



**Facultad  
de  
Ciencias**

# **El teorema de la curva de Jordan: diferentes aproximaciones**

(Jordan curve theorem: different approaches)

Trabajo de Fin de Grado  
para acceder al

**GRADO EN MATEMÁTICAS**

Autor: Eloy Revilla Martín

Director: Nuria Corral Pérez

Octubre - 2019



# Agradecimientos

En primer lugar dar las gracias a mi directora Nuria, pues ha sido la persona que más me ha ayudado con el trabajo. Agradecerle a mi familia más cercana el apoyo que me han dado a lo largo de todas las decisiones de mi vida y más en concreto la de estudiar Matemáticas.

Por último, pero no menos importante, agradecer a todos los amigos que me han acompañado a lo largo de la carrera. Por los buenos momentos que hemos pasado y por los que pasaremos.



## **Resumen**

Se conocen muchas demostraciones del teorema de la curva de Jordan. A lo largo de éste trabajo desarrollamos en detalle algunas de estas pruebas. En primer lugar introduciremos el problema original y la conjetura, que resultó ser teorema, hecha por el propio Camille Jordan a finales del siglo XIX. Para después exponer tres demostraciones. La primera, publicada por H. Tverberg en 1980, cuyos argumentos son del tipo geométrico. En segundo lugar exponemos la prueba elaborada por R. Maehara en 1984, basada en el teorema del punto fijo de Brouwer. Por último veremos una demostración mediante resultados de la topología algebraica, la cual podemos encontrar en el libro Topología (Prentice Hall, 2000) de J.R. Munkres.

**Palabras clave:** Camille Jordan, curva de Jordan, componentes conexas, curva cerrada simple, polígono de Jordan

**Abstract** There are many proofs of Jordan curve theorem. In this paper we detail some of these proofs. First we introduce the original problem and the conjecture made by Camille Jordan. Then we explain three proofs. The first, whose arguments are geometric, was published by H. Tverberg in 1980. The second was elaborated by R. Maehara in 1984 and it is a proof based on Brouwer's fixed-point theorem. Finally, we show a proof based on algebraic topology, which appears in the book 'Topology' (Prentice Hall, 2000) written by J.R. Munkres.

**Key words:** Camille Jordan, Jordan curve, connected component, simple closed curve, Jordan polygon



# Índice general

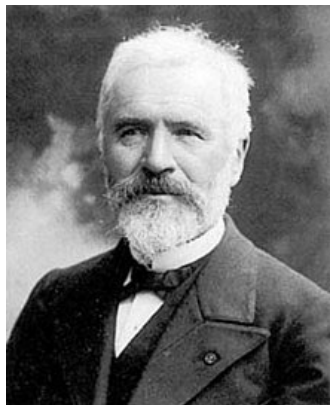
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Nociones previas</b>	<b>3</b>
2.1. Distancias y continuidad uniforme . . . . .	3
2.2. Topología cociente . . . . .	4
2.3. Sobre conexión y conexión por caminos . . . . .	4
2.4. Grupo fundamental . . . . .	6
2.5. Espacios recubridores y levantamientos . . . . .	8
<b>3. Prueba mediante aproximación por polígonos</b>	<b>11</b>
<b>4. Prueba vía el teorema del punto fijo de Brouwer</b>	<b>27</b>
<b>5. Prueba con técnicas de topología algebraica</b>	<b>39</b>





# Capítulo 1

## Introducción



Camille Jordan (1838–1922) fue un matemático francés, natural de Lyon. Estudió en la *École Polytechnique*, donde se graduó como ingeniero de minas. Más tarde compaginó su trabajo en dicha escuela, con el estudio de las matemáticas. Fue elegido miembro de la ‘*Académie des sciences*’ y dirigió durante un periodo de treinta y seis años la revista ‘*Journal de mathématiques pures et appliquées*’.

En lo que a la matemática se refiere, destacó en campos como el álgebra lineal o la teoría de Galois. Además fue el primero en conjeturar el teorema de la curva a la que da nombre. En 1887 publica la primera prueba del teorema de la curva de Jordan, en su libro ‘*Cours d’analyse de l’École Polytechnique*’ [2], al parecer no era correcta o estaba incompleta.

No será hasta 1905 que Oswald Veblen presente en [10] la primera prueba rigurosa del teorema de la curva de Jordan. A lo largo de la historia se han ido publicando bastantes demostraciones, de distinto tipo. En este trabajo expondremos tres de ellas, donde cada una aborda el problema con una técnica totalmente distinta a las demás, los argumentos van desde el análisis y la geometría hasta la topología o la topología algebraica. Pero además, también existen más demostraciones, Thomassen en [8], desarrolla una demostración basada en teoría de grafos, utilizando la no planaridad de  $K_{3,3}$  como argumento principal. Por citar otro ejemplo, en [5] podemos encontrar otra en la que relaciona el teorema con la triangulación de superficies.

