pas améliorée;

**Initialiser :**

- Le nombre d'itérations de la boucle externe  $k \leftarrow 1$ ; le nombre de fois que la solution courante n'est pas améliorée  $i \leftarrow 0$ ; le nombre d'itérations avant de changer le palier  $u \leftarrow 0$ ;
- Générer une solution initiale  $s$  et évaluer la fonction de coût  $f(s)$ ;

**tant que** ( $k \leq K$ ) **faire**

**tant que** ( $u < U$ ) **faire**

Choisir une solution  $s'$  dans le voisinage de  $s$  et évaluer  $f(s')$ ;

Calculer  $\Delta f = f(s) - f(s')$ ;

**si**  $\Delta f > 0$  **alors**

|  $s \leftarrow s'$ ;  $i \leftarrow 0$ ;

**sinon**

| Générer aléatoirement  $r \in [0, 1]$ ;

**si** ( $r \leq e^{-\frac{\Delta f}{T}}$ ) **alors**

|  $s \leftarrow s'$ ;  $i \leftarrow 0$ ;  $u \leftarrow u + 1$ ;

**sinon**

|  $i \leftarrow i + 1$ ;

**fin**

**fin**

**si**  $i = I$  **alors**

|  $u \leftarrow U + 1$ ;

**sinon**

|  $u \leftarrow u + 1$ ;

**fin**

**fin**

**si**  $i \leftarrow I$  **alors**

|  $k \leftarrow K + 1$ ;

**sinon**

|  $T = T \times c$ ;  $k \leftarrow k + u$ ;  $u \leftarrow 0$ ;

**fin**

**fin**

**Retourner :** la meilleure solution.

---

La complexité temporelle de cet algorithme peut être dérivée comme suit. À chaque fois, une nouvelle solution et la fonction objectif correspondante sont évaluées; cela correspond à un coût en  $O(nm)$ . Le reste du corps de cette boucle peut être évalué en  $O(n)$ . La boucle externe sur  $K$  est répétée  $O(K)$  fois. La complexité de tout l'algorithme est par conséquent en  $O(Knm)$ .

### 5.2.2 APPLICATION DE HSA

La méthode travaille avec un ensemble de solutions qui sont stockées dans une matrice dite matrice d'harmonie. Pour appliquer la méthode HSA à notre problème, il est nécessaire de représenter adéquatement cette matrice. Nous considérons un ensemble HMS de solutions initiales  $(T_1^i, \dots, T_m^i; i = 1, \dots, HMS)$ , stockées dans la mémoire HM. Chaque solution bien entendu respecte la symétrie définie au début de ce chapitre. La valeur de la fonction objectif  $f^i, i = 1, \dots, HMS$ , est calculée pour l'ensemble des solutions de cette mémoire. La structure générale de la mémoire HM est comme suit :

$$HM = \left( \begin{array}{ccccc} T_1^1 & T_2^1 & \dots & T_{m-1}^1 & T_m^1 \\ T_1^2 & T_2^2 & \dots & T_{m-1}^2 & T_m^2 \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \\ & & \dots & & \\ T_1^{HMS} & T_2^{HMS} & \dots & T_{m-1}^{HMS} & T_m^{HMS} \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} f^1 \\ f^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f^{HMS-1} \\ f^{HMS} \end{array} \right\}$$

Pour se déplacer dans l'espace de recherche, des nouvelles solutions sont générées, soit à partir de la matrice harmonie, soit de l'ensemble des solutions de départ. Une solution

est produite à partir des températures de la matrice harmonie en se basant sur le taux HMCR et PAR. Le taux HMCR est utilisé pour choisir une valeur parmi les valeurs historiques stockées dans HM, alors que (1-HMCR) est le taux du choix aléatoire d'une valeur à partir de la gamme possible de valeurs. La construction d'une nouvelle solution  $(T'_1, \dots, T'_{m-1}, T'_m)$  bien entendu respecte la symétrie. Le choix d'une température à assigner à un emplacement est comme suit :

$$\begin{cases} T'_i \in HM & \text{avec une probabilité HMCR,} \\ T'_i \in \tau & \text{avec une probabilité (1-HMCR).} \end{cases}$$

Dans le nouveau vecteur d'harmonie,  $(T'_1, \dots, T'_{m-1}, T'_m)$ , n'importe quelle composante, est examinée pour déterminer s'il devrait être ajustée pour le lancer. Cette opération utilise le paramètre PAR qui est le taux d'ajustement de lancement. Pour  $T'_i$  et ses symétries, ce taux d'ajustement est comme suit :

$$T'_i \leftarrow \begin{cases} \text{Oui} \rightarrow PAR, \\ \text{Non} \rightarrow (1 - PAR). \end{cases}$$

Pour mettre à jour, la nouvelle solution construite est testée s'elle est meilleure que la plus mauvaise harmonie dans HM, en terme de valeur de la fonction objectif, la nouvelle harmonie est incluse dans HM et la plus mauvaise harmonie existante est exclue de HM. Notons que les solutions de la matrice harmonie sont triées par niveau de performance dans le but de réduire le temps d'exécution de l'algorithme.

Cette procédure est répétée jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt est vérifié. Pour mettre fin à la méthode, nous avons imposé deux tests. Le premier est le nombre maximum d'itérations fixé pour l'algorithme et le second est lié à l'amélioration de la qualité de la meilleure solution trouvée pour un nombre d'itérations. En effet, si la meilleure

solution n'est pas améliorée pendant un nombre d'itérations, l'exécution de l'algorithme s'arrête. Notons que les paramètres de cette méthode sont fixés d'une manière empirique. La méthode de la Recherche avec Harmonie est résumée par l'Algorithme 3.

---

**Algorithme 3** : Recherche avec Harmonie

---

**Entrées :**

- L'ensemble  $\tau$  de températures de la commande du four;
- $K$  : nombre d'itérations maximum;
- Les paramètres suivants : nombre de solutions initiales HMS; taux de considération de la mémoire HMCR; taux d'ajustement d'une solution PAR; mémoire d'harmonie HM;

**Initialiser :**

- $k \leftarrow 1$ ; la nouvelle solution  $T = []$ ;
- la mémoire HM, en générant aléatoirement HMS solutions;

**tant que** ( $k \leq K$ ) **faire**

$i \leftarrow 1$ ;

**tant que** ( $i \leq m$ ) **faire**

    Générer aléatoirement  $r \in [0, 1]$ ;

**si** ( $r < HMCR$ ) **alors**

$T_i \leftarrow T_i^j$  où  $T_i^j \in HM, j = 1, \dots, HMS$ ;

**sinon**

$T_i \leftarrow t$  où  $t \in \tau$ ;

**fin**

$i \leftarrow i + 1$ ;

**fin**

$l = 1$ ;

**tant que** ( $l \leq m$ ) **faire**

    Générer aléatoirement  $p \in [0, 1]$ ;

**si** ( $p < PAR$ ) **alors**

$T_l \leftarrow t$  où  $t \in \tau$ ;  $l \leftarrow l + 1$ ;

**sinon**

$l \leftarrow l + 1$ ;

**fin**

**fin**

  Mettre à jour la mémoire HM;  $k \leftarrow k + 1$ ;

**fin**

**Retourner** : la meilleure solution.

---

La complexité temporelle de cet algorithme peut être dérivée comme suit. La génération de la matrice  $HM$  et le tri de ses éléments se fait, respectivement, en  $O(pnm)$  et  $O(p \log p)$ , où  $p = HMS$ . La construction d'une nouvelle solution et la mise à jour de la matrice  $HM$

se font, respectivement, en  $O(nm)$  et  $O(m + p)$ . Comme la boucle tant qu'est répétée  $K$  fois, la complexité totale de l'Algorithme 3, est alors en  $O(pnm + p \log p + K(m + nm + p))$

### 5.2.3 CONFIGURATION INITIALE ET VOISINAGE D'UNE SOLUTION

Le principe de chaque méta-heuristique s'appuie sur l'utilisation d'une solution de départ, ou un ensemble de solutions, et une configuration du voisinage pour explorer l'espace de recherche. Dans cette section, nous allons présenter ces deux notions.

#### CONFIGURATION INITIALE

La solution initiale peut être générée de plusieurs façons. Pour cette simulation, nous en avons testé deux que voici :

- La solution initiale est construite de manière aléatoire.
- La solution initiale est construite avec la plus petite valeur de l'ensemble  $\tau$  des températures.

#### PROCESSUS D'EXPLORATION DE L'ESPACE DE RECHERCHE

Pour explorer l'espace des solutions, les méta-heuristiques utilisent la notion du voisinage. Un ensemble de solutions est généré dans le voisinage de la solution en réalisant des petites modifications sur celle-ci. Pour définir un voisinage, il existe plusieurs manières d'en faire un.

Dans notre étude, nous avons choisi la procédure de permutation de deux températures avec la possibilité de sélectionner une température de l'ensemble  $\tau$ . Cette procédure consiste à choisir aléatoirement deux éléments de la plaque chauffante et leurs symétriques

et permuter leurs températures auxquelles ils sont associés. Avec une probabilité de 50%, les valeurs des deux emplacements et leurs éléments symétriques seront inter-changées suivant la procédure illustrée par la Figure (5.6). Autrement, un élément de la plaque chauffante et ses symétriques et une température de l'ensemble des températures  $\tau$  seront sélectionnés au hasard. La température choisie sera affectée à l'élément et ses éléments symétriques (voir Figure (6.2)).

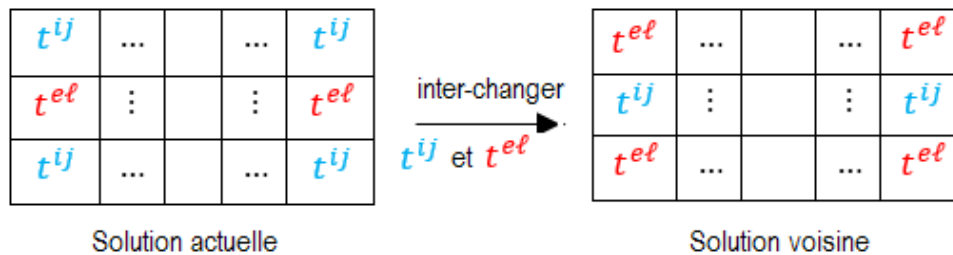


Figure 5.6: Permutation de deux températures

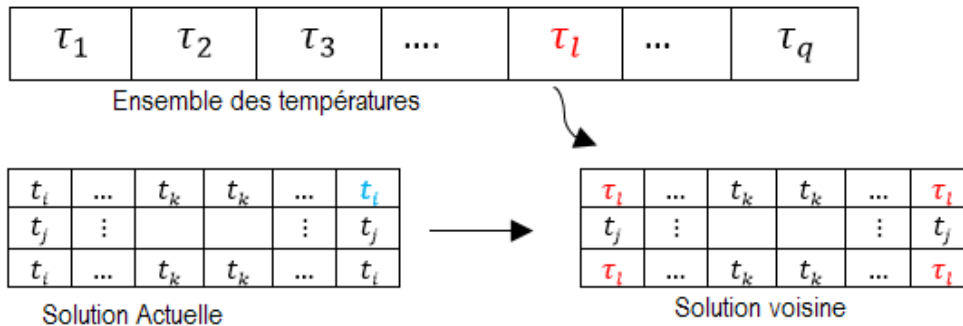


Figure 5.7: Affectation d'une température de  $\tau$  à la solution

Notons que le choix de cette technique d'exploration de l'espace de voisinage permet une certaine diversification. En effet, si une solution ne peut pas être améliorée avec la permutation de ses propres températures, alors une nouvelle température de l'ensemble,  $\tau$ , de températures est choisie. Ceci aura pour effet de produire une nouvelle solution et donner ainsi à l'algorithme la possibilité d'explorer un nouveau voisinage de solutions. Le Tableau (5.1) résume les étapes de cette procédure.



---

 Procédure de voisinage d'une solution
 

---

1. Générer aléatoirement un nombre  $r \in [0, 1]$ ;
  2. Si ( $r \leq 0.5$ )
    - Sélectionner deux emplacements de la solution courante et leur symétriques et permuter leurs températures;
    - Sinon, choisir aléatoirement un emplacement et ses éléments symétriques de la solution actuelle et leur affecter une température de l'ensemble  $\tau$ ;
- 

**Tableau 5.1: Procédure de permutation de deux températures**

Afin de choisir la méthode la mieux adaptée à notre problématique, une étude comparative a été réalisée entre les algorithmes SA et HSA. Pour donner la même opportunité aux deux algorithmes, nous les avons exécutés avec la même configuration initiale et le même voisinage.

### 5.3 SIMULATION NUMÉRIQUE AVEC SA ET HSA

Dans cette partie, nous présentons l'évaluation des performances de deux métaheuristiques, à savoir le Recuit Simulé et la Recherche avec Harmonie. Dans le but d'analyser l'influence du nombre  $m$  d'éléments du four sur la qualité de la solution générée par les méta-heuristiques, nous avons considéré des exemples de four avec  $(6 \times 6)$  et  $(7 \times 7)$  [13, 18]. La disposition des éléments dans le four est de la forme  $m = (m_1 \times m_2)$  avec  $m_1$  le nombre d'éléments placés en longueur, respectivement,  $m_2$  en largeur. Les deux algorithmes ont été codés en C++, et débogués sous Microsoft Visual Studio 2015 sur un ordinateur personnel doté d'un processeur Intel(R)Core(TM) i5-6200U, fonctionnant avec une vitesse d'horloge de 2.4 GHz, et d'une mémoire vive de 16Go et sous le système d'exploitation Windows 2010.

### 5.3.1 DESCRIPTION DES EXEMPLES DE L'ÉTUDE

Pour la simulation numérique, nous avons utilisé une commande d'éléments du four formé de 12 températures générées entre 400 K et 950 K et qui sont équidistribuées, tel que  $\tau = \{400, 450, 500, 550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950\}$ . Les dimensions de la feuille et du four sont, respectivement,  $1\text{m} \times 1.6\text{m}$  et  $1.2\text{m} \times 1.8\text{m}$ . La feuille est subdivisée en éléments rectangulaires surfaciques. La distance séparant la feuille et les éléments chauffants est fixée à 0.53m. Afin d'analyser le rapport entre la performance des deux méthodes et le nombre d'éléments chauffants du four, nous avons testé un four avec 36 ( $6 \times 6$ ) éléments chauffants et un autre avec 49 ( $7 \times 7$ ) éléments chauffants.

### 5.3.2 RÉGLAGE DES PARAMÈTRES DE SA

Les deux paramètres clés de la bonne performance de la méthode de Recuit Simulé sont la température initiale de la méthode et le taux de dégradation de celle-ci (rappelons que le terme température n'a rien à voir avec les températures de l'ensemble  $\tau$ . Ce sont des paramètres liés à la méthode en question). En effet, pour un taux de décroissance et température élevés, la plupart des solutions générées sont acceptées. En revanche, pour une température relativement faible, la méthode se comporte comme une recherche locale. Par conséquent, plus ces deux valeurs sont grandes, plus l'exploration de l'espace de recherche sera meilleure.

La méthode de Recuit Simulé a fait l'objet d'une étude réalisée dans [55] pour la résolution de la problématique de thermoformage. Dans ce travail, les auteurs ont mené une étude préliminaire pour fixer les paramètres de cette méthode. Les résultats obtenus ont montré que la température de l'algorithme doit être fixée à 200 pour des meilleurs résultats. D'après la même étude, les meilleurs résultats sont générés pour un taux de dégradation

fixé à 0.99.

Concernant le nombre d'itérations de la boucle intérieure, représentant le palier pour lequel la température de l'algorithme est fixée, il est fixé à 80. Après un certain nombre de solutions évaluées, la méthode de Recuit Simulé se comporte comme la recherche locale. La plupart des solutions générées ne sont pas acceptées et la solution courante ne s'améliore pas. Par conséquent, l'algorithme peut se lancer dans une recherche inutile. Pour mettre fin à la boucle extérieure, représentant le nombre maximum d'itérations de l'algorithme, un test est réalisé sur le nombre successif de fois que la solution n'est pas améliorée; ce nombre est fixé à 40. L'exécution de la méthode s'arrête si l'un des critères est atteint : soit le nombre maximum d'itérations de la méthode ou le compteur du nombre de fois que la solution n'est pas améliorée.

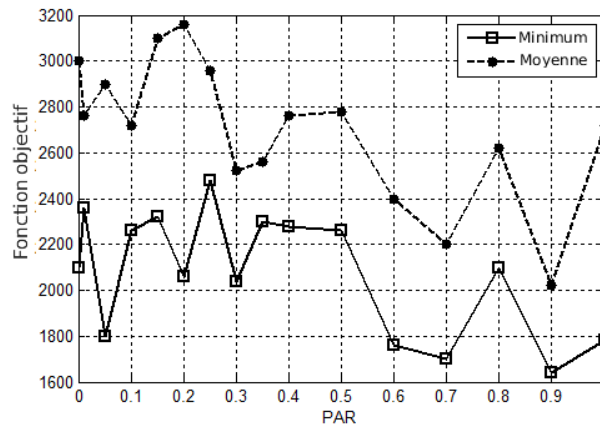
Pour résumer, les paramètres d'entrée de la méthode de Recuit Simulé sont comme suit :

- La température initiale de la méthode est  $T_0 = 200$ .
- Le taux de dégradation de la température  $c = 0.99$ .
- La boucle de chaque palier est  $U_{\max} = 80$ .
- Le compteur  $I_{\max} = 40$ .

