



**Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco**

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

POSGRADO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

**FORMULACIÓN DE MODELOS DE
ARTICULACIONES EN VIGAS DE CONCRETO
SIMPLE**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL**

P R E S E N T A:

ALDO MENDOZA DÍAZ

Asesor:

DR. GELACIO JUÁREZ LUNA

México, D.F, 2014

Agradezco a Dios en gran manera por darme vida, salud
y sabiduría para culminar mis estudios de maestría.

Agradecimientos

A mis padres Guillermo y Evelia quienes siempre me han brindado su apoyo incondicional, por sus ejemplos de perseverancia y honestidad, pero sobre todo por su amor.

A mis hermanas Diana y Abigail por estar conmigo en todo tiempo y por compartir momentos inolvidables.

A mi novia Victoria por comprender mi ausencia en los momentos difíciles que se derivaron de este periodo de estudio y por mostrarme su apoyo incondicional.

A mis compañeros del Posgrado por compartir sus conocimientos y experiencias.

Al Dr. Gelacio Juárez Luna por brindarme su apoyo como director tesis durante el tiempo que tomó el desarrollo de la misma y por la motivación que de él se derivó por su ejemplo y dedicación.

Al Dr. Arturo Tena Colunga por sus acertados comentarios y por compartir sus conocimientos, los cuales han sido fundamentales en mi desarrollo académico.

Al Dr. Gustavo Ayala Milián por su amable ayuda en la revisión de este trabajo y sus acertados comentarios.

Al Posgrado en Ingeniería Estructural de la Universidad Autónoma Metropolitana por ofrecer una educación de calidad que me ha permitido desarrollarme como persona y como profesionalista.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado en este proceso.

Contenido

Resumen	vi
1 Introducción	1
1.1 Introducción	1
1.2 Antecedentes	2
1.3 Modelos para simular el daño	5
1.4 Objetivo general	7
1.4.1 Objetivos específicos	7
1.5 Hipótesis de trabajo	7
1.6 Organización de la tesis	7
2 Determinación de carga última en elementos a flexión	9
2.1 Determinación de cargas	9
2.1.1 Carga de agrietamiento	9
2.1.2 Carga de colapso	12
3 Simulación numérica de vigas sujetas a daño	20
3.1 Modelos sólidos	20
3.1.1 Ejemplos de validación	20
3.1.2 Vigas simplemente apoyadas	23
3.1.3 Vigas en voladizo	31
3.1.4 Vigas doblemente empotradas	34
4 Modelos constitutivos equivalentes	41
4.1 Energía liberada, E_f , contra energía inducida, E_c	41
4.1.1 Energía de vigas simplemente apoyadas	42
4.1.2 Energía de vigas en voladizo:	44
4.1.3 Energía de Vigas doblemente empotradas	44
4.2 Modelos equivalentes con ablandamiento lineal	46
4.2.1 Diagrama momento contra salto de rotación	46
4.2.2 Diagrama equivalente carga contra desplazamiento	47
4.3 Modelos equivalentes con ablandamiento exponencial	48

4.3.1	Diagramas equivalentes momento contra salto de rotación _____	48
4.3.2	Diagrama equivalente carga contra desplazamiento _____	49
4.4	Ejemplos de aplicación _____	51
4.4.1	Ejemplo 1 _____	51
4.4.2	Ejemplo 2 _____	54
4.4.3	Ejemplo 3 _____	55
4.4.4	Ejemplo 4 _____	56
4.4.5	Ejemplo 5 _____	58
4.4.6	Ejemplo 6 _____	59
4.4.7	Ejemplo 7 _____	60
4.4.8	Ejemplo 8 _____	61
5	Conclusiones y recomendaciones _____	64
5.1	Conclusiones _____	64
5.2	Recomendaciones _____	65
5.3	Trabajos futuros _____	65
	REFERENCIAS _____	66

Lista de figuras

FIGURA 1.1 SALTOS EN UNA ARTICULACIÓN: A) ROTACIÓN (ARTICULACIÓN), B) DISLOCACIÓN Y C) AMBAS (ADAPTADO DE JUÁREZ Y AYALA 2012).	2
FIGURA 1.2 MODELOS CONSTITUTIVOS: A) $M-[\phi]$ Y B) $V-[\dot{w}]$ (ADAPTADO DE JUÁREZ Y AYALA 2012)	2
FIGURA 1.3 CURVAS CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO CON SNAPBACK (ADAPTADAS DE CARPINTERI, 1988)	3
FIGURA 1.4. MODELO DE AGRIETAMIENTO DISTRIBUIDO (ADAPTADO DE JUÁREZ, 2006)	5
FIGURA 1.5. DISCONTINUIDADES INTERIORES: A) PROPAGACIÓN Y B) DESPLAZAMIENTO EMBEBIDO (ADAPTADO DE OLIVER, 1996)	6
FIGURA 1.6 MODELO DE DAÑO DIFERENTE TENSIÓN Y COMPRESIÓN: A) SUPERFICIE 2D Y B) CURVA ESFUERZO-DEFORMACIÓN 1D (MÉNDEZ Y JUÁREZ 2012)	6
FIGURA 2.1 DISTRIBUCIÓN LINEAL DE ESFUERZOS EN INTERVALO ELÁSTICO	9
FIGURA 2.2 DIAGRAMA DE MOMENTO DE UNA VIGA SIMPLEMENTE APOYADA	10
FIGURA 2.3 DIAGRAMA DE MOMENTO DE UNA VIGA EN VOLADIZO	11
FIGURA 2.4 DIAGRAMA DE MOMENTO DE UNA VIGA DOBLEMENTE EMPOTRADA	11
FIGURA 2.5 PIEZA DE MATERIAL CON DAÑO SOMETIDA A ESFUERZO UNIAIXIAL	12
FIGURA 2.6 CURVA ESFUERZO CONTRA DEFORMACIÓN	14
FIGURA 2.7 DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS LA SECCIÓN TRANSVERSAL DE LA VIGA	15
FIGURA 2.8 DENSIDAD DE ENERGÍA DE FRACTURA	16
FIGURA 2.9 DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS EN EL PERALTE DE LA SECCIÓN	18
FIGURA 2.10 LÍMITES DE INTEGRACIÓN	19
FIGURA 3.1 VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON RANURA A LA MITAD DE SU LONGITUD	20
FIGURA 3.2. MALLA ESTRUCTURADA EN 2D: A) NO DEFORMADA, B) DAÑADA	21
FIGURA 3.3 CURVAS CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO DE VIGA CON RANURA.	21
FIGURA 3.4. GEOMETRÍA DE LA VIGA	22
FIGURA 3.5. CONFIGURACIÓN DE LA MALLA 2D: A) NO DEFORMADA, B) DAÑADA	22
FIGURA 3.6. CURVA CARGA DESPLAZAMIENTO DE VIGA DE SECCIÓN CONSTANTE	22
FIGURA 3.7 MODELO DE VIGA CON RANURA AL CENTRO	23
FIGURA 3.8. MALLA ESTRUCTURADA EN 2D EN SU ESTADO DAÑADA PARA VIGA CON RANURA EN LA MITAD DE SU LONGITUD: A) $r=0.75H$, B) $r=0.25H$ Y C) $r=0$.	24
FIGURA 3.9 CURVAS CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO DE VIGAS CON RANURA	24
FIGURA 3.10 GEOMETRÍA DE LA VIGA	25
FIGURA 3.11. CONFIGURACIÓN DE LA MALLA DEFORMADA EN 2D: A) $H/L=0.1$, B) $H/L=0.15$, C) $H/L=0.2$, D) $H/L=0.3$, E) $H/L=0.33$, F) $H/L=0.4$, G) $H/L=0.6$, H) $H/L=0.8$, I) $H/L=1.0$	26
FIGURA 3.12 CURVAS CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO	26
FIGURA 3.13 A) CURVA CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO CON SNAPBACK, B) CONTROL DE CARGA, C) CONTROL DE DESPLAZAMIENTO Y D) CONTROL DE ARCO DE LONGITUD (ADAPTADA DE JIRÁSEK, 2002)	27
FIGURA 3.14 GEOMETRÍA DE LA VIGA	27
FIGURA 3.15 MALLA DEFORMADA A) $H=10$ CM, B) $H=20$ CM, C) $H=40$ CM Y D) $H=80$ CM	28
FIGURA 3.16 CURVAS CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO DE VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS	29
FIGURA 3.17 GEOMETRÍA DE LA VIGA	30
FIGURA 3.18 MALLA DEFORMADA: A) $H=10$ CM, B) $H=20$ CM, C) $H=40$ CM Y D) $H=80$ CM	30
FIGURA 3.19 CURVAS CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO	31
FIGURA 3.20 VIGA EN VOLADIZO	31
FIGURA 3.21 MALLA DEFORMADA EN 2D PARA VIGAS EN VOLADIZO: A) $H/L=0.2$, B) $H/L=0.25$, C) $H/L=0.33$, D) $H/L=0.5$, E) $H/L=1.0$ Y F) $H/L=2.0$	32

FIGURA 3.22 CURVAS CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO DE VIGAS EN VOLADIZO	32
FIGURA 3.23 VIGA EN VOLADIZO.....	33
FIGURA 3.24 MALLA DEFORMADA DE VIGAS EN VOLADIZO: A) H=10 CM, B) H=20 CM, C) H=40 CM Y D) H=80 CM.....	33
FIGURA 3.25 CURVAS CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO	34
FIGURA 3.26 VIGA DOBLEMENTE EMPOTRADA.....	34
FIGURA 3.27 MALLA DEFORMADA EN 2D DE VIGAS DOBLEMENTE EMPOTRADAS PARA: A) H/L=0.05, B) H/L=0.10, C) H/L=0.15, D) H/L=0.20, E) H/L=0.25, F) H/L=0.33, G) H/L=0.50, H) H/L=1.0 E I) H/L=2.0.....	35
FIGURA 3.28 CURVAS CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO	36
FIGURA 3.29 PROPAGACIÓN DE LA FALLA DE VIGAS DOBLEMENTE EMPOTRADAS: A) FALLA PARA RELACIONES H/L=0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.33 Y 0.5 B) FALLA PARA RELACIONES H/L=1 Y 2	36
FIGURA 3.30 VIGA DOBLEMENTE EMPOTRADA.....	36
FIGURA 3.31 MALLA DEFORMADA DE VIGAS DOBLEMENTE EMPOTRADAS: A) H=10 CM, B) H=20 CM, C) H=40 CM Y D) H=80 CM.	37
FIGURA 3.32 CURVAS CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO DE VIGAS DOBLEMENTE EMPOTRADAS	38
FIGURA 3.33 COMPONENTES DE TENSIÓN Y COMPRESIÓN DE LAS DIAGONALES DE VIGAS DOBLEMENTE EMPOTRADAS	38
FIGURA 3.34 VIGA DOBLEMENTE EMPOTRADA CON RELACIÓN H/L=0.1	39
FIGURA 3.35 MALLA DEFORMADA DE VIGAS DOBLEMENTE EMPOTRADAS CON L=10H: A) H=10 CM, B) H=20 CM, C) H=40 CM Y D) H=80 CM.	39
FIGURA 3.36 CURVAS CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO	40
FIGURA 4.1 MODELOS EQUIVALENTES: A) $M-[\theta]$ Y B) $V-[w]$	41
FIGURA 4.2 GEOMETRÍA DE: A) SECCIÓN COMPLETAMENTE DAÑADA Y B) MODELO APROXIMADO COMO ARTICULACIÓN	42
FIGURA 4.3 ÁREA BAJO LA CURVA CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO	42
FIGURA 4.4 ÁREA POSITIVA DEL DIAGRAMA CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO	45
FIGURA 4.5 VARIACIÓN DEL MOMENTO CONTRA SALTO DE ROTACIÓN: A) ENERGÍA Y B) RIGIDEZ DEL RESORTE ROTACIONAL.....	46
FIGURA 4.6 DIAGRAMA IDEALIZADO CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO CON ABLANDAMIENTO LINEAL	47
FIGURA 4.7 VARIACIÓN DEL MOMENTO CONTRA SALTO: A) ENERGÍA Y B) RIGIDEZ DEL RESORTE ROTACIONAL.....	49
FIGURA 4.8 DIAGRAMA IDEALIZADO CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO CON ABLANDAMIENTO EXPONENCIAL.....	49
FIGURA 4.9 MODELOS EQUIVALENTES: A) MOMENTO CONTRA SALTO Y B) RIGIDEZ ROTACIONAL	52
FIGURA 4.10 COMPARACIÓN DE CURVAS CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO	53
FIGURA 4.11 MODELOS EQUIVALENTES: A) MOMENTO CONTRA SALTO Y B) RIGIDEZ ROTACIONAL	54
FIGURA 4.12 COMPARACIÓN DE CURVAS CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO	54
FIGURA 4.13 MODELOS EQUIVALENTES: A) MOMENTO CONTRA SALTO Y B) RIGIDEZ ROTACIONAL	55
FIGURA 4.14 COMPARACIÓN DE CURVAS CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO	56
FIGURA 4.15 MODELOS EQUIVALENTES: A) MOMENTO CONTRA SALTO DE ROTACIÓN Y B) RIGIDEZ ROTACIONAL	56
FIGURA 4.16 COMPARACIÓN DE CURVA CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO CON MODELOS EQUIVALENTES	57
FIGURA 4.17 MODELOS EQUIVALENTES: A) MOMENTO CONTRA SALTO DE ROTACIÓN Y B) RIGIDEZ ROTACIONAL	58
FIGURA 4.18 COMPARACIÓN DE CURVA CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO CON MODELOS EQUIVALENTES	58
FIGURA 4.19 MODELOS EQUIVALENTES: A) MOMENTO CONTRA SALTO DE ROTACIÓN Y B) RIGIDEZ ROTACIONAL	59
FIGURA 4.20 COMPARACIÓN DE CURVA CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO CON MODELOS EQUIVALENTES	59
FIGURA 4.21 MODELOS EQUIVALENTES: A) MOMENTO CONTRA SALTO DE ROTACIÓN Y B) RIGIDEZ ROTACIONAL	60
FIGURA 4.22 COMPARACIÓN DE CURVA CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO CON MODELOS EQUIVALENTES	61
FIGURA 4.23 MODELOS EQUIVALENTES: A) MOMENTO CONTRA SALTO DE ROTACIÓN Y B) RIGIDEZ ROTACIONAL	62
FIGURA 4.24 COMPARACIÓN DE CURVA CARGA CONTRA DESPLAZAMIENTO CON MODELOS EQUIVALENTES	62

Resumen

Se desarrolla un modelo equivalente del agrietamiento en elementos sólidos en 2D para representarse como articulaciones en elementos viga. La formulación se realizó con base en la energía de fractura necesaria para generar la separación completa de la sección transversal del elemento prismático, equivalente al área debajo de la curva carga contra desplazamiento de elementos prismáticos sujetos al colapso. Esta energía es igual a la que se disipa en una articulación, correspondiente al área debajo de la curva momento contra salto de la rotación si la viga falla en flexión o al área debajo de la curva cortante contra salto del desplazamiento transversal si la viga falla en cortante.

Para simular el comportamiento de elementos prismáticos de concreto con elementos sólidos en 2D se utilizó un modelo de daño que considera un comportamiento constitutivo del concreto con diferente umbral en compresión y tensión. El modelo de daño se validó con dos vigas simplemente apoyadas, obteniéndose curvas carga contra desplazamiento congruentes con resultados experimentales reportados en la literatura. Se modeló el colapso de otras vigas simplemente apoyadas con relación de aspecto peralte entre longitud $h/L=0.05, 0.1, 0.15, 0.20, 0.30, 0.40, 0.60, 0.80$ y 1.0 , vigas en voladizo y doblemente empotradas con $h/L=0.20, 0.25, 0.33, 0.5, 1.0$ y 2.0 .

Las relaciones constitutivas momento-salto rotación y cortante salto del desplazamiento transversal de articulaciones en vigas de concreto simple se desarrollaron con base en la energía disipada obtenida de las simulaciones numéricas, de las que posteriormente se desarrolló una ecuación analítica para el cálculo de la carga de colapso dependiente de la energía de fractura y de los parámetros geométricos de la sección transversal.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción

El estudio del comportamiento de las estructuras en su evolución al colapso proporciona una idea sobre su comportamiento estructural después de alcanzar su carga última, tal comportamiento depende principalmente del modelo constitutivo de los materiales con los que está construida. Generalmente, los materiales empleados en la ingeniería civil se clasifican con base en su modelo constitutivo representado por sus curvas esfuerzo–deformación como: dúctiles o frágiles. Entre los materiales dúctiles se encuentra el acero que después de alcanzar el esfuerzo de fluencia presenta un fenómeno llamado “endurecimiento por deformación” en el que ocurre un incremento en los esfuerzos que no es proporcional a los incrementos de deformación; mientras que, el concreto, después de alcanzar su carga umbral, presenta el fenómeno de “ablandamiento por deformación”, el cual se caracteriza por la disminución de los esfuerzos en el material con un incremento en las deformaciones debido a la propagación del agrietamiento.

El daño en los materiales es un proceso físico-progresivo, el cual puede verse desde dos perspectivas diferentes conocidas como: microescala y macroescala. En la microescala el daño se debe a la acumulación de micro esfuerzos en la vecindad de las imperfecciones, formándose vacíos. A nivel de macroescala, el daño se debe al crecimiento y ensamble de fisuras microscópicas que, en conjunto, forman una discontinuidad la cual puede presentarse físicamente como grietas y fisuras o líneas de deslizamiento.

En elementos marco de concreto reforzado y de acero, el daño se modela como la formación de articulaciones plásticas (Baker y Heyman 1969, Jirásek y Bazant 2002). Como la que se muestra en la Figura 1.1a, esta suposición se hace considerando que el eje neutro de la viga aproximadamente se mantiene en el centro geométrico del peralte de la sección, debido a que se tiene la misma resistencia a tensión y compresión del acero. Esta suposición deja de ser válida cuando se tienen elementos de concreto simple y reforzado, puesto que al iniciar el daño, el concreto tiene diferente resistencia a tensión y a compresión, por lo que la posición del eje neutro se mueve hacia la zona en compresión. Esta zona se idealiza como una articulación para vigas de Bernoulli, dislocación o una combinación de ambas para vigas de Timoshenko, como se muestra en la Figura 1.1, suponiéndose comportamientos constitutivos momento-salto de rotación, $M-[\theta]$ y cortante-salto desplazamiento transversal, $V-[\omega]$, como se muestra en la Figura 1.2, en el que se considera desacoplado el cortante del momento (Jirásek 1997, Armero y Ehrlich 2006,

Juárez y Ayala 2012), por lo que el resultado es dependiente del modelo constitutivo y de la teoría de vigas empleadas.

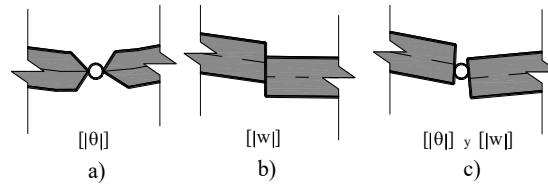


Figura 1.1 Saltos en una articulación: a) rotación (articulación), b) dislocación y c) ambas (adaptado de Juárez y Ayala 2012).

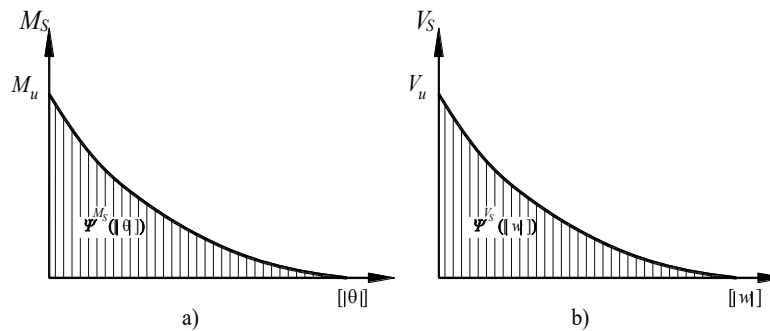


Figura 1.2 Modelos constitutivos: a) $M-||\theta||$ y b) $V-||w||$ (adaptado de Juárez y Ayala 2012)

1.2 Antecedentes

Hasta el momento se han realizado algunos trabajos sobre determinación de diagramas carga contra desplazamiento en elementos de concreto simple, tales como:

Korneling y Reinhardt (1983) probaron experimentalmente una viga simplemente apoyada de concreto simple de sección constante y con ranura en la mitad de su longitud la cual se sometía a una carga en el centro del claro, que se inducía mediante desplazamientos aplicados gradualmente en la dirección negativa del eje vertical, posteriormente fue analizada con el modelo de daño diferente tensión-compresión (DTC), desarrollado e implantado por Méndez y Juárez (2012), el cual se utilizó en esta tesis mediante el programa FEAP (acrónimo de su nombre en inglés Finite Element Analysis Program, Taylor 2008) para la realización de los ejemplos numéricos.

Reinhardt *et. al.* (1986) realizaron investigaciones de pruebas experimentales de tensión uniaxial con deformación controlada bajo carga estática y carga cíclica de especímenes de concreto simple de peso ligero y peso normal. Los resultados se usaron para establecer modelos de materiales para uso del método de elementos finitos y analizaron algunos ejemplos numéricos reportados en la literatura para mostrar la utilidad de estos modelos para condiciones de carga estática y cíclica.

Bazant *et al.* (1987) utilizaron un modelo de elementos finitos con un modelo constitutivo con ablandamiento por deformación, el cual fue validado para simular elementos de concreto reforzado comparando los resultados numéricos con datos experimentales; además realizaron un estudio paramétrico considerando el efecto de las variables siguientes: tamaño de la estructura, tamaño del elemento finito, la pendiente decreciente de las relaciones esfuerzo-deformación y deformación-ablandamiento, longitud de la meseta de fluencia plástica y la rigidez de los extremos restringidos. También analizaron la condición de inestabilidad de snapback, la cual determina el factor de ductilidad, derivado analíticamente para una viga con comportamiento elástico, y muestran que los segmentos de ablandamiento por deformación en vigas no pueden modelarse como articulaciones plásticas, excepto para vigas lo suficientemente esbeltas.

Carpinteri (1988) realizó un trabajo sobre determinación de cargas de colapso en elementos de concreto simple, quien utilizó un modelo de grieta cohesiva para analizar la propagación del agrietamiento en vigas; observó que la forma de la curva carga contra desplazamiento cambia por la variación del tamaño de escala de la sección transversal, pero manteniendo la relación de aspecto de la viga $L=4h$. De este modo la rama de ablandamiento es más inclinada cuando se incrementa el tamaño, y para escalas iguales o mayores a dos, la rama de ablandamiento tiende a ser de pendiente positiva, fenómeno conocido como snapback, el cual puede observarse en la curva carga contra desplazamiento mostrada en la Figura 1.3. Esta curva no puede determinarse realizando un análisis con control de carga ni de desplazamientos y para superar este problema, Carpinteri (1988), propuso controlar el proceso de carga por una función de tiempo monotónicamente creciente. También analizó la inestabilidad de snapback y la sobre resistencia en vigas de concreto ligeramente reforzadas; él concluyó que la disminución de la curva de capacidad oculta un ablandamiento virtual en la rama carga-deflexión con una pendiente positiva (snapback), la cual puede detectarse si el proceso de carga se controla a través del ancho de grieta.