Previo al desarrollo de dichas pruebas, veremos en que consiste el problema que planteó Jordan y lo enunciaremos de forma rigurosa.

### Problema de la Curva de Jordan

Es uno de los resultados que históricamente ha destacado por su sencillez para enunciarlo y su facilidad para aceptarlo intuitivamente, sin embargo para nada es trivial su demostración. El problema surge de manera natural en el momento en que tratamos de distinguir el dentro y fuera de una curva contenida en  $\mathbb{R}^2$ , siempre y cuando ésto tenga sentido. En el caso de la circunferencia no hay duda sobre cuál es su interior y cuál su exterior.

Para poder expresarlo de manera formal definimos el concepto de Curva de Jordan, con el cual podemos enunciar el problema de forma rigurosa.

**Definición 1.1.** Llamamos *curva de Jordan* a todo conjunto  $C \subset \mathbb{R}^2$  que se pueda definir como la imagen de  $\mathbb{S}^1$  por un homeomorfismo  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Lo que también es conocido por una curva cerrada simple en  $\mathbb{R}^2$  y para la cual utilizaremos la notación  $C$  a lo largo del trabajo.

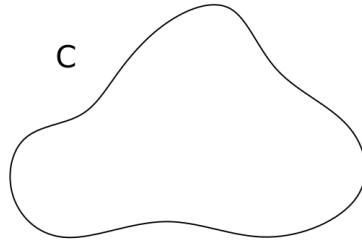


Figura 1.1: Ejemplo de curva de Jordan

Definida la curva de Jordan, la pregunta a contestar es: ¿el complementario de dicha curva en  $\mathbb{R}^2$  es conexo? La respuesta es no. Y entonces ¿cuántas componentes conexas tiene? Aunque en este caso nuestra intuición este en lo cierto diciéndonos que la respuesta es dos, demostrarlo no resulta sencillo. En definitiva, el teorema de la curva de Jordan resuelve el problema: ¿cuántas componentes conexas posee  $\mathbb{R}^2 - C$ ? y se enuncia como sigue.

**Teorema 1.2** (Teorema de la curva de Jordan). *Sea  $C$  un curva de Jordan dada por  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  entonces ésta separa al plano  $\mathbb{R}^2$  en dos componentes conexas.*

Podemos pensar el problema en otras superficies que no sean el plano. En algunos casos como la esfera el teorema si se cumple, mientras que en otros como el toro existen curvas cerradas simples que si que lo desconectan y otras que no.

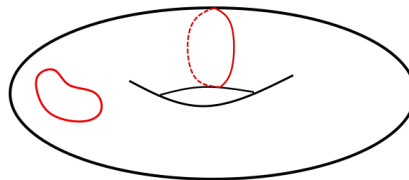


Figura 1.2: Ejemplo de curvas cerradas simples en el toro.

Como curiosidad podemos mencionar que se puede interpretar el género de una superficie cerrada como el máximo número de curvas cerradas simples y disjuntas que podemos abstraer a dicha superficie sin desconectarla (ver por ejemplo [1], p. 88). Esta definición es equivalente a la que se da en función de la característica de Euler.

# Capítulo 2

## Nociones previas

En este capítulo introduciremos conceptos básicos y resultados de análisis, topología y topología algebraica, que nos serán de utilidad a lo largo del trabajo. Mientras que la primera sección sigue los resultados de [3], las demás se basan principalmente en [6].

### 2.1. Distancias y continuidad uniforme

Este apartado expone resultados ligados al concepto matemático de distancia. A lo largo del trabajo va a aparecer con frecuencia la noción de conjunto acotado, por lo que conviene definirla.

**Definición 2.1.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A$  un subconjunto del mismo. Decimos que  $A$  es un **conjunto acotado** si existe  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $d(a_1, a_2) \leq c$  para todo  $a_1, a_2 \in A$ .

En relación con los conjuntos acotados surge de forma natural el concepto de diámetro:

**Definición 2.2.** Dado un conjunto acotado  $A$ , en un espacio métrico  $(X, d)$ , llamamos **diámetro de  $A$**  al supremo del conjunto  $\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}$ .