### 5.3.3 RÉGLAGE DES PARAMÈTRES DE HSA

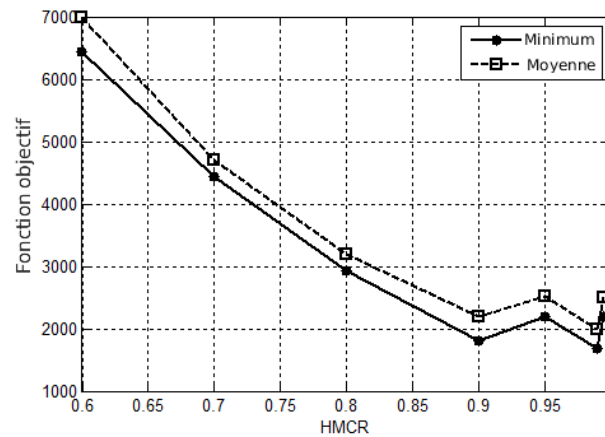
Les paramètres spécifiques à fixer pour la méthode de Recherche avec Harmonie sont le nombre de solutions initiales (HMS), le taux de considération de la mémoire (HMCR) et le taux d'ajustement d'une solution (PAR). Pour cela, nous avons mené une étude où nous avons testé, pour chaque paramètre, plusieurs valeurs. À chaque fois, nous faisons varier la valeur d'un paramètre de l'algorithme tout en fixant les autres à des valeurs de référence. Étant donné le caractère non déterministe des méta-heuristiques, il est

nécessaire de répéter les exécutions pour avoir des données statistiquement interprétables, ce qui est très coûteux en temps de calcul. Pour chaque paramètre, l'algorithme est lancé une dizaine de fois afin d'analyser la variation des valeurs de la fonction objectif par rapport au minimum et en moyenne. Les résultats obtenus sont résumés dans les Figure (5.8), (5.9) et (5.10).



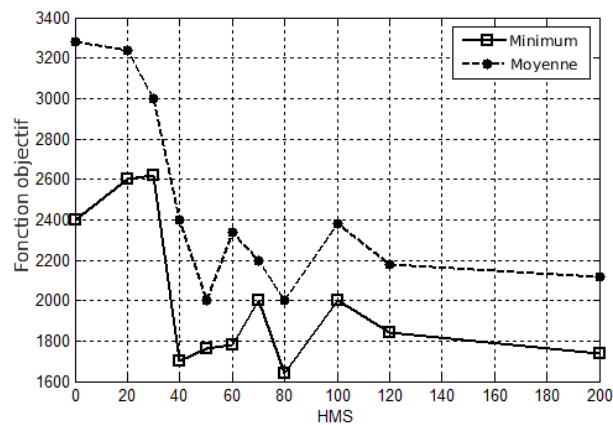
**Figure 5.8: Influence du paramètre PAR**

La Figure (5.8) montre les résultats produits par HSA avec la valeur de PAR allant de 0 à 1, tout en fixant le paramètre HMCR à la valeur 0.99 et la taille de la matrice HM à 50 valeurs. À la Figure (5.8), nous pouvons voir que l'algorithme améliore considérablement les résultats si le paramètre PAR est ajusté de manière adéquate. Ce paramètre joue un rôle important en termes de qualité des résultats générés. L'algorithme génère de meilleures solutions avec  $PAR = 0.9$ .



**Figure 5.9: Influence du paramètre HMCR**

Les résultats montrant l'influence du paramètre HMCR sur la performance de la méthode sont résumés dans la Figure (5.9). Les tests montrent que la valeur de HMCR devrait être fixée à 0.99. Pour choisir la valeur du paramètre HMS, nous avons fixé les deux autres paramètres de l'algorithme aux valeurs trouvées précédemment. Nous avons testé plusieurs valeurs entre 0 et 200 pour le paramètre HMS. Les résultats obtenus sont résumés par la Figure (5.10). Les meilleurs résultats sont obtenus pour  $HMS = 80$ .



**Figure 5.10: Influence du paramètre HMS**

### 5.3.4 RÉSULTATS ET DISCUSSION

Après avoir fixé les paramètres des algorithmes de SA et HSA, nous avons exécuté les deux méthodes sur les deux exemples, à savoir, un four à 36 ( $6 \times 6$ ) éléments et un autre à 49 ( $7 \times 7$ ) éléments. Rappelons que la température de chaque élément est sélectionné exclusivement de l'ensemble de températures  $\tau = \{400, 450, 500, 550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950\}$ . Pour chaque algorithme, nous avons généré 5 instances, et le nombre maximal d'itérations est fixé à 40 000.

Pour tester l'influence de la solution initiale sur la meilleure solution générée par les méthodes pour les deux exemples, dans un premier temps, nous avons lancé chaque méthode avec une solution initiale construite de manière aléatoire, et ensuite avec une solution initiale construite avec la plus petite valeur de l'ensemble  $\tau$  des températures.

$i, j$	1	2	3	4	5	6
1	600	450	500	500	450	600
2	450	400	450	450	400	450
3	450	450	400	400	450	450
4	450	450	400	400	450	450
5	450	400	450	450	400	450
6	600	450	500	500	450	600

**Tableau 5.2: Températures des 36 éléments**

Les meilleures solutions trouvées pour chaque exemple sont résumées aux Tableaux (5.2) et (5.3). Ces solutions sont générées par la méthode SA pour une solution de départ construite avec le minimum de l'ensemble de températures. Le temps d'exécution de la méthode augmente avec le nombre d'éléments chauffants. En effet, pour le four avec ( $6 \times 6$ ) éléments, la méthode met en moyenne 20 minutes pour renvoyer la meilleure solution trouvée. En revanche, pour un four de ( $7 \times 7$ ) éléments la méthode, génère la

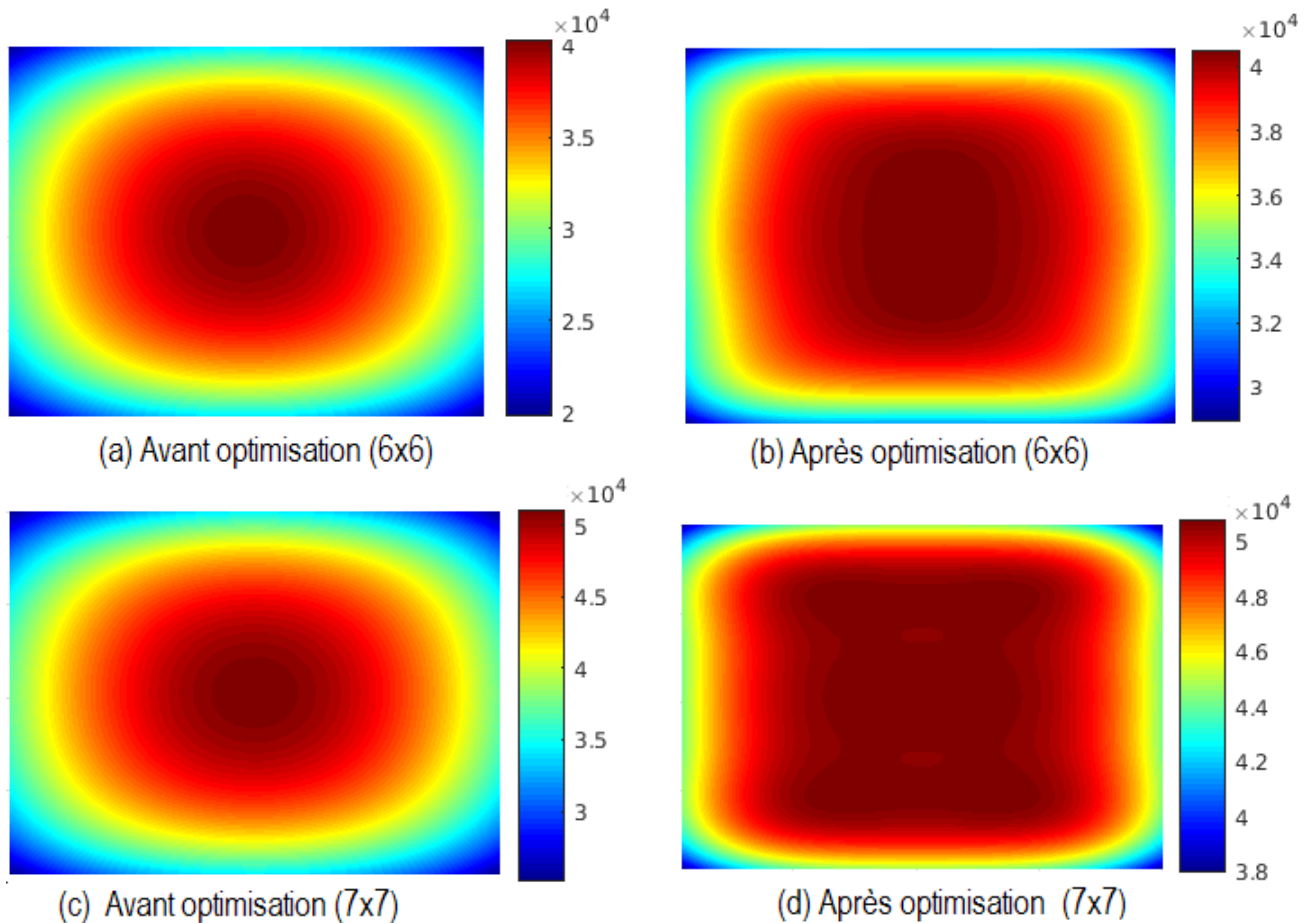
solution en 34 seconds en moyenne.

$i, j$	1	2	3	4	5	6	7
1	650	600	550	600	550	600	650
2	600	550	500	550	500	550	600
3	550	400	450	400	450	400	550
4	600	450	450	550	450	450	600
5	550	400	450	400	450	400	550
6	600	550	500	550	500	550	600
7	650	600	550	600	550	600	650

**Tableau 5.3: Températures des 49 éléments**

Pour montrer la qualité des solutions produites par ces méthodes, nous avons comparé la distribution du flux radiatif surfacique avant et après ce processus d'optimisation [13]. Nous avons fixé, avant optimisation, la température de tous les éléments chauffants des deux exemples, respectivement, à 450K et 500K. Les résultats sont résumés par la Figure (5.11).

La Figure (5.11) illustre la distribution du flux radiatif reçu par la surface de la feuille à partir des deux exemples que nous avons considérés. Ainsi, les Figure (5.11-a) et (5.11-b) sont les résultats de la distribution de flux radiatif avant et après optimisation des températures des 36 éléments, respectivement. Les résultats montrent que, avant l'optimisation, l'écart de flux radiatif est  $(20 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2})$  pour un maximum de  $(40 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2})$  concentré au milieu de la feuille, et un minimum de  $(20 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2})$  situé sur les bordures de la surface. Pour le même profil de flux radiatif, après l'optimisation, la différence est réduite de  $(10 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2})$ . Les bords de la feuille de thermoformage sont ainsi plus chauffés et la distribution du flux radiatif est plus uniforme pour un maximum de  $(40 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2})$  et un minimum de  $(30 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2})$ .



**Figure 5.11: Distribution de flux radiatif intercepté par la surface de la feuille**

Pour le four avec  $(7 \times 7)$  éléments, la distribution de flux radiatif avant et après le processus d'optimisation est illustrée par les Figure (5.11)-c et (5.11-d). Avant l'optimisation, l'écart de flux thermique est  $(20 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2})$  pour un maximum de  $(50 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2})$  concentré au milieu de la surface de la feuille thermoplastique, et un minimum de  $(30 \times 10^3 \text{ W.m}^{-3})$  aux frontières. Après le processus d'optimisation, la différence est réduite de  $(12 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2})$ . Les bords de la feuille thermoplastique sont plus chauffés et la distribution du flux radiatif est, comme on s'attendait, plus uniforme pour un maximum de  $(50 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2})$ , et un minimum de  $(38 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2})$ .

Avant de clore cette section, il est utile de noter que l'uniformité du flux radiatif à la



surface de la feuille thermoplastique dépend fortement du nombre d'éléments chauffants. En effet, plus ce nombre est élevé, meilleur sera le contrôle de ce flux radiatif.

### 5.3.5 COMPARAISON ENTRE SA ET HSA

Nous avons mené une étude comparative entre SA et HSA. La comparaison de ces deux méthodes est limitée à la performance de chacune d'elle par rapport à la fonction objectif et au temps d'exécution.

Les températures affectées aux éléments chauffants du four, produisant une meilleure répartition de flux radiatif, sont données aux Tableaux (5.2) et (5.3). Les Tableaux (5.4) et (5.5) résument les résultats obtenus par rapport à la moyenne (Moy), écart type (Dev-St) des 5 instances ainsi que la valeur minimale (Min) générées, respectivement, par les algorithmes SA et HSA et leurs temps moyens d'exécution (Tps) [13].

	Exemple	Min	Moy	Dev-St	Tps (s)
Solution Initiale	36 éléments	3012	3020.6	108.48	23
générée aléatoirement	49 éléments	2600	2760.4	207.03	45
Solution initiale fixée	36 éléments	2735	2787.6	44.08	20
au minimum de $\tau$	49 éléments	2593	2629.2	43.29	34

**Tableau 5.4: Résultats générés par SA**

	Exemple	Min	Moy	Dev-St	Tps(s)
Solution Initiale	36 éléments	2789	2860.8	52.21	789
générée aléatoirement	49 éléments	2599	2604.4	6.10	914
Solution initiale fixée	36 éléments	2805	2844.8	39.13	794
au minimum de $\tau$	49 éléments	2613	2660	30.19	901

**Tableau 5.5: Résultats générés par HSA**

À partir des Tableaux (5.4) et (5.5), nous constatons que l'écart type entre les solutions générées par la méthode de Recherche avec Harmonie est plus petit pour les deux configurations de solutions de départ. Quant à la qualité des solutions qu'elle produit, elle est quelque peu meilleure en moyenne et par rapport à la valeur minimale, comparativement au Recuit Simulé, quand la solution initiale est générée aléatoirement. Tandis que, dans le cas où la solution de départ est fixée au minimum des températures de l'ensemble  $\tau$ , la méthode du Recuit Simulé génère cette fois-ci des solutions meilleures en moyenne et par rapport à la valeur minimale. Globalement, la qualité des solutions produites par les deux algorithmes est presque la même. Toutefois, l'écart important entre la qualité des deux méthodes est par rapport au temps moyen d'exécution. En effet, la méthode du Recuit Simulé surclasse de loin la méthode de la Recherche avec Harmonie. En moyenne, le Recuit Simulé produit la meilleure solution en moins d'une minute, tandis que la Recherche avec Harmonie, quant à elle, prend environ 15 minutes pour en générer une.

#### **5.4 CONCLUSION PARTIELLE**

Dans ce chapitre nous avons développé la procédure d'optimisation de l'étape du chauffage infrarouge du processus de thermoformage. À travers les sections de ce chapitre, nous avons mis en œuvre le modèle d'optimisation associé à la problématique de la répartition uniforme de la chaleur à la surface de la feuille et les méthodes de résolutions adéquates pour le résoudre, à savoir, le Recuit Simulé et la Recherche avec Harmonie. Les résultats, obtenus dans cette contribution, ont fait l'objet d'une participation à une conférence internationale [18] et d'une publication dans le journal scientifique *Heat transfer* [13].

Dans cette contribution, nous avons proposé une fonction objectif à minimiser pour

avoir une meilleure répartition uniforme de l'énergie reçue par la surface de la feuille thermoplastique. Pour la résolution du modèle proposé, nous avons adapté deux méta-heuristiques : SA et HSA. Nous avons exécuté ces deux méthodes sur deux exemples qui diffèrent sur le nombre d'éléments chauffants. Des résultats obtenus, nous concluons que les deux méthodes génèrent presque les mêmes résultats en rapport avec la fonction objectif. Cependant, la méthode SA est de loin meilleure que la méthode HSA d'un point de vue du temps d'exécution. Cette analyse sur l'efficacité et de la rapidité de ces méthodes nous a permis d'opter pour la méthode SA pour la suite de notre étude.

À l'issue de l'exécution des 5 instances par chaque algorithme sur les fours à  $(6 \times 6)$  et  $(7 \times 7)$  éléments chauffants, nous avons constaté que les solutions ont été le plus souvent générées par les plus petites valeurs des températures de l'ensemble  $\tau$ . En effet, la fonction objectif que nous avons utilisée pour la modélisation de la problématique ne rend pas compte de la variabilité de dispersion de l'énergie reçue par la surface de la feuille thermoplastique, lors de la comparaison de deux solutions, pour en choisir la meilleure. En effet, la comparaison des petites valeurs de flux d'énergie conduit inéluctablement à la minimisation de la fonction objectif. Pour donner la même chance à toutes les températures de l'ensemble  $\tau$  d'être choisies, dans le Chapitre 6, nous proposons une nouvelle fonction objectif qui prendra en compte le degré de dispersion de l'énergie interceptée par la feuille thermoplastique.



## CHAPITRE 6

### APPLICATION DE MBO ET TS POUR LE THERMOFORMAGE

Au Chapitre 5, nous avons noté que la fonction objectif favorisait les petites valeurs des températures de l'ensemble  $\tau$ . Dans cette nouvelle contribution, notre premier objectif est de présenter une nouvelle fonction objectif qui permettra le choix équitable des températures de l'ensemble  $\tau$ . Pour la simulation numérique, nous avons choisi plusieurs exemples selon le nombre de températures de l'ensemble  $\tau$ . L'objectif derrière cette construction est l'analyse de l'influence du nombre de réglages de température d'un élément chauffant sur les résultats d'optimisation. Pour la résolution du modèle d'optimisation, nous avons appliqué deux méta-heuristiques, à savoir TS et MBO.