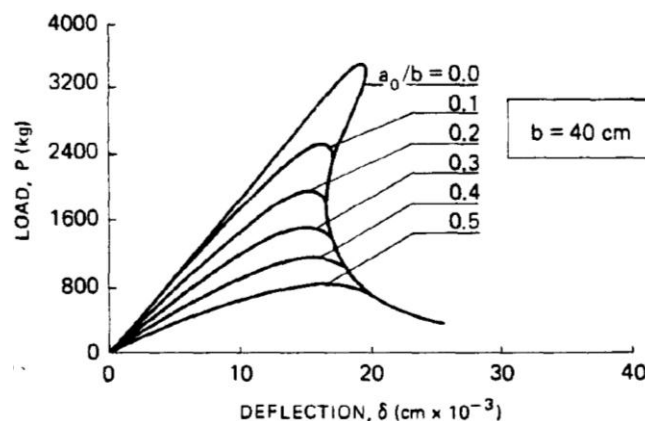


Figura 1.3 Curvas carga contra desplazamiento con snapback (adaptadas de Carpinteri, 1988)

Jirásek (1997) desarrolló elementos viga con articulaciones inelásticas capaces de modelar el ablandamiento debido a los daños en marcos de edificios bajo cargas críticas. Comparó el comportamiento del modelo con soluciones analíticas de estructuras simples (columnas y marcos tipo portal), también presentó una aplicación para análisis inelástico de marcos de varias crujeas, dependiendo de la relación de rigidez viga-columna sobre un parámetro real de ductilidad. Concluyó que pueden ocurrir varios modos de falla, desde distribuidos en un área o volumen, hasta altamente localizados en una línea o área, esto conduce a un tipo especial de efecto de tamaño en la carga umbral, la cual se evalúa numéricamente y se relaciona con soluciones analíticas en situaciones extremas (límite elástico y límite plástico).

Yang y Proverbs (2004) identificaron dieciséis estrategias numéricas basadas en el método de longitud de arco, las cuales usaron para modelar minuciosamente el comportamiento estructural de una viga simplemente apoyada con ranura en la mitad del claro usando el modelo de grieta discreta, en la cual las grietas fueron modeladas por elementos de interfaz con leyes constitutivas de ablandamiento bilineal. Basados en los análisis de elementos finitos y en la comparación detallada de ventajas y desventajas de estos algoritmos numéricos. Sus resultados indican que la eficacia y eficiencia de diferentes algoritmos puede variar considerablemente de uno a otro, concluyendo que los procedimientos basados en longitud de arco local combinados con la estrategia de rigidez tangencial y el modelo de descarga reversible siguen siendo los más robustos, sin embargo, son los más recomendados para resolver problemas en los cuales involucre comportamiento de *snapback*.

Juárez-Luna y Ayala (2012) simularon numéricamente una viga simplemente apoyada de concreto simple con aproximación de esfuerzo plano y relación $h/L=0.333$, la cual fue cargada en el centro del claro inducida mediante control de desplazamientos utilizando el modelo de discontinuidades interiores con elementos sólidos 2D.

Los trabajos anteriormente descritos han inspirado la elaboración del presente trabajo en el cual se realizan simulaciones numéricas de vigas de concreto simple variando las relaciones de aspecto peralte entre longitud (h/L) y con base en la energía de fractura se establecen relaciones momento contra salto de rotación, $M-[\theta]$ y cortante contra salto de desplazamiento, $V-|[w]|$, como articulaciones. Además, se formula una relación en función de parámetros geométricos que determine la carga de colapso en vigas de concreto simple mediante simulaciones numéricas utilizando el modelo de daño. De este modo, se establecen bases para trabajos futuros donde se pueda incluir materiales como acero y concreto reforzado, y no sólo realizar análisis a nivel elemento sino también a nivel estructura.

1.3 Modelos para simular el daño

El modelo de agrietamiento discreto representa la falla en el material como una discontinuidad en el campo de desplazamientos al introducir elementos de interfaz que tienen un espesor nulo. Estos elementos se ubican entre los bordes de los elementos sólidos, particularmente en las zonas donde existen gradientes altos de desplazamientos. Se emplea una ecuación constitutiva discreta tracción-salto para determinar el comportamiento del material en las interfaces, suponiendo que al propagarse y abrirse la grieta existe transferencia de tracciones entre los bordes. Se utilizan elementos de interfaz para simular el proceso de agrietamiento, los cuales sólo se ubican en las fronteras de los elementos sólidos, lo que requiere identificar las zonas potenciales a dañarse y la dirección de los esfuerzos principales antes de la simulación. Para ello se deben realizar análisis elásticos previos y una serie de mallas que resulta tedioso.

Otro método es el de agrietamiento distribuido, introducido por Rashid (1968), el cual es popular para el análisis con elementos finitos de estructuras de concreto simple y reforzado. Este método representa la pérdida de rigidez y resistencia del material mediante un conjunto de grietas paralelas entre sí en todo el elemento finito (Figura 1.4). Existen tres aproximaciones para simular el agrietamiento del concreto por este método: grieta fija, multidireccional y giratoria. La ventaja principal de este método es que no necesita remallado durante la simulación del proceso de falla, pero si exhibe dificultades cuando se presenta ablandamiento por deformación, tales como: dependencia de la malla, atoramiento de esfuerzo y modos cinemáticos falsos (Rots 1988).

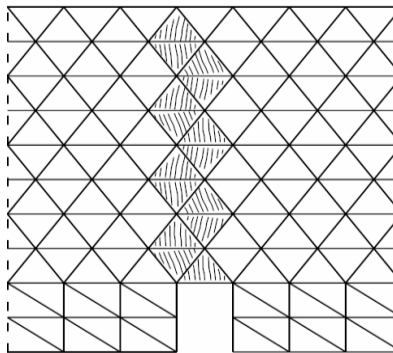


Figura 1.4. Modelo de agrietamiento distribuido (Adaptado de Juárez, 2006)

El método de discontinuidades interiores surge con la idea de tomar las ventajas del método de agrietamiento distribuido y de agrietamiento discreto que pueda localizar el daño y no requiera remallado sin presentar las dificultades de los dos modelos anteriores. Su ventaja primordial es que permite introducir discontinuidades en los elementos durante la simulación sin tener que modificar el mallado, como se muestra en la Figura 1.5. Para distinguir el momento en que aparece la discontinuidad, este modelo utiliza un criterio de falla y para determinar su ubicación emplea un criterio de propagación. Los aspectos fundamentales considerados son el equilibrio en la discontinuidad y la cinemática de

deformaciones y desplazamientos. Una limitante del modelo de discontinuidades interiores en problemas de modelos de desplazamientos es el del criterio de propagación, pues los algoritmos son, en general, computacionalmente costosos.

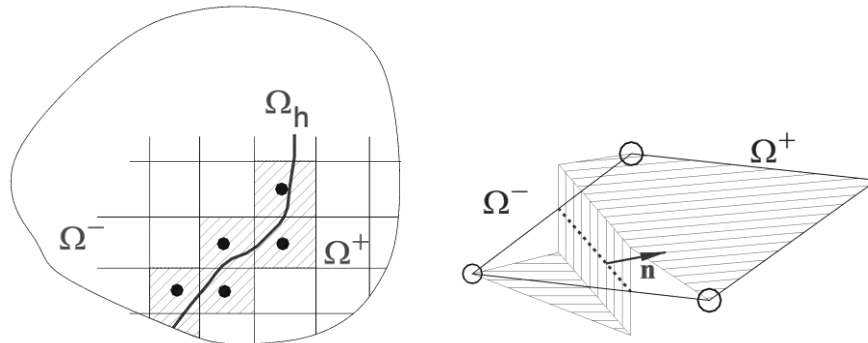


Figura 1.5. Discontinuidades interiores: a) propagación y b) desplazamiento embebido (adaptado de Oliver, 1996)

Otra manera de simular la falla en el concreto es mediante modelos de daño como el propuesto por Méndez y Juárez (2012) denominado Diferente Tensión–Compresión, el cual tiene una superficie de daño que considera diferente magnitud de la resistencia del concreto en tensión y en compresión como se muestra en la Figura 1.6, el cual permite asignar independientemente la energía de fractura, definir la línea o zona de falla y no presenta problemas como los del modelo de agrietamiento distribuido y discontinuidades interiores. El modelo DTC ha sido validado mediante simulaciones numéricas, las cuales se compararon con pruebas experimentales, obteniendo resultados aceptables.

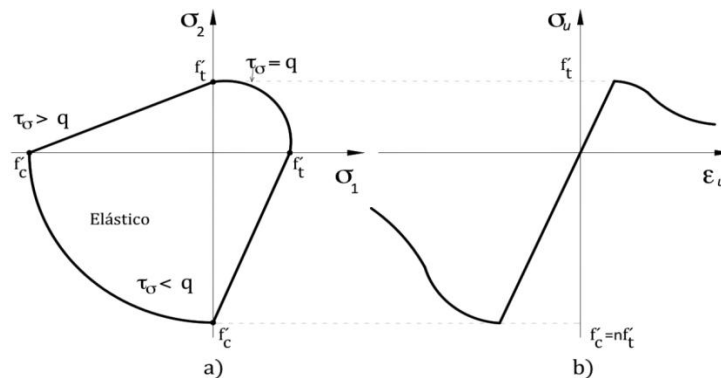


Figura 1.6 Modelo de daño diferente tensión y compresión: a) superficie 2D y b) curva esfuerzo-deformación 1D (Méndez y Juárez 2012)

1.4 Objetivo general

El objetivo general de este trabajo es desarrollar las relaciones constitutivas $M-[\theta]$ y $V-[w]$ para el comportamiento de articulaciones en vigas de concreto simple con base en simulaciones numéricas, con elementos finitos sólidos y la densidad de energía de fractura.

1.4.1 Objetivos específicos

- Determinar una ecuación que describa la variación de las curvas carga-desplazamiento y su relación con la densidad de energía de fractura de vigas, cuando se varía el peralte y los claros.
- Determinar curvas $M-[\theta]$ y $V-[w]$ de vigas a flexión y cortante.
- Estudiar el efecto del daño en vigas delgadas (Euler-Bernoulli) y peraltadas (Timoshenko).
- Establecer una relación en función de parámetros geométricos y la energía de fractura para determinar la carga de colapso.

1.5 Hipótesis de trabajo

- Se considerarán como vigas delgadas aquéllas cuya relación peralte h entre longitud L , sea tal que $h/L \leq 2$ y vigas peraltadas aquéllas con relación $h/L > 2$
- Se realizarán sólo simulaciones numéricas con elementos sólidos en 2D
- La magnitud del esfuerzo umbral a compresión del concreto es 10 veces la magnitud del esfuerzo umbral a tensión.

1.6 Organización de la tesis

La organización de esta tesis se presenta en cuatro capítulos:

- El *Capítulo 1* presenta una breve historia de las investigaciones realizadas sobre vigas de concreto simple en su evolución al colapso, así como algunos de los modelos para simular el daño en materiales. Además, se describen los motivos que dan lugar al presente trabajo, y el delineamiento del contenido de la tesis.
- En el *Capítulo 2* se define de manera detallada el modelo de daño utilizado en el presente trabajo (DTC) y se discuten los métodos analíticos para determinar la carga de colapso en vigas.
- En el *Capítulo 3* se calibra, con ayuda de un modelo experimental reportado de la literatura, un modelo numérico de vigas de concreto simplemente apoyadas con ranura al centro y de sección constante. Se realizan variaciones de las relaciones de aspecto y se simulan numéricamente. De igual manera, se realizan vigas en voladizo

y doblemente empotradas. Se presentan las curvas carga desplazamiento para cada ejemplo.

- En el *Capítulo 4* se desarrolla una metodología para obtener los modelos equivalentes con ablandamiento lineal y ablandamiento exponencial, y se realizan algunos ejemplos de vigas simplemente apoyadas, en voladizo y doblemente empotradas retomados del capítulo tres.
- El *Capítulo 5* se presentan las conclusiones y recomendaciones derivadas de esta tesis, así como un planteamiento para trabajos futuros.

Capítulo 2

Determinación de carga última en elementos a flexión

2.1 Determinación de cargas

2.1.1 Carga de agrietamiento

En secciones transversales rectangulares de concreto, el cálculo de la carga en la que inicia el agrietamiento, P_a , (la cual se define en la siguiente sección) puede obtenerse del análisis de la distribución de esfuerzos como el mostrado en la Figura 2.1, donde se tiene una sección rectangular de peralte $2d$ y ancho b , suponiendo una distribución lineal de esfuerzos. Cuando el material se encuentra en su intervalo elástico, la magnitud de los estados de esfuerzo a compresión es igual a los de tensión, tal que el eje neutro coincide con el eje geométrico de la sección; sin embargo, cuando el concreto alcanza su esfuerzo último a tensión en las fibras extremas, el esfuerzo a compresión puede seguir desarrollándose aún como elástico lineal, en consecuencia, el eje neutro cambia de posición desplazándose hacia la zona a compresión. Posteriormente, se alcanza el esfuerzo último a compresión, tal que se tiene un comportamiento no lineal en la parte superior e inferior de la viga, manteniéndose el eje neutro en la zona de esfuerzos a compresión. Esto se debe a que la resistencia a compresión del concreto es de diez a veinte veces su resistencia a tensión.

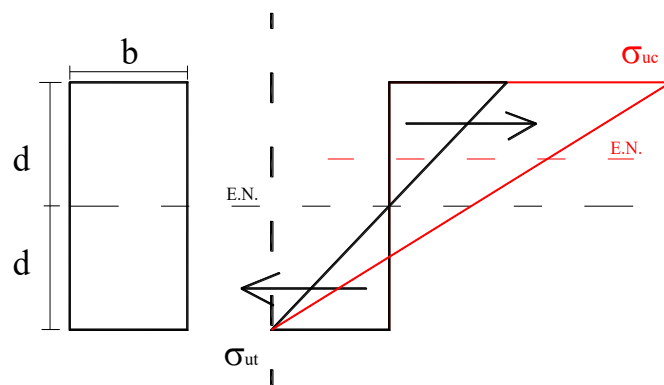


Figura 2.1 Distribución lineal de esfuerzos en intervalo elástico

Para determinar la carga de agrietamiento, P_a , en secciones rectangulares de concreto, se considera una distribución lineal de esfuerzos en la cual el esfuerzo a tensión es igual al de compresión en el intervalo elástico, del cual se obtienen las magnitudes de los volúmenes equivalentes de esfuerzo, multiplicando el área del triángulo por su espesor, *i.e.*,

$$\frac{bd\sigma_{ut}}{2} \quad (2.1)$$

dónde σ_{ut} es el esfuerzo umbral en tensión.

El par de fuerzas mostrado en la Figura 2.1 actúa a un tercio del borde superior e inferior respectivamente. La magnitud del momento último se obtiene multiplicando la fuerza equivalente por la distancia entre ellas, $\frac{4}{3}d$, teniéndose:

$$M_a = \frac{2bd^2\sigma_{ut}}{3} \quad (2.2)$$

El momento de agrietamiento se determina en función de la carga P_a , el cual depende de la longitud del claro (L) y la ubicación de la carga.

Por ejemplo, para una viga simplemente apoyada con una carga al centro del claro como la mostrada en la Figura 2.2, el momento máximo, M_m , en el centro del claro, que puede considerarse como el lugar más susceptible a ocurrir el agrietamiento, es:

$$M_m = \frac{P_a L}{4} \quad (2.3)$$

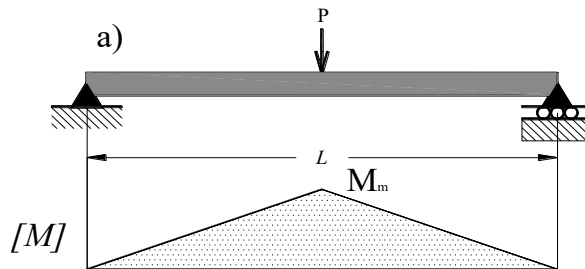


Figura 2.2 Diagrama de momento de una viga simplemente apoyada

Por lo que igualando la ecs. (2.2) y (2.3) y despejando para P_a se obtiene:

$$P_a = \frac{8bd^2\sigma_{ut}}{3L} \quad (2.4)$$

El momento máximo donde puede ocurrir el agrietamiento para una viga en voladizo con una carga en el extremo libre, como la que se muestra en la Figura 2.3 es:

$$M_m = P_a L \quad (2.5)$$

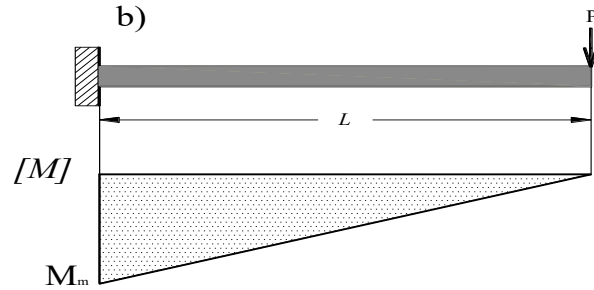


Figura 2.3 Diagrama de momento de una viga en voladizo

igualando la ecs. (2.5) y (2.2) y despejando para P_a se tiene la carga de agrietamiento para una viga en voladizo:

$$P_a = \frac{2bd^2\sigma_{ut}}{3L} \quad (2.6)$$

La magnitud del momento de una viga doblemente empotrada que es desplazada una cantidad Δ_a en su empotramiento derecho como se muestra en la Figura 2.4 es:

$$M_m = \frac{6EI\Delta_a}{L^2} \quad (2.7)$$

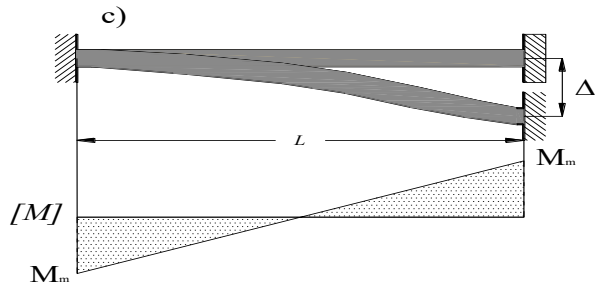


Figura 2.4 Diagrama de momento de una viga doblemente empotrada

Donde Δ_a es el desplazamiento impuesto, el cual se obtiene al igualar las ecs. (2.7) y (2.2), quedando así, la siguiente expresión:

$$\Delta_a = \frac{2bd^2\sigma_{ut}L^2}{18EI} \quad (2.8)$$

La magnitud de la carga de agrietamiento para una viga empotrada en ambos extremos es:

$$P_a = \frac{12EI\Delta_a}{L^3} \quad (2.9)$$

La magnitud de P_a proporciona una aproximación de la carga en la que inicia el agrietamiento, la cual se compara en el capítulo cuatro con la carga obtenida del análisis numérico.

2.1.2 Carga de colapso

La carga última o carga de colapso en vigas rectangulares de concreto simple se puede obtener por medio de una distribución de esfuerzos no lineal, en la cual se ha alcanzado el esfuerzo umbral en tensión y compresión. En esta sección se propone un método para determinar la carga de colapso de vigas de concreto simple, la cual depende de la energía de fractura, los esfuerzos umbrales a tensión y compresión y los parámetros geométricos de la sección transversal.

Considere una pieza de material sometida a un esfuerzo de tensión uniaxial tal como se muestra en la Figura 2.5.

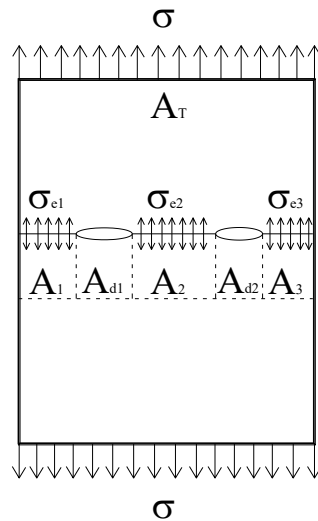


Figura 2.5 Pieza de material con daño sometida a esfuerzo uniaxial

donde se definen los siguientes parámetros:

σ Esfuerzo

A_T Área total de la sección transversal de la pieza

σ_{ei} Esfuerzo efectivo

A Área efectiva

A_{di} Área dañada

De la Figura 2.5 se puede deducir que el área total es la suma del área dañada más el área efectiva

$$A_T = A_{di} + A_i \quad (2.10)$$

Considerando la definición de esfuerzo medio se tiene que:

$$\sigma = \frac{P}{A_T} \quad (2.11)$$

Análogamente para el caso de esfuerzo efectivo:

$$\sigma_e = \frac{P}{A} \quad (2.12)$$

Como la fuerza P se considera constante, igualando las ecuaciones (2.11) y (2.12) y despejando para el esfuerzo efectivo, se tiene:

$$\sigma_e = \frac{\sigma A_T}{A} \quad (2.13)$$

Considerando un comportamiento elástico-lineal, para el caso unidimensional el esfuerzo y el esfuerzo efectivo son iguales:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.14)$$

$$\sigma_e = E\varepsilon \quad (2.15)$$

La ecuación anterior define un esfuerzo efectivo que es mayor al esfuerzo medio, debido a que el área efectiva de la sección transversal disminuye, ya que existe parte del área total que está dañada. Sin embargo, este valor nunca se presenta, ya que el concreto después de alcanzar su esfuerzo umbral presenta ablandamiento por deformación y su esfuerzo decrece. En la Figura 2.6 se muestra la curva idealizada esfuerzo contra deformación con ablandamiento lineal del concreto, en la que se aprecia el esfuerzo efectivo correspondiente.

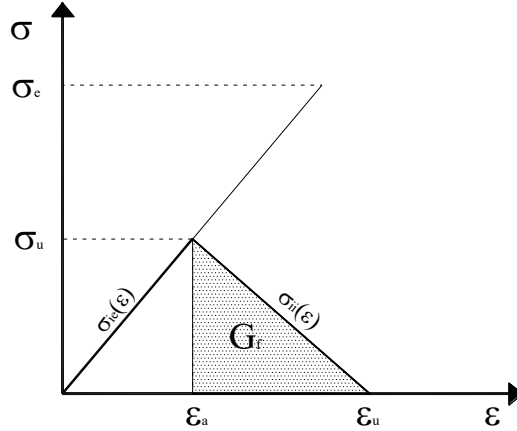


Figura 2.6 Curva esfuerzo contra deformación

donde se definen los siguientes parámetros:

ε_a es la deformación a la cual se alcanza el esfuerzo umbral.

ε_u es la deformación última.

σ_u esfuerzo umbral.

La zona elástica de la curva esfuerzo contra deformación está definida por una función de esfuerzo que depende de las deformaciones y se expresa como:

$$\sigma_{ie}(\varepsilon) = E\varepsilon \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_a \quad (2.16)$$

El intervalo inelástico se define como una función punto pendiente ordenada al origen en la cual se incluye el parámetro H , éste determina la caída de la rama inelástica y se calcula geoméricamente como:

$$H = \frac{-\sigma_u^2}{2EG_f} \quad (2.17)$$

donde, G_f es la densidad de energía de fractura (Figura 2.6).

E es el módulo de elasticidad del concreto.

Por lo tanto, la función que define la zona inelástica es:

$$\sigma_{ii}(\varepsilon) = E\varepsilon H + \sigma_u(1-H) \quad \varepsilon_a \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \quad (2.18)$$

El esfuerzo efectivo que se produce en la sección transversal de una viga se define en función de la posición z , el cual alcanza su valor máximo en las fibras extremas y es cero en el centro geométrico de la sección, se calcula como:

$$\sigma_e(z) = \frac{-Mz}{I} \quad (2.19)$$

dónde:

z es la posición dentro del peralte de la sección

I es el momento de inercia de la sección transversal

M es el momento máximo actuante sobre la viga, los cuales se definieron en la sección 2.1.1 según las condiciones de apoyo y la posición de la carga P .

La distribución de esfuerzos a lo largo del peralte de la sección transversal debido a la acción de una carga P se muestra en la Figura 2.7. Se supone que en el peralte medio superior actúan esfuerzos de compresión y en el peralte medio inferior esfuerzos de tensión. Cuando se aplica una carga P menor que P_a , se produce una distribución lineal de esfuerzos, además, se alcanza el esfuerzo umbral a tensión en el peralte medio superior e inferior y el eje neutro coincide con el centro geométrico de la sección transversal como se muestra en la Figura 2.7a; sin embargo, la sección aún puede desarrollar esfuerzos de compresión. En la Figura 2.7b se presenta una distribución de esfuerzos no lineal debida a la acción de una carga P mayor a la carga de agrietamiento P_a , en la cual se alcanzaron ambos esfuerzos umbrales y el eje neutro se desplaza hacia la zona de compresión.

