MỘT SỐ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN CÓ BƯỚC NHẢY

Hoàng Thị Phương Thảo

Luận án Tiến sỹ

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Hà Nội - 2015

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Hoàng Thị Phương Thảo

MỘT SỐ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN CÓ BƯỚC NHẢY

DỰ THẢO LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội – 2015

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Hoàng Thị Phương Thảo

MỘT SỐ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN CÓ BƯỚC NHẢY

Chuyên ngành: Lý thuyết xác suất và thống kê toán học
Mã số: 62460106

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS. TS. TRẦN HÙNG THAO

Hà Nội - 2015

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Nghiên cứu sinh

Hoàng Thị Phương Thảo

Lời cảm ơn

Trong quá trình học tập nghiên cứu để hoàn thành được luận án Tiến sĩ này tôi đã nhận được rất nhiều sự giúp đỡ từ các thầy cô giáo, bạn bè đồng nghiệp và gia đình tôi. Người đầu tiên tôi muốn gửi lời cảm ơn chân thành nhất là PGS. TS Trần Hùng Thao, người Thày đã và đang hướng dẫn, đào tạo tôi nghiên cứu khoa học rất nhiệt tình. Thày không chỉ giúp tôi ngày càng có thêm niềm say mê nghiên cứu khoa học, thày còn cho tôi rất nhiều lời khuyên trong cuộc sống.

Tiếp theo tôi muốn bày tỏ những lời cảm ơn tới các thành viên trong Bộ môn Xác suất Thống kê , Khoa Toán Cơ Tin học đã thường xuyên giúp tôi, cho tôi những lời khuyên chân thành trong quá trình làm bản luận án này. Đặc biệt tôi đã được tham gia xê mi na của Bộ môn Xác suất Thống kê, qua xê mi na tôi đã trau dồi, mở rộng thêm kiến thức và các thầy trong bộ môn đã luôn cho tôi những lời nhận xét quý báu trong quá trình học tập và nghiên cứu của mình.

Đồng thời, tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến Ban giám đốc Đại học Quốc gia Hà Nội, Ban giám hiệu Trường Đại học Khoa học tự nhiên, Ban chủ nhiệm Khoa Toán-Cơ-Tin học, Phòng sau đại học đã tạo những điều kiện thuận lợi để tôi nghiên cứu tốt hơn và giúp tôi hoàn thành thủ tục bảo vệ luận án.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cám ơn đến những người thân trong gia đình, họ hàng, bạn bè thân thiết, những người đã luôn bên cạnh động viên giúp đỡ tôi, để tôi hoàn thành luận án này.

Hà nội, 01/2015

NCS: Hoàng Thị Phương Thảo.

Mục lục

Bảng ký hiệu

P- h.c.c	Sự hội hầu chắc chắn
$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Tập hợp các lớp tương đương các hàm bình phương khả tích
$\\|.\\|$	Chuẩn trong không gian $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$
$\Gamma(\alpha)$	Hàm Gamma
$\mathcal{N}(0,1)$	Biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn tắc
$L^2 - \lim$	Sự hội tụ trong L^2
$C(S)$	Không gian các hàm ngẫu nhiên liên tục trên không gian S.
$C^b(S)$	Không gian các hàm ngẫu nhiên bị chặn trên S
$[x]$	Phần nguyên của x