Por otro lado podemos definir la distancia entre dos conjuntos:

**Definición 2.3.** Consideremos un espacio métrico  $(X, d)$  y dos conjuntos  $A, B \subseteq X$  no vacíos, así definimos la **distancia entre  $A$  y  $B$**  como:

$$d(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Otra definición a tener en cuenta es la continuidad uniforme:

**Definición 2.4.** Sean  $(A, d_A), (B, d_B)$  espacios métricos. Una aplicación  $f : A \rightarrow B$  se dice que es **uniformemente continua** si cumple que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si:

$$d_A(a_1, a_2) < \delta \text{ entonces } d_B(f(a_1), f(a_2)) < \epsilon \text{ para todos } a_1, a_2 \in A.$$

Se observa claramente que esta propiedad es más fuerte que la de continuidad. A continuación vamos a enumerar una serie de resultados relevantes en relación con las funciones uniformemente continuas.

**Lema 2.5.** Sea  $f : A \rightarrow B$  una aplicación continua entre dos espacios métricos tal que  $A$  es compacto, entonces  $f$  es uniformemente continua.

*Prueba.* Ver en [3] p.110-111. □

**Corolario 2.6.** *Sea  $f : A \rightarrow B$  un homeomorfismo entre dos espacios métricos tal que  $A$  es compacto, entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $d_B(f(x), f(y)) < \delta$  se tiene que  $d_A(x, y) < \epsilon$ .*

*Prueba.* Como  $B = f(A)$  es compacto por ser imagen de compacto a través de una aplicación continua y como  $f^{-1} : B \rightarrow A$  es continua, estamos en condiciones de aplicar el teorema anterior. □

## 2.2. Topología cociente

La topología cociente es útil a la hora de construir ciertos espacios topológicos. Veamos que es una aplicación cociente y como se define la topología cociente.

**Definición 2.7.** *Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y  $g : X \rightarrow Y$  una aplicación sobreyectiva. Tenemos que  $g$  se dice **aplicación cociente** si: siendo  $U$  un subconjunto de  $Y$ , éste es abierto en  $Y$  si, y sólo si,  $g^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ . En ese caso a la topología de  $Y$  la llamamos **topología cociente** inducida por  $g$ .*

Este tipo de topología es utilizada para construir los espacios cociente.

**Definición 2.8.** *Sea  $X^*$  el conjunto de clases del espacio  $X$  definida por una relación de equivalencia. Si tomamos  $g : X \rightarrow X^*$  la aplicación que lleva a cada punto en su clase. Llamamos **espacio cociente** de  $X$ , a  $X^*$  con la topología cociente inducida por  $g$ .*

A continuación, enunciaremos un resultado que nos sirve para la construcción de aplicaciones continuas definidas sobre un espacio cociente.

**Lema 2.9.** *Sean  $X, Y$  y  $Z$  espacios topológicos y  $g : X \rightarrow Y$  una aplicación cociente. Si tenemos  $d : X \rightarrow Z$  aplicación continua que es constante sobre cada conjunto  $g^{-1}(y)$  con  $y \in Y$ . Entonces  $d$  induce una aplicación continua  $q : Y \rightarrow Z$  tal que  $d = q \circ g$ .*

## 2.3. Sobre conexión y conexión por caminos

Esta sección trata sobre el tema fundamental de nuestro teorema, que es la conexión. Para comenzar recordaremos lo que es un espacio conexo y lo definiremos a partir del concepto de separación.

**Definición 2.10.** *Dado un espacio topológico  $X$ , llamamos **separación** de  $X$  a un par de subconjuntos  $U, V$  disjuntos, abiertos y no triviales en  $X$ , cuya unión es igual a  $X$ .*

Y entonces definimos espacio conexo.

**Definición 2.11.** *Decimos que  $X$  es **conexo** si no existe ninguna separación de  $X$ . Otra manera de definirlo es decir que es aquel espacio donde los únicos subconjuntos que son abiertos y cerrados a la vez son el  $\emptyset$  y  $X$ .*

En relación con la conexión tenemos el concepto de conexión por caminos. Antes de introducirla debemos conocer que es un camino.

**Definición 2.12.** Llamamos **camino** en  $X$  a toda aplicación continua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  y decimos que  $\alpha$  une  $\alpha(0) = x_1$  con  $\alpha(1) = x_2$  elementos en  $X$ . Llamaremos punto inicial del camino a  $x_1$  y punto final a  $x_2$ .

En algunas situaciones utilizaremos la palabra camino para referirnos a la imagen de la aplicación  $\alpha$ . Existe la noción de camino inverso  $\alpha^{-1}$ , que es aquel camino que tiene la misma imagen que  $\alpha$ , pero con sus extremos cambiados, es decir,  $\alpha(0) = x_2$  y  $\alpha(1) = x_1$ .