Ce chapitre est constitué de trois parties. Dans la première partie, nous proposons une nouvelle fonction objectif pour donner la possibilité à toutes les températures d'être potentiellement choisies. Dans la deuxième partie, nous avons adapté la méta-heuristique de la Recherche avec Tabous (TS) pour la comparer à celle de l'Optimisation de la Migration d'Oiseaux (MBO). Une analyse de la performance de ces deux méthodes s'en est alors suivie à la troisième partie. Pour terminer, nous avons réalisé une étude comparative entre la méthode du Recuit Simulé, méthode que nous avons choisie dans notre première contribution, comme discuté au Chapitre 5, et les deux méthodes de la

présente étude, à savoir la méthode MBO et TS.

## 6.1 MODÈLE D'OPTIMISATION DE L'ÉTAPE DE CHAUFFAGE

Comme nous l'avons remarqué au Chapitre 5, la fonction objectif (5.3) ne prend pas compte du degré de dispersion des énergies reçues par la surface de la feuille thermoplastique. Autrement dit, la comparaison entre deux solutions est moins précise [129]. Pour circonscrire cet inconvénient, l'utilisation du coefficient de variation se trouve indiquée. En effet, en divisant l'écart type par sa moyenne, le résultat trouvé devient relatif et, par conséquent, la comparaison entre deux solutions aura plus de sens. La nouvelle fonction objectif est proposée est donc comme suit [16, 17] :

$$\min f(Q_{i,j}) = \frac{1}{\bar{q}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} (Q_{i,j} - \bar{q})^2}. \quad (6.1)$$

Chaque feuille thermoformée possède une plage de formage  $[T_{\min}, T_{\max}]$  définie par le constructeur. Pour que la feuille soit prête pour le formage, sa température doit être à l'intérieur de sa plage de formage. Cette condition a été mise sous forme d'une contrainte de flux radiatif à respecter pour chaque choix d'une combinaison de températures à assigner aux éléments du four. Pour chaque zone  $(i, j)$  de la feuille, la contrainte sur son flux est comme suit [16] :

$$q_{\min} \leq Q_{i,j} \leq q_{\max} \quad i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2.$$

En plus de cette contrainte, nous avons ajouté trois contraintes liées aux éléments du four et aux choix des températures que nous avons développé au Chapitre 5 à la Section 5.1.

Le modèle d'optimisation que nous obtenons est donc comme suit :

$$\min f(Q_{i,j}) = \frac{1}{\bar{q}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} (Q_{i,j} - \bar{q})^2},$$

sous les contraintes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} q_{\min} \leq Q_{i,j} \leq q_{\max} & i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2, \\ \sum_{k=1}^q x_{e,\ell}^k = 1 & e = 1, \dots, m_1, \ell = 1, \dots, m_2, \\ \sum_{e=1}^{m_1} \sum_{\ell=1}^{m_2} x_{e,\ell}^k \leq m_1 \times m_2 & k = 1, \dots, p, \\ x_{e,\ell}^k = x_{m_2-e+1, m_1-\ell+1}^k = x_{m_2-e+1, \ell}^k = x_{e, m_1-\ell+1}^k & e = 1, \dots, \left\lceil \frac{m_1}{2} \right\rceil, \ell = 1, \dots, \left\lceil \frac{m_2}{2} \right\rceil, \\ \tau_k \in \tau = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\} & k = 1, \dots, p. \end{array} \right.$$

## 6.2 APPLICATION DE MBO ET TS

Dans cette section, nous présentons l'évaluation des performances de deux méta-heuristiques, à savoir MBO et TS, pour trouver une solution au modèle d'optimisation développé à la section précédente. Rappelons que la solution produite est symétrique, comme mentionnée à la Section 5.2.

### 6.2.1 APPLICATION DE MBO

Le principe de la méthode MBO est inspiré des vols d'oiseaux comme le montre la Section (4.4.6). Pour implémenter et adapter cette méthode à la problématique de l'étape de chauffage de thermoformage, nous nous sommes basés sur les commentaires des

auteurs de cette méthode [103].

Rappelons que l'algorithme MBO est composé de quatre phases : initialisation des paramètres et la formation du vol, amélioration sur le leader, amélioration sur les lignes du vol, et sélection d'un nouveau leader qui va prendre la tête du groupe. Ces phases sont comme décrites ci-dessous.

La première étape de cette méthode consiste à définir les paramètres de l'algorithme et la formation du vol. Un nombre impair  $v$  de solutions est généré, ainsi chaque côté du vol est composé  $(v - 1)/2$  solutions. Pour respecter le principe de conservation d'énergie du vol d'oiseaux, les solutions de départ sont triées selon leur performance, exprimée par la fonction objectif. La meilleure solution est placée comme leader. Ensuite, les lignes du vol sont formées en alternant les solutions gauche et droite jusqu'à ce que les deux lignes soient complétées. Cette technique permet d'avoir le même potentiel sur les lignes du vol.

Après avoir placé les solutions sous forme d'un vol, l'étape suivante est l'amélioration du vol à chaque itération en explorant le voisinage des solutions. L'amélioration se fait à partir de la solution de tête vers la queue du vol. Pour le leader, un ensemble  $\alpha$  de solutions est généré dans son voisinage. Si la meilleure solution voisine est mieux que le leader, la solution donnée par le leader est remplacée par cette solution. Sinon, il reste inchangé. Les  $(\alpha - 1)$  solutions voisines non utilisées par la solution de tête sont triées dans l'ordre croissant de leur fonction objectif. Puis, deux ensembles voisins : la liste de gauche  $V_g$  et liste de droite  $V_d$  sont formées comme suit : la première solution voisine est ajoutée à  $V_g$ , la seconde est ajoutée à  $V_d$ , et ainsi de suite, jusqu'à ce que  $V_g$  et  $V_d$  soient complétées. Notons que chacun de ces deux ensembles est de cardinal  $\beta$ .

Ensuite, l'amélioration se fait sur l'ensemble des solutions des deux lignes du vol. Une



solution du vol peut être améliorée soit avec ses propres voisins, soit avec les voisins non utilisés de la solution qui est devant elle. Pour une solution  $x_{g_k}$  de la ligne gauche du vol, générer aléatoirement  $(\alpha - \beta)$  solutions voisines évaluées selon la fonction objectif. La meilleure solution est utilisée pour améliorer la solution actuelle  $x_{g_k}$ . La procédure ci-dessus est répétée jusqu'à ce que toutes les solutions dans la liste gauche aient été éventuellement améliorées. La même procédure est utilisée pour les solutions de la liste de droite. La procédure d'amélioration des solutions du vol est répétée  $\gamma$  fois sans changer la solution de tête.

Après la procédure d'amélioration des solutions des deux lignes du vol  $\gamma$  fois, nous procédons au changement de la solution de tête. La solution leader est déplacée alternativement aux extrémités de la ligne gauche et la ligne droite des deux listes, et la première solution de la liste où le leader a été placé est transmise comme nouveau leader.

Cette procédure est répétée jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt est vérifié. Pour mettre fin à la méthode, nous avons imposé deux tests. Le premier est le nombre maximum d'itérations fixé pour l'algorithme et le second est lié à l'amélioration de la qualité de la meilleure solution trouvée pour un nombre d'itérations. En effet, si la meilleure solution n'est pas améliorée pendant un nombre d'itérations, l'exécution de l'algorithme s'arrête.

Les étapes de la recherche MBO sont résumées par L'algorithme 4.

---

**Algorithme 4** : La recherche MBO

---

**Entrées :**

- L'ensemble  $\tau$  de températures de la commande du four ;
- $K$  : nombre d'itérations maximum ;
- Les paramètres suivants : nombre de solutions initiales  $v$  ; nombre de voisins évalués  $\alpha$  ; nombre de voisins partagés  $\beta$  ; nombre d'itérations avant de changer la solution tête  $\gamma$  ;

**Initialiser :**

- La boucle principale de l'algorithme  $k \leftarrow 1$  ;
- Générer  $v$  solutions et les placer sous forme d'un "V" ;

**tant que** ( $k \leq K$ ) **faire**

$i \leftarrow 1$  ;

**tant que** ( $i \leq \gamma$ ) **faire**

Améliorer la solution leader en générant  $\alpha$  solutions dans son voisinage ;

$k \leftarrow k + \alpha$  ;

**pour** ( $l = 1 : (v - 1)$ ) **faire**

Améliorer chaque solution du vol, excepté la solution leader avec  $(\alpha - \beta)$  voisins,  $\beta$  étant le nombre voisins non utilisé par la solution en avant ;

$k \leftarrow k + (\alpha - \beta)$  ;

**fin**

$i \leftarrow (i + 1)$  ;

**fin**

Déplacer la solution tête à la fin du vol, et déplacer l'une des solutions suivantes à la position tête ;

**fin**

**Retourner** : la meilleure solution.

---

La complexité temporelle de cet algorithme peut être déterminée comme suit. La génération des  $v$  solutions se fait en  $O(vm)$ . L'évaluation des solutions et leur tri se font, respectivement, en  $O(vnm + v \log v)$ . Similairement, le tri des solutions de la liste des voisins peut être évalué en  $O(\alpha nm + \alpha \log \alpha)$ . La boucle sur  $i$  est répétée  $O(v\gamma)$ . À chaque fois, le coût de l'évaluation de la fonction objectif se fait en  $O(nm)$ . La boucle externe sur  $k$  est répétée au plus  $O(K)$  fois. La complexité de tout l'algorithme est par conséquent en  $O(pnm + p \log p + k(m + nm + p))$ .

### 6.2.2 APPLICATION DE TS

Le principe de fonctionnement de la Recherche avec Tabous est basé sur des concepts simples comme nous avons pu le constater à la Section 4.4.5. Toutefois, l'adaptation de cette méthode n'est pas triviale. En particulier, la nécessité de calibrer ses paramètres pour une mise en œuvre efficace peut s'avérer extrêmement délicate.

La Recherche avec Tabous considère à chaque itération un ensemble de solutions voisins  $N(s)$ . L'évaluation complète du voisinage de la solution courante s'avère souvent extrêmement coûteuse en temps de calcul. Dans notre étude, nous avons considéré la stratégie de la liste de mouvements candidats à travers le choix d'un sous-ensemble  $N'(s)$  de meilleures solutions voisines non taboues à partir de l'ensemble de voisins  $N(s)$ .

À travers l'analyse des meilleures solutions obtenues à la simulation présentée à la Section 5.3.4 du Chapitre 5, nous déduisons que la plupart des températures des éléments du four respectent un ordre croissant, allant du centre aux extrémités du four. En effet, les éléments situés au centre du four reçoivent des petites températures et au fur et à mesure d'aller vers les éléments situés aux extrémités les températures sont plus grandes. Pour sélectionner l'ensemble des meilleures solutions candidates pour remplacer la solution courante, nous nous sommes basés sur cette observation.

Dans notre étude, la liste taboue est caractérisée par l'ensemble des couples  $(T_i, j)$  représentant, respectivement, la température  $T_i$  et l'élément  $j$  ainsi que leurs éléments symétriques de la plaque chauffante signifiant que la température  $i$  ne peut pas être assignée à l'élément  $j$ . La taille de la liste taboue est fixée d'une manière empirique.

Dans notre étude, une configuration taboue conserve son statut pendant une durée fixée d'une manière empirique. À chaque itération, la meilleure solution est mise à jour. Pour

permettre à l'algorithme d'améliorer la meilleure solution avec une solution taboue, le critère d'aspiration est mis en œuvre.

Les principales étapes de l'algorithme de Recherche avec Tabous sont résumées par l'Algorithme 5.

---

**Algorithme 5 : Recherche avec Tabous**

---

**Entrées :**

- L'ensemble  $\tau$  de températures de la commande du four;
- Fixer les valeurs suivantes : la taille  $\gamma$  de la liste taboue, le nombre maximum d'itérations  $K$  pour l'algorithme;

**Initialiser :**

- Générer une solution initiale  $s$  et évaluer la fonction de coût  $f(s)$ ;
- Initialiser la meilleure solution  $s^* \leftarrow s$ ;
- la liste taboue  $L = \emptyset$ ;
- $\ell \leftarrow 1$ ;

**tant que** ( $\ell \leq K$ ) **faire**

Générer la liste de mouvements candidats  $N'(s)$  de taille  $\alpha$ ;  
 Sélectionner la meilleure solution voisine  $s'$  telle que  $s' \notin L$ ;  
 Mettre à jour la solution courante  $s$ ;  
 Calculer  $\Delta f = f(s') - f(s^*)$ ;  
**si**  $\Delta f < 0$  **alors**  
 |  $s^* \leftarrow s'$ ;  
**sinon**  
**fin**  
 Mettre à jour  $L$ ;  $\ell \leftarrow \ell + 1$ ;

**fin**

**Retourner :** la meilleure solution.

---

La complexité temporelle de cet algorithme peut être dérivée comme suit. L'étape de l'initialisation est dominée par l'évaluation de la fonction de coût qui se fait en  $O(nm)$ . La boucle sur  $\ell$  est répétée  $K$  fois. Chaque itération prend un temps  $O(m^2) + O(\alpha nm) + O(m) + O(m)$  correspondant, respectivement, à la génération de la liste mouvements candidats, la sélection de la meilleure solution voisine, la sélection de la meilleure solution et la mise à jour de la solution courante; le reste des instructions est dominé par

les instructions que nous venons d'évaluer. La complexité totale de l'Algorithme 5 est alors en  $O(K(m^2 + \alpha nm))$ .

### 6.2.3 CONFIGURATION INITIALE ET VOISINAGE D'UNE SOLUTION

Comme nous l'avons mentionné auparavant, le choix adéquat de la configuration initiale et le voisinage pour une méta-heuristique sont d'une grande influence sur sa performance. Dans ce qui suit, nous présentons un ensemble de configurations initiales et des procédures du voisinage.

#### CONFIGURATION INITIALE

Pour la méthode MBO, la population initiale de solutions est générée de manière aléatoire. Pour la méthode TS, nous avons testé les quatre configurations initiales suivantes :

1. Solution initiale 1 : choisir aléatoirement de l'ensemble  $\tau$  des températures.
2. Solution initiale 2 : les températures de la solution sont initialisées à une valeur choisie aléatoirement de l'ensemble des températures  $\tau$ .
3. Solution initiale 3 : les températures de la solution sont initialisées à la valeur minimale de l'ensemble de températures  $\tau$ .
4. Solution initiale 4 : les températures de la solution sont fixées à la valeur maximale de l'ensemble de températures  $\tau$ .

#### PROCESSUS D'EXPLORATION DE L'ESPACE DE RECHERCHE

Pour se déplacer dans l'espace de recherche, les méta-heuristiques utilisant le voisinage d'une solution. Rappelons que le voisinage utilisé dans la simulation présentée au

Chapitre 5 utilise la permutation des températures de deux emplacements avec une probabilité ou choisir une température de l'ensemble de départ à affecter à un emplacement de la plaque, chaque fois avec une probabilité de 50%. En plus de ce voisinage, nous avons testé la permutation entre trois emplacements de la plaque chauffante.

Ce voisinage consiste à choisir au hasard 3 éléments de la plaque chauffante et leurs symétriques et inter-changer leurs températures auxquelles elles sont associées. Avec une probabilité de 50%, les valeurs des trois emplacements et leurs éléments symétriques seront inter-changées suivant la procédure illustrée par la Figure (6.1). Autrement, un emplacement de la plaque chauffante et une température de l'ensemble des températures seront sélectionnés au hasard. Cette température sera affectée à l'élément en question et les éléments qui lui sont symétriques, comme le montre la Figure (6.2). Le Tableau (6.1) résume les étapes de cette procédure.

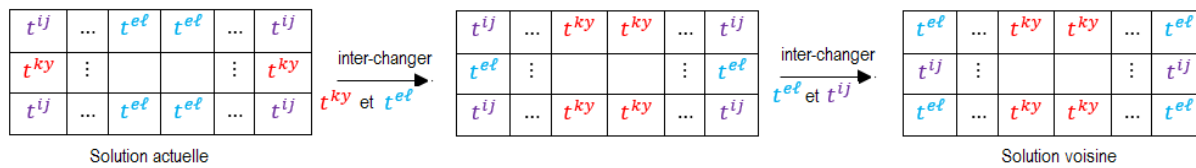


Figure 6.1: Permutation de trois températures

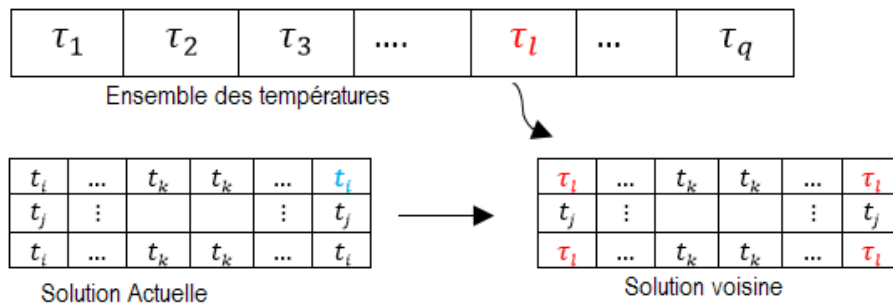


Figure 6.2: Affectation d'une température de  $\tau$  à la solution

---

 Procédure de voisinage d'une solution
 

---

1. Générer aléatoirement un nombre  $r \in [0, 1]$ ;
  2. Si ( $r \leq 0.5$ )
    - Sélectionner trois emplacements de la solution actuelle et leurs éléments symétriques et permuter leurs températures;
    - Sinon, choisir aléatoirement un emplacement et ses éléments symétriques de la solution actuelle et leurs affecter une température de l'ensemble  $\tau$ ;
- 

**Tableau 6.1: Procédure de permutation de trois températures**

### 6.3 SIMULATION NUMÉRIQUE AVEC MBO ET TS

Dans la première étude présentée au Chapitre 5, nous avons analysé l'impact du nombre d'éléments chauffants sur les résultats générés par les méta-heuristiques. Dans cette partie, nous allons choisir des exemples suivant le nombre de températures de l'ensemble  $\tau$ . L'objectif visé est l'analyse de l'influence du nombre de réglages de températures d'un élément chauffant sur la qualité de la solution. Les deux algorithmes ont été codés en C++, et débogués sous Microsoft Visual Studio 2015 sur la même machine que nous avons décrite au Chapitre précédent.