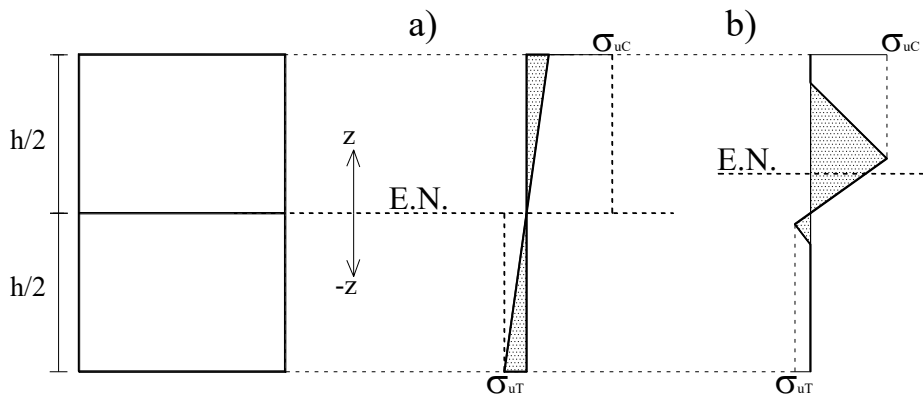


Figura 2.7 Distribución de esfuerzos la sección transversal de la viga

dónde:

σ_{uC} esfuerzo umbral en compresión

σ_{uT} esfuerzo umbral en tensión

Por lo tanto, para la zona del peralte superior en la cual actúan esfuerzos de compresión se calcula el esfuerzo umbral a compresión como n veces el esfuerzo umbral a tensión, donde n puede variar entre 10 y 20, quedando la siguiente expresión:

$$\sigma_{uC} = -n\sigma_{uT} \quad (2.20)$$

El parámetro H que controla la caída de la rama inelástica se calcula como:

$$H = \frac{-\sigma_{uT}^2}{2EG_{fC}} \quad (2.21)$$

donde G_{fC} es la densidad de energía de fractura en compresión, la cual se muestra en la Figura 2.8 y se calcula como:

$$G_{fC} = n^2 G_f \quad (2.22)$$

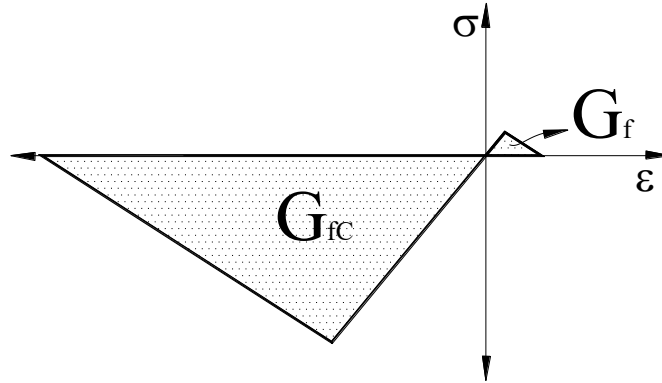


Figura 2.8 Densidad de energía de fractura

A continuación se definen las funciones de esfuerzo correspondientes a las zonas de compresión y tensión.

La función de esfuerzo en la zona de compresión se define en dos tramos: elástico e inelástico, como se muestra en la Figura 2.9. En el tramo elástico el esfuerzo es igual al esfuerzo efectivo definido con la ec. (2.19), si y sólo si el esfuerzo efectivo es mayor o igual al esfuerzo umbral en compresión, esto es:

$$\sigma_C(z) = \sigma_e(z) \quad \text{si} \quad \sigma_e(z) \geq \sigma_{uC} \quad (2.23)$$

La función de la zona inelástica está acotada por el esfuerzo umbral a compresión y el esfuerzo efectivo correspondiente a la deformación última.

$$\sigma_C(z) = \sigma_e(z)H + \sigma_{uC}(1-H) \quad \text{si} \quad -\sigma_{uC} \leq \sigma_e(z) \leq \sigma_{uC} \quad (2.24)$$

donde σ_U es el esfuerzo último en compresión correspondiente a la deformación última en compresión y se calcula de la siguiente manera:

$$\sigma_{UC} = E\varepsilon_{uC} \quad (2.25)$$

ε_{uC} es la deformación última en compresión que se calcula como:

$$\varepsilon_{uC} = \frac{2G_{fC}}{-\sigma_{uC}} - \frac{\sigma_{uC}}{E} \quad (2.26)$$

Análogamente, para la zona del peralte en la cual actúan esfuerzos de tensión, el intervalo elástico se define como:

$$\sigma_T(z) = \sigma_e(z) \quad \text{si} \quad \sigma_e(z) \geq \sigma_{uT} \quad (2.27)$$

La función que define la zona inelástica es:

$$\sigma_T(z) = \sigma_e(z)H + \sigma_{uT}(1-H) \quad \text{si} \quad \sigma_{uT} \leq \sigma_e(z) \leq \sigma_{uT} \quad (2.28)$$

donde σ_{uT} es el esfuerzo último en tensión correspondiente a la deformación última en tensión y se obtiene con la siguiente expresión:

$$\sigma_{uT} = -E\varepsilon_{uT} \quad (2.29)$$

ε_{uT} es la deformación última en tensión y se calcula como:

$$\varepsilon_{uT} = \frac{2G_f}{\sigma_{uT}} + \frac{\sigma_{uT}}{E} \quad (2.30)$$

Con el planteamiento anterior, se puede obtener una distribución de esfuerzos no lineal como la que se muestra en Figura 2.9, si la carga aplicada es lo suficientemente grande para rebasar ambos esfuerzos umbrales.

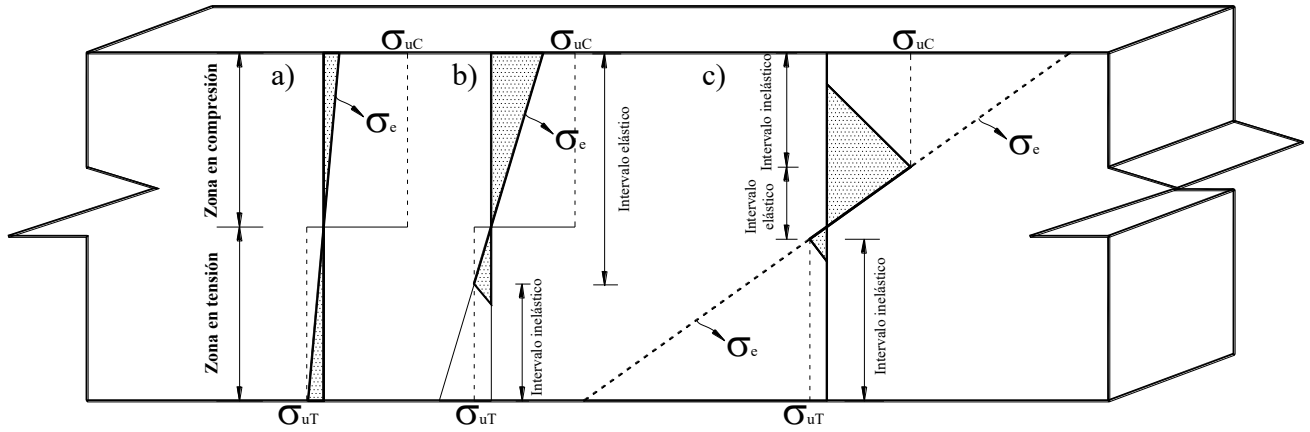


Figura 2.9 Distribución de esfuerzos en el peralte de la sección

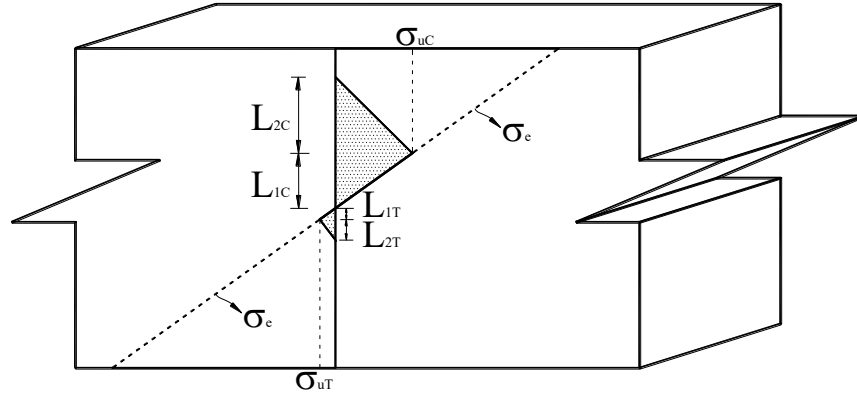
De acuerdo con la Figura 2.9, la magnitud de la carga P aplicada a la viga determina si:

- La distribución de esfuerzos es elástica, es decir, no se supera el esfuerzo umbral a tensión, como se muestra en la Figura 2.9a.
- Se alcanza el esfuerzo umbral a tensión, pero a compresión no, como se muestra en la Figura 2.9b.
- Se alcanzan ambos esfuerzos umbrales, como se muestra en la Figura 2.9c.

Para determinar la magnitud de la carga de colapso se necesita obtener la magnitud del momento actuante debido a tal distribución de esfuerzos, por lo que se procede a integrar las ecs. (2.23), (2.24), (2.27) y (2.28), que corresponden los dos tramos en compresión y en tensión. Se transforma la función de esfuerzo en una función de momento multiplicando la función de esfuerzo por el brazo de palanca (z) y el espesor de la viga (b), por lo que la integral se calcula con la siguiente expresión:

$$M_T(z) = - \int_0^{L_{1C}} \sigma_e(z) z b dz - \int_{L_{1C}}^{L_{2C}} [\sigma_e(z) H + \sigma_{uC} (1-H)] dz + \int_0^{L_{1T}} \sigma_e(z) z b dz + \int_{L_{1T}}^{L_{2T}} [\sigma_e(z) H + \sigma_{uT} (1-H)] dz \quad (2.31)$$

Los límites de integración se muestran en la Figura 2.10, en la cual se presenta una distribución no lineal de esfuerzos donde se superan ambos esfuerzos umbrales en compresión y tensión.


Figura 2.10 Límites de integración

dónde L_{1C} es el límite de la zona elástica en compresión y se calcula como:

$$L_{1C} = -\frac{I\sigma_{uc}}{M_m} \leq 0.5d \quad (2.32)$$

L_{2C} es el límite de la zona inelástica en compresión y se calcula como:

$$L_{2C} = -\frac{I\sigma_{uc}}{M_m} \leq 0.5d \quad (2.33)$$

L_{1T} es el límite de la zona elástica en tensión y se calcula como:

$$L_{1T} = -\frac{I\sigma_{ut}}{M_m} \geq -0.5d \quad (2.34)$$

L_{2T} es el límite de la zona inelástica en tensión y se calcula como:

$$L_{2T} = -\frac{I\sigma_{ut}}{M_m} \geq -0.5d \quad (2.35)$$

Con el procedimiento descrito anteriormente, se proponen diversos valores de P para calcular la magnitud del momento actuante. Se recomienda comenzar con valores mayores a P_a . La carga de colapso es la carga P que produzca el mayor momento $M_T(z)$, por lo que es necesario realizar las suficientes iteraciones para obtener el valor máximo de $M_T(z)$. La formulación anterior describe la variación del estado de esfuerzos a lo largo del peralte de la sección y su relación con la densidad de energía de fractura de vigas. Con esta formulación se puede obtener la carga de colapso o carga última de vigas; sin embargo, dicha carga fue mayor que la carga obtenida del análisis numérico, por lo que no se utilizó en la realización de los modelos equivalentes momento contra salto de rotación.

Capítulo 3

Simulación numérica de vigas sujetas a daño

3.1 Modelos sólidos

En esta sección se presentan simulaciones numéricas de vigas simplemente apoyadas, en voladizo y doblemente empotradas, a las cuales se les realizaron variaciones de la relación de aspecto h/L para estudiar el efecto de daño en vigas delgadas y vigas gruesas. Se consideran las recomendaciones de las Normas Técnicas Complementarias de Diseño de Estructuras de Concreto (NTCC-04), de acuerdo a la sección de diseño por cortante, donde se considera como viga gruesa si $h/L \geq 0.2$ y viga delgada en cualquier otro caso. Análogamente se considera esta misma relación para el caso de placas gruesas (CSI, 2009), siendo L la longitud del claro más corto.

3.1.1 Ejemplos de validación

Se realizó la simulación de dos pruebas de concreto simple reportados en la literatura para validar el modelo constitutivo del concreto desarrollado e implantado en el programa FEAP por Méndez y Juárez (2012). Las pruebas fueron una viga simplemente apoyada con ranura al centro del claro y una viga simplemente apoyada de sección constante, las cuales se describen a continuación:

La primera de ellas es una prueba experimental realizada por Korneling y Reinhardt (1983), que consiste en una viga simplemente apoyada de concreto simple de sección constante y con ranura en la mitad de su longitud, como se muestra en la Figura 3.1. La viga se somete a una carga en el centro del claro, la cual se induce mediante desplazamientos aplicados gradualmente en la dirección negativa del eje vertical. Las propiedades mecánicas del concreto son: módulo elástico $E=20,000$ MPa ($203,943.3$ kgf/cm²), relación de Poisson $\nu=0.2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_t=2.4$ MPa (24.5 kgf/cm²), esfuerzo máximo a compresión $\sigma_c=24$ MPa (245 kgf/cm²) y densidad de energía de fractura $G_f=113$ N/m.

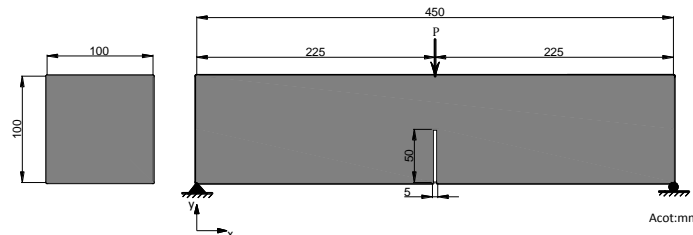


Figura 3.1 Viga simplemente apoyada con ranura a la mitad de su longitud

La malla utilizada en la simulación en 2D, mostrada en la Figura 3.2a, constan de 1890 elementos sólidos cuadriláteros de 4 nodos con cuatro puntos de integración de Gauss. En la Figura 3.2b se observa que el daño se concentra en la vecindad de la punta de la ranura, donde inicia la falla, el cual se propaga hacia la parte superior.

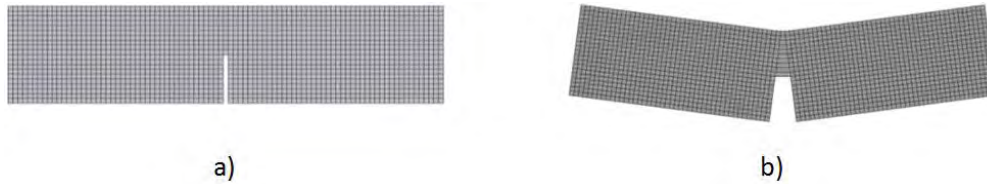


Figura 3.2. Malla estructurada en 2D: a) no deformada, b) dañada

La curva carga desplazamiento obtenida mediante la simulación numérica y la curva de resultados experimentales de Korneling y Reinhardt (1983) se muestran en la Figura 3.3, observándose que en el intervalo elástico tienen el mismo comportamiento y en el intervalo no lineal la curva se encuentra dentro de la envolvente de los resultados experimentales, por lo que se valida el modelo constitutivo del concreto para simular su comportamiento a la falla.

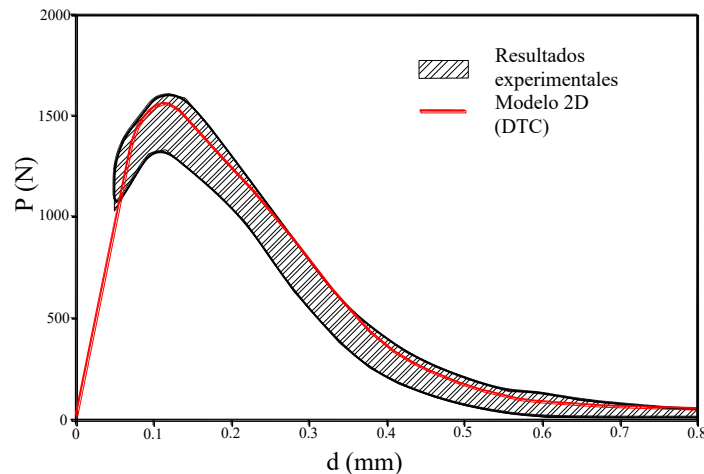


Figura 3.3 Curvas carga contra desplazamiento de viga con ranura.

La segunda prueba consiste en una viga simplemente apoyada con espesor de 1 mm, la cual tiene una carga en el centro del claro inducida mediante desplazamientos graduales, con las dimensiones mostradas en la Figura 3.4. Las propiedades del concreto son: módulo elástico $E=100$ MPa, relación de Poisson $\nu=0.0$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_t=1$ MPa y densidad de energía de fractura $G_f=0.1$ N/mm.

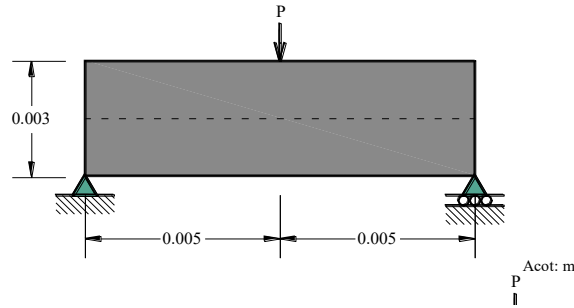


Figura 3.4. Geometría de la viga

La malla estructurada mostrada en la Figura 3.5a consta de 1340 elementos sólidos cuadriláteros con 4 puntos de integración de Gauss. El inicio y la propagación del daño se presenta a la mitad del claro, en el borde paralelo al que se aplica la carga, como se muestra en la Figura 3.5b. La curva obtenida con el modelo de discontinuidades interiores por Wells y Sluys 2001 y el obtenido en este trabajo se muestran en la Figura 3.6, donde se observa que la rama elástica del modelo 2D (DTC) reportado en este trabajo presenta una pendiente mayor a la de Wells y Sluys, mientras que la rama de ablandamiento es casi idéntica. Estas diferencias se pueden atribuir a alguna variación del módulo elástico reportado por Wells y Sluys (2001).

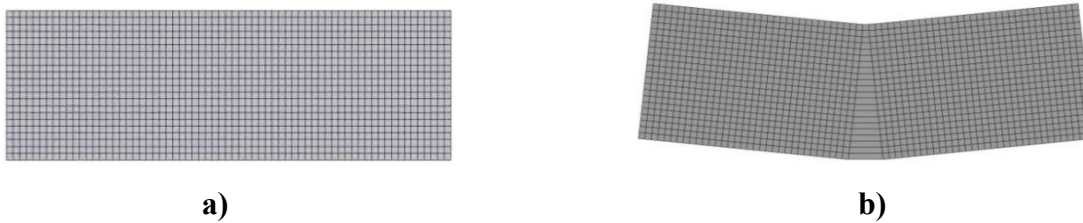


Figura 3.5. Configuración de la malla 2D: a) no deformada, b) dañada

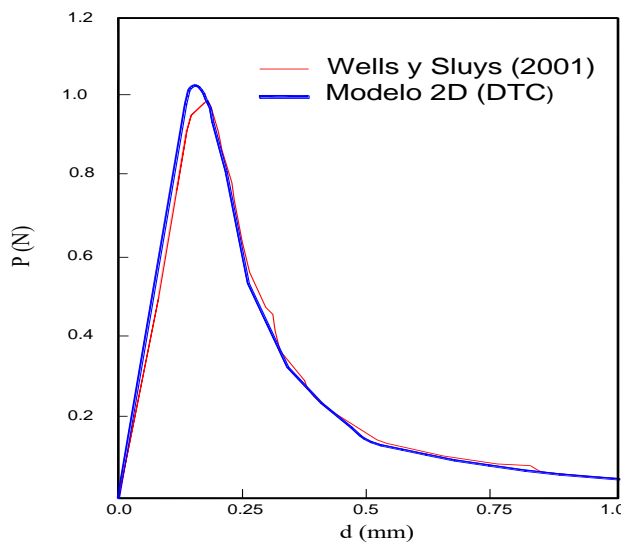


Figura 3.6. Curva carga desplazamiento de viga de sección constante

3.1.2 Vigas simplemente apoyadas

Se presentan las simulaciones numéricas de vigas simplemente apoyadas variando la relación de aspecto h/L ; proponiéndose una malla estructurada de elementos cuadriláteros sólidos con cuatro puntos de integración de Gauss. Al igual que los ejemplos anteriores, se aplican gradualmente desplazamientos en los dos nodos superiores del elemento que se encuentra en la parte media superior del claro, hasta que se produce la falla. Posteriormente, se presentan las curvas carga contra desplazamiento.

3.1.2.1 Viga simplemente apoyada con ranura en el centro del claro

Este ejemplo consiste de una viga de concreto simple con ranura de altura r en la mitad de su longitud como se muestra en la Figura 3.7, con dimensiones $h=100$ mm, $L=450$ mm y espesor de 100 mm, se varió la altura de la ranura (r) con valores de $3h/4$, $h/2$, $h/4$ y $h=0$. La relación de Poisson $\nu=0.2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_t=2.4$ MPa, esfuerzo máximo a compresión $\sigma_c=24$ MPa y densidad de energía de fractura $G_f=113$ N/m.

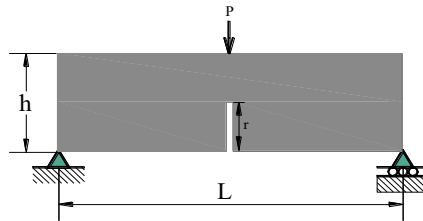


Figura 3.7 Modelo de viga con ranura al centro

En la Figura 3.8 se muestran las mallas estructuradas en su estado deformado de cada modelo con su correspondiente ranura de altura de $r=0$, $h/4$ y $3h/4$ con 1780, 1775 y 1765 elementos sólidos respectivamente. La falla comienza en la vecindad de la ranura que se propaga verticalmente hacia arriba. En la Figura 3.9 se muestran las 4 curvas carga contra desplazamiento de las vigas con ranura, donde se observa que la carga última es inversamente proporcional a la altura de la ranura; cuando la ranura es mayor, la carga máxima disminuye. Lo anterior se relaciona con la energía necesaria para crear una grieta, pues la viga con la ranura más pequeña requiere más energía para crear la grieta con una superficie igual al de la sección transversal de la viga.

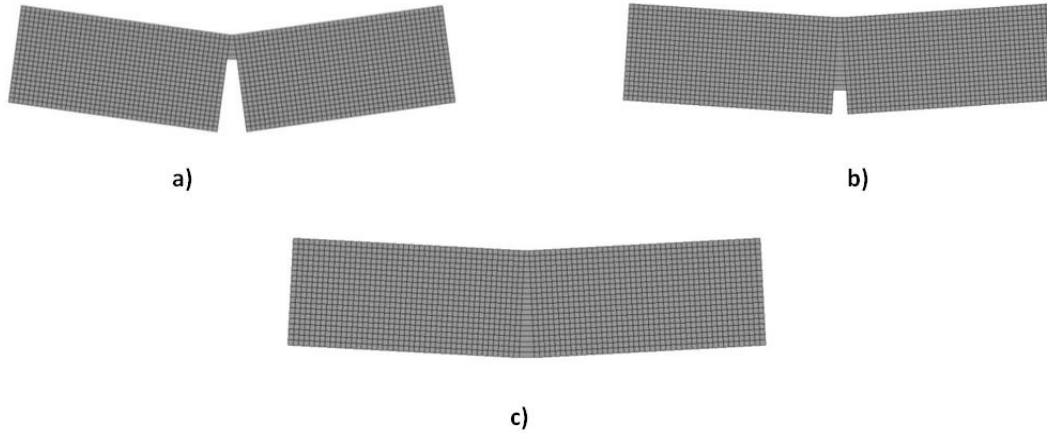


Figura 3.8. Malla estructurada en 2D en su estado dañada para viga con ranura en la mitad de su longitud: a) $r=0.75h$, b) $r=0.25h$ y c) $r=0$.