Una vez tenemos claro el concepto de camino podemos definir lo siguiente.

**Definición 2.13.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $U$  un subconjunto cualquiera de  $X$ . Decimos que  $U$  es **conexo por caminos** o **arco-conexo** si dados dos elementos cualesquiera  $u_1, u_2 \in U$  entonces existe un camino  $\alpha$  que los une.

Una propiedad a tener en cuenta de los espacios topológicos conexos por caminos, es que son también conexos.

A veces, nos interesan estas propiedades a nivel local, es decir, en los entornos de cada elemento del espacio topológico. Así surgen los siguientes conceptos:

**Definición 2.14.** Sea  $X$  un espacio topológico, decimos que es **localmente conexo** si para cada  $x \in X$  y cada entorno  $U$  de  $x$ , existe un entorno conexo  $V$  de  $x$  con  $V \subseteq U$  conexo.

Análogamente.

**Definición 2.15.** Decimos que  $X$  es **localmente conexo por caminos** si para cada  $x \in X$  y cada entorno  $U$  de  $x$ , existe un entorno conexo por caminos  $V$  de  $x$  con  $V \subseteq U$ .

De manera natural surge una división de los espacios topológicos en conjuntos conexos, como veremos con el concepto de componente conexa.

**Definición 2.16.** Dado un espacio topológico  $X$ , definimos la relación de equivalencia  $x_1 \sim x_2$  con  $x_1, x_2 \in X$  si ambos están contenidos en un subespacio conexo de  $X$ . Entonces llamamos **componentes conexas** a las clases de equivalencia que surgen de esta relación.

En algunos momentos las llamaremos componentes, por comodidad en la escritura. De forma análoga.

**Definición 2.17.** Dado  $X$ , definimos la relación de equivalencia  $x_1 \sim x_2$  con  $x_1, x_2 \in X$  si existe un camino que los una en  $X$ . Entonces llamamos **componentes conexas por caminos** a las clases de equivalencia que surgen de esta relación.

Las componentes conexas poseen un serie de propiedades, las cuales utilizaremos con frecuencia en los capítulos posteriores. Por lo que las citaremos para tenerlas presentes:

- Las componentes conexas de  $X$  son subespacios disjuntos y conexos de  $X$  cuya unión es el total y tal que cada subespacio conexo de  $X$  no trivial tan solo interseca a una de ellas.
- Un espacio es localmente conexo si, y sólo si, para cada  $U \subseteq X$  abierto, las componentes conexas de  $U$  son abiertas en  $X$ .
- Si  $X$  es localmente conexo por caminos, las componentes conexas y las componentes conexas por caminos son las mismas.

- Toda componente conexa por caminos de  $X$  está contenida en una componente conexa de  $X$ .

Finalmente, veremos las propiedades que tienen las componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 - A$ , donde  $A$  es un subespacio cerrado de  $\mathbb{R}^2$ , las cuales son de especial interés en este trabajo.

Veamos que  $\mathbb{R}^2 - A$  es localmente conexo por caminos. Dado un entorno  $U \subseteq \mathbb{R}^2 - A$  de un punto  $x \in \mathbb{R}^2 - A$ , tenemos que  $x$  está contenido en una bola abierta  $B$ , con  $B \subseteq U$ , donde sabemos que  $B$  es arco-conexa en  $\mathbb{R}^2 - A$ . Como  $B$  es arco-conexa, sabemos que es conexa y por tanto también podemos decir que  $\mathbb{R}^2 - A$  es localmente conexo.

Observando las propiedades ya descritas, podemos concluir que las componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 - A$  son conjuntos disjuntos y abiertos, además de que coinciden con las componentes conexas por caminos. Lo que nos será útil para llevar a cabo las distintas demostraciones, del teorema de la curva de Jordan.

## 2.4. Grupo fundamental

En esta sección retomamos la noción de camino, que utilizaremos con frecuencia. Además definiremos una serie de conceptos entorno a éste y relacionados con la topología algebraica.

Un tipo especial de caminos son los lazos.

**Definición 2.18.** Llamamos **lazo**  $l$  a todo camino tal que  $l(0) = l(1) = x_1$ , donde  $x_1 \in X$  será la base del lazo.

Existe una operación interna definida en el conjunto de los caminos de  $X$ , la cual es necesaria a la hora de definir el grupo fundamental de  $X$ .