#### 6.3.1 DESCRIPTION DES EXEMPLES DE LA SIMULATION

Nous avons généré trois exemples qui diffèrent selon le nombre de températures de la commande du four. La construction de chaque ensemble de températures est relative aux nombres d'éléments chauffants. Pour un four formé de  $m = (m_1 \times m_2)$  éléments, chacun possédant un ensemble de réglages,  $p$ , de températures, les instances sont formées comme suit [17] :

- **Instance 1.**  $p = m$  : Le nombre de températures générées est le même que le nombre d'éléments chauffants du four.
- **Instance 2.**  $p < m$  : Le nombre de températures générées est inférieur aux nombres d'éléments chauffants du four.
- **Instance 3.**  $p > m$  : Le nombre de températures générées est supérieur aux nombres d'éléments chauffants du four.

Les températures de l'ensemble  $\tau$  sont constituées de valeurs équidistribuées entre 300K et 1000K. Pour ne pas alourdir les calculs, nous avons fixé le nombre d'éléments  $m = m_1 \times m_2$  du four à 36 ( $6 \times 6$ ). Les instances que nous avons utilisées dans cette simulation sont résumées au Tableau (6.2).

$I$	Ensemble $\tau$ de températures	$ \tau $
1	{ 300, 370, 440, 510, 580, 650, 720, 790, 860, 930, 1000}.	11
2	{300, 320, 340, 360, 380, 400, 420, 440, 460, 480, 500, 520, 540, 560, 580, 600, 620, 640, 660, 680, 700, 720, 740, 760, 780, 800, 820, 840, 860, 880, 900, 920, 940, 960, 980, 1000}.	36
3	{300, 310, 320, 330, 340, 350, 360, 370, 380, 390, 400, 410, 420, 430, 440, 450, 460, 470, 480, 490, 500, 510, 520, 530, 540, 550, 560, 570, 580, 590, 600, 610, 620, 630, 640, 650, 660, 670, 680, 690, 700, 710, 720, 730, 740, 750, 760, 770, 780, 790, 800, 810, 820, 830, 840, 850, 860, 870, 880, 890, 900, 910, 920, 930, 940, 950, 960, 970, 980, 990, 1000}.	71

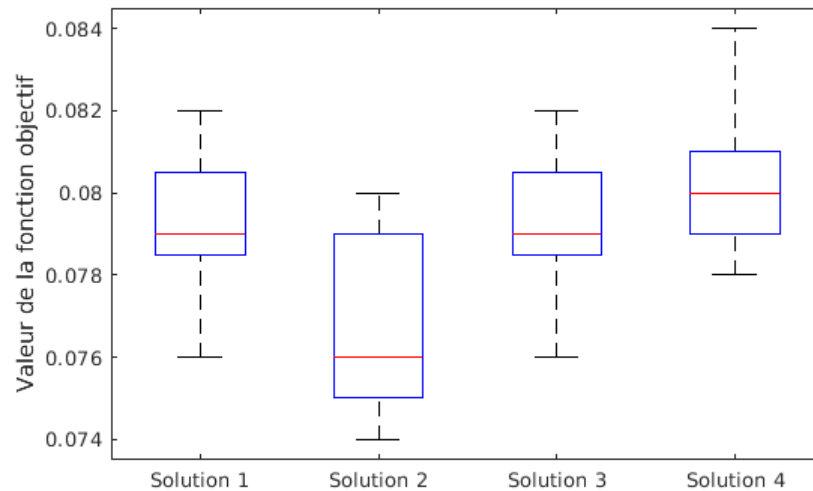
**Tableau 6.2: Instances de la simulation**

### 6.3.2 CONFIGURATION INITIALE ET CONSTRUCTION DU VOISINAGE

Pour choisir la méthode de construction de la solution initiale de la méta-heuristique TS, nous avons exécuté la première instance présentée au Tableau (6.2) une dizaine de fois. Les résultats générés sont présentés à la Figure (6.3). En vertu des résultats obtenus, nous avons gardé la solution initiale 2 : les températures de la solution sont identifiées à une



seule valeur choisie aléatoirement de l'ensemble des températures  $\tau$ .



**Figure 6.3: Choix de la solution initiale**

Pour sélectionner le voisinage le plus adéquat entre la permutation de deux et trois températures, présentées à la Section (6.2.3), nous avons testé ces deux voisinages sur l'ensemble des instances données au Tableau (6.2). Notons, respectivement, voisinage 1 et voisinage 2 la permutation de deux et trois températures. La Figure (6.4) résume les résultats de l'exécution. Nous pouvons observer que la permutation de deux températures produit de meilleurs résultats par rapport à la permutation de trois températures. Pour la suite de l'étude, la construction d'un voisinage d'une solution est basée sur la permutation de deux températures.

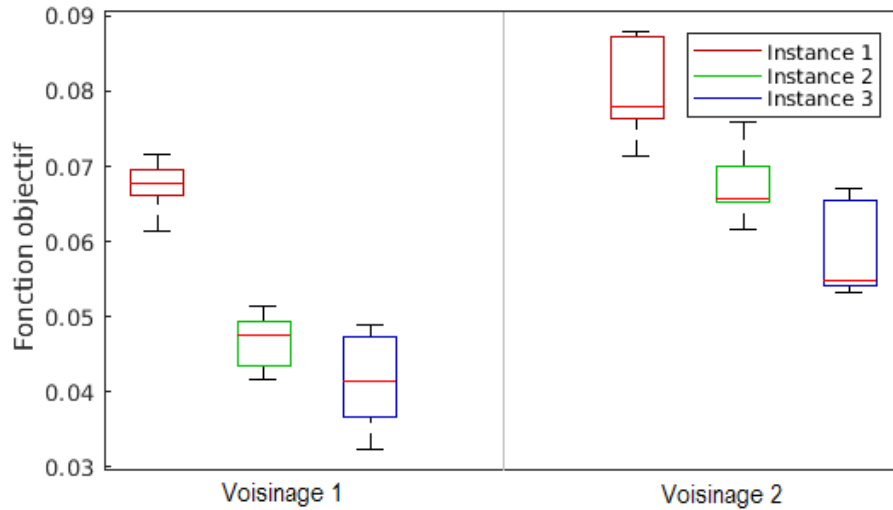


Figure 6.4: Choix du voisinage

Comme toutes les méta-heuristiques, l'étape du choix des valeurs des paramètres est cruciale sur la performance de la méthode. Dans ce qui suit, nous procédons à une étude préliminaire pour fixer les paramètres de chaque méthode.

### 6.3.3 RÉGLAGE DES PARAMÈTRES DE MBO

Nous avons assigné différentes valeurs de référence aux paramètres de l'algorithme :  $v = 25$ ,  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 2$  et  $\gamma = 2$ . Les paramètres sont fixés un par un. Nous avons réalisé les tests sur l'instance 1 et le nombre d'itérations maximum est fixé à 10 000 itérations. Pour chaque paramètre, l'algorithme a été lancé une dizaine de fois.

- **Taille du vol** : Pour le nombre de solutions dans le vol, il est recommandé de prendre des nombres impairs, avec des tailles modestes [103]. Ainsi, nous avons testé les tailles allant de 11 à 51. Comme le montre la Figure (6.5), les meilleurs résultats ont été obtenus avec la taille 51.

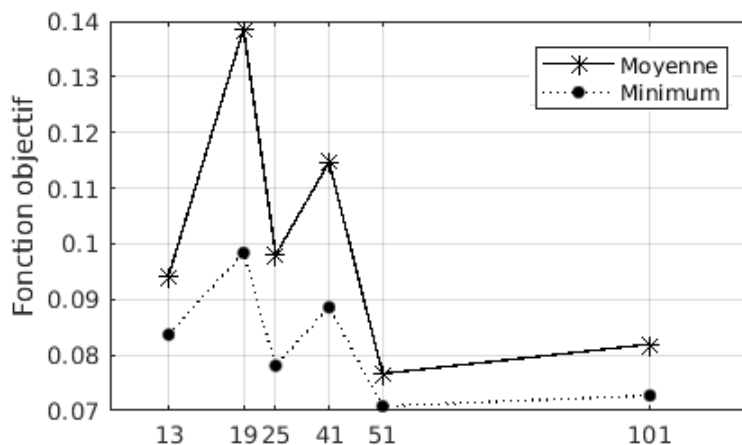


Figure 6.5: Effet de la variation de la taille du vol

- Nombre de voisins évalués** : Nous avons testé des petites valeurs pour  $\alpha$  afin de permettre une exploration d'un plus grand nombre de solutions. Comme le montre la Figure (6.6), nos tests pour les différentes tailles d'instances pour  $\alpha = 3, 5, 7, 11$  nous ont permis de constater que les valeurs 5, 11 et 21 produisent en moyenne des résultats de moindre qualité que le résultat de valeur 7. Nous avons par conséquent choisi  $\alpha = 7$  pour la suite des tests.

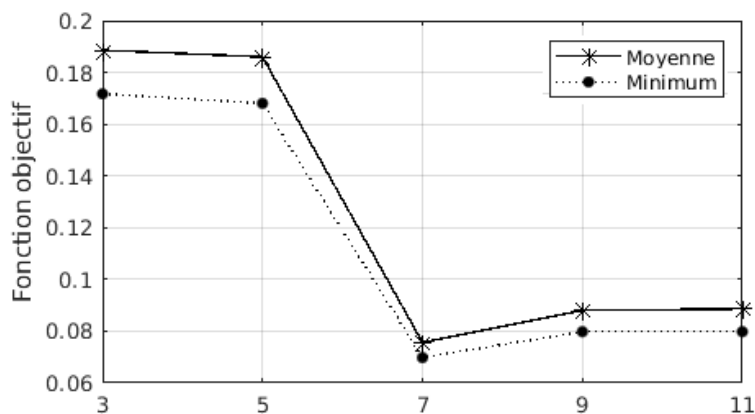


Figure 6.6: Effet de la variation du nombre de voisins évalués

- Temps de vol du leader** : Le paramètre  $\gamma$  permet de mieux explorer les voisinages des nouvelles solutions. Il est recommandé de prendre de petites valeurs pour

ce paramètre [103]. Les valeurs que nous avons testées sont  $\gamma = 1, 2, 10$  et  $20$ . Les résultats des tests illustrés à la Figure (6.7) montrent qu'il est préférable de fixer  $\gamma$  à la valeur 10.

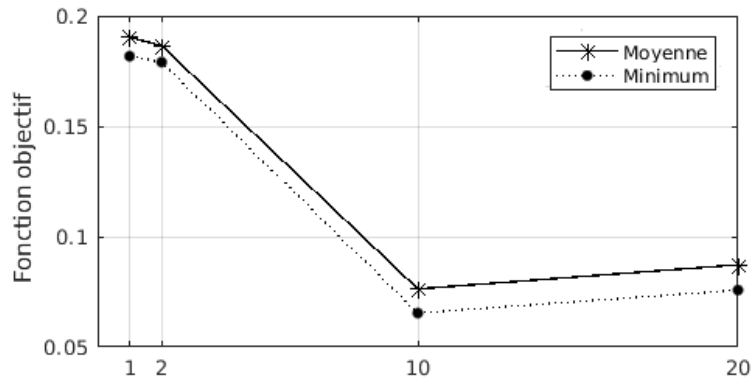


Figure 6.7: Effet de la variation du temps de vol du leader en tête

- **Nombre de voisins partagés** : Les auteurs de la méthode [103] conseillent de petites valeurs pour  $\beta$ . Dans cette série d'exécutions effectuées sur notre problème, nous avons pris successivement les valeurs  $\beta = 1, 2, 3$ , et  $5$ . Les résultats de nos tests, illustrés à la Figure (6.8), suggèrent qu'il est préférable de prendre  $\beta = 3$ .

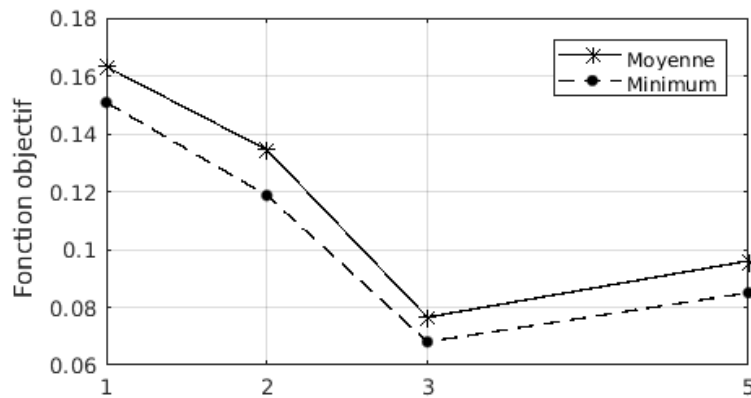


Figure 6.8: Effet de la variation du nombre de voisins partagés

### 6.3.4 RÉGLAGE DES PARAMÈTRES DE TS

Les paramètres qui influencent la performance de la Recherche avec Tabous sont la taille de la liste taboue et la durée taboue d'une solution. Pour cela, nous avons mené une étude où chaque paramètre a été testé sur plusieurs valeurs à chaque fois. Nous faisons varier la valeur d'un paramètre de l'algorithme en fixant les autres paramètres à des valeurs de référence. Pour chacun de ces paramètres, l'algorithme est lancé une dizaine de fois afin d'analyser la variation des valeurs de la fonction objectif du minimum et en moyenne.

La Figure (6.9) montre les résultats produits par TS pour différentes valeurs de la taille de la liste taboue allant de 3 à 12. Les résultats de ces tests suggèrent qu'il est préférable de prendre la valeur 7.

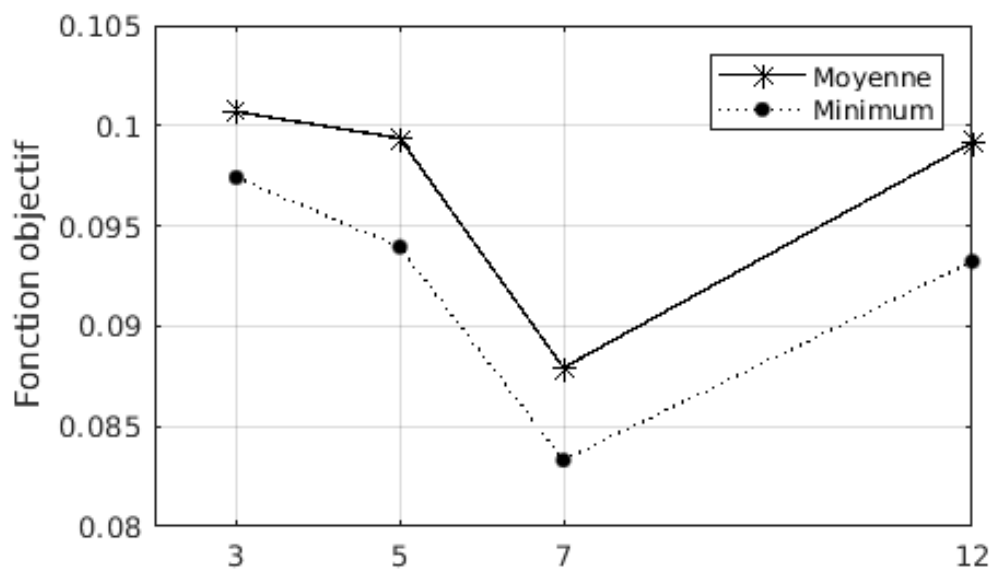


Figure 6.9: Effet de la variation de la taille de la liste taboue

Concernant le paramètre de la durée d'une solution taboue, nous avons exécuté l'algorithme pour les valeurs de  $U = 3, 7, 13$  et  $17$ . Les résultats de ces tests, illustrés à la Figure (6.10), montrent qu'il est préférable de fixer  $U$  à la valeur 13.

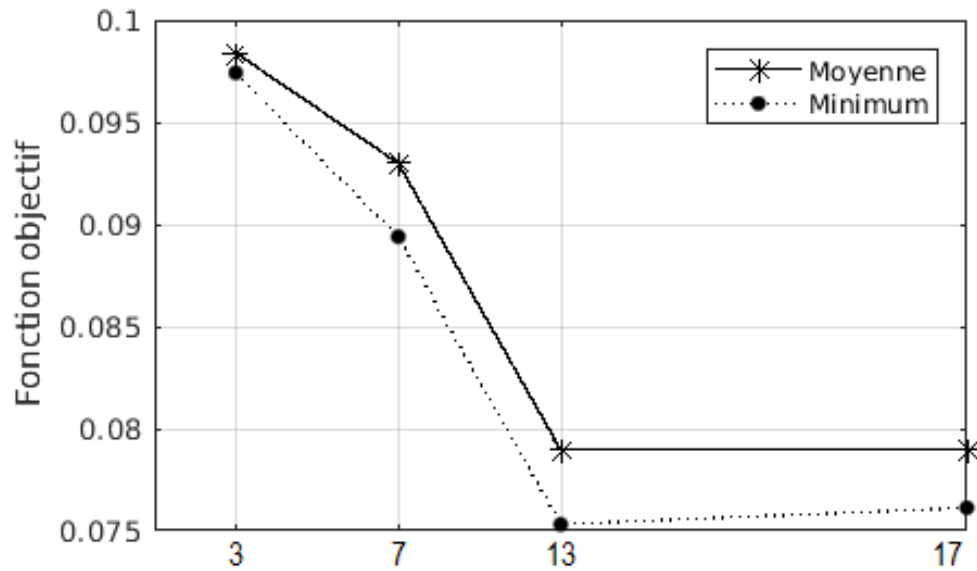
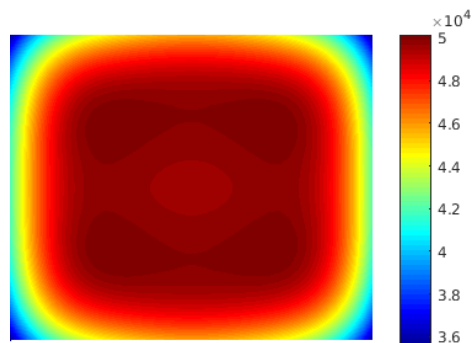


Figure 6.10: Effet de la variation de la durée qu'une solution reste taboue

### 6.3.5 RÉSULTATS ET DISCUSSION

Après avoir fixé les paramètres des algorithmes MBO et TS, nous avons exécuté ces deux méthodes sur l'ensemble des instances du Tableau (6.2). Rappelons que l'objectif de cette simulation est de tester l'influence des températures de l'ensemble  $\tau$  sur le temps et la qualité des solutions produites par ces deux méta-heuristiques. Pour ne pas alourdir les calculs, nous avons sélectionné un four à 36 ( $6 \times 6$ ) éléments. Chaque algorithme est exécuté 10 fois pour chaque exemple. Le nombre maximal d'itérations de chaque algorithme est fixé à 40 000. Nous avons fixé le flux radiatif reçu par la surface de la feuille entre  $35 \times 10^3$  et  $50 \times 10^3$   $\text{W.m}^{-2}$ . Ci-dessous (voir Tableau 6.3 à 6.5) les meilleures solutions produites pour chaque exemple.