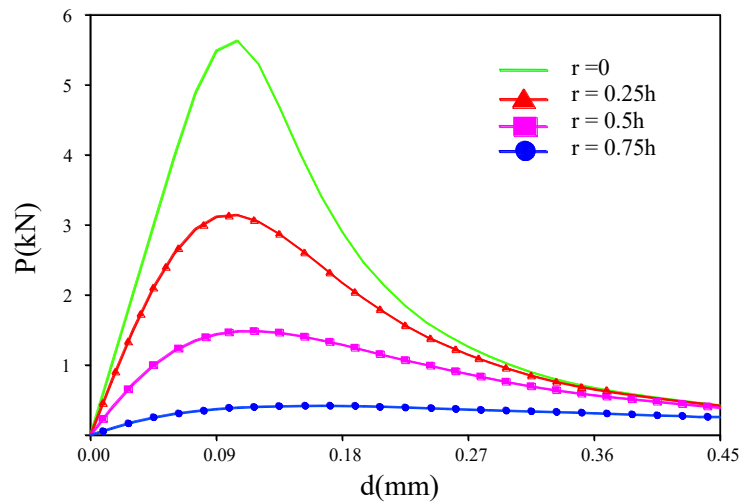


Figura 3.9 Curvas carga contra desplazamiento de vigas con ranura

3.1.2.2 Viga simplemente apoyada de longitud constante

Otro ejemplo de viga simplemente apoyada, en el cual se varió la relación de aspecto h/L , es el modelo utilizado por Wells y Sluys (2001) con una relación $h/L=0.33$, donde $L=10\text{mm}$ y espesor de 1mm , como se muestra en la Figura 3.10. En este caso se realizaron además los modelos con las variaciones siguientes h/L : 0.05, 0.1, 0.15, 0.20, 0.3, 0.4, 0.6, 0.8 y 1.0. Las propiedades del material son módulo elástico $E=100\text{ MPa}$, relación de poisson $\nu=0.0$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_t=1\text{ MPa}$ y densidad de energía de fractura $G_f=0.1\text{ N/mm}$. Se aplicaron desplazamientos gradualmente en la mitad superior del claro.

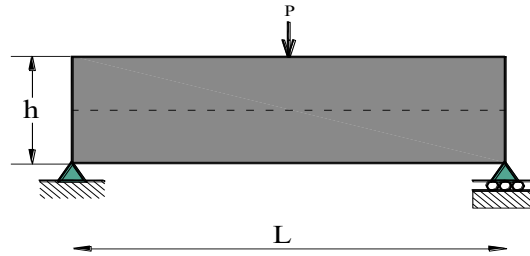


Figura 3.10 Geometría de la viga

En la Figura 3.11 se presentan las mallas estructuradas en su estado deformado para las relaciones de aspecto $h/L=0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.33, 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0 que constan de 469, 670, 871, 1340, 1474, 1809, 2680, 3551 y 4489 elementos sólidos cuadriláteros respectivamente, donde se observa que la falla inicia en la parte media inferior del claro (bajo la carga) y se propaga verticalmente en esa zona. Las curvas carga contra desplazamiento obtenidas del análisis numérico se muestran en la Figura 3.12, donde se observa que mientras aumenta la relación de aspecto h/L , la carga última que soportan las vigas es mayor. A partir de la relación $h/L=0.6$ a $h/L=1.0$ las curvas carga contra desplazamiento presentan una recuperación de desplazamiento en su intervalo inelástico conocido como snapback debido al tamaño de escala. Las curvas con snapback se obtuvieron por medio de control de longitud de arco. En la Figura 3.13 se muestran los puntos del diagrama carga contra desplazamiento con snapback que se pueden obtener por medio de control de carga, desplazamiento y longitud de arco, el primero falla después de alcanzar la carga última, donde el diagrama tiene una tangente horizontal, el segundo método falla antes de llegar al punto de cambio, donde el diagrama tiene una tangente vertical y el tercer método propone el criterio de una constante de longitud de arco, la cual considera la contribución de la variable que cambia más rápido (el desplazamiento cuando está cerca del punto límite y la carga cuando está cerca del punto de cambio) de manera que se puede obtener correctamente la zona inelástica con snapback.

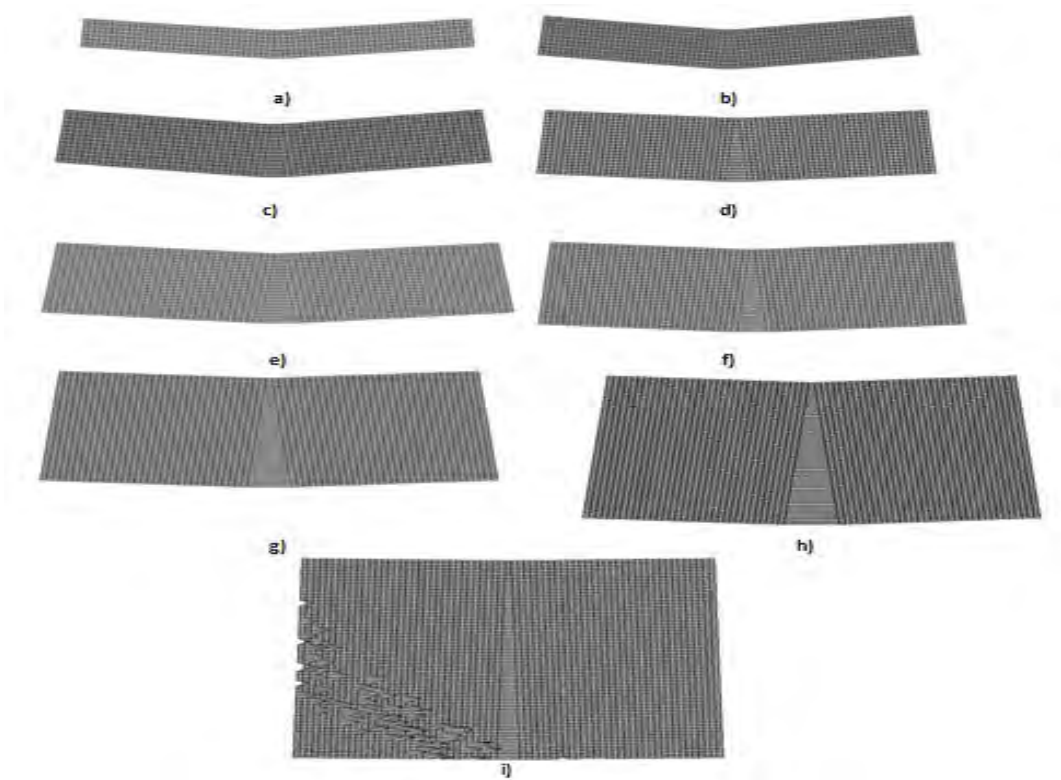


Figura 3.11. Configuración de la malla deformada en 2D: a) $h/L=0.1$, b) $h/L=0.15$, c) $h/L=0.2$, d) $h/L=0.3$, e) $h/L=0.33$, f) $h/L=0.4$, g) $h/L=0.6$, h) $h/L=0.8$, i) $h/L=1.0$

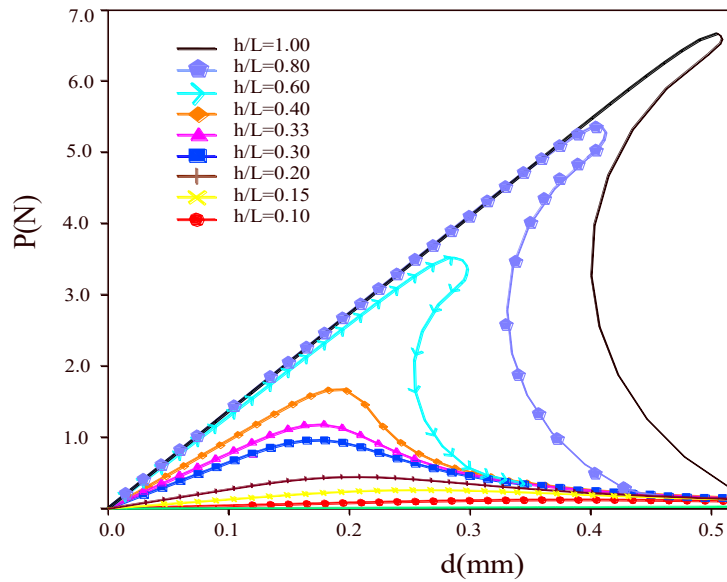


Figura 3.12 Curvas carga contra desplazamiento

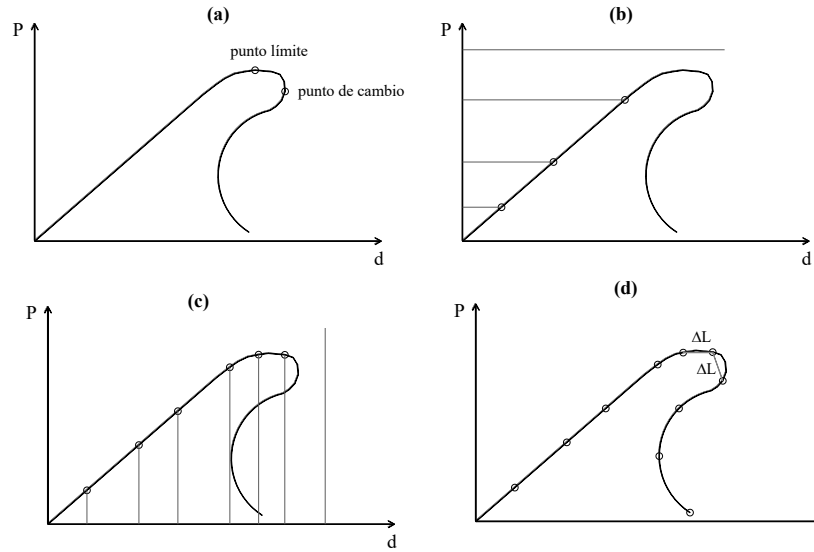


Figura 3.13 a) curva carga contra desplazamiento con snapback, b) control de carga, c) control de desplazamiento y d) control de arco de longitud (adaptada de Jirásek, 2002)

3.1.2.3 Viga simplemente apoyada de relación h/L constante

Otro ejemplo consiste de vigas simplemente apoyadas, en los que se utiliza una malla estructurada de elementos cuadriláteros sólidos, como se muestra en la Figura 3.14, con cuatro puntos de integración de Gauss. Se aplican gradualmente desplazamientos en los dos nodos superiores del elemento que se encuentra en la parte media superior del claro hasta que se produce la falla. La relación de aspecto h/L se mantuvo constante, variando el tamaño de escala para $h = 10, 20, 40$ y 80 cm y $L = 4h$, en los que se consideró un espesor $b = 10$ cm y $b = h$. Las propiedades utilizadas para el material son: módulo elástico $E = 3922660$ N/cm² (39226.6 MPa), relación de Poisson $\nu = 0.2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_t = 392.266$ N/cm² (3.9226 MPa), esfuerzo máximo a compresión $\sigma_c = 3922.66$ N/cm² (39.226 MPa), y energía de fractura $G_f = 0.980665$ N/cm (10 kgf/m). Esta viga fue también analizada por Carpinteri (1988) utilizando el modelo de agrietamiento discreto, colocando elementos de interfaz al centro de la viga, pues consideró que la discontinuidad ocurriría en esta zona donde se concentran las deformaciones mayores.

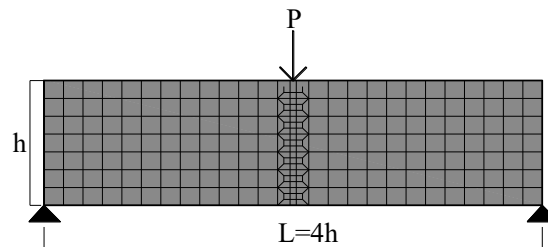


Figura 3.14 Geometría de la viga

En la Figura 3.15 se presenta la configuración de la malla deformada en 2D para cada tamaño de escala: $h=10, 20, 40$ y 80 cm respectivamente y constan de 245 elementos sólidos cuadriláteros. Se realizó un mallado más fino en la parte central donde existe concentración de deformaciones y se propaga la falla. En la Figura 3.16 se presentan las curvas carga contra desplazamiento obtenidas del análisis numérico, se puede observar en la Figura 3.16a que las curvas carga contra desplazamiento de las vigas, todas con espesor $b=10$ cm, tienen la misma pendiente en el intervalo elástico. Las vigas con peralte $h=20, 40$ y 80 cm presentan una recuperación en los desplazamientos o “snapback” en el intervalo inelástico y al aumentar el tamaño de escala, la carga máxima es mayor debido a que se requiere más energía para crear la discontinuidad del área de la sección transversal. En la Figura 3.16b se presentan las curvas carga contra desplazamiento de vigas con un espesor $b=h$, en la cual se puede apreciar que las pendientes de las curvas son distintas en el intervalo lineal y la carga máxima es $h/10$ veces mayor que para vigas con espesor $b=10$ cm y se presenta en el mismo desplazamiento, también para $h=20, 40$ y 80 cm se obtienen curvas con snapback. En las Figura 3.16c a Figura 3.16e se puede observar una comparación de las curvas carga contra desplazamiento de vigas con el mismo peralte pero con distinto espesor, $b=10$ cm y $b=h$, donde se muestra que la pendiente del intervalo elástico y la carga máxima aumenta en proporción al incremento del área de la sección transversal, pero se mantiene en el mismo desplazamiento.

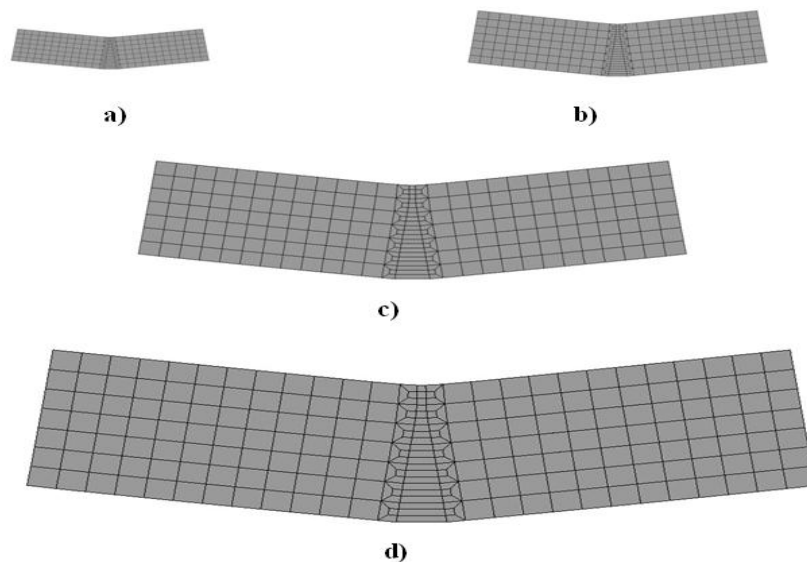
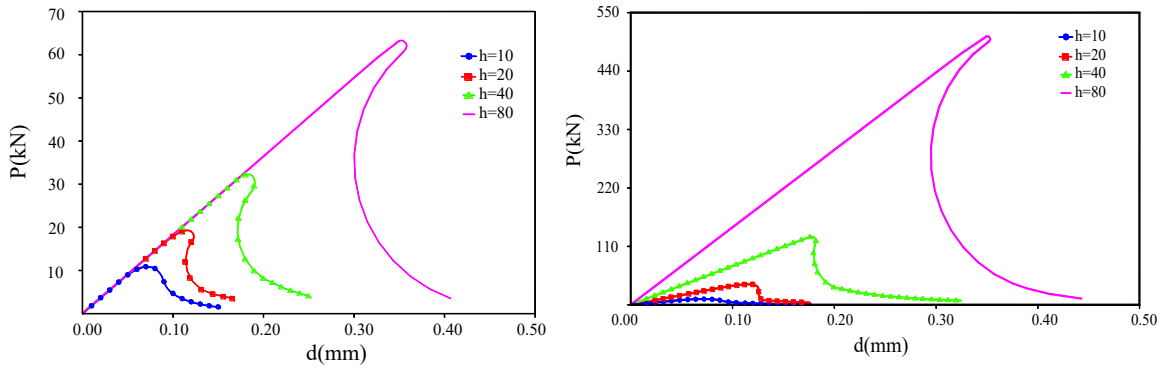
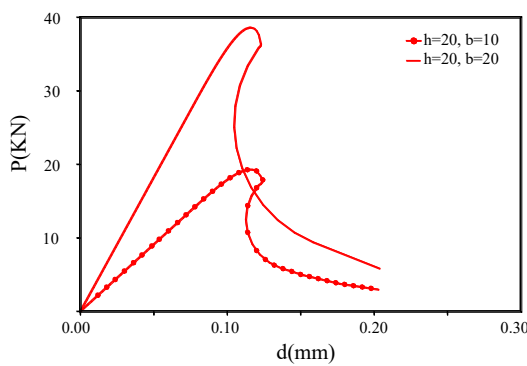


Figura 3.15 Malla deformada a) $h=10$ cm, b) $h=20$ cm, c) $h=40$ cm y d) $h=80$ cm

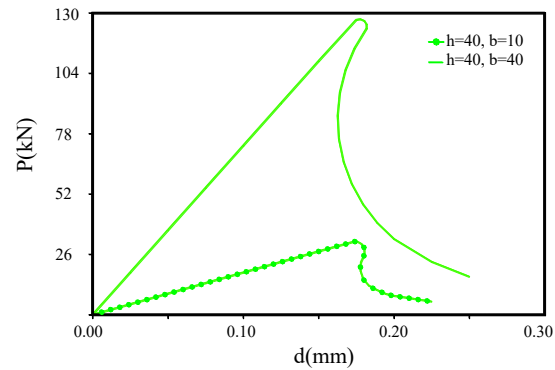


(a) $b=10\text{cm}$

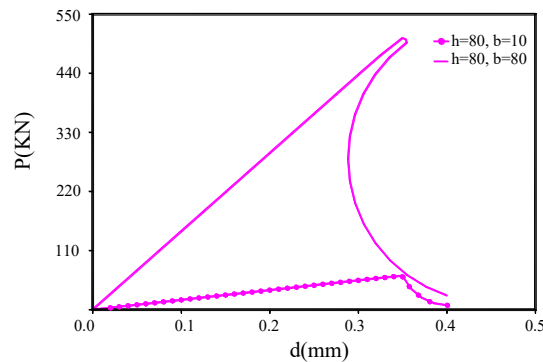
(b) $b=h$



(c) $b=10\text{ cm y } b=h=20\text{ cm}$



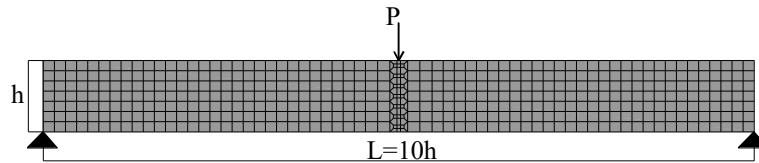
(d) $b=10\text{ cm y } b=h=40\text{ cm}$



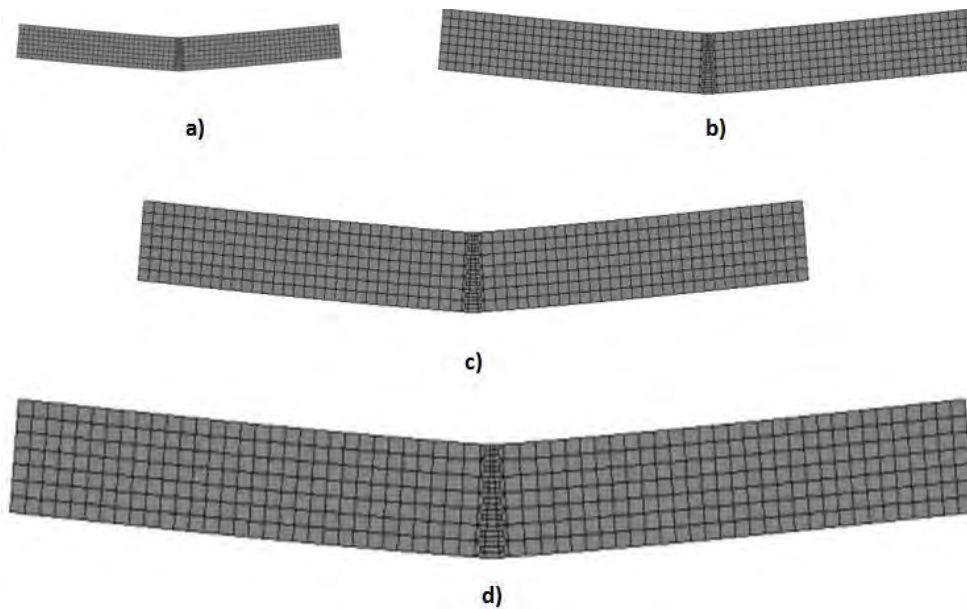
(e) $b=10\text{ cm y } b=h=80\text{ cm}$

Figura 3.16 Curvas carga contra desplazamiento de vigas simplemente apoyadas

También se analizó un ejemplo que consiste en una viga simplemente apoyada con las propiedades del ejemplo anterior, manteniendo la misma relación de aspecto h/L y con longitud igual a 10 veces la dimensión del peralte como la mostrada en la Figura 3.17, se aplican desplazamientos de forma gradual en el centro del claro.

**Figura 3.17 Geometría de la viga**

En la Figura 3.18 se presenta la configuración de la malla deformada en 2D para cada tamaño de escala: $h=10$, 20, 40 y 80 cm respectivamente y constan de 511 elementos sólidos cuadriláteros. Se realizó un mallado más fino en la parte central donde existe concentración de deformaciones y se propaga la falla. Se presentan las curvas carga contra desplazamiento de las cuatro vigas en la Figura 3.19, donde se observa que para todas las curvas, en el intervalo inelástico se presenta una recuperación en los desplazamientos o snapback.

**Figura 3.18 Malla deformada: a) $h=10$ cm, b) $h=20$ cm, c) $h=40$ cm y d) $h=80$ cm**

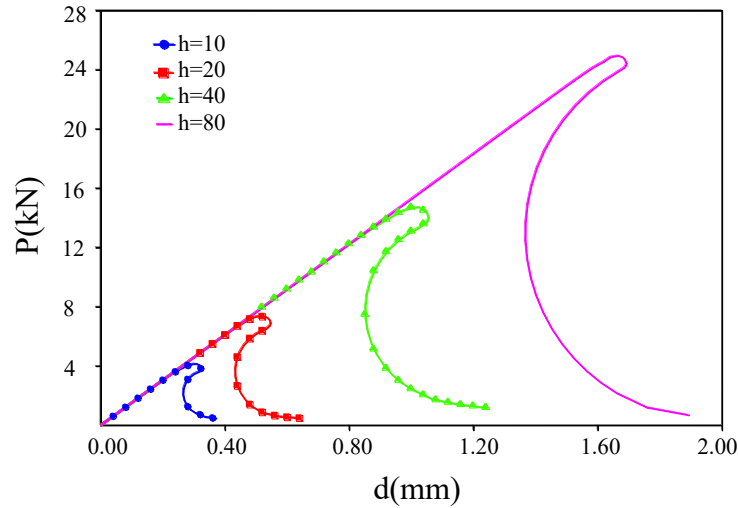


Figura 3.19 Curvas carga contra desplazamiento

3.1.3 Vigas en voladizo

En esta sección se realizan simulaciones numéricas de vigas simplemente apoyadas; se propone una malla estructurada de elementos cuadriláteros sólidos con cuatro puntos de integración de Gauss. Se aplican gradualmente desplazamientos en los nodos de los elementos que se encuentra en el extremo derecho del claro hasta que se produce la falla, posteriormente se presentan las curvas carga desplazamiento.