Mở đầu

Một quá trình có bước nhảy là một quá trình ngẫu nhiên mà các quỹ đạo của nó bị gián đoạn bởi các bước nhảy.
Về mặt lịch sử thì đầu tiên, người ta nghiên cứu các hệ động lực ngẫu nhiên điều khiển bởi chuyển động Brown mà lời giải là các quá trình có quỹ đạo liên tục. Tuy nhiên trong các ứng dụng thực tế thì nhiều khi các hệ động lực ấy không phản ánh đúng sự thực những sự kiện quan sát được. Thay vào đó người ta nhận thấy các quá trình có bước nhảy đáp ứng được tốt hơn sự mô tả các hiện tượng đó. Chẳng hạn, các quá trình có bước nhảy đóng vai trò hết sức quan trọng trong tất cả các lĩnh vực tài chính. Đóng góp cho sự phát triển của các mô hình ngẫu nhiên có bước nhảy phải kể đến những thành tựu của lý thuyết Semimartingale và cả năng lực tính toán hiện đại của công nghệ thông tin.
Quá trình có bước nhảy đơn giản nhất là quá trình có một bước nhảy. Gọi T là một thời điểm ngẫu nhiên, thông thường đó là một thời điểm dừng ứng với một bộ lọc $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ nào đó.

$$X_t = \mathbb{1}_{\{T \leq t\}}, \tag{1}$$

quá trình này có giá trị bằng 0 trước khi một sự kiện nào đó xảy ra tại thời điểm T và bằng 1 sau đó. Nó cũng mô tả thời điểm phá sản của một công ty trong việc mô hình hóa rủi ro tín dụng.
Tiếp theo là các quá trình có giá trị nguyên và có cỡ bước nhảy chỉ bằng 1, gọi là quá trình đếm $(X_t, t \geq 0)$. Đó là quá trình mô tả số các biến cố xảy ra trong khoảng thời gian từ 0 đến t. Quá trình đếm điển hình là quá trình Poisson $(N_t, t \geq 0)$, trong đó N_t có phân phối Poisson với tham số

λt. Người ta cũng có thể mô tả quá trình đó bằng cách cho khoảng thời gian giữa hai bước nhảy là biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân bố mũ với tham số λ.
Sự mở rộng tiếp theo là các quá trình Poisson phức hợp $(X_t, t \geq 0)$, tức là các quá trình với gia số độc lập, dừng và có cỡ bước nhảy không phải là 1 nữa mà là các biến ngẫu nhiên có phân bố xác suất μ nào đó.

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k, \tag{2}$$

trong đó $(Y_1, Y_2, ...)$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối μ.
Một ứng dụng điển hình của quá trình Poisson phức hợp là mô tả tổng số tiền mà công ty bảo hiểm phải trả cho khách hàng tại thời điểm t, tại thời điểm ấy số khách hàng đòi trả bảo hiểm là biến ngẫu nhiên có phân bố Poisson.
Bên cạnh đó người ta cũng chú ý đến *quá trình đối trọng* của X_t, tức là quá trình $X_t - E[X_t]$. Nếu phân phối μ có kỳ vọng hữu hạn thì vì X_t có gia số độc lập, dừng nên ta có $E[X_t] = tE[X_1]$ và do đó ta có biểu diễn

$$X_t = (X_t - E[X_t]) + tE[X_1]. \tag{3}$$

Quá trình đối trọng $(X_t - E[X_t])$ là một martingale nên tổng của (3) là tổng của một martingale và một dịch chuyển tuyến tính $tE[X_1]$.
Biểu diễn (3) ở trên gợi ý đến một định nghĩa tổng quát về quá trình semimartingale

$$X_t = X_0 + V_t + M_t, \tag{4}$$

trong đó $V = (V_t, t \geq 0)$ là một quá trình thích nghi, càdlàg và có biến phân hữu hạn, còn $M = (M_t, t \geq 0)$ là một martingale địa phương.
Cũng có những quá trình không phải là semimartingale, một ví dụ quan trọng đó là quá trình chuyển động Brown phân thứ.
Hệ thức (4) nói chung không phải là duy nhất, nó sẽ là duy nhất với

Tài liệu tham khảo

[1] Alòs E., Mazet O., and Nualart D. (2000), "Stochastic calculus with respect to fractional Brownian motion with Hurst paramenter less than $\frac{1}{2}$", *Stochastic Processes and Their Applications* 86(1), pp. 121-139.