$i, j$	1	2	3	4	5	6
1	580	510	510	510	510	580
2	510	510	370	370	510	510
3	580	370	440	440	370	580
4	580	370	440	440	370	580
5	510	510	370	370	510	510
6	580	510	510	510	510	580

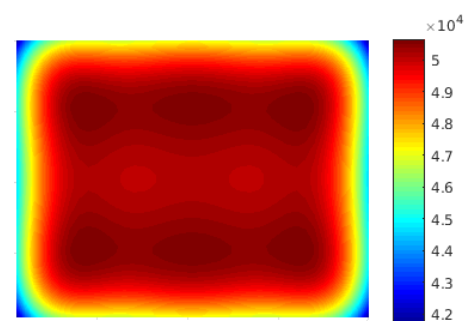


(a) Température des éléments

(b) Flux surfacique

**Tableau 6.3: Solution de l'instance 1**

$i, j$	1	2	3	4	5	6
1	680	460	500	500	460	680
2	500	420	420	420	420	500
3	580	400	440	440	400	580
4	580	400	440	440	400	580
5	500	420	420	420	420	500
6	680	510	500	500	460	680

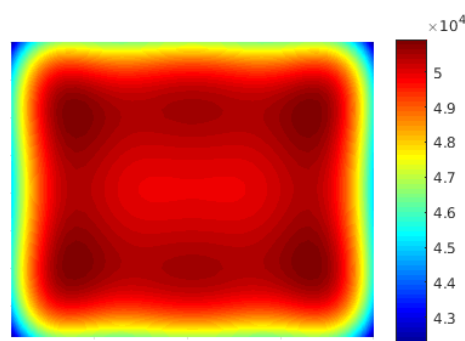


(c) Température des éléments

(d) Flux surfacique

**Tableau 6.4: Solution de l'instance 2**

$i, j$	1	2	3	4	5	6
1	680	470	500	500	470	680
2	510	420	410	410	420	510
3	580	400	440	440	400	580
4	580	400	440	440	400	580
5	510	420	410	410	420	510
6	680	470	500	500	470	680



(e) Température des éléments

(f) Flux surfacique

**Tableau 6.5: Solution de l'instance 3**

Le Tableau (6.3) illustre la distribution du flux radiatif reçue par la surface de la feuille à partir des températures, affectées aux 36 ( $6 \times 6$ ) éléments du four, choisies de l'ensemble  $\tau$  de cardinal 11. L'écart de flux radiatif est ( $14 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2}$ ). Quand le choix des températures est réalisé à partir de l'ensemble  $\tau$ , de cardinal 36, l'écart de flux radiatif à la surface de la feuille est de ( $8 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2}$ ) comme le montre le Tableau (6.4). Alors que, pour une commande de cardinal 72, le Tableau (6.5) montre que l'écart de flux radiatif est plus petit; sa valeur est de ( $7 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2}$ ). En vertu de ces résultats, nous concluons que plus l'ensemble de températures de la commande de contrôle est grand, meilleure est l'uniformité du flux radiatif à la surface de la feuille.

### 6.3.6 COMPARAISON ENTRE LES MÉTA-HEURISTIQUES

En plus de la comparaison entre les méthodes MBO et TS, nous les avons également comparées avec les résultats obtenus avec la méthode SA, qui a démontré son efficacité discutée à la Section (5.3.5). La comparaison de ces méthodes est limitée à la performance de chacune par rapport à la fonction objectif et au temps d'exécution. Les Tableaux (6.8), (6.6) et (6.7) résument les résultats obtenus en les exécutant de 10 fois sur chaque exemple du Tableau (6.2). Les résultats obtenus sont par rapport à la moyenne (Moy), écart type (Dev-St) des 10 instances, ainsi que la valeur minimale (Min) générée, respectivement, par les algorithmes MBO, TS et SA et leur temps moyen d'exécution (Tps).

$n$	Min	Moy	Dev-St	Tps (s)
11	0.063	0.065	$10^{-5}$	740
36	0.041	0.044	$10^{-5}$	854
72	0.038	0.040	$10^{-5}$	872

**Tableau 6.6: Résultats générés par MBO**



$n$	Min	Moy	Dev-St	Tps (s)
11	0.074	0.084	$10^{-2}$	24
36	0.062	0.073	$10^{-2}$	26
72	0.048	0.062	$10^{-3}$	34

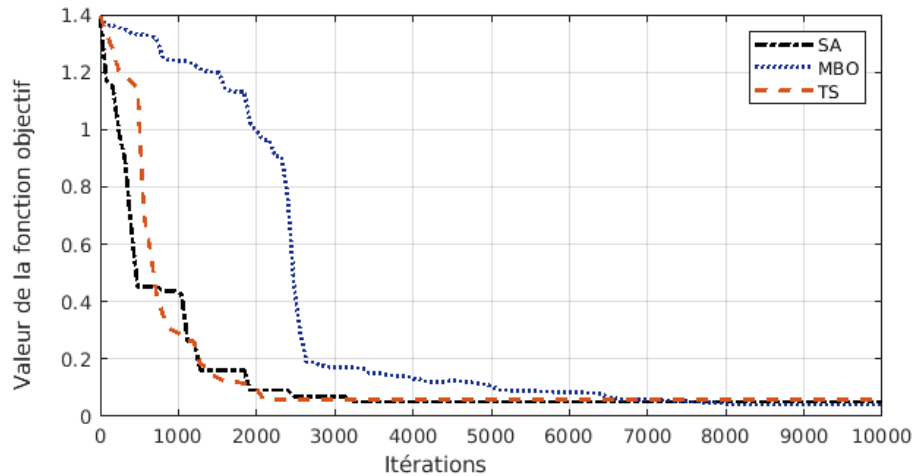
**Tableau 6.7: Résultats générés par TS**

n	Min	Moy	Dev-St	Tps (s)
11	0.064	0.067	$10^{-2}$	23
36	0.051	0.058	$10^{-2}$	27
72	0.038	0.040	$10^{-4}$	36

**Tableau 6.8: Résultats générés par SA**

Les résultats obtenus de l'exécution des trois algorithmes montrent que les meilleurs résultats sont produits par l'algorithme SA et MBO par rapport au minimum et en moyenne. Nous constatons aussi que la qualité des solutions trouvées par TS est plutôt médiocre. Nous déduisons également que MBO est plus stable comparativement à SA. En effet, les solutions en moyenne et par rapport au minimum sont presque les mêmes et l'écart type entre les solutions générées par la méthode MBO est plus petit que celui de SA. La méthode SA parfois se bloque dans des minima locaux comparativement à MBO qui arrive dans toutes les exécutions à trouver la meilleure solution. Concernant les temps d'exécution de TS et SA, ils sont de loin meilleurs que celui de la méthode MBO.

Pour plus d'informations sur le comportement des trois méthodes, nous avons analysé de plus près l'amélioration de la meilleure solution de chaque méthode. La Figure (6.11) résume l'amélioration de la meilleure solution par rapport au nombre d'itérations des trois méthodes.



**Figure 6.11: Meilleure solution en fonction du nombre d'itérations**

Les résultats montrent que, après 7600 itérations, il n'y a aucune amélioration de la solution produite par les trois méthodes. Les méthodes SA et TS restent souvent bloquées dans un minimum local sans parvenir à la meilleure solution générée par la méthode MBO. Nous constatons que la méthode SA se bloque parfois dans des minimums locaux pour un certain nombre d'itérations comparativement à MBO et TS qui améliorent constamment la meilleure solution. La méthode MBO met plus de temps à générer la meilleure solution, car elle explore de manière minutieuse l'espace de recherche et parvient souvent à se dégager des minimums locaux.

#### 6.4 CONCLUSION PARTIELLE

Dans cette deuxième contribution, nous avons proposé une nouvelle fonction objectif pour une meilleure répartition uniforme de l'énergie pour deux méta-heuristiques : MBO et TS que nous avons adaptées. Pour analyser l'influence de l'ensemble de températures

de la commande des éléments du four sur la qualité de la solution obtenue, nous avons testé trois exemples de commande avec des cardinalités différentes. Une partie des résultats obtenus a fait l'objet d'une participation à deux conférences [15, 16] et un rapport de recherche *Les cahiers du GERAD* [17].

Nous avons exécuté ces deux méthodes sur une batterie d'exemples qui diffèrent selon le nombre de températures de l'ensemble  $\tau$  dans le but d'en tester l'influence sur les résultats de la simulation. À la lumière des résultats obtenus, nous constatons que, plus le cardinal de l'ensemble de températures de la commande de four est grand, meilleure est l'uniformité du flux radiatif. Cependant, les temps d'exécution des algorithmes utilisés deviennent de plus en plus importants.

À l'issue de l'exécution des 10 instances par chaque algorithme, nous avons constatons, que la meilleure solution est toujours produite par la méthode MBO. Cependant, son temps d'exécution est moins attractif que celui de la méthode SA. Pour surmonter la faiblesse de chaque méthode, nous avons opté pour l'hybridation de ces méta-heuristiques en combinant les forces de chacune d'elles. Cette avenue est présentée au Chapitre 7.



## **CHAPITRE 7**

### **HYBRIDATION DES MÉTA-HEURISTIQUES**

Les méthodes hybrides combinent divers concepts des méta-heuristiques pour dériver une méthode encore plus efficace et de meilleure qualité. Ce chapitre est consacré à la description du mécanisme d'hybridation de méta-heuristiques pour résoudre la problématique de répartition uniforme du flux radiatif à la surface de la feuille thermoplastique.

Dans cette contribution, nous avons conçu une méthode hybride dans le but de combiner les avantages de deux méta-heuristiques, à savoir le Recuit Simulé (SA) et la méthode d'Optimisation d'Oiseaux Migratoires (MBO). Pour montrer l'efficacité de la méthode hybride, nous avons mené une étude comparative entre les résultats obtenus avec la méthode hybride, SA et MBO.

Pour rapprocher le plus possible la simulation numérique de la pratique, nous avons simulé le chauffage d'une feuille de PET et ABS dans un four de thermoformage d'échelle industrielle [64]. Dans un premier temps, nous avons optimisé les températures du four à l'aide de la méthode hybride. Ensuite, nous sommes passés au calcul de la température des deux feuilles étudiées.

## 7.1 HYBRIDATION DES MÉTA-HEURISTIQUES

À l'issue des résultats des simulations précédentes, Chapitre 5 et 6, les méthodes SA et MBO sont les mieux adaptées pour la problématique de notre étude. À travers l'analyse des résultats de la simulation numérique, nous avons pu constater que SA génère une descente rapide vers la meilleure solution, contrairement à la méthode MBO qui explore de manière approfondie l'espace de recherche (voir Figure (6.11)). Nous déduisons que la tâche d'intensification est en grande partie réalisée par la méthode MBO, alors que celle de la diversification est exécutée par la méthode du Recuit Simulé.

En générale, la méthode MBO surpasse la méthode du Recuit Simulé en qualité de solutions générées. Cependant, son temps d'exécution est plus élevé par rapport à celui de la méthode du Recuit Simulé. Pour jumeler les qualités des deux méthodes, nous avons développé une méthode hybride pour la problématique traitée dans ce travail.

### 7.1.1 CONCEPTION D'UNE MÉTHODE HYBRIDE

Dans cette partie, nous allons discuter la structure de l'hybridation que nous avons réalisée avec les méthodes SA et MBO. L'algorithme MBO, comme décrit au Chapitre 6, est une méthode à population de solutions. Son inconvénient est sa lenteur prononcée dès que la taille de la population devient de plus en plus grande. À travers les résultats de l'étude présentée au Chapitre 5, la méthode SA a montré, quant à elle, son efficacité pour la résolution de la problématique étudiée dans ce travail de recherche. En effet, la méthode SA converge rapidement vers la meilleure solution du voisinage dans laquelle elle fait sa recherche. Globalement, cette solution n'est pas toujours la meilleure. Même si son temps d'exécution est assez lent, MBO arrive à se diriger vers une meilleure solution

globale, une fois qu'elle est dans le bon voisinage. L'idée d'hybridation est proposée pour minimiser le temps de calcul et aussi améliorer la qualité de la solution trouvée.

L'hybridation que nous avons choisie est de type séquentiel. Cette approche consiste à lancer dans un premier temps, la méthode SA pour un certain nombre d'itérations. Comme nous l'avons constaté, en peu de temps, cette méthode va diriger la recherche vers une région prometteuse pour générer une solution de bonne qualité. Dans le voisinage de la meilleure solution  $s_{best}$  générée par SA, une population de solutions initiales est créée pour lancer MBO pour un certain nombre d'itérations. De cette façon, la méthode MBO est déjà dans un bon voisinage pour trouver rapidement une solution meilleure que celle produite par SA.

La méthode hybride est formée de trois étapes principales : initialisation des paramètres de la méthode, lancement de SA suivie du lancement de MBO. Les paramètres d'initialisation de la méthode sont liés à ceux des méthodes SA et MBO que nous avons définies à la Section (5.2.1) et (6.2.1), respectivement.

Les étapes de l'hybridation de SA et MBO sont résumées par l'Algorithme 6.

---

**Algorithme 6 :** Hybridation de SA et MBO

---

**Entrées :**

- Introduire l'ensemble  $\tau$  de températures de la commande du four ;
- Fixer les paramètres  $T_0, c$  de la méthode SA et  $\alpha, \beta, \gamma$  de la méthode MBO. Fixer  $I$  et  $J$  le nombre maximum d'itérations, respectivement, de SA et MBO.

**Initialiser :**

- Générer une solution initiale  $s$  et évaluer la fonction de coût  $f(s)$  ; fixer la meilleure solution  $s_{best} \leftarrow s'$  ;

**pour** ( $i = 1 : I$ ) **faire**

  | Lancer la méthode SA ;

**fin**

**Retourner :** la meilleure solution  $s_{best}$  ;

Générer une population  $n$  solutions dans le voisinage  $s_{best}$  ;

**pour** ( $i = 1 : J$ ) **faire**

  | Lancer la méthode MBO pour  $J$  itérations ;

**fin**

**Retourner :** la meilleure solution.

---

### 7.1.2 COMPARAISON ENTRE LA MÉTHODE HYBRIDE, SA ET MBO

Dans cette section, nous présentons les résultats numériques obtenus avec la méthode hybride présentée ci-dessus. Pour évaluer la performance de cette approche hybride, nous avons repris la simulation de la Section 6.3. Le but est de réaliser une comparaison avec les résultats générés par les méthodes SA et MBO, prises individuellement.

La méthode hybride a été codée en C++, et déboguée sous Microsoft Visual Studio 2015 sur ordinateur avec les mêmes caractéristiques décrites au Chapitre 5. Les résultats de cette simulation sont résumés au Tableau (7.1).

Un éclaircissement sur le nombre d'itérations s'impose ici. En effet, nous avons constaté, lors des simulations précédentes, que la qualité des solutions générées par méthode SA s'améliorait rapidement. Cette progression toutefois se stabilisait à partir de l'itération 4000 (voir Figure (6.11)). Quant à la méthode MBO, nous nous sommes aperçus que les



meilleures solutions se généraient lorsque le voisinage devenait prometteur, c'est-à-dire à partir des itérations 4000. Cette remarque a été prise en compte dans l'implémentation de notre solution hybride.

Instance 1				
	Min	Moy	Dev-St	Tps(s)
Hyb-SA et MBO	0.024	0.029	$10^{-5}$	58
SA	0.064	0.066	$10^{-2}$	23
MBO	0.063	0.068	$10^{-5}$	740
Instance 2				
Hyb-SA et MBO	0.019	0.019	$10^{-5}$	64
SA	0.051	0.054	$10^{-2}$	27
MBO	0.041	0.042	$10^{-5}$	854
Instance 3				
Hyb-SA et MBO	0.012	0.013	$10^{-5}$	70
SA	0.038	0.041	$10^{-4}$	36
MBO	0.038	0.040	$10^{-5}$	872

**Tableau 7.1: Résultats obtenus par la méthode hybride, SA et MBO**

Nous constatons que l'hybridation de la méthode SA et MBO a amélioré considérablement les résultats de la simulation par rapport aux deux critères que sont la fonction objectif et le temps d'exécution.