3.1.3.1 Viga en voladizo sección sólida

En este ejemplo se estudia una viga en voladizo como la mostrada en la Figura 3.20 de espesor 20 cm. Se realizaron modelos de esta viga en voladizo, en los que se varió $h/L = 0.2, 0.25, 0.33, 0.5, 1.0$ y 2.0 , considerando constante el valor de $h = 30$ cm, se aplicó una carga en el extremo derecho mediante desplazamientos graduales. Las propiedades del concreto utilizadas son: módulo elástico $E = 20,000$ MPa, relación de Poisson $\nu = 0.2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_t = 2.4$ MPa, esfuerzo máximo a compresión $\sigma_c = 24$ MPa y densidad de energía de fractura $G_f = 113$ N/m.

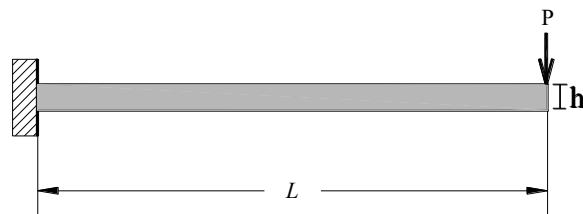


Figura 3.20 Viga en voladizo

En la Figura 3.21 se presenta la configuración deformada de la malla en 2D para cada relación de aspecto $h/L = 0.2, 0.25, 0.33, 0.5, 1.0$ y 2.0 , las cuales constan de 1280, 1024, 768, 512, 256 y 128 elementos sólidos cuadriláteros. En las Figura 3.21a a Figura 3.21e se observa que el tipo de falla presentada es por flexión, la cual se propaga verticalmente de arriba hacia abajo en los elementos unidos al empotramiento. La Figura 3.21f presenta una falla por cortante; sin embargo, este elemento no es considerado como viga, ya que su longitud no predomina sobre las otras dimensiones. Las curvas carga contra desplazamiento de vigas en voladizo se presentan en la Figura 3.22, donde se observa que a mayor relación h/L , la carga última es mayor, correspondiente a un desplazamiento menor.

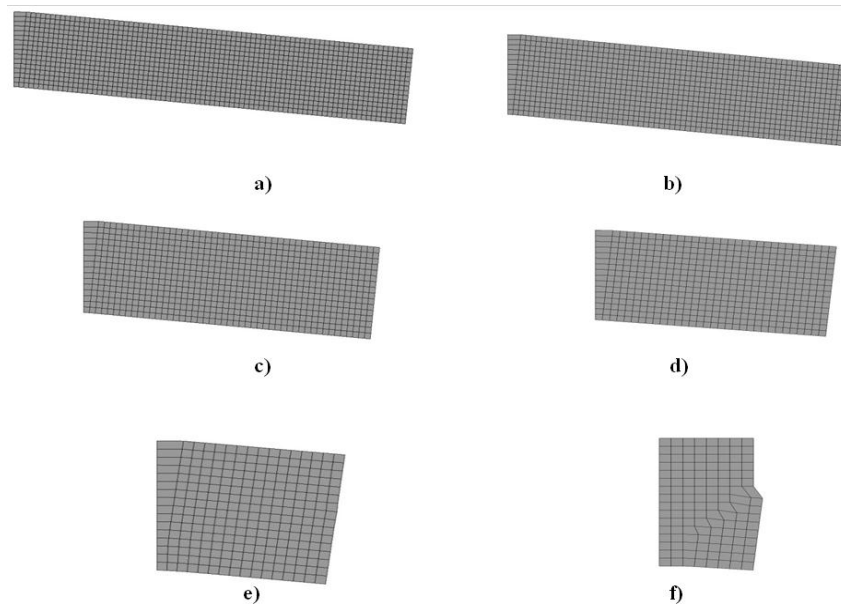


Figura 3.21 Malla deformada en 2D para vigas en voladizo: a) $h/L=0.2$, b) $h/L=0.25$, c) $h/L=0.33$, d) $h/L=0.5$, e) $h/L=1.0$ y f) $h/L=2.0$

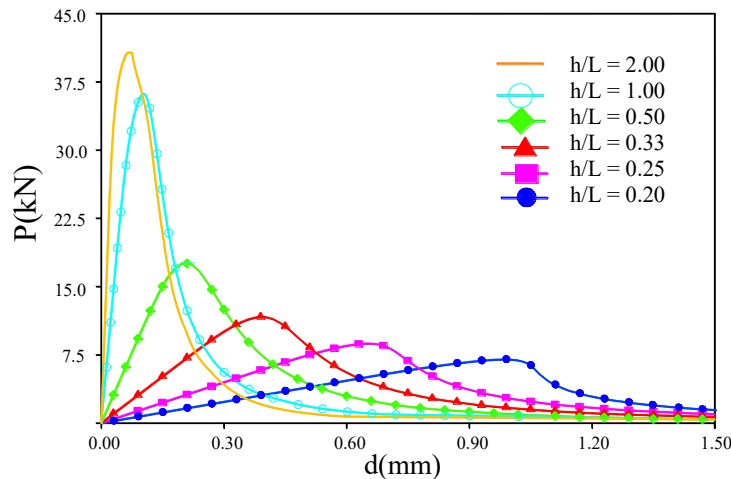


Figura 3.22 Curvas carga contra desplazamiento de vigas en voladizo

3.1.3.2 *Viga en voladizo con relación h/L constante*

Otro ejemplo consiste de una viga en voladizo con espesor 10 cm como la mostrada en la Figura 3.23, en la que se aplica una carga en el extremo derecho mediante desplazamientos graduales, las propiedades utilizadas para este ejemplo son: módulo elástico $E= 3922660$ N/cm², relación de Poisson $\nu= 0.2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_t=392.266$ N/cm², esfuerzo máximo a compresión $\sigma_c=3922.66$ N/cm², y densidad de energía de fractura $G_f= 0.980665$ N/cm.

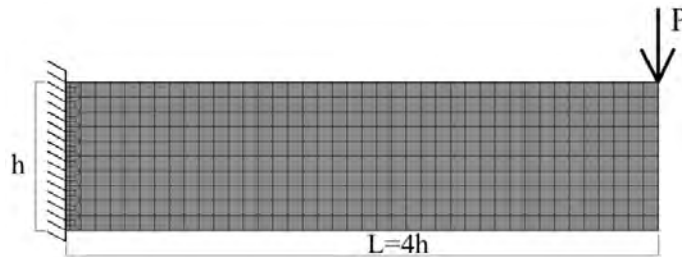


Figura 3.23 Viga en voladizo

En la Figura 3.24 se muestra la configuración deformada de las mallas en 2D para: $h=10$, 20, 40 y 80 cm respectivamente y constan de 460 elementos sólidos cuadriláteros. En todos los casos, la falla se presenta en los elementos unidos al empotramiento, propagándose de manera vertical, este tipo de falla es por flexión.

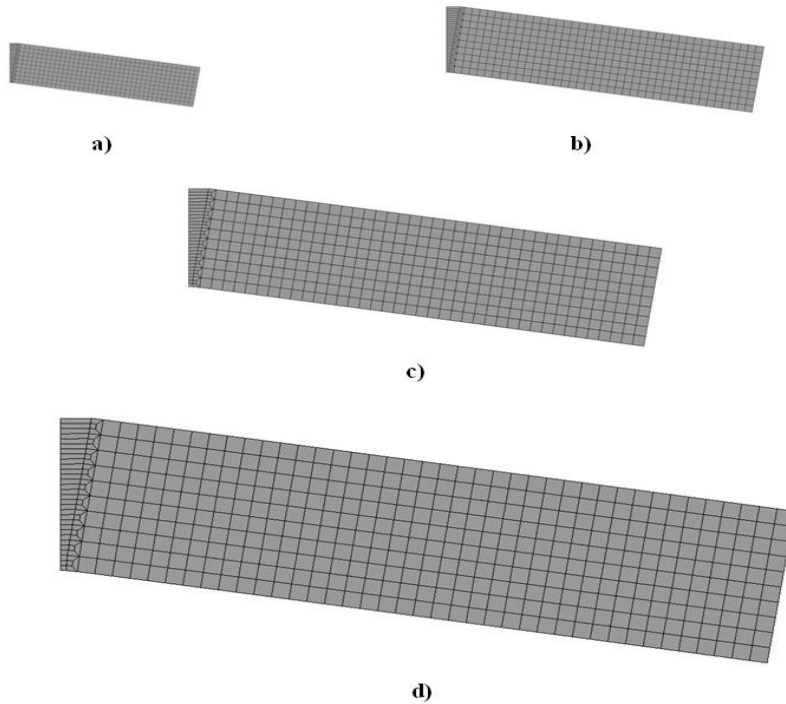


Figura 3.24 Malla deformada de vigas en voladizo: a) $h=10$ cm, b) $h=20$ cm, c) $h=40$ cm y d) $h=80$ cm.

Las curvas carga contra desplazamiento de vigas en voladizo se muestran en la Figura 3.25, donde se observa que el efecto de snapback se presenta sólo en las vigas con $h=20$, 40 y 80, de la misma manera que en las vigas simplemente apoyadas.

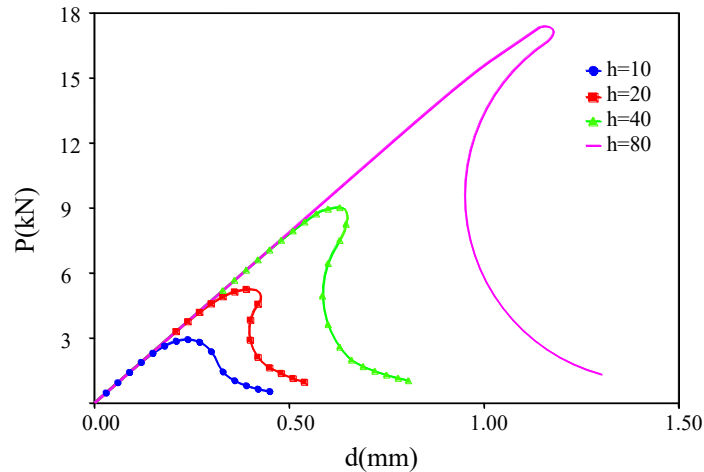


Figura 3.25 Curvas carga contra desplazamiento

3.1.4 Vigas doblemente empotradas

Se presentan simulaciones numéricas de vigas doblemente empotradas variando la relación de aspecto h/L ; se propone una malla estructurada de elementos cuadriláteros sólidos con cuatro puntos de integración de Gauss. Se aplican gradualmente desplazamientos en los nodos de los elementos que se encuentran unidos al empotramiento del extremo derecho hasta que se produce la falla, posteriormente se presentan las curvas carga desplazamiento.

3.1.4.1 Viga doblemente empotrada de peralte constante

En este ejemplo se estudia una viga doblemente empotrada con espesor de 20 cm como se muestra en la Figura 3.26, a la cual se aplica una carga en el empotramiento derecho mediante desplazamientos aplicados gradualmente en la dirección negativa del eje vertical. Se varió la relación $h/L=0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.33, 0.5, 1.0$ y 2.0 , considerando constante el valor de $h=30$ cm. Las propiedades del concreto son: módulo elástico $E=20,000$ MPa relación de Poisson $\nu=0.2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_t=2.4$ MPa, esfuerzo máximo a compresión $\sigma_c=24$ MPa y densidad de energía de fractura $G_f=113$ J/m.

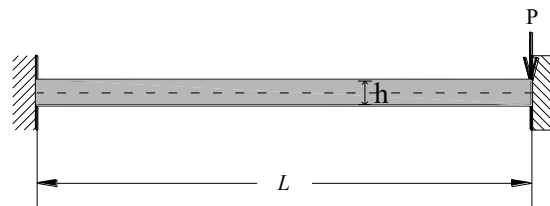


Figura 3.26 Viga doblemente empotrada

En la Figura 3.27 se muestran las mallas deformadas para cada una de las vigas doblemente empotradas con relación $h/L = 0.015, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.33, 0.5, 1.0$ y 2.0 , las cuales constan de 1620, 1280, 1024, 1000, 768, 660, 512, 256 y 128 elementos sólidos cuadriláteros. Se observa que en las Figura 3.27a a 3.27g la falla es asimétrica, la cual comienza en ambos extremos, una por encima del eje neutro y otra por debajo, propagándose en toda la longitud del elemento. Las Figuras 3.27h y 3.27i sólo muestran daño en los elementos paralelos al borde del empotramiento; sin embargo, estos dos elementos por su relación de aspecto, se les puede considerar como placas.

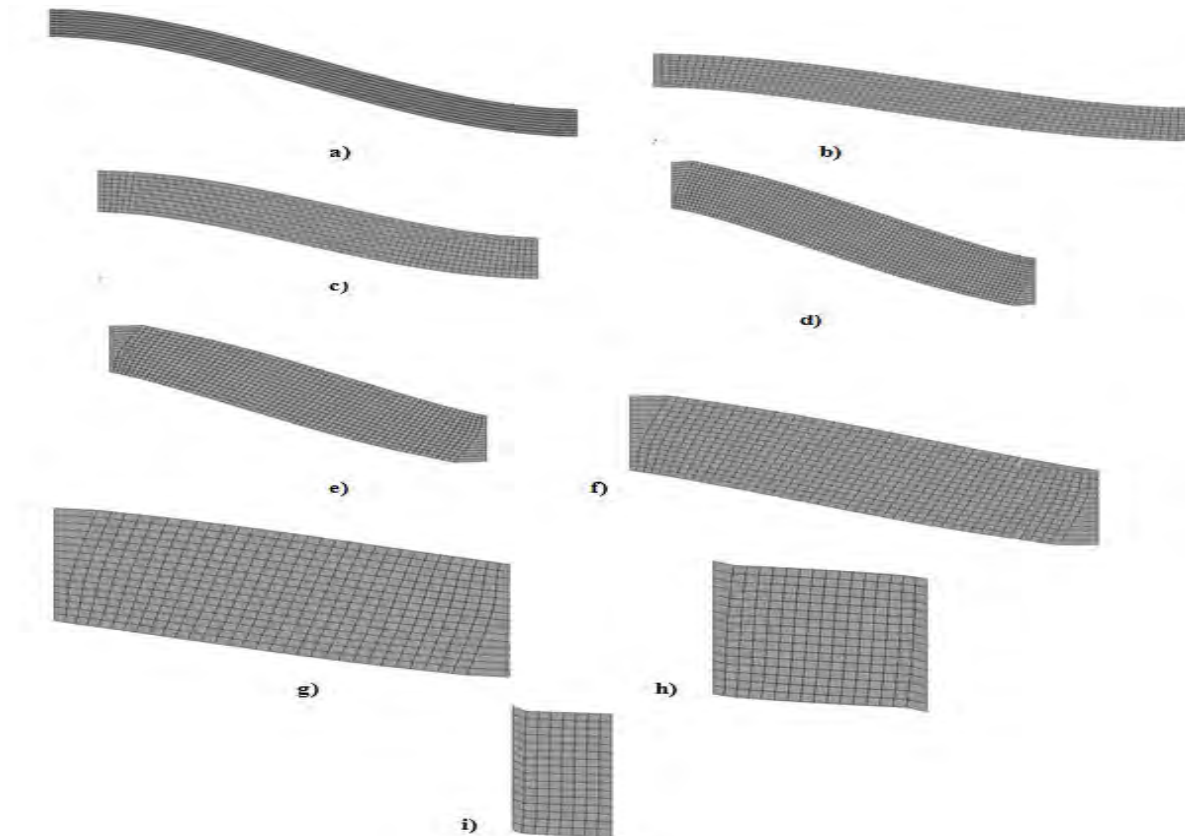


Figura 3.27 Malla deformada en 2D de vigas doblemente empotradas para: a) $h/L=0.05$, b) $h/L=0.10$, c) $h/L=0.15$, d) $h/L=0.20$, e) $h/L=0.25$, f) $h/L=0.33$, g) $h/L=0.50$, h) $h/L=1.0$ e i) $h/L=2.0$

En la Figura 3.28 se muestran las curvas carga desplazamiento para cada relación de aspecto h/L , donde se observa que las vigas con relación $h/L = 0.05, 0.10, 0.15, 0.2, 0.25, 0.33$ y 0.5 no tienen la forma característica de una curva carga desplazamiento de concreto debido a que el agrietamiento comienza simultáneamente en ambos extremos, en la parte superior izquierda y en la parte inferior derecha, el cual se propaga horizontalmente, paralelo al eje de la viga tal como se muestra en la Figura 3.29a, esto ocasiona que la carga aumente. Sin embargo, para $h/L=1.0$ y 2.0 , muestran una curva con rama inelástica con ablandamiento, donde la viga con mayor relación de aspecto es la que tiene mayor carga

última y la falla sólo se propaga verticalmente en el empotramiento como se observa en la Figura 3.29b.

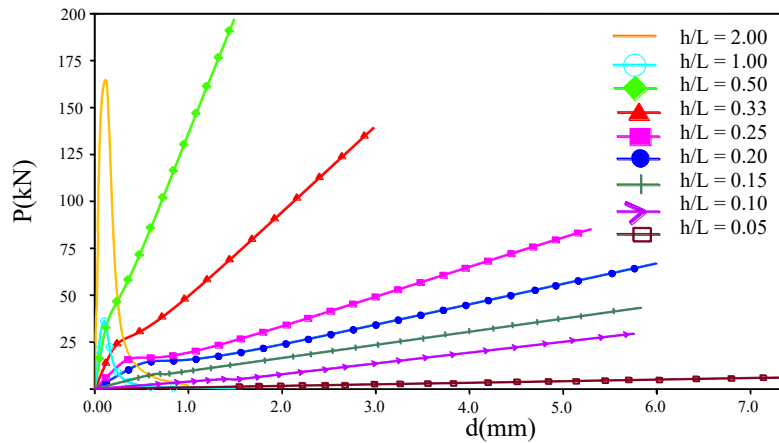


Figura 3.28 Curvas carga contra desplazamiento

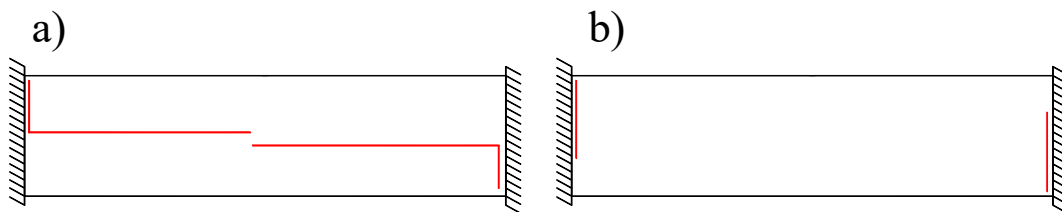


Figura 3.29 Propagación de la falla de vigas doblemente empotradas: a) falla para relaciones $h/L=0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.33$ y 0.5 b) falla para relaciones $h/L=1$ y 2

3.1.4.2 Viga doblemente empotrada con relación h/L constante

Otro ejemplo de viga doblemente empotrada es el de una viga de espesor 10 cm como la mostrada en la Figura 3.30, a la cual se varió el tamaño de escala: $h=10, 20, 40$ y 80 cm aplicando desplazamientos gradualmente en el extremo derecho, las propiedades utilizadas para el concreto son: módulo elástico $E=3922660$ N/cm², relación de Poisson $\nu=0.2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_t=392.266$ N/cm², esfuerzo máximo a compresión $\sigma_c=3922.66$ N/cm² y densidad de energía de fractura $G_f=0.980665$ N/cm.

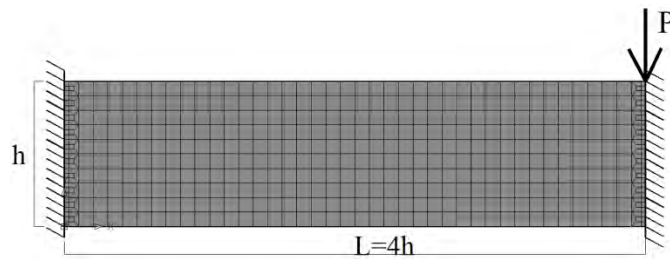


Figura 3.30 Viga doblemente empotrada

En la Figura 3.31 se muestra la configuración deformada de las mallas en 2D para cada tamaño de escala: $h=10$, 20, 40 y 80 cm respectivamente y constan de 1120 elementos sólidos cuadriláteros. En estos casos la falla se presenta en los bordes paralelos a los empotramientos, donde se realizó una malla más fina. Se observa que la falla es asimétrica, debido a que ésta comienza simultáneamente en el extremo superior izquierdo y el extremo inferior derecho.

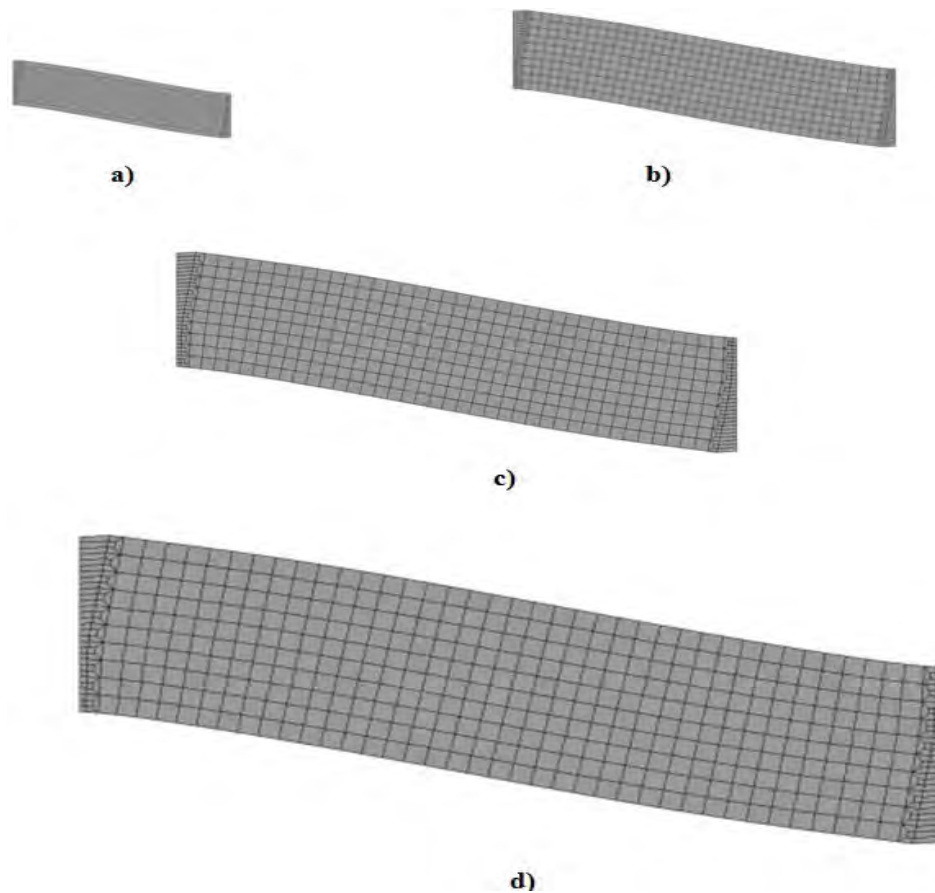


Figura 3.31 Malla deformada de vigas doblemente empotradas: a) $h=10$ cm, b) $h=20$ cm, c) $h=40$ cm y d) $h=80$ cm.