[2] Berg T. (2010), "From actual to risk-neutral default probabilities: Merton and Beyond", *T*he Journal of Credit Risk 6(1), pp. 55-86.

[3] Biagini F., Hu Y., Øksendal B., Sulem A. (2002), "A stochastic maximum principle for processes driven by a fractional Brownian motion", *Stoch. Proc. Appl.* 100, pp. 233-254.

[4] Bielecki T., Jeanblan M. and Rutkowski M. (2009), *Credit Risk Modeling*, Center for Study of Insurance and Finance, Osaka University.

[5] Bystrom H. (2007), "Merton for Dummies: A Flexible Way of Modelling Default Risk", *R*esearch Paper Series, 112, Quantitative Finance Research Centre, University of Technology, Sydney.

[6] Carmona P., Coutin L., and Montseny G. (2003), "Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion", *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 39(1), pp. 27-68.

[7] Coutin L. (2007), "An Introduction to Stochastic Calculus with Respect to Fractional Brownian motion", *Séminaire de Probabilités XL, Springer-Verlag Berlin Heidelberg* pp. 3-65.

[8] Cont R., Tankov P. (2003), *Financial Modelling With Jump Processes,* Chapman and Hall, CRC Press.

[9] Cyganowski S., Grume L., Kloeden P. E. (2012), "MAPLE for Jump-Diffusion Stochastic Differential Equations in Finance", *Prepient,* Feb. 5.

[10] Decreusefond L. and Üstünel A. S. (1999), "Stochastic analysis of the fractional Brownian motion", *Potential Anal.*,10(2), pp. 177-214.

[11] Duncan T. E., Hu Y., Duncan P. B. (2000), "Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion", *SIAM Control and Optimization* 38(2), pp. 582-612.

[12] Feyel D., De la Pradelle A. (1996), "Fractional integrals and Brownian processes", *Potential Analysis,* 10, pp. 273-288.

[13] Gihman I. I., Skorohod A.V. (1972), *Stochastic Differential Equations,* Springer.

[14] Giesecke K. and Lisa R. G. (2004), "Forecasting Default in Face of Uncertainty", *T*he Journal of Derivatives, Fall, pp. 11-25.

[15] Ito K. (1951), "Multiple Wiener integral", *J. Math. Soc. Japan,* 3, pp. 157-169.

[16] Jacques J., Manca, R. (2007), *Semi-Markov Risk Models For Finance, Insurance and Reliability,* Springer.

[17] Kloeden P. E. and Platen E. (1995), *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations,* Springer.

[18] Lamberton D., Lapeyre B. (2000), *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance,* Chapman & Hall/CRI.

[19] Léon. (1993), "Fubini theorem for anticipating stochastic integrals in Hilbert space", *Appl. Math. Optim.* 27(3), pp. 313-327.

[20] Lin S. M., Ansell J., Andreeva G. (2010), "Merton Models or Credit Scoring: Modelling Default of A Small Business", *W*orking paper, Credit Reseach Centre, Management School Longleftarrow & *E*conomics, The University of Edinburgh, U.K.

[21] Loève M. (1963), *Probability Theory,* D.Van Nostrand Company, third Edition.

[22] Lyons. T. (1994), "Differential Equations Driven by Rough Signals (I): An Extension of an Inequality of L.C Young", *Mathematical Research Letters* 1, pp. 451-464.

[23] Mandelbrot B., van Ness J. (1968), "Fractional Brownian motions, Fractional Noises and Applications", *J. SIAM Review* 10(4), pp. 422-437.

[24] Nualart D., Alòs E., Mazet O. (2000), "Stochastic Calculus with respect to Fractional Brownian Motion with Hurst Parameter less than 1/2", *J.* Stoc. Proc. Appl.86, 131-139.

[25] Nualart D., Răşcanu A. (2002), "Differential equations driven by fractional Brownian motion", *Collectanea Mathematica* 53, pp. 55-81.