## 7.2 SIMULATION NUMÉRIQUE AVEC LA MÉTHODE HYBRIDE

Dans cette section, nous allons simuler le chauffage d'une feuille de PET et ABS dans un four de thermoformage industriel. À travers cette simulation, nous avons optimisé dans un premier temps le flux radiatif à la surface de la feuille de manière à avoir une répartition uniforme de ce dernier. Une fois que les températures du four sont

sélectionnées, nous avons procédé au calcul de la température de la feuille. Pour valider l'efficacité de la méthode que nous avons développée, nous avons mené une étude comparative entre la distribution du flux radiatif avant et après optimisation.

### *7.2.1 SIMULATION SUR UNE FEUILLE PET*

Dans cette partie, nous avons réalisé la simulation en considérant les caractéristiques de la feuille à thermoformer de type PET (voir plus loin pour la définition). Le four, de taille  $1.95\text{ m} \times 1.4\text{ m}$ , est formé de 100 éléments chauffants respectivement sur la partie supérieure et inférieure de dimension  $0.163\text{ m} \times 0.06\text{ mm}$ . La commande d'éléments du four formée de températures générées entre 400 K et 1000 K avec un pas de 1.

Concernant la feuille PET, elle est de dimension  $1.95\text{ m} \times 1.4\text{ m} \times 0.012\text{ m}$ , placée à une distance 0.27 m des éléments du four. La plage de formage de cette feuille est comprise entre  $90^{\circ}\text{C}$  et  $100^{\circ}\text{C}$ . Nous supposons que la propagation de la chaleur à l'intérieur de la feuille se fait d'une manière uniforme. Ce matériau peut être considéré comme semi-transparent, gris, partiellement absorbant, homogène et non diffusant [10]. Les conditions initiales ainsi que les propriétés thermo-physiques du PET sont résumées au Tableau (7.2).

Propriétés thermique de PET	valeurs
Diffusion thermique $\alpha$ ( $ms^{-2}$ )	$1.183.10^{-7}$
Densité $\rho$ ( $kg.m^{-3}$ )	1335
Chaleur spécifique $c_p$ ( $J.kg^{-1}.k^{-1}$ )	1750
Conductivité thermique $k$ ( $W.m^{-1}.k^{-1}$ )	0.25
Coefficient d'absorption $\beta$ (longueur d'onde $[0.2 - 10]\mu m$ )	2660
Émissivité $\varepsilon$	0.93
Température Initiale $T_{init}$ ( $^{\circ}C$ )	27
Température ambiante $T_{\infty}$ ( $^{\circ}C$ )	30
Temps de chauffage $t$ (s)	35
Température du four avant optimisation (K)	652
Température du four après optimisation (K)	Tableau 7.3

**Tableau 7.2: Propriétés thermophysiques de la feuille PET**

La feuille est chauffée des deux côtés avec la même puissance de chauffage pour un temps généralement de l'ordre allant de 15s à 35s. Les valeurs produites par la méthode hybride sont résumées au Tableau (7.3).

$i, j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	875	805	805	805	805	805	805	805	805	875
2	739	505	505	505	505	505	505	505	505	739
3	720	621	635	632	633	633	632	635	621	720
4	732	621	635	625	633	633	633	635	621	732
5	732	621	635	633	633	630	633	635	621	732
6	732	621	635	633	633	630	633	635	621	732
7	732	621	635	625	633	625	633	635	621	732
8	720	621	635	632	633	633	632	635	621	720
9	739	505	505	505	505	505	505	505	505	739
10	875	805	805	805	805	805	805	805	805	875

**Tableau 7.3: Températures des éléments du four**

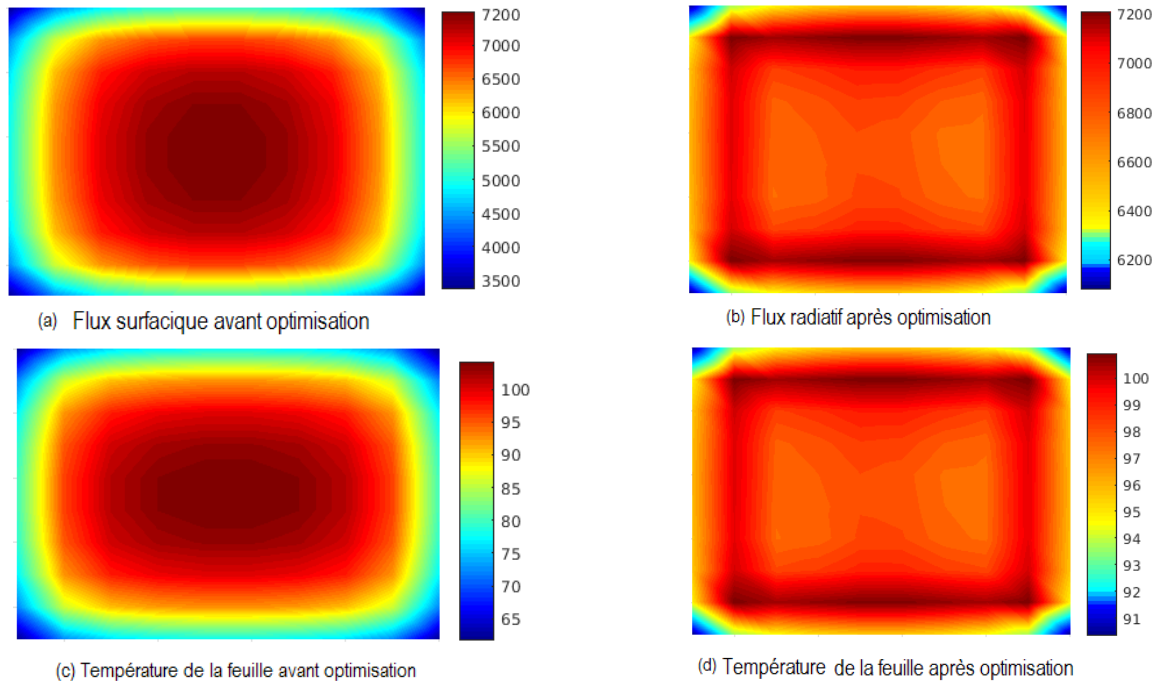
Afin d'analyser la performance de notre méthode d'optimisation, nous avons mené une

étude comparative entre un chauffage à l'aide de températures identiques des éléments du four et un chauffage optimisé. Les résultats du flux radiatif et des températures à la surface de la feuille sont résumés à la Figure (7.1). Cette figure illustre la distribution du flux radiatif et de la température avant et après optimisation des températures des éléments chauffants. Les Figure (7.1)-a et 7.1-b résumant les résultats de la distribution du flux radiatif avant et après optimisation des températures des 100 éléments chauffants. Les résultats montrent que, avant l'optimisation, l'écart de flux radiatif est  $3\,700\text{ W.m}^{-2}$  pour un maximum de  $7\,200\text{ W.m}^{-2}$  concentré au milieu et un minimum de  $3\,500\text{ W.m}^{-2}$  situés aux limites de la surface de la feuille thermoplastique. Pour le même profil de flux de chaleur, après l'optimisation, la différence est réduite de  $1\,000\text{ W.m}^{-2}$ . Les bords de la surface sont plus chauffés et la distribution du flux de chaleur est meilleure pour un maximum de  $7\,200\text{ W.m}^{-2}$  et un minimum de  $6\,200\text{ W.m}^{-2}$ .

Les Figure (7.1)-c et 7.1-d illustrent la distribution de la température à la surface de la feuille, respectivement, avant et après l'optimisation des températures du four. Les résultats montrent que l'écart de température entre le centre et les extrémités de la feuille est plus important avant l'optimisation. En effet, pour un chauffage uniforme des températures des éléments du four, l'écart de température à la surface de la feuille est de  $35^{\circ}\text{C}$  pour un maximum de  $100^{\circ}\text{C}$  au centre de la feuille et un minimum de  $65^{\circ}\text{C}$  aux extrémités. Avec un chauffage optimisé, l'écart de températures entre les extrémités et le centre de la feuille est réduit à  $9^{\circ}\text{C}$ . Les extrémités de la feuille sont ainsi mieux chauffées avec une température de  $91^{\circ}\text{C}$  et une zone centrale de  $91^{\circ}\text{C}$ .

Notons par ailleurs que, dans le cas d'un chauffage non optimisé, la température des extrémités de la feuille n'atteint pas la température minimale de formage qui est de  $90^{\circ}\text{C}$ .

Cela peut être une cause significative des défauts de formage de la feuille.



**Figure 7.1: Distribution du flux radiatif et de la température sur une feuille PET**

### 7.2.2 SIMULATION SUR UNE FEUILLE ABS

Pour rester dans le même environnement de four industriel, dans cette simulation, nous considérons un four dont les dimensions sont  $1.95 \text{ m} \times 1.4 \text{ m}$ , formé de 144 ( $12 \times 12$ ) éléments chauffants respectivement sur la partie supérieure et inférieure. La température de chaque élément est comprise entre  $300 \text{ K}$  et  $900 \text{ K}$  avec un pas de 1.

Nous considérons la simulation de chauffage d'une feuille de type ABS de dimension  $1.95 \text{ m} \times 1.4 \text{ m} \times 0.012 \text{ m}$ , placée à une distance  $0.270 \text{ m}$  des éléments du four. La plage de formage de cette feuille est comprise entre  $140^\circ\text{C}$  et  $160^\circ\text{C}$ . Le temps de chauffage est fixé à 90 secondes. La température initiale de la feuille  $T_{\text{init}}$  est fixée à  $27^\circ\text{C}$  et la température

ambiante  $T_\infty$  est de  $30^\circ\text{C}$ . Les propriétés thermiques de la feuille thermoplastique sont considérées comme indépendantes des températures. Les valeurs moyennes que nous considérons sont résumées au Tableau (7.4) [66].

Propriétés thermiques de ABS	valeurs
Densité $\rho$ ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	1050
Chaleur spécifique $c_p$ ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{k}^{-1}$ )	2590
Conductivité thermique $k$ ( $\text{W.m}^{-1}.\text{k}^{-1}$ )	0.174
Émissivité $\varepsilon$	0.85
Température Initiale $T_{\text{init}}$ ( $^\circ\text{C}$ )	27
Température ambiante $T_\infty$ ( $^\circ\text{C}$ )	30
Temps de chauffage $t$ (s)	90
Température du four avant optimisation (K)	600
Température du four après optimisation (K)	Tableau 7.3
Plage de formage	$140^\circ\text{C} - 160^\circ\text{C}$

**Tableau 7.4: Propriétés thermophysiques de la feuille ABS ( Zhen-Zhe L (2010))**

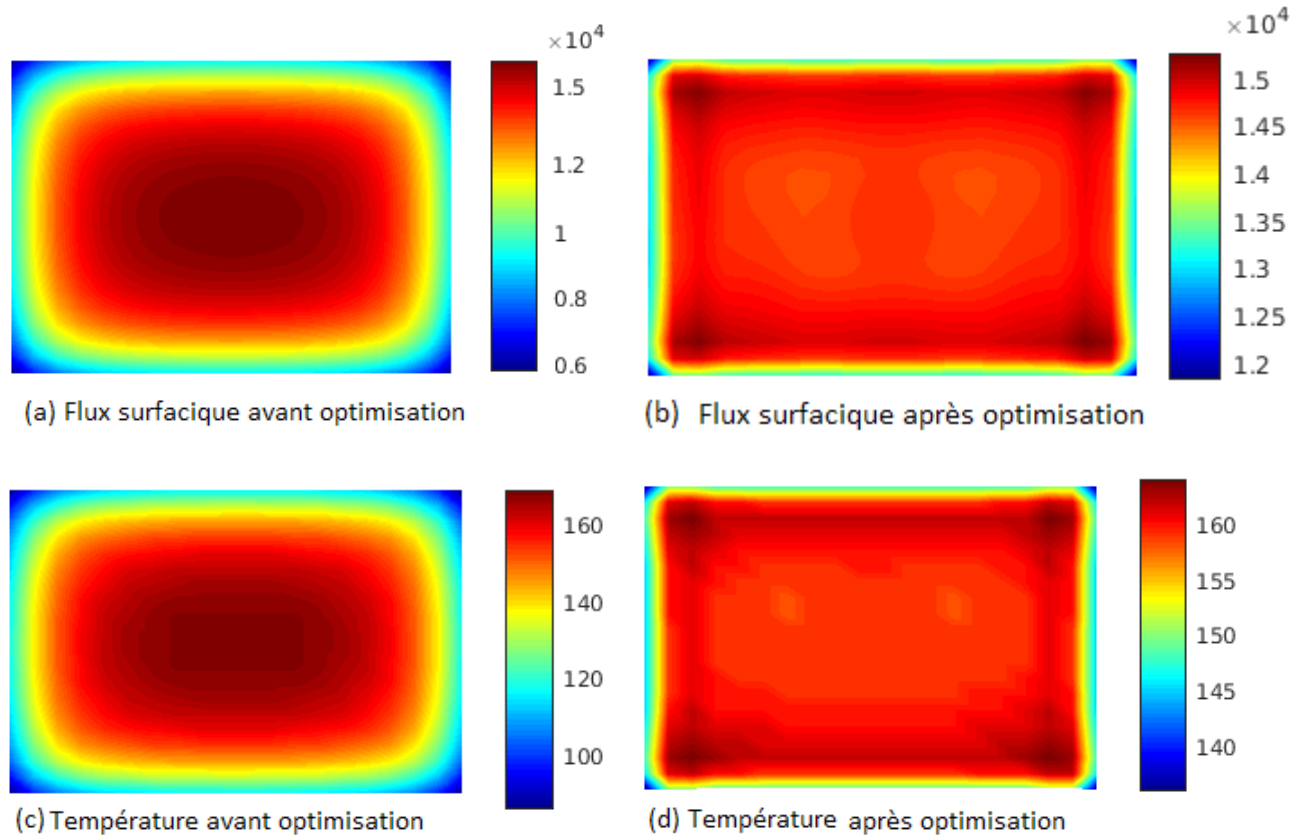
Pour générer les températures à assigner au four, nous avons appliqué la méthode hybride (voir l'Algorithme 6). Les valeurs produites par cette méthode sont résumées au Tableau (7.5).

$i, j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	900	710	762	755	752	755	755	752	755	762	710	900
2	576	447	513	474	478	487	487	478	474	513	447	576
3	740	560	628	605	623	616	616	623	605	628	560	740
4	685	540	597	575	565	565	565	565	575	597	540	685
5	706	545	595	580	580	590	590	580	580	595	545	706
6	707	545	595	587	583	587	587	583	587	595	545	707
7	707	545	595	587	583	587	587	583	587	595	545	707
8	706	545	595	580	580	590	590	580	580	595	545	706
9	685	540	587	575	565	565	565	565	575	587	540	685
10	740	560	628	605	623	616	616	623	605	628	560	740
11	576	447	513	474	478	487	487	478	474	513	447	576
12	900	710	762	755	752	755	755	752	755	762	710	900

**Tableau 7.5: Températures des éléments du four**

Pour valider les résultats obtenus par la méthode hybride, nous avons réalisé une étude comparative entre la distribution du flux radiatif à l'aide de températures identiques des éléments du four fixé à 600 K et un chauffage optimisé par la méthode hybride, présentée au Tableau (7.5). Les résultats du flux radiatif et des températures à la surface de la feuille sont résumés par la Figure (7.2). Cette figure illustre la distribution du flux radiatif et de la température avant et après l'optimisation des températures des éléments chauffants. Les Figure (7.2)-a et 7.2-b résumés les résultats de la distribution du flux radiatif avant et après le processus d'optimisation des températures des 144 éléments chauffants. Les résultats montrent que, avant l'optimisation, l'écart de flux radiatif est ( $9 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2}$ ) pour un maximum de ( $15 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2}$ ) concentré au milieu et un minimum de ( $6 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2}$ ) situé aux limites de la surface de la feuille thermoplastique. Pour le même profil de flux de chaleur, après le processus d'optimisation, la différence est réduite de ( $3 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2}$ ). Les bords de la surface sont plus chauffés et la distribution du flux de chaleur est meilleure pour un maximum de ( $15 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2}$ ) et un minimum

de ( $12 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2}$ ).



**Figure 7.2: Distribution du flux radiatif et de la température sur une feuille ABS**

Les Figure (7.2)-c et (7.2)-d illustrent la distribution de température de la feuille ABS, respectivement, avant et après le processus d'optimisation des températures du four. Comme nous pouvons le constater, encore une fois, les résultats montrent que la distribution des températures est améliorée après ce processus d'optimisation. En effet, l'écart de température entre le centre et les extrémités de la feuille est réduit après optimisation. Pour un chauffage uniforme des températures des éléments du four, l'écart de température à la surface est de  $60^\circ\text{C}$  pour un maximum de  $160^\circ\text{C}$  au centre de la



feuille et un minimum de  $100^{\circ}\text{C}$  aux extrémités. Avec un chauffage optimisé, l'écart de températures entre les extrémités et le centre de la feuille est réduit à  $20^{\circ}\text{C}$ . Les extrémités de la feuille sont ainsi mieux chauffées avec une température de  $140^{\circ}\text{C}$  et une zone centrale de  $160^{\circ}\text{C}$ . Par ailleurs, dans le cas d'un chauffage non optimisé, les températures des bordures de la feuille n'atteignent même pas la température de formage minimale qui est de  $140^{\circ}\text{C}$ , pouvant causer ainsi des problèmes de déformation lors du processus de formage.

### 7.3 CONCLUSION PARTIELLE

Dans cette troisième contribution, nous avons développé une nouvelle méthode pour la résolution du modèle d'optimisation associé à notre étude. La méthode proposée est une hybridation des méta-heuristiques SA et MBO. Cette approche a été proposée dans le but de réunir les avantages des deux méta-heuristiques afin d'améliorer la qualité de la solution produite et le temps d'exécution de cette approche. Une partie des résultats obtenus a fait l'objet d'une participation à deux conférences [12, 14] et un rapport de recherche *Les cahiers du GERAD* [11].