Las curvas carga contra desplazamiento de vigas doblemente empotradas se muestran en la Figura 3.32, donde se observa que la magnitud de la carga última incrementa conforme aumenta el tamaño de escala; sin embargo, las curvas presentan desplazamientos asociados a valores de carga negativa en su intervalo inelástico, lo cual puede explicarse mediante la Figura 3.33, donde se muestra el estado de esfuerzos en el cual la viga con $h=10$ cm se ha desplazado hasta 0.5 mm, la esquina superior izquierda e inferior derecha están sujetas a esfuerzos de tensión, mientras que las restantes están sometidas a esfuerzos de compresión. La zona de tensión, la cual es mayor, se muestra en color rojo, por lo tanto la zona de compresión corresponde al resto de los colores, *i.e.*, azul, amarillo y verde, de este modo, la reacción en el empotramiento debida a los esfuerzos en tensión es mayor que la carga

aplicada; en consecuencia, cambia de sentido, por lo que la curva carga contra desplazamiento exhibe valores de carga negativos.

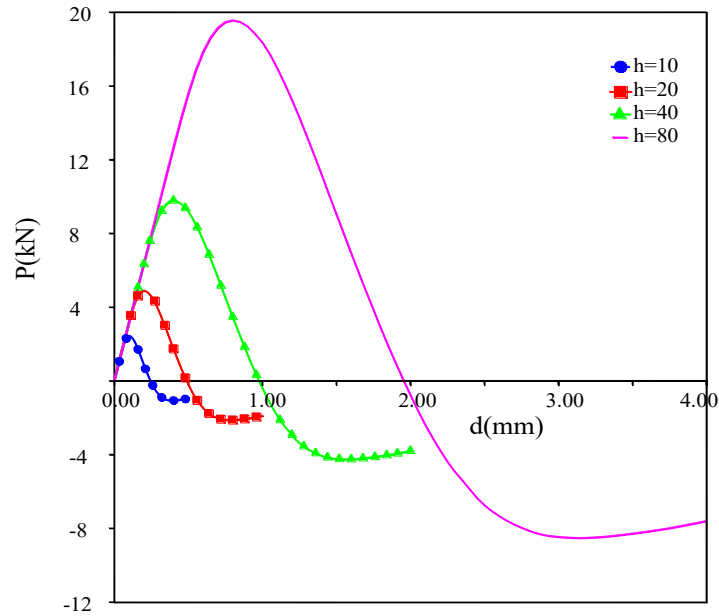


Figura 3.32 Curvas carga contra desplazamiento de vigas doblemente empotradas

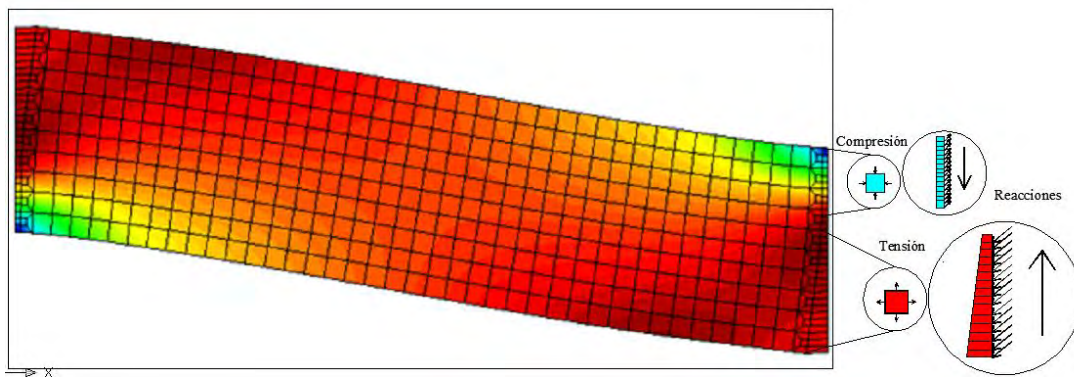


Figura 3.33 Componentes de tensión y compresión de las diagonales de vigas doblemente empotradas

Otra viga doblemente empotrada similar a la del ejemplo anterior, con relación de aspecto $h/L = 0.1$ como se muestra en la Figura 3.34; se varía el tamaño de escala para $h = 10, 20, 40$ y 80 cm y constan de 676 elementos sólidos cuadriláteros se aplican desplazamientos de forma gradual en el empotramiento derecho. Las propiedades del material son: módulo elástico $E = 3922660 \text{ N/cm}^2$, relación de Poisson $\nu = 0.2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_t = 392.266 \text{ N/cm}^2$, esfuerzo máximo a compresión $\sigma_c = 3922.66 \text{ N/cm}^2$ y densidad de energía de fractura $G_f = 0.980665 \text{ N/cm}$.

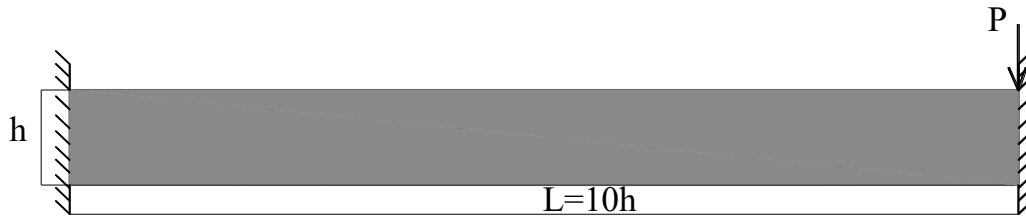


Figura 3.34 Viga doblemente empotrada con relación $h/L=0.1$

En la Figura 3.35 se muestra la configuración deformada de las mallas en 2D para cada tamaño de escala: $h=10$, 20 , 40 y 80 cm respectivamente. En estos casos la falla se presenta en los bordes paralelos a los empotramientos, donde se realizó una malla más fina. Se observa que la falla es antimétrica debido a que ésta comienza simultáneamente en el extremo superior izquierdo y el extremo inferior derecho propagándose verticalmente en los elementos ubicados junto al empotramiento.

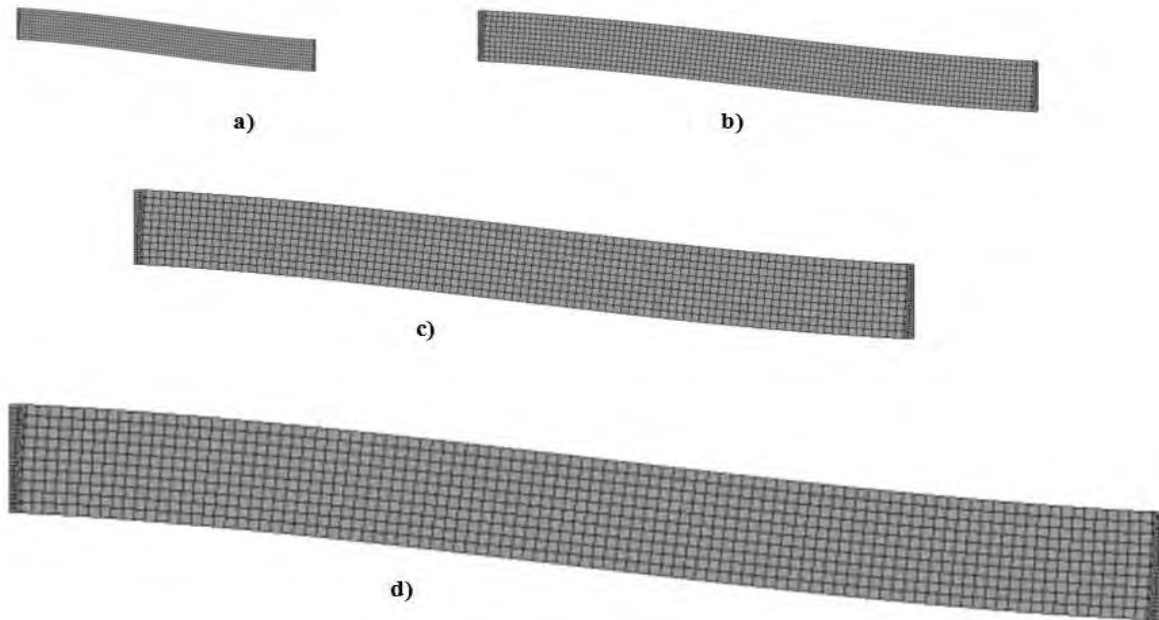


Figura 3.35 Malla deformada de vigas doblemente empotradas con $L=10h$: a) $h=10$ cm, b) $h=20$ cm, c) $h=40$ cm y d) $h=80$ cm.

Las curvas carga contra desplazamiento de vigas doblemente empotradas con $L=10h$ se muestran en la Figura 3.36, donde se observa que la magnitud de la carga última incrementa conforme aumenta el tamaño de escala. También se presentan valores negativos de carga, respecto a las cargas máximas de vigas doblemente empotradas con $L=4h$, las cargas son menores ya que son vigas con relaciones de esbeltez mayores.

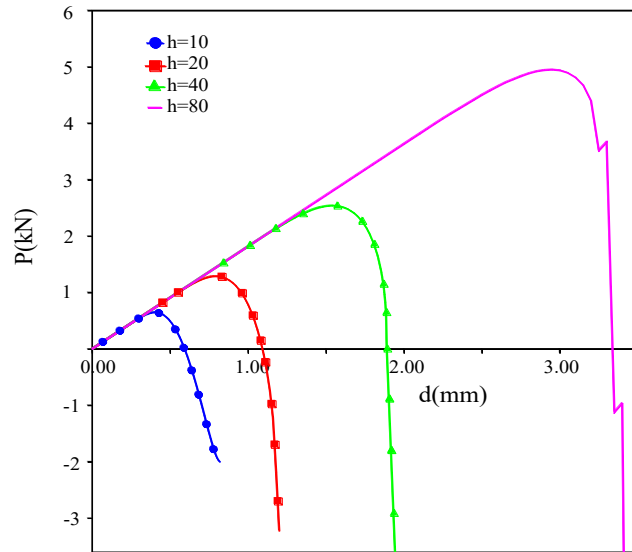


Figura 3.36 Curvas carga contra desplazamiento

Capítulo 4

Modelos constitutivos equivalentes

En esta sección se desarrolla un método para obtener los modelos constitutivos equivalentes momento contra salto de rotación, $M-[\theta]$, como el mostrado en la Figura 4.1a para cada una de las vigas analizadas numericamente en el capítulo 3. Esta metodología se basa en la energía de fractura necesaria para agrietar toda la sección transversal de una viga, la cual debe ser consistente con la energía liberada cuando se forma una articulación, que corresponde a la energía debajo del diagrama $M-[\theta]$ cuando la falla es por flexión y al área debajo del diagrama cortante contra salto de desplazamiento, $V-[\omega]$, cuando la viga falla por cortante (Figura 4.1b). Sólo una de las placas analizadas numericamente en el capítulo 3 presentó el tipo de falla por cortante, por lo cual en esta sección solo se presentan modelos equivalentes $M-[\theta]$.

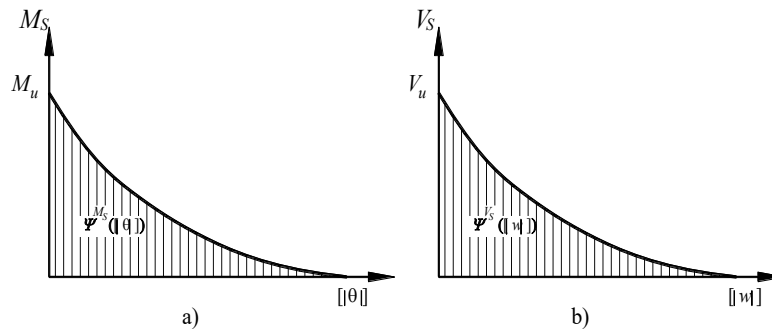


Figura 4.1 Modelos equivalentes: a) $M-[\theta]$ y b) $V-[\omega]$

4.1 Energía liberada, E_f , contra energía inducida, E_c

Para obtener los modelos equivalentes $M-[\theta]$ se debe considerar que la densidad de energía de fractura, G_f , es la energía necesaria para crear una grieta de área unitaria, la cual tiene unidades de fuerza sobre longitud. Esta densidad, G_f , multiplicada por el área efectiva de la sección transversal, A_T , como la mostrada en la Figura 4.2a, debe ser igual a la energía liberada, E_f , cuando se forma una articulación (Figura 4.2b). Por lo tanto, esta energía disipada es:

$$E_f = A_T G_f \quad (4.1)$$

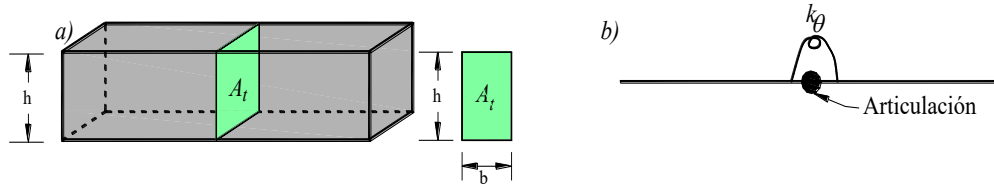


Figura 4.2 Geometría de: a) sección completamente dañada y b) modelo aproximado como articulación

El área debajo de la curva carga contra desplazamiento, E_c , mostrada en la Figura 4.3, que se obtiene de pruebas experimentales y/o simulaciones numéricas, corresponde a la energía inducida, la cual se disipa al agrietar la sección transversal de la viga. Esta energía está asociada a la formulación de un modelo constitutivo esfuerzo-deformación.

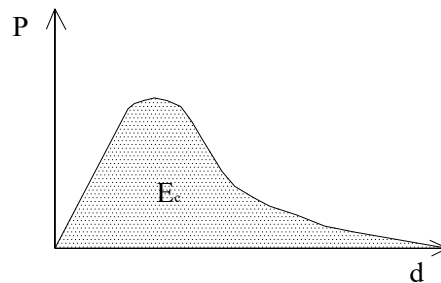


Figura 4.3 Área bajo la curva carga contra desplazamiento

4.1.1 Energía de vigas simplemente apoyadas

En esta sección se compara la energía necesaria para agrietar la sección, E_f , contra el área bajo la curva carga-desplazamiento, (energía inducida, E_c) para los ejemplos numéricos desarrollados en la sección 3.1:

En la Tabla 4.1 se muestran las magnitudes de energías de vigas simplemente apoyadas con ranura en el centro del claro desarrolladas en la sección 3.1.2.1. Se observa que para las vigas con $r=0$ y $r=0.25h$, las energías son muy parecidas. En cambio, para las vigas con $r=0.5h$ y $r=0.75h$ difieren, debido a que en las primeras dos la falla se propaga por encima de la ranura hasta el elemento extremo, mientras que en las segundas, la falla se propaga por encima de la ranura, pero sin llegar al extremo. En este caso los elementos superiores son aplastados, esto hace que no se disipe toda la energía.

Tabla 4.1 Comparación de energías de vigas simplemente apoyadas con ranura en el centro

Viga	E_f (Nm)	E_c (Nm)	$\frac{E_c - E_f}{E_f} \cdot 100(\%)$
r=0	1.13	0.98	13.27
r=0.25h	0.847	0.72	14.99
r=0.50h	0.565	0.42	25.66
r=0.75h	0.282	0.13	53.90

En la Tabla 4.2 se muestran las magnitudes de energías de vigas simplemente apoyadas de espesor 1 mm y longitud 10 mm desarrollados en la sección 3.1.2.2, se observa que las energías son muy similares, ya que en este caso la falla se propagó en toda la sección transversal de la viga.

Tabla 4.2 Comparación de energía de vigas con sección sólida

h/L	E_f (Nm)	E_c (Nm)	$\frac{E_c - E_f}{E_f} \cdot 100(\%)$
1.00	0.001	0.0013	30.00
0.80	0.0008	0.0009	12.50
0.60	0.0006	0.00053	11.67
0.40	0.0004	0.00035	12.50
0.33	0.0003	0.00034	13.33
0.30	0.0003	0.00025	16.67
0.20	0.0002	0.00018	10.00
0.15	0.0002	0.00013	35.00
0.10	0.0001	0.00008	20.00

En la Tabla 4.3 se muestran las magnitudes de energías de vigas simplemente apoyadas con relación h/L constante, donde se varía el tamaño de escala desarrolladas en la sección 3.1.2.3, las energías son muy parecidas en los cuatro casos; también la falla se propaga a lo largo de toda la sección transversal debajo de la aplicación de la carga.

Tabla 4.3 Comparación de energías de vigas con h/L constante

h(m)	E_f (Nm)	E_c (Nm)	$\frac{E_c - E_f}{E_f} \cdot 100(\%)$
0.1	0.9807	0.825	15.88
0.2	1.9614	1.611	17.86
0.4	3.9228	3.4	13.33
0.8	7.8456	8.08	2.99

4.1.2 Energía de vigas en voladizo:

En la Tabla 4.4 se muestran las magnitudes de energías de vigas en voladizo de sección transversal sólida desarrolladas en la sección 3.1.3.1. Se observa que las energías son similares para todos los casos, ya que la falla se propaga a lo largo de todo el empotramiento, por lo que se alcanza a disipar toda la energía.

Tabla 4.4 Comparación de energías de vigas en voladizo de sección sólida

h/L	E_f (Nm)	E_c (Nm)	$\frac{E_c - E_f}{E_f} \times 100(\%)$
2.00	6.78	7	3.24
1.00	6.78	6.86	1.18
0.50	6.78	6.65	1.92
0.33	6.78	6.51	3.98
0.25	6.78	6.65	1.92
0.20	6.78	6	11.50

También se comparan las energías de vigas en voladizo desarrolladas en la sección 3.1.3.2, las cuales se muestran en la Tabla 4.5. Se puede observar que son muy parecidas para los cuatro casos debido a que la falla se propaga a lo largo de todo el empotramiento.

Tabla 4.5 Comparación de energías de vigas en voladizo con h/L constante

h(m)	E_f (Nm)	E_c (Nm)	$\frac{E_c - E_f}{E_f} \times 100(\%)$
0.1	0.9807	0.855	12.82
0.2	1.9614	1.500	23.52
0.4	3.9228	3.510	10.52
0.8	7.8456	8.100	3.240

4.1.3 Energía de Vigas doblemente empotradas

En las Tabla 4.6 y 4.7 se presenta la comparación de energías de vigas doblemente empotradas de longitud $L=4h$ y longitud $L=10h$ respectivamente, las cuales se desarrollaron en la sección 3.1.4.2. Puede observarse que la energía obtenida de las simulaciones numéricas difiere de la obtenida con la ec. (4.1), debido a que las curvas carga contra desplazamiento presentaron valores de carga negativos. El cálculo del área debajo de la curva carga contra desplazamiento de estas vigas se obtuvo tomando en cuenta sólo la parte positiva del diagrama (Figura 4.4), ya que al considerar también la parte negativa las magnitudes de las energías difieren en mayor medida.

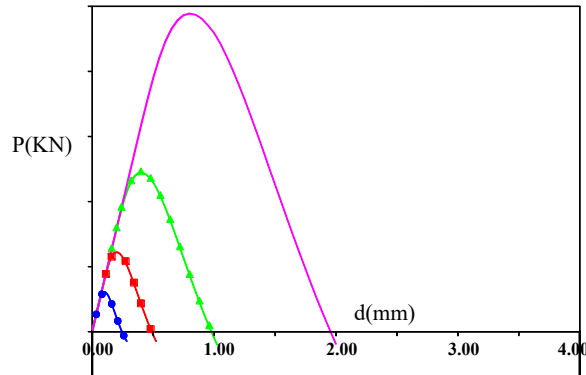


Figura 4.4 Área positiva del diagrama carga contra desplazamiento

Tabla 4.6 Comparación de energías de vigas doblemente empotradas (L=4h)

h(m)	E_f (Nm)	E_c (Nm)	$\frac{E_c - E_f}{E_f} \times 100(\%)$
0.1	0.9807	0.37	62.27
0.2	1.9614	1.49	24.03
0.4	3.9228	5.84	48.87
0.8	7.8456	22.24	183.47

Tabla 4.7 Comparación de energías de vigas doblemente empotradas (L=10h)

h(m)	E_f (Nm)	E_c (Nm)	$\frac{E_c - E_f}{E_f} \times 100(\%)$
0.1	0.9807	0.48	51.05
0.2	1.9614	1.20	38.81
0.4	3.9228	2.8	28.62
0.8	7.8456	9.76	24.40

En la mayoría de los casos presentados anteriormente, no existe mucha discrepancia entre las energías, por lo que el área bajo el diagrama carga contra desplazamiento, E_c , es muy parecido la energía, E_f obtenida con la ec. (4.1), así que:

$$E_c \approx E_f \tag{4.2}$$

4.2 Modelos equivalentes con ablandamiento lineal

4.2.1 Diagrama momento contra salto de rotación

En esta sección se presenta una metodología para obtener los modelos equivalentes momento contra salto de rotación con ablandamiento lineal. Tomando como referencia la Figura 4.5a, se puede determinar el valor del salto de rotación último y se calcula como:

$$[\theta]_u = \frac{2E_f}{m_u} \quad (4.3)$$

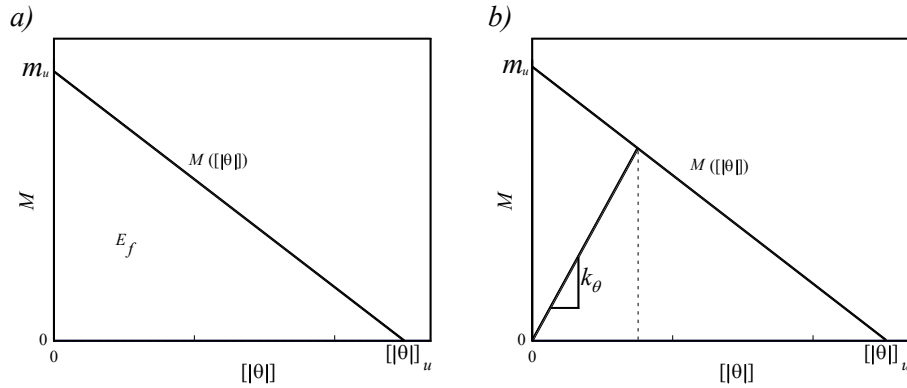


Figura 4.5 Variación del momento contra salto de rotación: a) energía y b) rigidez del resorte rotacional

donde m_u es el momento máximo que se presenta en la viga por la acción de la carga P_u obtenida del análisis numérico y se calcula de manera similar con las expresiones presentadas en la sección 2.1.1.

La función que describe el momento en función del salto de rotaciones es una ecuación lineal como se muestra en la Figura 4.5, de la forma $mx + b$, la cual se puede expresar como:

$$M([\theta]) = m_u + HEI[\theta] \quad (4.4)$$

donde H es el parámetro de ablandamiento que controla la caída de la recta que se obtiene como:

$$H = \frac{-m_u}{\theta_u EI} \quad (4.5)$$

La rigidez rotacional, k_θ , es la pendiente de la línea secante que inicia en el origen y que intersecta la curva $M([\theta])$, como se muestra en la Figura 4.4b, cuya función es:

$$k_{\theta}([\theta]) = \frac{M([\theta])}{[\theta]} = \frac{m_u}{[\theta]} + HEI \quad (4.6)$$

Puede observarse en la Figura 4.4b que la rigidez rotacional es infinita cuando no se ha producido salto en las rotaciones. A medida que este valor aumenta, la rigidez se degrada hasta ser nula.

4.2.2 Diagrama equivalente carga contra desplazamiento

Se puede idealizar un diagrama equivalente carga contra desplazamiento con ablandamiento lineal como el mostrado en la Figura 4.6. A diferencia de los obtenidos con las simulaciones numéricas con elementos sólidos, este diagrama se obtiene con elementos viga.