[26] Privault N. (2003), "Notes on Stochastic Finance", http://www.ntu.edu.sg/home/nprivault/indext.html

[27] Protter P. (1990), *Stochastic Integration and Differential Equations,* Berlin-Springer.

[28] Revuz D. and Yor M. (1999), *Continuous martingales and Brownian motion,* Springer, Berlin Heidelberg New York, third edition.

[29] Roger M. (2004), "Merton Robert C. on putting theory into practice", *CFA Magazine*, July-August, pp. 34-37.

[30] Trần Hùng Thao (2003), "A note on Fractional Brownian Motion", *V*ietnam J. Math.31(3), 255-260.

[31] Trần Hùng Thao (1991), "Optimal State Estimation of a Markov from Point Process Observations", *A*nnales Scientifiques de l'Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand II. Fasc. 9, pp. 1-10.

[32] Trần Hùng Thao (2013), "A Practical Approach to Fractional Stochastic Dynamics", *J.* Comput., Nonlinear Dyn. 8,pp. 1-5.

[33] Trần Hùng Thao (2006), "An approximate approach to fractional analysis for finance", *Nonlinear Analysis* 7, pp. 124-132.

[34] Trần Hùng Thao (2013), "On some Classes of Fractional Stochastic Dynamical Systems", *E*ast-West J. of Math. 15(1), 54-69.

[35] Trần Hùng Thao, Christine T. A. (2003),"*É*volution des cours gouvernée par un processus de type ARIMA fractionaire", *S*tudia Babes-Bolyai, Mathematica 38(2), 107-115.

[36] Trần Hùng Thao, Nguyễn Tiến Dũng (2010), "A Note on Optimal State Estimation for A Fractional Linear System", *Int. J. Contemp. Math. Sciences* 5(10), pp. 467-474.

[37] Trần Hùng Thao. Trần Trọng Nguyên (2003), "Fractal Langevin Equation", *Vietnam Journal of Mathematics* 30(1), pp. 89-96.

[38] Trần Hùng Thao, Plienpanich T. (2007), "Filtering for Stochastic Volatility from Point Process Observation", *VNU Journal of Science* 23, pp. 168-177.

[39] Hoàng Thị Phương Thảo (2014), "A Note on Jumps-Fractional Processes", *E*ast-West Journal of Math., 16 (1), pp. 14-24.

[40] Hoàng Thị Phương Thảo (2013), "Valuing Default Risk for Assets Value Jumps Processes", *E*ast-West J. of Mathematics 15(2),pp. 101-106.

[41] Hoàng Thị Phương Thảo, Trần Hùng Thao (2012), "A Note on A Model of Merton Type for Valuing Default Risk", *A*pplied Mathematical Sciences 6(89-92), pp. 4457-4461.

[42] Hoàng Thị Phương Thảo, Trần Hùng Thao (2012), "Estimating Fractional Stochastic Volatility", *T*he International Journal of Contemporary Mathematical Sciences 82(38), pp. 1861 - 1869.

[43] Hoàng Thị Phương Thảo, Vương Quân Hoàng (2015), "A Merton Model of Credit Risk with Jumps", *J*ournal of Statistics Applications & Probability Letters 2(2), pp. 1-7.

[44] Økendal B. (2008), *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, Springer.

[45] Øksendal B. (2003), *Stochastic Differential Equations,* Sixth edition, Springer.

[46] Shiryaev A. N. (1999), *Essentials of Stochastic Finance Facts, Models, Theory*,World Scientific.

[47] Shiryaev A. N. (1996), *Probability*, New York-Springer, 2nd edition.

[48] Skorohod A. V. (1975), "On a generalization of the stochastic integral", *Teor. Verojatnost. Primenen.* 20(2), pp. 223-238.

[49] Shreve S. R. (2003), *Stochastic Calculus for Finance II,* Springer.