Dans le but de valider la performance de la méthode hybride, nous avons réalisé une étude comparative entre des résultats obtenus par la méthode SA et MBO, d'un côté, et la méthode hybride, de l'autre côté. Cette étude comparative montre que la méthode hybride est de loin plus efficace en qualité de solution et en temps d'exécution.

Pour confirmer cette conclusion, nous avons considéré un cas réel. Nous avons ainsi mené le processus d'optimisation sur deux types de feuilles : PET et ABS. Dans les deux cas, nous avons comparé les résultats avant et après optimisation. La distribution de température et du flux radiatif est bien meilleure après optimisation.



## **CHAPITRE 8**

### **CONCLUSION ET PERSPECTIVES**

Ce dernier chapitre résume le travail que nous avons accompli dans cette thèse. Nous présentons ainsi nos conclusions, les limitations de notre étude et les extensions pertinentes à envisager pour des travaux futurs.

#### **8.1 CONCLUSION**

L'objectif principal de ce travail est le développement d'une procédure d'optimisation numérique, permettant d'uniformiser le flux radiatif reçu par la surface d'une feuille chauffée, en automatisant le réglage des températures des éléments en céramique du four de thermoformage. Cette procédure d'optimisation permet un chauffage quasiment uniforme sur l'ensemble des zones de la feuille, et par conséquent une meilleure distribution des épaisseurs de l'objet formé. L'enjeu est de garantir un réglage adéquat des températures du four pour une large gamme de polymères à l'aide d'un outil de simulation numérique pertinent. Deux questions découlent de cette problématique :

- Quel doit être le modèle d'optimisation qui va générer les températures du four ?
- Quelles méthodes adéquates de résolution pour le modèle d'optimisation ?

Pour répondre à ces questions, nous avons structuré cette thèse autour de trois axes :

développement du modèle d'optimisation, résolution du modèle et amélioration des résultats obtenus.

Le modèle d'optimisation développé comporte une fonction objectif captant au mieux la distribution du flux radiatif à la surface de la feuille à optimiser, tout en respectant un ensemble de contraintes. La recherche des réglages adéquats des températures du four de thermoformage à partir d'un ensemble de possibilités n'est autre qu'un problème d'affectation quadratique connu pour être un problème  $\mathcal{NP}$ -difficile au sens fort. La résolution exacte des problèmes de cette classe est ardue, même pour des instances de petite taille. Ainsi, le choix de l'approche approximative de la solution optimale du modèle d'optimisation se trouve justifiée. Nous avons choisi quatre méta-heuristiques : Recuit simulé, la Recherche avec Harmonie, la Recherche avec Tabous et l'Optimisation de la Migration d'Oiseaux.

Dans la première contribution, pour contrôler la répartition du flux radiatif à la surface de la feuille, nous avons utilisé une fonction objectif qui minimise les écarts d'énergies incidents à la surface de la feuille tout en respectant un ensemble de contraintes. Pour résoudre le modèle développé, nous avons adapté deux méta-heuristiques : Recuit Simulé et la Recherche avec Harmonie. Afin d'avoir une idée aussi claire que possible de la pertinence de ces méthodes, nous avons effectué une étude comparative par rapport à la valeur de la fonction objectif et à la vitesse de convergence. Les résultats obtenus montrent que le Recuit Simulé permet d'avoir le meilleur compromis en termes de vitesse de convergence et de qualité de la solution. À travers les résultats des simulations numériques, que nous avons menées, nous concluons que le modèle d'optimisation que nous avons proposé améliore considérablement la répartition du flux radiatif incident à la surface de la feuille, notamment avec l'augmentation de nombre d'éléments chauffants. Toutefois, nous avons constaté que ce modèle d'optimisation favorise la sélection des

petites températures de l'ensemble des possibilités.

Dans la deuxième contribution, nous avons présenté une nouvelle fonction objectif pour éviter l'inconvénient mentionné précédemment. Pour la résolution du modèle d'optimisation généré, nous avons adapté deux autres méta-heuristiques, à savoir la Recherche avec Tabous et l'Optimisation de la Migration d'Oiseaux. Suite aux résultats de la simulation, nous avons conclu, comme on pouvait s'y attendre, que plus le cardinal de la commande de température des éléments chauffants est grande, mieux est la répartition du flux radiatif. Toutefois, le temps d'exécution des méta-heuristiques augmente. Dans le but de choisir les méthodes les mieux adaptées, nous avons mené une étude comparative entre les deux méta-heuristiques proposées et la meilleure méthode de l'étude précédente, c'est-à-dire le Recuit Simulé. À la lumière des résultats obtenus, l'algorithme de l'Optimisation de la Migration d'Oiseaux produit de meilleurs résultats, mais converge toutefois très lentement comparativement aux deux autres méthodes. La convergence de l'algorithme de Recherche avec Tabous est du même ordre que celle du Recuit Simulé. Cependant, la qualité des solutions qu'elle génère est plutôt médiocre comparée à celle du Recuit Simulé.

Dans la troisième contribution, nous avons développé une nouvelle méthode de résolution hybridant les algorithmes de Recuit Simulé et l'Optimisation de la Migration d'Oiseaux. Ces deux méta-heuristiques ont montré leurs performances pour la résolution du modèle d'optimisation, mais chacune a ses avantages et inconvénients. Cette nouvelle approche a été proposée dans le but de ne retenir que les avantages des deux méta-heuristiques afin d'améliorer la qualité de la solution produite et le temps d'exécution. La simulation que nous avons effectuée montre effectivement que cette hybridation produit de meilleurs résultats que ceux générés par chacune des deux méta-heuristiques considérée individuellement. Pour se rapprocher de ce qui se fait dans l'industrie, nous

avons réalisé des simulations numériques sur des feuilles PET et ABS chauffées dans un four de type industriel de thermoformage. Nous avons réalisé une étude comparative entre un chauffage uniforme des températures des éléments du four et celui optimisé à l'aide de la méthode hybride. Les écarts de températures, générés par la méthode hybride, entre les zones de la feuille sont réduits considérablement comparés à ceux d'un chauffage non optimisé. Les zones situées aux extrémités des deux feuilles sont mieux chauffées, et atteignent la plage de formage. Ceci n'est pas le cas avec un chauffage non optimisé, générant ainsi des produits mal formés.

## **8.2 PERSPECTIVES**

À travers la revue de littérature présentée dans notre étude, nous constatons que l'optimisation de la répartition du flux radiatif à la surface d'une feuille thermoplastique, lors du processus de thermoformage, est un champ de recherche très prometteur et demeure peu étudié. Les perspectives sont très nombreuses et découlent directement des hypothèses que nous avons adoptées tout au long. Tout d'abord, nous avons supposé que la forme de la feuille reste la même tout au long de son chauffage et la température est uniforme dans son épaisseur. En réalité, pendant l'étape de chauffage, la feuille thermoplastique se courbe et son degré de courbure est fonction de la température, du temps de chauffage, et de ses propriétés thermo-physiques. Pour prendre en considération l'affaissement de la feuille au cours du processus de chauffage, il est nécessaire de mettre en œuvre un modèle rhéologique capable de prédire la dynamique de la feuille. Pour calculer l'énergie interceptée par la feuille et sa température, il est nécessaire de mettre également en œuvre une méthode numérique pour calculer la surface radiative mutuelle dynamique.

Nous avons simplifié les interactions thermiques entre la feuille chauffée et le four infrarouge. En effet, une grande partie de l'énergie émise par les éléments du four n'est pas absorbée par la feuille thermoplastique. Toutefois, elle contribue au chauffage des parois du four. La feuille thermoplastique est supportée par un cadre de serrage dans le four lors du chauffage. Cette structure en acier cause un gradient de température par conduction aux extrémités de la feuille. Ce gradient a été négligé dans le modèle thermique que nous avons présenté dans notre étude.

Pour finir, nous n'avons pas modélisé la commande électrique du four afin de prédire avec précision la température de chaque consigne correspondant à la puissance électrique. Cette étape nécessite un modèle robuste qui combinerait des concepts d'automatisme, énergie électrique et thermique.

### **8.3 RETOMBÉES POTENTIELLES**

Ce projet de thèse est applicable directement à l'industrie de thermoformage de feuilles thermoplastiques. Notre travail permettra d'enrichir d'un côté la recherche dans ce domaine et, d'un autre côté, de contribuer à la résolution d'une problématique bien connue en ingénierie de thermoformage.

En effet, la qualité de la solution et le temps d'exécution des méthodes de résolution sont deux mesures incontournables pour un outil efficace d'optimisation. Pour atteindre ces objectifs, nous avons présenté un compromis entre la qualité de la solution du modèle et le temps d'exécution des méthodes de résolution. L'hybridation des méthodes de résolution a permis l'amélioration des résultats.

Pour fixer les températures des éléments chauffants du four, le recours à une méthode informatique est un outil incontournable pour prédire la répartition uniforme du flux

radiatif. Pour clore notre étude, nous avons conçu un outil d'optimisation permettant de réaliser *a priori* des simulations numériques pour choisir les températures des éléments du four avant de passer à la pratique.



## PUBLICATIONS ISSUES DE LA THÈSE

1. Bachir Cherif K., Rebaine D., Erchiqui F., Fofana I (2018) : Uniform Distribution with MBO Method of the Infrared Radiative Energy in the Thermoforming Process of an ABS Sheet, *GERAD-2018-73*, Montreal, Canada.
2. Bachir Cherif K., Rebaine D., Erchiqui F., Fofana I (2018) : MBO Applied to the Thermoforming Process with Convection and Conduction Considerations, *Colloque sur l'optimisation et les systèmes d'informations*, COSI'2018, Oran, Algérie.
3. Bachir Cherif K., Rebaine D., Erchiqui F., Fofana I., Nabil N (2018) : Numerically Optimizing the Distribution of the Infrared Radiative Energy on a Surface of a Thermoplastic Sheet Surface, *ASME Journal of Heat Transfer*, 140, pp. 102101-1-102101- 7.
4. Bachir Cherif K., Rebaine D., Erchiqui F., Fofana I (2017) : Heuristic Approach to Distribute Uniformly the Infrared Heating in the Thermoforming Process : a comparison study, *21st Conference of the International Federation of Operational Research Societies*, IFORS'2017, Quebec, Canada.
5. Bachir Cherif K., Rebaine D., Erchiqui F., Fofana I (2017) : Metaheuristics to Solve the Infrared Heating Problem in the Thermoforming Process, *New and Smart Information and Communication Science and Technology to Support Sustainable Development*, NICST'

- 2017, Clermont Ferrand, France.
6. Bachir Cherif K., Rebaine D., Erchiqui F., Fofana I (2016) : Metaheuristics Approach in the Thermoforming Process, *30th annual conference of the Belgian Operational Research Society UCL-CORE, ORBEL30*, Louvain-La-Neuve, Belgique.
  7. Bachir Cherif K., Rebaine D., Erchiqui F., Fofana I (2015) : Metaheuristics as a Solving Approach for the Infrared Heating in the Thermoforming Process, *GERAD-G-2015-139*, Montreal, Canada.
  8. Bachir Cherif K., Rebaine D., Erchiqui F., Fofana I, Nahas N (2014) : A Heuristic Approach for the Infrared Heating in Thermoforming Process, *Colloque sur l'optimisation et les systèmes d'informations, COSI'2014*, Béjaïa, Algérie.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Florian J (1996) : *Practical Thermoforming* : Principles and Applications, 2nd edition, Taylor and Francis Group.
- [2] James E.M (2009) : *Polymer Data Handbook*, Oxford University Press, New York.
- [3] Agassant J.F., Avenas P., Sergent J.P., Vergnes B., Vincent M (1996) : *La mise en forme des matières plastiques*, Technique & Documentation - Lavoisier, Paris, France.
- [4] Schmidt F.M., Agassant J.F, Bellet M (1998) : Experimental Study and Numerical Simulation of the Injection Stretch/Blow Molding Process, *Polymer Engineering and Science*, 38(9), pp. 1399-1412.
- [5] Pierre G. L., Bruno V (2014) : *Polymer Extrusion*, John Wiley & Sons, United States.
- [6] Engelmann S. (2012) : *Advanced Thermoforming : Methods, Machines and Materials, Applications and Automation*, John Wiley & Sons, United States.
- [7] Duarte, F.M., Covas J.A (2002) : IR sheet heating in roll fed thermoforming Part 1–Solving direct and inverse heating problems, *Plastics, Rubber and Composites*, 31(7), pp. 307-317.
- [8] Schmidt F.M., Le Maoult Y., Monteix S (2003) : Modelling of infrared heating of thermoplastic sheet used in thermoforming process, *Journal of Materials Processing*

*Technology*, 143–144, pp. 225-231.

- [9] Warby M.K., Whiteman J.R., Jiang W.G., Warwick P., Wright T (2003) : Finite Element Simulation of Thermoforming Processes for Polymer Sheets, *Mathematics and Computers in Simulation*, 61(3), pp. 209-218.
- [10] Esser K., Haberstroh E., Hüsgen U., Weinand D (1987) : Infrared radiation in the processing of plastics : Precise adjustment—the key to productivity, *Advances in Polymer Technology*, 7(2), pp. 89-128.
- [11] Bachir Cherif K., Rebaine D., Erchiqui F., Fofana I (2018) : Uniform Distribution with MBO Method of the Infrared Radiative Energy in the Thermoforming Process of an ABS Sheet, *GERAD-2018-73*, Montreal, Canada.
- [12] Bachir Cherif K., Rebaine D., Erchiqui F., Fofana I (2018) : MBO Applied to the Thermoforming Process with Convection and Conduction Considerations, *Colloque sur l'optimisation et les systèmes d'informations*, COSI'2018, Oran, Algérie.
- [13] Bachir Cherif K., Rebaine D., Erchiqui F., Fofana I., Nabil N (2018) : Numerically Optimizing the Distribution of the Infrared Radiative Energy on a Surface of a Thermoplastic Sheet Surface, *ASME Journal of Heat Transfer*, 140, pp. 102101-1-102101-7.
- [14] Bachir Cherif K., Rebaine D., Erchiqui F., Fofana I (2017) : Heuristic Approach to Distribute Uniformly the Infrared Heating in the Thermoforming Process : a comparison study, *21st Conference of the International Federation of Operational Research Societies*, IFORS'2017, Quebec, Canada.
- [15] Bachir Cherif K., Rebaine D., Erchiqui F., Fofana I (2017) : Metaheuristics to Solve the Infrared Heating Problem in the Thermoforming Process, *New and Smart Information and Communication Science and Technology to Support Sustainable Development*, NICST' 2017, Clermont Ferrand, France.

- [16] Bachir Cherif K., Rebaine D., Erchiqui F., Fofana I (2016) : Metaheuristics Approach in the Thermoforming Process, *30th annual conference of the Belgian Operational Research Society UCL-CORE, ORBEL30, Louvain-La-Neuve, Belgique.*
- [17] Bachir Cherif K., Rebaine D., Erchiqui F., Fofana I (2015) : Metaheuristics as a Solving Approach for the Infrared Heating in the Thermoforming Process, *GERAD-G-2015-139, Montreal, Canada.*
- [18] Bachir Cherif K., Rebaine D., Erchiqui F., Fofana I, Nahas N (2014) : A Heuristic Approach for the Infrared Heating in Thermoforming Process, *Colloque sur l'optimisation et les systèmes d'informations, COSI'2014, Béjaïa, Algérie.*
- [19] Peter W.K (2009) : *Fundamentals of Plastics Thermoforming*, Morgan & Claypool, USA.
- [20] James H.V (1983) : *Conduction Heat Transfer Solutions*, Lawrence Livermore National Laboratory, California.
- [21] Venkateswaran G., Cameron M.R., Jabarin S.A (1997) : Effects of Temperature Profiles Trough Preform Thickness on the Properties of reheat-blown PET Containers. *Advances in Polymer Technology*, 17(3), pp. 237-249.
- [22] Lebaudy P., Grenet J (2001) : Heating Simulation of Multilayer Performs, *Applied Polymer Science*, 80(14), pp. 2683-2689.
- [23] Monteix S (2001) : *Modélisation du Chauffage Convectif-Radiatif de Préformes en PET pour la Réalisation de Corps Creux*, Thèse de Doctorat, en Science et Génie des Matériaux, École Nationale Supérieure des Mines, Paris.
- [24] Bordival M., Schmidt F.M., Le Maout Y., Velay V (2009) : Optimization of Preform Temperature Distribution for the Stretch-Blow Molding of PET Bottles : Infrared Heating and Blowing Modeling, *Polymer Engineering and Science*, 49(4), pp.783-793.