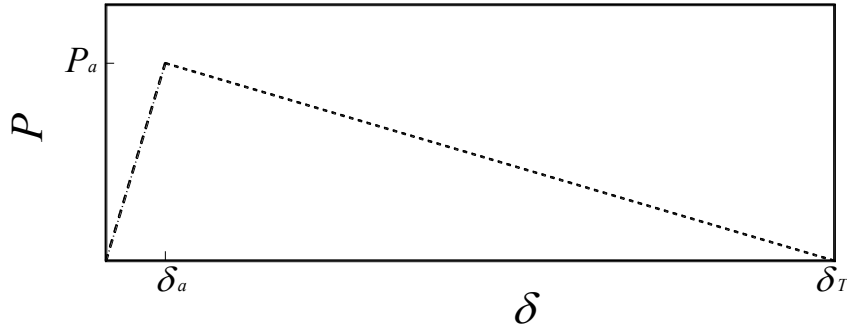


Figura 4.6 Diagrama idealizado carga contra desplazamiento con ablandamiento lineal

Dada la simplicidad de la curva idealizada de la Figura 4.6, se puede obtener por un método geométrico, ya que consta de dos líneas rectas: la primera de ellas denota la zona elástica, la cual se calcula con la unión del origen \$(0, 0)\$ y el punto \$(\delta_a, P_a)\$.

donde \$\delta_a\$ es el desplazamiento al cual inicia el agrietamiento, el cual depende de las condiciones de apoyo y la ubicación de la carga.

Por lo tanto para una viga simplemente apoyada y con carga al centro del claro, el desplazamiento de agrietamiento es:

$$\delta_a = \frac{P_a L^3}{48EI} \quad (4.7)$$

El desplazamiento de agrietamiento para una viga en voladizo con carga en el extremo libre es:

$$\delta_a = \frac{P_a L^3}{3EI} \quad (4.8)$$

El desplazamiento de agrietamiento para una viga doblemente empotrada que es desplazada en alguno de sus empotramientos, se expresa como:

$$\delta_a = \frac{P_a L^3}{12EI} \quad (4.9)$$

La carga de agrietamiento, P_a , se obtiene con las ecuaciones desarrolladas en la sección 2.1.1 según sea el caso.

La segunda recta denota la zona inelástica y basta con trazar una línea del punto (δ_a, P_a) al punto $(0, \delta_T)$.

donde δ_T es el desplazamiento total y se calcula como:

$$\delta_T = \delta_a + \delta_u \quad (4.10)$$

δ_u es el desplazamiento último y se obtiene geoméricamente como:

$$\delta_u = \frac{2E_f}{P_a} \quad (4.11)$$

4.3 Modelos equivalentes con ablandamiento exponencial

4.3.1 Diagramas equivalentes momento contra salto de rotación

De la misma forma que en ablandamiento lineal, la energía disipada en la articulación se puede aproximar mediante una función exponencial que describe el momento en función del salto, como se muestra en la Figura 4.7, tal que:

$$M(\theta) = m_u e^{H\theta} \quad (4.12)$$

El parámetro de ablandamiento exponencial H se obtiene integrando la curva $M([\theta])$, la cual debe ser igual a la energía de fractura de la sección, i.e.,

$$m_u \int_0^{\infty} e^{H\theta} d\theta = E_f \quad (4.13)$$

Desarrollando la ec. (4.13) y despejando el parámetro H :

$$\frac{m_u e^{H\theta}}{H} \Big|_0^{\infty} = \frac{m_u}{H} [e^{-H(\infty)} - e^{-H(0)}] = E_f \quad (4.14)$$

$$\frac{m_u}{H} \left[\frac{1}{e^{-H\infty}} - 1 \right] = E_f \quad (4.15)$$

$$H = -\frac{m_u}{E_f} \quad (4.16)$$

La rigidez rotacional, k_θ , es la pendiente de la línea secante que inicia en el origen y que intersecta la curva $M([\theta])$ como se muestra en la Figura 4.7b, cuya función es:

$$k_\theta = \frac{M([\theta])}{[\theta]} = \frac{m_u e^{-H \theta}}{\theta} \quad (4.17)$$

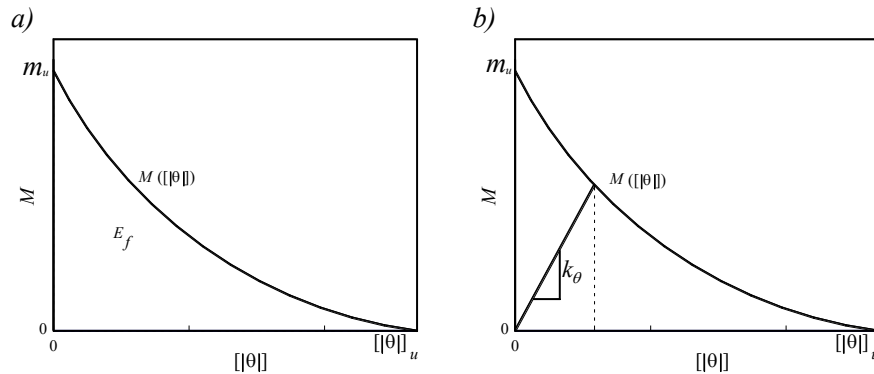


Figura 4.7 Variación del momento contra salto: a) energía y b) rigidez del resorte rotacional

4.3.2 Diagrama equivalente carga contra desplazamiento

El diagrama idealizado carga contra desplazamiento con ablandamiento exponencial se muestra en la Figura 4.8, el cual se obtiene mediante elementos viga.

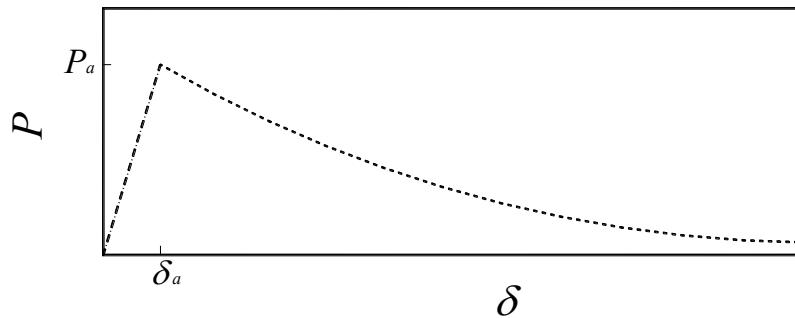


Figura 4.8 Diagrama idealizado carga contra desplazamiento con ablandamiento exponencial

La recta de la zona elástica se calcula de manera similar que en la sección 4.2.2. Sabiendo que la zona inelástica inicia en el punto (δ_a, P_a) y que es una ecuación exponencial en la que su caída está controlada por un parámetro H , se plantea la siguiente expresión:

$$P(\delta) = P_a e^{H\delta} \quad \delta \geq \delta_a \quad (4.18)$$

Para obtener el parámetro de ablandamiento H se integra de ec. (4.18) de cero a infinito y se iguala a la energía de fractura:

$$P_a \int_0^{\infty} e^{H\delta} d\delta = E_f \quad (4.19)$$

De forma análoga que en la sección 4.3.1, se desarrolla la ec. (4.19) y se despeja la variable H :

$$\frac{P_a e^{H\delta}}{H} \Big|_0^{\infty} = \frac{P_a}{H} [e^{-H(\infty)} - e^{-H(0)}] = E_f \quad (4.20)$$

$$\frac{P_a}{H} \left[\frac{1}{e^{-H\infty}} - 1 \right] = E_f \quad (4.21)$$

$$H = -\frac{P_a}{E_f} \quad (4.22)$$

4.4 Ejemplos de aplicación

4.4.1 Ejemplo 1

Se toma el ejemplo de una viga simplemente apoyada de espesor 1mm, desarrollada en la sección 3.1.2.2 con momento último $m_u = 2.5$ Nmm. El área bajo la curva carga contra desplazamiento es igual a la energía disipada, E_f , la cual corresponde a la energía que se disipa en la formación de la articulación.

$$E_f = G_f A = 0.30 \text{ Nmm} \quad (4.23)$$

El valor del salto de rotación último se determina con la ec. (4.3):

$$[\theta]_u = \frac{2E_f}{m_u} = 0.24 \text{ rad} \quad (4.24)$$

La inercia de la sección transversal es:

$$I = \frac{(1\text{mm})(3\text{mm})^3}{12} = 2.25 \text{ mm}^4 \quad (4.25)$$

el parámetro de ablandamiento lineal H se calcula con la ec. (4.5) como:

$$H = \frac{-m_u}{[\theta]_u EI} = -46.296 \text{ m}^{-1} \quad (4.26)$$

Se obtiene la recta $M([\theta])$ con ablandamiento lineal con la ec. (4.4) y la rigidez del resorte rotacional haciendo uso de la ecuación (4.6).

Para obtener el modelo equivalente momento contra salto de rotación con ablandamiento exponencial se calcula el parámetro H con la ec. (4.16):

$$H = -\frac{m_u}{E_f} = -8.33 \quad (4.27)$$

De manera análoga, se obtiene la función $M([\theta])$ con ablandamiento exponencial con la ec. (4.12) y la rigidez del resorte rotacional se calcula con la ec. (4.17), la cual es igual a la ec. (4.6).

La gráfica momento contra salto y la gráfica de variación de la rigidez del resorte rotacional contra el salto se muestra en la Figura 4.9, donde se observa que cuando la rigidez tiende a infinito, no se ha producido salto en la rotación, es decir, aún no existe agrietamiento; sin embargo, a medida que el salto aumenta, la rigidez se degrada hasta ser nula.

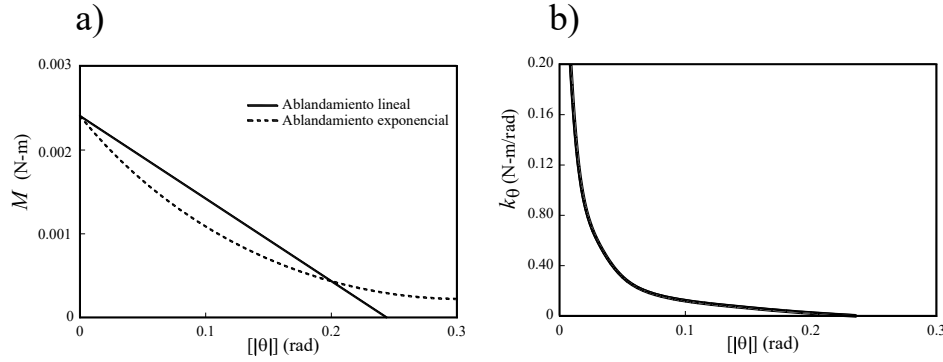


Figura 4.9 Modelos equivalentes: a) momento contra salto y b) rigidez rotacional

Para obtener la recta de la zona elástica del diagrama carga contra desplazamiento se traza una línea del origen (0,0) al punto (δ_a, P_a) .

calculando la carga de agrietamiento con la ec. (2.4):

$$P_a = \frac{8bd^2\sigma_{ut}}{3L} = 0.6N \quad (4.28)$$

el desplazamiento de agrietamiento se obtiene por medio de la ec. (4.7):

$$\delta_a = \frac{P_a L^3}{48EI} = 0.056mm \quad (4.29)$$

Para definir la zona inelástica del diagrama con ablandamiento lineal basta con trazar una línea del punto (δ_e, P_a) a la coordenada $(0, \delta_T)$. El desplazamiento δ_u , se obtiene con la ec. (4.11):

$$\delta_u = \frac{2E_f}{P_a} = 1mm \quad (4.30)$$

Por lo que el desplazamiento total, se calcula con la ec. (4.10) :

$$\delta_T = 0.056mm + 1mm = 1.056mm \quad (4.31)$$

Para obtener la zona inelástica del diagrama con ablandamiento exponencial, se calcula H con la ec. (4.22):

$$H = -\frac{P_a}{E_f} = -2000m^{-1} \quad (4.32)$$

aplicando la ec. (4.18) se tiene que:

$$P(\delta) = P_a e^{H\delta} = 0.6e^{-2000\delta} \quad 0.056\text{mm} \leq \delta \leq 1.056\text{mm} \quad (4.33)$$

La curva carga contra desplazamiento obtenida con una aproximación con elementos sólidos, elementos viga con ablandamiento lineal, y elementos viga con ablandamiento exponencial se muestra en la Figura 4.10.

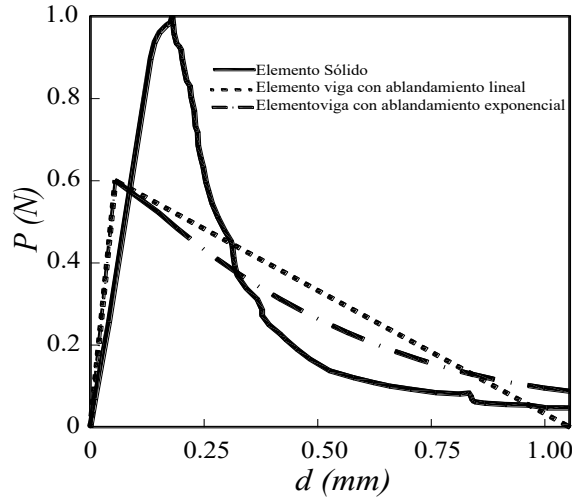


Figura 4.10 Comparación de curvas carga contra desplazamiento

En la Tabla 4.8 se muestra la comparación de carga de agrietamiento y carga obtenida del análisis numérico de vigas simplemente apoyadas de longitud constante presentadas en la sección 3.1.2.1. Se observa que la carga P_u siempre es mayor que la carga de agrietamiento y a partir de la relación de aspecto 0.4 a 0.1 se mantiene que $P_u \approx 1.6P_a$.

Tabla 4.8 Comparación de cargas de vigas simplemente apoyadas de longitud constante

Viga simplemente apoyada			
h/L	P_u (N)	P_a (N)	P_u/P_a
1.00	6.640	6.660	1.00
0.80	5.340	4.260	1.25
0.60	3.500	2.400	1.46
0.40	1.670	1.060	1.58
0.33	1.180	0.730	1.62
0.30	0.960	0.600	1.60
0.20	0.440	0.260	1.69
0.15	0.260	0.150	1.73
0.10	0.107	0.067	1.60

4.4.2 Ejemplo 2

Se toma la viga de la sección 3.1.2.3, que consiste de una viga simplemente apoyada con espesor de 0.1 m y longitud igual a cuatro veces la dimensión del peralte se somete a la acción de una carga en el centro de su claro con momento último $m_u=1086.06$ Nm.

Se obtuvieron los modelos equivalentes momento contra salto y rigidez rotacional con ablandamiento lineal y exponencial con el procedimiento descrito en las secciones 4.2 y 4.3, los cuales se muestran en la Figura 4.11.

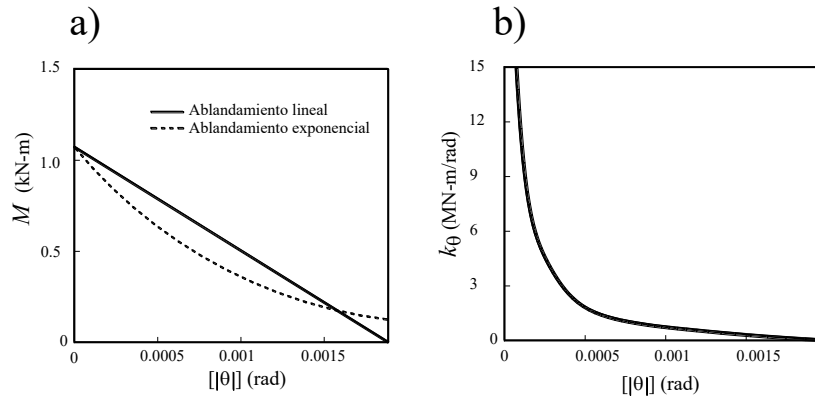


Figura 4.11 Modelos equivalentes: a) momento contra salto y b) rigidez rotacional

La curva carga contra desplazamiento obtenida con una aproximación con elementos sólidos, elementos viga con ablandamiento lineal y elementos viga con ablandamiento exponencial se muestran en la Figura 4.12.

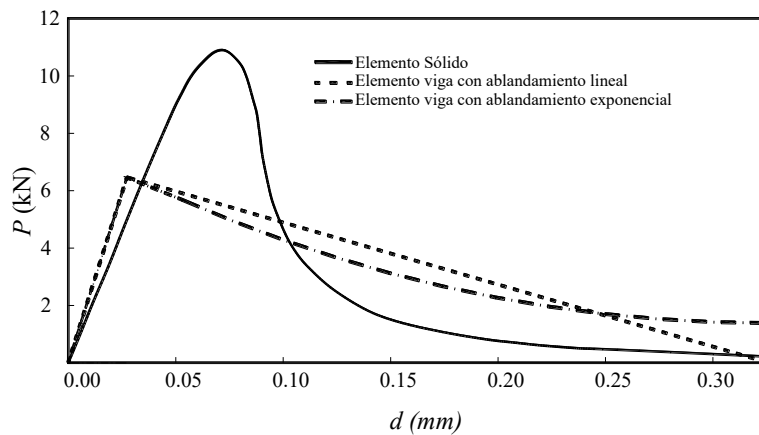


Figura 4.12 Comparación de curvas carga contra desplazamiento

En la Tabla 4.9 se presenta la comparación de las magnitudes de las cargas de vigas simplemente apoyadas con relación h/L constante y longitud $L=4h$ reportadas en la sección 3.1.2.3. Obteniéndose un promedio para el cálculo de la carga última como: $P_u \approx 1.4P_a$.

Tabla 4.9 Comparación de cargas de vigas simplemente apoyadas de longitud $L=4h$

Viga simplemente apoyada			
h	P_u (N)	P_a (N)	P_u/P_a
10	10875	6538	1.66
20	19264	13075	1.47
40	32277	26150	1.23
80	63222	52301	1.21

4.4.3 Ejemplo 3

Retomando el ejemplo de la sección 3.1.2.3, una viga simplemente apoyada con espesor de 0.1 m y longitud igual a diez veces la dimensión del peralte, se somete a la acción de una carga en el centro de su claro con momento último $m_u=2715.15$ Nm.

Se obtuvieron los modelos equivalentes momento contra salto y rigidez rotacional con ablandamiento lineal y ablandamiento exponencial y se muestran en la Figura 4.13.

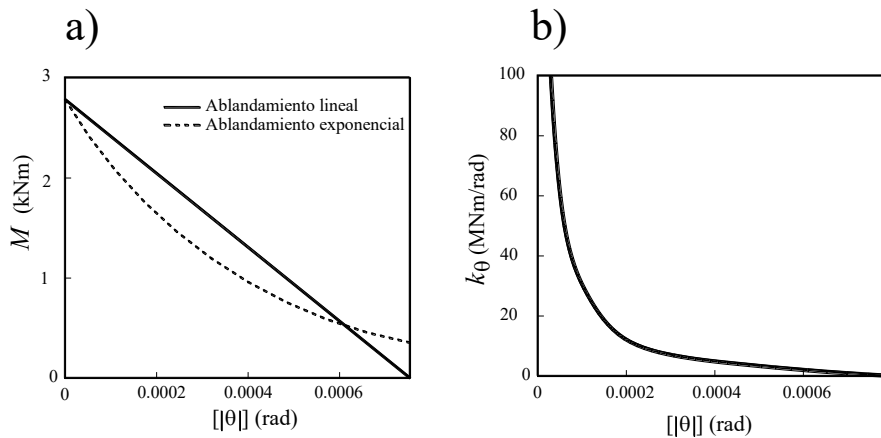


Figura 4.13 Modelos equivalentes: a) momento contra salto y b) rigidez rotacional

La curva carga contra desplazamiento obtenida con una aproximación con elementos sólidos, elementos viga con ablandamiento lineal y elementos viga con ablandamiento exponencial se muestran en la Figura 4.14.

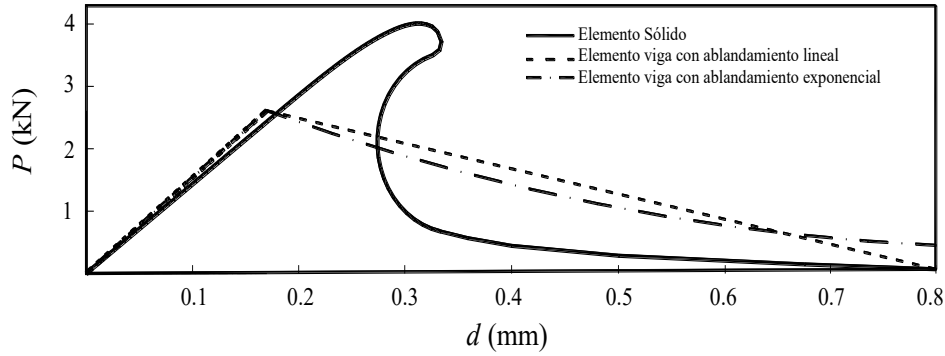


Figura 4.14 Comparación de curvas carga contra desplazamiento

Se presenta la comparación de cargas de vigas simplemente apoyadas de relación constante h/L y longitud $L=10h$ en la Tabla 4.10. La carga de agrietamiento en todos los casos es menor que la carga última. Realizando un promedio se obtiene que $P_u \approx 1.4P_a$.

Tabla 4.10 Comparación de cargas de viga simplemente apoyada de longitud $L=10h$

Viga simplemente apoyada			
h	P_u (N)	P_a (N)	P_u/P_a
10	4147	2615	1.59
20	7285	5230	1.39
40	14711	10460	1.41
80	24938	20920	1.19

4.4.4 Ejemplo 4

Este ejemplo consiste de una viga en voladizo de relación $h/L=0.2$ desarrollada en la sección 3.1.3.1 con momento último $m_u=10458$ Nm.

Los modelos equivalentes momento contra salto de rotación con ablandamiento lineal y exponencial se muestran en la Figura 4.15a y la rigidez rotacional en la Figura 4.15b.

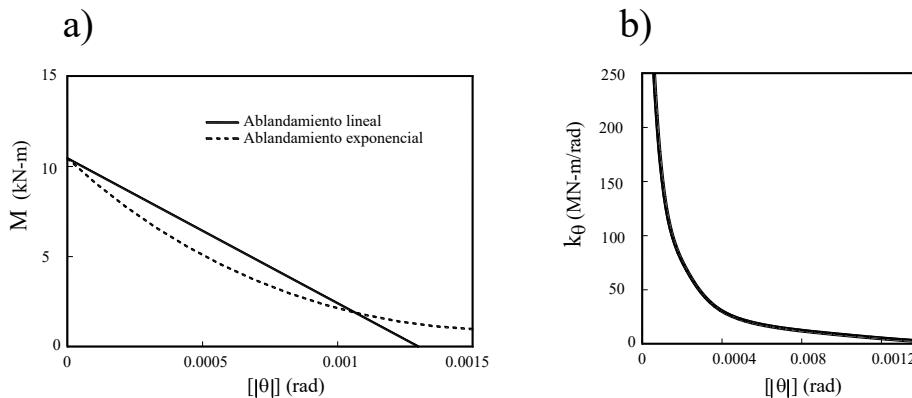


Figura 4.15 Modelos equivalentes: a) momento contra salto de rotación y b) rigidez rotacional

La comparación de curvas carga contra desplazamiento con elementos sólidos, elementos viga con ablandamiento lineal y elementos viga con ablandamiento exponencial se muestran en la Figura 4.16.

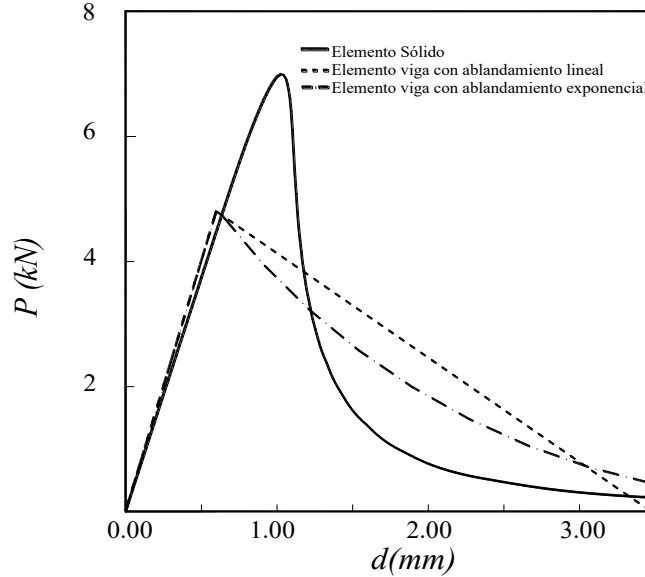


Figura 4.16 Comparación de curva carga contra desplazamiento con modelos equivalentes

Se presenta a continuación la comparación de cargas de vigas en voladizo de peralte constante reportadas en la sección 3.1.3.1. Se puede observar que la carga última es aproximadamente 1.5 veces la carga de agrietamiento ($P_u \approx 1.5P_a$), excepto para la viga de relación $h/L=2$, la cual se puede considerar como placa.

Tabla 4.11 Comparación de cargas de vigas en voladizo de peralte constante

Viga en voladizo			
h/L	$P_u (N)$	$P_a (N)$	P_u/P_a
2.00	40074	48000	0.83
1.00	36094	24000	1.50
0.50	17618	12000	1.47
0.33	11650	8000	1.46
0.25	8714	6000	1.45
0.20	6972	4800	1.45

4.4.5 Ejemplo 5

Una viga en voladizo de espesor $b=10\text{cm}$, peralte $h=20\text{ cm}$ y longitud $L=4h$, la cual se desarrolló en la sección 3.1.3.2 con momento último $m_u=4209.6\text{ Nm}$.

Los modelos equivalentes momento contra salto de rotación con ablandamiento lineal y exponencial se muestran en la Figura 4.16a y la rigidez rotacional en la Figura 4.16b.

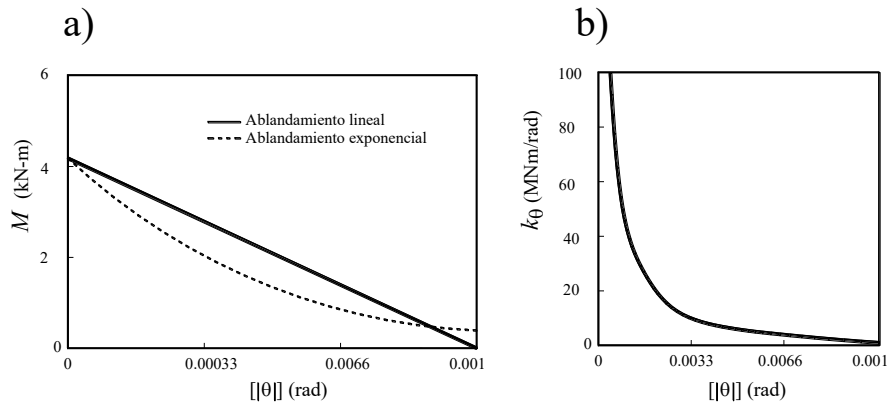


Figura 4.17 Modelos equivalentes: a) momento contra salto de rotación y b) rigidez rotacional

La comparación de curvas carga contra desplazamiento con elementos sólidos, elementos viga con ablandamiento lineal y elementos viga con ablandamiento exponencial se muestran en la Figura 4.18.

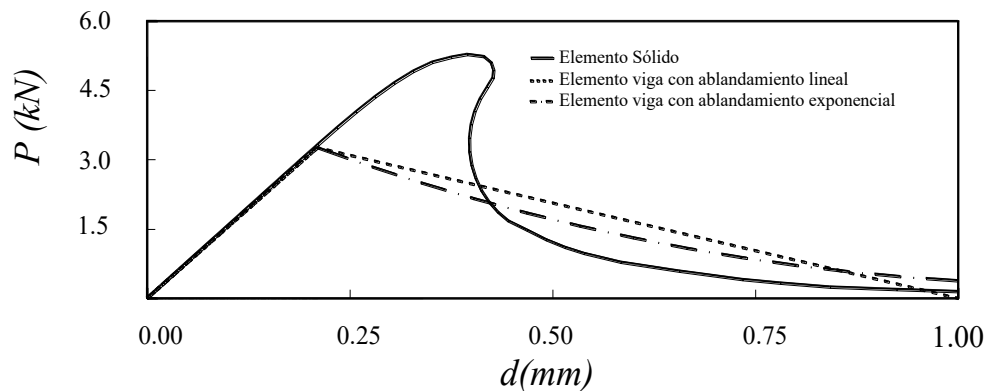


Figura 4.18 Comparación de curva carga contra desplazamiento con modelos equivalentes

Se presenta en la Tabla 4.12 la comparación de cargas de vigas en voladizo de relación h/L constantes reportadas en la sección 3.1.3.2. Se observa que la carga P_u siempre es mayor que la carga P_a y para $h=10$ y 20 la relación varía entre 1.6 y 1.7, y para $h=40$ y 80 varían entre 1.3 y 1.4. Por lo que se puede concluir que $P_u \approx 1.5P_a$.

Tabla 4.12 Comparación de cargas de vigas en voladizo de relación h/L constante

Viga en voladizo			
h	P_u (N)	P_a (N)	P_u/P_a
10	2932	1634	1.79
20	5262	3268	1.61
40	8995	6537	1.38
80	17316	13075	1.32

4.4.6 Ejemplo 6

Una viga doblemente empotrada de espesor $b=20$ cm y de relación $h/L=0.2$ desarrollada en la sección 3.1.4.1 con momento último $m_u=7200$ Nm.

Los modelos equivalentes momento contra salto de rotación con ablandamiento lineal y exponencial se muestran en la Figura 4.19a y la rigidez rotacional en la Figura 4.19b.

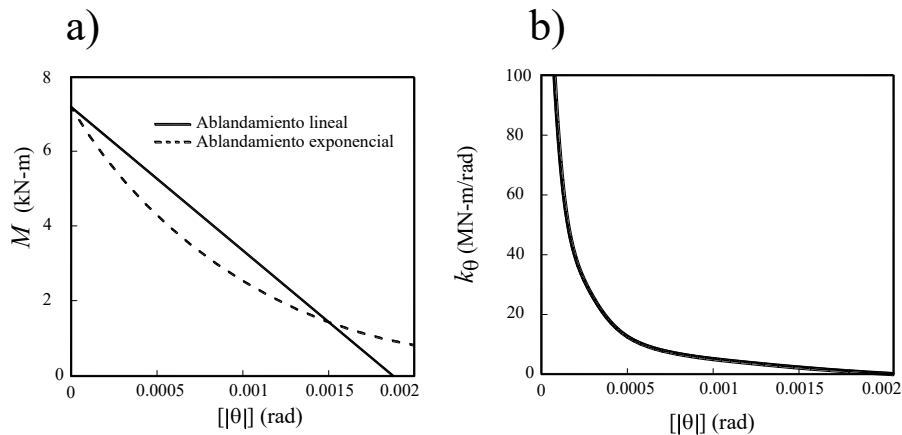


Figura 4.19 Modelos equivalentes: a) momento contra salto de rotación y b) rigidez rotacional

La comparación de curvas carga contra desplazamiento con elementos sólidos, elementos viga con ablandamiento lineal y elementos viga con ablandamiento exponencial se muestran en la Figura 4.20.

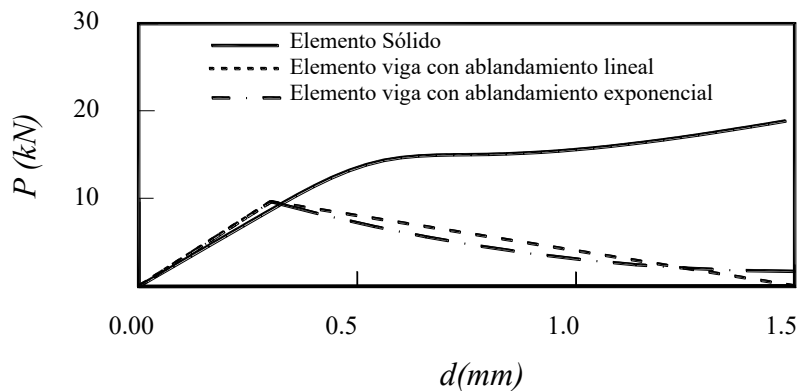


Figura 4.20 Comparación de curva carga contra desplazamiento con modelos equivalentes

En la Tabla 4.13 se presentan la comparación de carga de agrietamiento y carga última obtenida del análisis numérico para vigas doblemente empotradas reportadas en la sección 3.1.4.1. Se observa que las relaciones P_u/P_a varían de 0.63 a 1.92; sin embargo, se puede calcular la relación promedio obteniéndose un valor aproximado de $P_u \approx 1.35P_a$. Las vigas de relación $h/L=1$ y 2 pueden ser consideradas como placas.

Tabla 4.13 Comparación de cargas de vigas doblemente empotradas de peralte constante

Viga doblemente empotrada			
h/L	$P_u (N)$	$P_a (N)$	P_u/P_a
2.00	164000	96000	1.71
1.00	36200	48000	0.75
0.50	46075	24000	1.92
0.33	26150	16000	1.63
0.25	16500	12000	1.38
0.20	15000	9600	1.56
0.15	8150	7200	1.13
0.10	5300	4800	1.10
0.05	1500	2400	0.63

4.4.7 Ejemplo 7

Una viga doblemente empotrada de espesor $b=10$ cm, peralte $h=40$ cm y longitud $L=4h$, la cual se desarrolló en la sección 3.1.4.2 con momento último $m_u=10460.26$ Nm.

Los modelos equivalentes momento contra salto de rotación con ablandamiento lineal y exponencial se muestran en la Figura 4.21a con la rigidez rotacional mostrada en la Figura 4.21b.

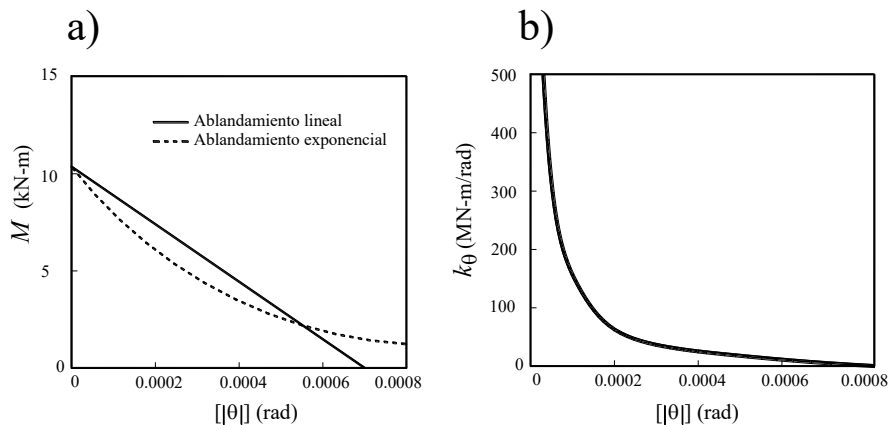


Figura 4.21 Modelos equivalentes: a) momento contra salto de rotación y b) rigidez rotacional

La comparación de curvas carga contra desplazamiento con elementos sólidos, elementos viga con ablandamiento lineal y elementos viga con ablandamiento exponencial se muestran en la Figura 4.22.

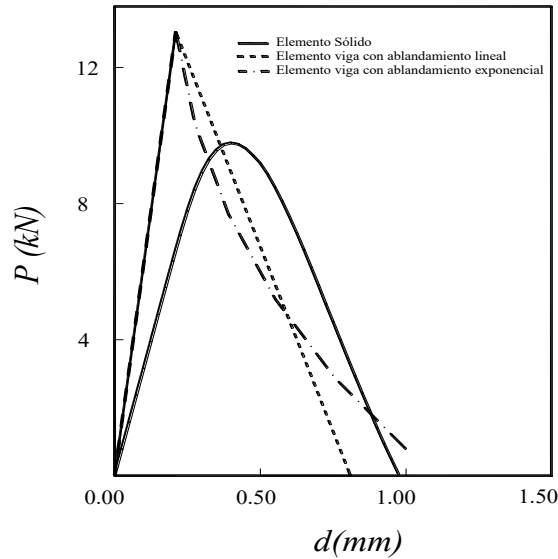


Figura 4.22 Comparación de curva carga contra desplazamiento con modelos equivalentes

La comparación de carga de agrietamiento y la carga última obtenida del análisis numérico de vigas doblemente empotradas de relación h/L constante desarrolladas en la sección 3.1.4.2 se presenta en la Tabla 4.14. Se puede observar que la carga última en todos los casos es igual al 75 por ciento de la carga de agrietamiento P_a . Esto es: $P_u \approx 0.75P_a$.

Tabla 4.14 Comparación de cargas de vigas doblemente empotradas de longitud $L=4h$

Viga doblemente empotrada			
h	P_u (N)	P_a (N)	P_u/P_a
10	2440	3268	0.75
20	4913	6538	0.75
40	9750	13075	0.75
80	19500	26150	0.75

4.4.8 Ejemplo 8

Una viga doblemente empotrada de espesor $b=10$ cm, peralte $h=80$ cm y longitud $L=10h$, la cual se desarrolló en la sección 3.1.4.2 con momento último $m_u=41841$ Nm.

Los modelos equivalentes momento contra salto de rotación con ablandamiento lineal y exponencial se muestran en la Figura 4.23a y la rigidez rotacional en la Figura 4.23b.

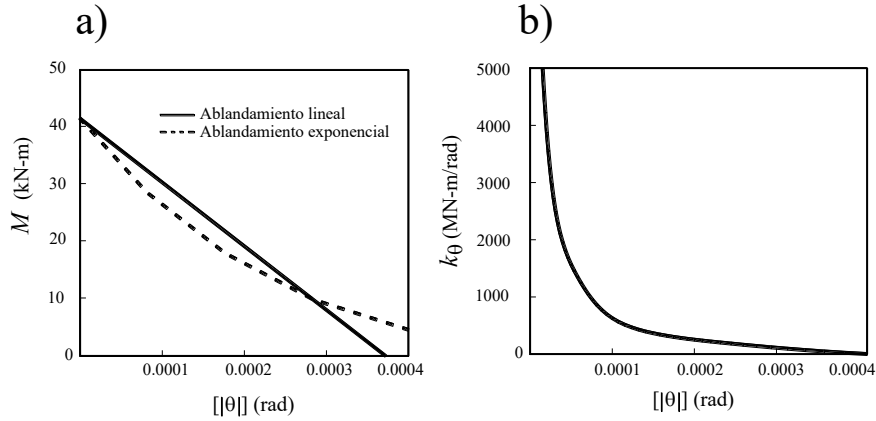


Figura 4.23 Modelos equivalentes: a) momento contra salto de rotación y b) rigidez rotacional

La comparación de curvas carga contra desplazamiento con elementos sólidos, elementos viga con ablandamiento lineal y elementos viga con ablandamiento exponencial se muestran en la Figura 4.24.

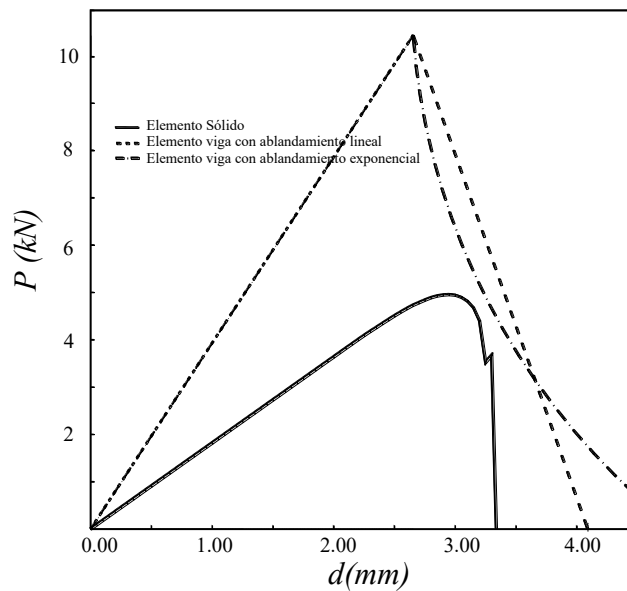


Figura 4.24 Comparación de curva carga contra desplazamiento con modelos equivalentes

Se presenta la Tabla 4.15, la cual contiene la relación de carga obtenida del análisis y la carga de agrietamiento de vigas doblemente empotradas de relación constante h/L y longitud $L=10h$ reportadas en la sección 3.1.4.2, en este caso, la carga última es el 50 por ciento de la carga de agrietamiento. Esto es: $P_u \approx 0.5P_a$.

Tabla 4.15 Comparación de cargas de vigas doblemente empotradas de longitud $L=10h$

Viga doblemente empotrada			
h	$P_u (N)$	$P_a (N)$	P_u/P_a
10	650	1307	0.50
20	1290	2615	0.49
40	2550	5230	0.49
80	4950	10460	0.47

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un modelo equivalente del agrietamiento en elementos prismáticos sólidos en 2D para representarse como articulaciones en elementos viga, obteniéndose las siguientes conclusiones:

- Los resultados numéricos obtenidos con el modelo constitutivo del concreto con superficie de fluencia DTC son consistentes con los resultados experimentales reportados en la literatura, pues se observó que representa adecuadamente el ablandamiento que presenta el concreto.
- El modelo constitutivo del concreto DTC permite asignar de manera independiente la densidad de energía de fractura, por lo que los modelos realizados no presentan las desventajas de los modelos de agrietamiento distribuido y discontinuidades interiores.
- El efecto de snapback se resolvió con el método de longitud de arco. Dicho efecto se presenta en vigas en voladizo con tamaños de escala críticos y en vigas simplemente apoyadas con relación de aspecto $h/L \geq 0.6$ cuando se mantiene constante el valor de la longitud del claro y en tamaños de escala críticos.
- La carga de agrietamiento propuesta en la sección 2.1.1 define el punto en el cual culmina la zona elástica del diagrama carga contra desplazamiento para vigas simplemente apoyadas y en voladizo, ya que en estos ejemplos fue menor a la obtenida de las simulaciones numéricas; sin embargo, para vigas doblemente empotradas, la carga de agrietamiento resultó mayor que la carga obtenida del análisis numérico. La carga de agrietamiento se utilizó en la realización de las curvas equivalentes carga contra desplazamiento con elementos viga con ablandamiento lineal y exponencial.
- En la sección 2.1.2 se propuso una formulación que describe la variación de las curvas carga contra desplazamiento y su relación con la densidad de energía de fractura de vigas. Con esta formulación se puede obtener la carga de colapso o carga última de vigas; sin embargo, dicha carga fue mayor que la carga obtenida del análisis numérico, por lo que no se utilizó en la realización de los modelos equivalentes momento contra salto de rotación.
- Se consideraron como vigas delgadas aquellas cuya relación peralte h entre longitud L , sea tal que $h/L \leq 2$ y vigas anchas aquellas con relación $h/L > 2$. Se esperaba que las primeras fallaran por flexión, lo cual se presentó satisfactoriamente, y que algunas de las vigas anchas fallaran por cortante; sin embargo, en su mayoría

fallaron por flexión, por lo que sólo se desarrollaron modelos equivalentes momento contra salto rotación.

- Los modelos momento contra salto de rotación representan correctamente la evolución de la articulación en elementos de concreto simple, ya que cuando no existe salto en el campo de las rotaciones el momento que soporta es máximo y a medida que se genera el salto, la rigidez se degrada hasta que ya no se transmite momento.

5.2 Recomendaciones

- Utilizar el modelo de daño DTC cuando se desee modelar elementos de concreto, ya que este modelo considera la diferencia que existe en la capacidad de este material a tensión y compresión y sin presentar problemas de atoramiento de esfuerzos.
- Realizar mallas estructuradas preferentemente de elementos cuadriláteros con cuatro puntos de integración de Gauss, ya que se obtiene una mejor convergencia.
- Es necesario realizar una malla más fina en las zonas con mayor concentración de esfuerzos o deformaciones.
- Utilizar el método de longitud de arco cuando el control de desplazamientos ya no converge a una solución correcta.

5.3 Trabajos futuros

A partir de las aportaciones de este trabajo, algunos trabajos futuros a realizar son:

- Proponer ejemplos de vigas en los cuales se presente falla por corte, y realizar los modelos equivalentes cortante contra salto de desplazamiento.
- Realizar simulaciones numéricas de elementos de concreto reforzado no sólo con cargas puntuales, sino también cargas distribuidas.
- Desarrollo de ejemplos de elementos de concreto reforzado diferentes a vigas como: muros y losas.

REFERENCIAS

- [1] Armero F. y Ehrlich D. (2006), "Numerical modeling of softening hinges in thin Euler–Bernoulli beams", *Computers & Structures*, Vol.48, No. 10-11, pp.641–656.
- [2] Baker J. y Heyman J. (1969), "Plastic design of frames", Vol.1 Fundamentals y Vol. 2 Applications, Cambridge University Press, London, 236 pp.
- [3] Bazant Z., Pijaudier G. y Pan J. (1987), "Ductility, snapback, size effect, and redistribution in softening beams of frames", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 113, No. 12, pp. 2348-2364.
- [4] Carpinteri A. (1988), "Cusp catastrophe interpretation of fracture instability", *Jordan Mechanics Physics Solids*, Vol. 37, No. 5, pp. 567-582.
- [5] Crisfield M. (1991), "Non-linear finite element analysis solids and structures", Vol. 1: Essentials, J. Wiley & Sons, pp. 362, Baffins Lane, Chichester, Englad.
- [6] Jirásek M. (1997), "Analytical and numerical Solutions for frames with Softening hinges", *Journal of Engineering Mechanics* (1997), Vol. 123, No. 1, pp. 8-14.
- [7] Jirásek M. y Bazant Z. (2002), "Inelastic Analysis of Structures", J. Wiley & Sons, London and New York, 758 pp.
- [8] Juárez G. (2006), "Modelado numérico de problemas de fractura en sólidos Mediante Discontinuidades Interiores", Tesis de Doctorado, UNAM, México, pp. 16-46.
- [9] Juárez G. y Ayala G. (2012), "Finite element variational formulation for beams with discontinuities", *Finite Element in Analysis and Desing*, Vol. 54, pp. 37-47.
- [10] Kachanov, L. (1958), "Time of the rupture process under creep conditions", *IVZ AkadNauk-S.S.R.- Otd Tech Nauk*, Vol. 8, pp. 26-31.
- [11] Korneling H. y Reinhardt H. (1983), "Determination of the fracture energy of normal concrete and epoxy modified concrete", Stevin Laboratory, Delft University of Technology, Report No. 5-83-18, Delft, Holanda.
- [12] Méndez H. y Juárez G. (2012), "Un modelo de daño para simular la evolución al colapso de elementos de concreto", *Concreto y Cemento, Investigación y Desarrollo*, Vol. 3, No. 2, pp. 19-33.
- [13] Normas técnicas complementarias para diseño y construcción de estructuras de concreto (2004), Reglamento de construcciones del Distrito Federal (RCDF).
- [14] Oliver J. (1996), "Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations, Part 2: Numerical simulation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39(21), pp. 3601-3623.
- [15] Rashid Y. (1968). "Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels", *Nuclear Engineering and Design*, pp. 334-344.
- [16] Reinhardt H., Cornelissen H. y Hordijk D. (1986), "Tensile tests and failure analisis of concrete", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 112, pp. 2462-2477.
- [17] Rots J. (1988), "Computational modeling of concrete fracture", Tesis de doctorado, Universidad de Tecnología de Delft, Holanda, pp. 46-49.
- [18] CSI (2009), SAP2000 v.14.0, Computers and Structures Inc., Berkeley, CA, EUA.

-
- [19] Taylor L. (2008), "A Finite Element Analysis Program v8.2", Department of Civil and Environmental Engineering, University of California at Berkeley, Berkeley CA, Estados Unidos.
- [20] Wells G. y Sluys L. (2001), "A new method for modeling cohesive cracks using finite element", International Journal of Numerical Methods Engineering, Vol. 50, No.12, pp. 2667-2682.
- [21] Yang Z. y Proverbs D. (2004), "A comparative study of numerical solutions to non-linear discrete crack modeling of concrete beams involving sharp snap-back", Engineering Fracture Mechanics, Vol.71, pp. 81-105.