- [25] Yousefi A., Bendada A., Diraddo R (2002) : Improved Modeling for the Reheat Phase in Thermoforming Through an Uncertainty Treatment of the Key Parameters, *Polymer Engineering and Science*, 42(5), pp. 1115-1129.
- [26] Ghobadnam M., Mosaddegh P., Rejani M.R., Amirabadi H., Ghaei A (2015) : Numerical and experimental analysis of HIPS sheets in thermoforming process, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 76(5-8), pp. 1079–1089.
- [27] Shelby M.D (1991) : Effects of Infrared Lamp Temperature and Other Variables on the Reheat Rate of PET, *Proceedings of the Conference, ANTEC'91*, pp. 1420-1424.
- [28] Thrasher M.A (1996) : Finite Element Modeling of Radiant Heating on Polymeric Materials, *SPE ANTEC Tech. Papers*, pp. 854-857.
- [29] Hartwig K (1996) : Simulation of the stretch-Blow molding process and characterization of the relevant material behavior, Dissertation, RWTH, Aachen.
- [30] Cosson B., Schmidt F., Le Maout Y., Bordival M (2011) : Infrared heating stage simulation of semi-transparent media (PET) using ray tracing method, *International Journal of Material Forming*, 4(1), pp. 1-10.
- [31] Huang H.X., Deng Y.H., Huang Y.F (2005) : Temperature profiles within reheated preform in stretch blow molding, *SPE ANTEC Technical Papers*, 12, Boston, USA.
- [32] Erchiqui F., Hamani I., Charrette A (2009) : Modélisation du chauffage infrarouge des membranes thermoplastiques semi-transparentes par la méthode des éléments finis, *International Journal of Thermal Sciences*, 28, pp. 73-84.
- [33] Hamani I (2016) : *Modélisation de l'Étape de Chauffage Infrarouge des Biocomposites de type PET-chanvre en Thermoformage*, Thèse de doctorat, UQAC, Québec, Canada.
- [34] Howell J.R (1982) : *A Catalog of Radiation Configuration Factors*, McGraw-Hill, New York.

- [35] Siegel R., Howell J (2001) : *Thermal Radiation Heat Transfer*, Fourth ed., Taylor and Francis, Hemisphere.
- [36] Modest M.F (1978) : Three-dimensional radiative exchange factors for nongray nondiffuse surfaces, *Numer. Heat Transfer*,1, pp. 403–406.
- [37] Krishnaprakas C.K (1998) : View Factor Evaluation by Quadrature Over Triangles. *Journal Thermophysics*, 12(1), pp. 118-120.
- [38] Chung T.J., Kim J.Y (1982) : Radiation View Factors by Finite Elements, *ASME Journal Heat Transfer*, 104(4), pp. 792-795.
- [39] Mazumder S., Ravishankar M (2012) : General procedure for calculation of diffuse view factors between arbitrary planar polygons, *International Journal Heat Mass Transfer* , 55(23-24), pp. 7330–7335.
- [40] Mirhosseini M., Saboonchi A (2011) : View factor calculation using the Monte Carlo method for a 3D strip element to circular cylinder, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 38 (6), pp. 821–826.
- [41] Rao G.S.S. , Choudhary M.S., Naqvi M.K., Rao K.V., Blasi C.D., Sastri V.M.K (1996) : Efficient Evaluation of Diffuse View Factors for Fadiation, *International Journal of Mass Transfer*, 39 (6), pp. 1281–1286.
- [42] Rammohan R (1996) : Efficient Evaluation of Diffuse View Factors for radiation, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39(6), pp. 1281-1286.
- [43] Narayanaswamy A (2015) : An analytic expression for radiation view factor between two arbitrarily oriented planar polygons, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 91, pp. 841–847.
- [44] Howell J.R (1998) : The Monte Carlo Method in Radiative Heat Transfer, *ASME, Journal of Heat Transfer*, 120(3), pp. 547–560.

- [45] Modest M (1993) : *Radiative Heat Transfer*, McGraw-Hill series in mechanical engineering, New York.
- [46] Daun K.J, Morton D.P., Howell J.R (2005) : Smoothing Monte Carlo Exchange Factors Through Constrained Maximum Likelihood Estimation, *ASME Journal Heat Transfer*, 127 (10), pp. 1124–1128.
- [47] Erchiqui F., Dituba N.G (2007) : Analyse Comparative des Méthodes de Calcul des Facteurs de Formes pour des Surfaces à Contours Rectilignes, *International Journal of Thermal Sciences*, 46(3), pp. 284-293.
- [48] Throne J.L., Kmetz M (1989) : Computer-aided design in thermoforming, *Plastics Engineering*, 45(9), pp. 35–38.
- [49] McEvoy J.P., Armstrong C.G., Crawford R.J (1998) : Simulation of the Stretch Blow molding Process of the PET Bottles, *Advances in Polymer Technology*, 7(4), pp. 339-352.
- [50] Wang C.H., Nied H.F (1999) : Temperature Optimization for Improved Thickness Control in Thermoforming, *Journal of Materials Processing and Manufacturing Science*, 8 (2), pp. 113–126.
- [51] Wiesche S (2004) : Industrial Thermoforming Simulation of Automotive Fuel Tanks, *Applied Thermal Engineering*, 24(16), pp. 2391-2409.
- [52] Brinken F., Potente H (1980) : Some Considerations of Heat-Transfer Problems in Thermoforming, *Polymer Engineering and Science*, 15(20), pp. 985-1044.
- [53] Monteix S., Schmidt F., Le Maoult Y., Ben-Yedder R., Diraddo R.W., Laroche D (2001) : Experimental Study and Numerical Simulation of Perform or Sheet Exposed to Infrared Radiative Heating, *Journal of Materials Processing Technology*, 119, pp. 90-97.
- [54] Chang Y.Z. Wen T.T., Liu S.L (2005) : Derivation of Optimal Processing Parameters of Polypropylene Foam Thermoforming by an Artificial Neural Network, *Polymer Engineering and Science*, pp. 375-384.



- [55] Erchiqui F., Nahas N., Nourelfath M., Souli M (2011) : Metaheuristic Algorithms for Optimization of Infrared Heating Stage of the Thermoforming Process. *International Journal of Metaheuristics*, 1(3), pp. 199-221.
- [56] Chyan Y.Z., Shiu-Wan H (2004) : Modeling and Optimization of a Plastic Thermoforming Process, *Reinforced Plastics and Composites*, 23(1), 109-121.
- [57] Leite W.O., Campos-Rubio J.C., Mata-Cabrera F., Carrasco A., Hanafi I (2018) : Vacuum Thermoforming Process : An Approach to Modeling and Optimization Using Artificial Neural Networks, *Polymers* , 10 (2), 143.
- [58] Shen Y.D., Li Z.Z., Xuan D.J., Heo K.S., Seol S.Y (2010) : Time-Dependent Optimal Heater Control Using Analytic and Numerical Methods, *Precision Engineering and Manufacturing*, 11(1), pp. 77-81.
- [59] Feng-Xun L., Zhen-Zhe L (2017) : Time Dependent Optimal Heating Profile for Thermoforming Preheating, *Precision Engineering and Manufacturing*, 15(2), pp. 115-120.
- [60] Zhen-Zhe L., Tai-Hong C., Yun-De S., Dong-Ji X (2015) : Optimal Heater Control with Technology of Fault Tolerance for Compensating Thermoforming Preheating System, *Advances in Materials Science and Engineering*, 12, pp. 1-5.
- [61] Kirkpatrick S., Gelatt C.D., Vecchi M.P (1983) : Optimization by Simulated Annealing, *Science*, 220, pp. 671-680.
- [62] Back, T (1996) : *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice : Evolution Strategies. Evolutionary Programming, Genetic Algorithms*, Oxford University Press, New York.
- [63] Ibrahime H (2016) : *Modélisation de l'étape de chauffage infrarouge des biocomposites de type PET-chanvre en thermoformage*, Thèse de Doctorat, UQAC, Canada.
- [64] [www.plastitel.com](http://www.plastitel.com).
- [65] Modest M.F (2003) : *Radiative Heat Transfer*, Second ed., Academic Press.

- [66] Zhen-Zhe L., Guang M., Dong-Ji X., Seoung-Yun S., Yun-De S (2010) : A Study on Control of Heater Power and Heating Time for Thermoforming, *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 11(6), pp. 873-878.
- [67] Gorlier E., Haudin J.M., Billon N (2001) : Strain-induced Crystallization in Bulk Amorphous PET Under Uni-axial Loading, *Polymer*, 42(23), pp. 9541-9549.
- [68] Marco Y (2003) : *Caractérisation Multi-axiale du Comportement et de la Microstructure d'un Semi-Cristallin : Application au cas du PET*, Thèse de Doctorat, ENS Cachan, France.
- [69] Nellis G., Klein S (2009) : *Heat transfer*, Cambridge University Press, New York.
- [70] Bejan A (2013) : *Convection Heat Transfer*, 4th edition, Wiley, New York, USA.
- [71] Akbar K.S., Girard P., Bhuiyan N., Thomson V (2012) : Improved Mathematical Modeling for the Sheet Reheat Phase During Thermoforming, *Polymer Engineering and Science*, 52(3), pp. 625-636.
- [72] Emery A.F., Johansson O., Lobo M., Abrous A (1991) : A Comparative Study of Methods for Computing the Diffuse Radiation View Factors for Complex Structures, *ASME Journal of Heat Transfer*, 113(2), pp. 413-421.
- [73] Shapiro A.B (1985) : Computer Implementation, Accuracy and Timing of Radiation View Factor Algorithms, *ASME Journal of Heat Transfer*, 107(3), pp. 730-732.
- [74] Badari N.K (1998) : View Factors for Parallel Rectangular Plates. *Heat Transfer Engineering*, 19(1), pp. 59-63.
- [75] Ehlert J.R., Smith T.F (1993) : View Factors for Perpendicular and Parallel, Rectangular Plates, *Journal of Thermo-physics and Heat Transfer*, 7(1), pp. 173-174.
- [76] Zienkiewicz O., Taylor R (1991) : *The Finite Element Method*, McGraw Hill, New York.
- [77] David H (2004) : *Fundamentals of Finite Element Analysis*, McGraw-Hill, New York.

- [78] Raddy J.N (2006) : *Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York.
- [79] Papadimitriou C.H (1994) : *Computational Complexity*, Addison-Wesley, USA.
- [80] Cormen T.H., Leiserson C., Rivest R., Stein C (1990) : *Introduction to Algorithms*, 1st edition, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- [81] Garey M.R., Johnson D.S (1979) : *Computers and intractability : a guide to the theory of NP-completeness*, WH. Freeman and Company, New York.
- [82] Cook S.A (1971) : The Complexity of Theorem Proving Procedures, *Proceedings of the 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, University of Toronto, Canada.
- [83] Paschos V.T (2005) : *Optimisation combinatoire 1, concepts fondamentaux*, Hermès science, France.
- [84] Karp R.M (1972) : *Reducibility Among Combinatorial Problems*, In *Complexity of Computer Computations*, University of California, Berkeley.
- [85] Dréo J., Siarry P (2005) : *Métaheuristiques pour l'Optimisation Difficile*, Eyrolles, Paris.
- [86] Talbi E.G (2013) : *Hybrid Metaheuristics*, 434 Studies in Computational Intelligence, Springer, Heidelberg.
- [87] Burke E., Kendall G (2005) : *Search Methodologies : Introduction Tutorials in Optimization and Decision Support Techniques*, Springer.
- [88] Siarry P.E (2016) : *Metaheuristics*, Springer, France.
- [89] Koopmans, T., Beckmann, M.J (1957) : *Assignment Problems and the Location of Economic Activities*, *Econometrica*, 25(1), pp. 53-76.
- [90] Lee C.G., Ma Z (2004) : The Generalized Quadratic Assignment Problem, *Research Report*, Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Toronto, Canada.
- [91] Sahni S., Gonzalez T (1976) : P-Complete Approximation Problems, *Journal of the Association of Computing Machinery*, 23(3), pp. 555-565.

- [92] Loiola E.M., de Abreu N.M.M., Netto P.O.B., Hahn P., Querido T : (2007) : A Survey for the Quadratic Assignment Problem, *European Journal of Operational Research*, 176(2), pp. 657–690.
- [93] Glover F. Kochenberger GA (2003) : *Handbook of Metaheuristics*, Kluwer Academic Publishers, New York.
- [94] Aupetit S., Slimane M (2016) : Nature Inspires New Algorithms, *Springer International Publishing*, pp. 263-286.
- [95] Glover F., Laguna M. (1997) : *Tabu Search*, Kluwer Academic Publishers Norwell, MA, USA.
- [96] Colorni A., Dorigo M., Maniezzo V (1992) : An Investigation of Some Properties of an "Ant Algorithm", *Parallel Problem Solving from Nature 2*, Belgium, September 28-30, pp. 515–526.
- [97] Michell M (1998) : *An Introduction to Genetic Algorithms*, MIT Press, Cambridge, MA, USA.
- [98] Alba E., Luque G., Nesmachnow S (2012) : Parallel metaheuristics : Recent Advances and New Trends, *International Transactions in Operational Research*, 20(1), pp. 1-48.
- [99] Roberge V., Tarbouchi M., Okou F (2015) : gpuMF : A Framework for Parallel Hybrid Metaheuristics on GPU with Application to the Minimization of Harmonics in Multilevel Inverters, *International Journal of Process Systems Engineering*, 3(1-3), pp. 20–41.
- [100] Idoumghar L., Chérin N., Siarry P., Roche R., Miraoui A (2013) : Hybrid ICA-PSO Algorithm for Continuous Optimization, *Applied Mathematics and Computation*, 219(24), pp. 11149–11170.

- [101] Raidl G.R., Puchinger J., Blum C (2010) : Metaheuristic Hybrids, Handbook of Metaheuristics, International Series in Operations Research and Management Science, 2nd edition, Springer, 146, pp. 469–496.
- [102] Bluma C., Puchinger J., Raidl G.R., Roli A (2011) : Hybrid Metaheuristics in Combinatorial Optimization : A Survey, *Applied Soft Computing*, 11(6), pp. 4135–4151.
- [103] Duman E., Uysal M., Alkaya A.F (2012) : Migrating Bird Optimization : A New Metaheuristic Approach and its Performance on Quadratic Assignment Problem, *Information Sciences*, 217, pp. 65-77.
- [104] Metropolis N., Rosenbluth A.W., Rosenbluth M.N., Teller A.H (1953) : Equation of State Calculations by Fast Computing Machines, *Journal of Chemical Physics*, 21(6), 1087-1092.
- [105] Rinnooy K.A., Timmer G (1987) : Stochastic Global Optimization Methods, part I : Clustering Methods, *Mathematical Programming*, 39, pp. 27-56.
- [106] Solla S, Sorkin G., White S (1986) : *Disorde Systems and Biological Organization*, Springer, New York.
- [107] Sorkin G.B (1991) : Efficient Simulated Annealing on Fractal Energy Landscapes, *Algorithmica*, 6(1-6), pp. 367-418.
- [108] Glover F (1986) : Future Paths for Integer Programming and Links to Artificial Intelligence, *Computers and Opérations Research*, 13(5), pp. 533-549.
- [109] Glover F., Kochenberger G.A., Alidaee B (1998) : Adaptive Memory Tabu Search for Binary Quadratic Programs, *Management Science*, 44(3), pp. 336-345.
- [110] Glover F, Taillard E (1993) : A User’s Guide to Tabu Search, *Annals of Operations Research, Springer Link* , 41(1), pp. 1-28.
- [111] Battiti R., Tecchiolli G (1994) : The Reactive Tabu Search, *ORSA Journal on Computing*, 6(2), pp. 126–140.

- [112] Laguna M., Glover F (1993) : Integrating Target Analysis and Tabu Search for Improved Scheduling Systems, *Expert Systems with Applications*, 6(3), pp.287-297.
- [113] Glover F (1994) : Tabu Search for Nonlinear and Parametric Optimization (with Links to Genetic Algorithms), *Discrete Applied Mathematics*, 49, pp. 231-255.
- [114] Gendreau M., Hertz A., Laporte G (1994) : A Tabu Search Algorithm for the Vehicle Routing Problem, *Management Science*, 40, pp. 1276-1290.
- [115] Hanafi S (2001) : On the Convergence of the Tabu Search, *Journal of heuristics*, 7(1), pp. 47-58.
- [116] Faigle U., Kern W (1995) : Some Convergence Results for Probabilistic Tabu Search, *ORSA Journal on computing*, 42, pp. 860-878.
- [117] <http://karthijaygee.wordpress.com>.
- [118] Geem Z.W., Kim J.H (2001) : A New Heuristic Optimization Algorithm : Harmony Search. *Simulation*, 76(2), pp. 60-68.
- [119] Martin O.C, Otto S.W (1996) : Combining Simulated Annealing with Local Search Heuristics, *Annals of Operations Research*, 63(1), pp. 57-75.
- [120] Salcedo-Sanz S., Xu Y., Yao X (2006) : Hybrid Meta-Heuristics Algorithms for Task Assignment in Heterogeneous Computing Systems, *Computers and Operations Research*, 33(3), pp. 820-835.
- [121] Azimi N.Z (2005) : Hybrid Heuristics for Examination Timetabling Problem, *Applied Mathematics and Computation*, 163(2), pp. 705-733.
- [122] Hammami M., Ghédira K (2005) : Cooperation Between Simulated Annealing, Tabu Search, X-over Operator and Kernighan and Lin Heuristic for the K-Graph Partitioning Problem, *The 6th Metaheuristics International Conference*, Vienna, Austria, pp. 480-485.

- [123] Tanese R (1987) : Parallel Genetic Algorithms for a Hypercube, *in Proceedings of the Second International Conference on Genetic Algorithms*, Cambridge, USA, pp. 177-183.
- [124] Taillard E (1993) : Parallel Iterative Search Methods for Vehicle Routing Problems, *Networks*, 23(8), pp. 661-673.
- [125] Shahookar K., Mazumder P (1990) : A Genetic Approach to Standard Cell Placement Using Meta-Genetic Parameter Optimization, *IEEE Transactions on Computer Aided Design*, 9(5), pp. 500-511.
- [126] Talbi E.G (2002) : A Taxonomy of Hybrid Metaheuristics, *Journal of Heuristics*, 8, pp. 541-564.
- [127] Hajek B (1988) : Cooling Schedules for Optimal Annealing, *Mathematics of Operations Research* , 13(2), pp. 311-329.
- [128] Eglese R.W (1990) : Simulated annealing : A tool for operational research, *European Journal of Operational Research*, 46, pp. 271-281.
- [129] Ancelle T (2018) : *Statistiques épidémiologie* , Sciences Fondamentales, 4e. edition, Maloine.