**Definición 2.19.** Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos caminos en  $X$ , tales que  $\alpha$  une  $x_1$  con  $x_2$  y  $\beta$  une  $x_2$  con  $x_3$ , es decir,  $\alpha(1) = \beta(0)$ . Definimos la **concatenación** o el **producto** de dichos caminos,  $\alpha * \beta$ , como el camino  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t - 1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}.$$

La aplicación está bien definida y es continua por el lema de pegado, luego es un camino en  $X$ .

A continuación, explicaremos la relación de homotopía entre aplicaciones y entre caminos.

**Definición 2.20.** Sean  $k$  y  $g$  un par de aplicaciones continuas del espacio topológico  $Y$  en  $X$ . Decimos que las aplicaciones son **homótopas** y lo denotamos por  $k \sim g$ , si existe una aplicación continua  $F : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ , tal que:

$$F(y, 0) = k(y) \quad F(y, 1) = g(y)$$

para todo  $y \in Y$ . A la aplicación  $F$  la llamamos **homotopía**. En caso de que una de las dos aplicaciones sea constante, diremos que  $k$  y  $g$  son **homotópicamente nulas** o **nulhomótopas**.

En el caso de que las aplicaciones sean caminos existe un matiz a la hora de decir que son homótopos.

**Definición 2.21.** Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos caminos en  $X$  diremos que son **homótopos**, si tienen en común sus puntos iniciales y finales y además existe una homotopía  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  entre ellos cumpliendo que:

$$F(0, s) = x_1 \quad F(1, s) = x_2$$

para todo  $s \in [0, 1]$ , donde  $x_1$  es el punto inicial y  $x_2$  el punto final de los caminos.

También se dice que los caminos son homótopos relativos a  $\{0, 1\}$ .

Tanto la homotopía entre caminos, como entre aplicaciones son una relación de equivalencia y en consecuencia generan clases de equivalencia. En el caso de los caminos representaremos las clases de homotopía por  $[\alpha]$  donde  $\alpha$  es un camino representante de la clase.

Ahora, introduciremos el concepto de grupo fundamental de un espacio topológico  $X$ .

**Definición 2.22.** Sea  $x_0 \in X$ , tomamos el conjunto de lazos de  $X$  con base en  $x_0$ . El conjunto de clases de homotopía de dichos lazos con la operación  $*$  definida como  $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$ , tiene las propiedades de grupo algebraico. Por lo que le llamamos **grupo fundamental** de  $X$  en  $x_0$  y le denotamos como  $\pi_1(X, x_0)$ .

Observemos que si  $x_0, x_1 \in X$  son dos elementos en la misma componente conexa por caminos, los grupos fundamentales  $\pi_1(X, x_0)$  y  $\pi_1(X, x_1)$  son isomorfos. Por lo tanto, si  $X$  es conexo por caminos su grupo fundamental no depende del punto  $x_0$  escogido.

Además se tiene que toda aplicación continua entre espacios topológicos induce un homomorfismo entre sus grupos fundamentales.

**Definición 2.23.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y  $g : X \rightarrow Y$  una aplicación continua, tal que  $g(x_0) = y_0$  con  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in Y$ . Llamamos **homomorfismo inducido por  $g$**  a la siguiente aplicación:

$$g_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [l] \rightarrow [g \circ l] \quad .$$

Existen algunas relaciones entre la propiedades que posee la aplicación entre los espacios topológicos y las que posee el homomorfismo inducido. A continuación veremos una de ellas.

**Proposición 2.24.** Sea  $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$  una aplicación continua. Entonces  $g$  es homotópicamente nula si, y sólo si,  $g_* : \pi_1(\mathbb{S}^1, s_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  es el homomorfismo trivial entre los respectivos grupos fundamentales.

*Prueba.* Ver [6] p.396-397. □

Nos interesa la aplicación definida en  $\mathbb{S}^1$  porque así el resultado le podremos aplicar cuando tengamos un lazo, como veremos en el Capítulo 5.

## 2.5. Espacios recubridores y levantamientos

En esta sección vamos a exponer propiedades y conceptos en relación con los espacios recubridores, que utilizaremos en el Capítulo 5. En primer lugar veremos la definición de aplicación recubridora y espacio recubridor.

**Definición 2.25.** Sean  $X$  y  $E$  espacios topológicos. Una aplicación continua  $p : E \rightarrow X$  es **aplicación recubridora** si es sobreyectiva y para todo  $x \in X$ , existe un entorno abierto  $U \subseteq X$  de  $x$  tal que  $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$  donde:

- $V_i$  es abierto en  $E$  para todo  $i \in I$ .
- $V_i \cap V_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ .
- $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  es homeomorfismo para todo  $i \in I$ .

Decimos que  $E$  es un **espacio recubridor** y cada abierto  $U$  se dice que está regularmente cubierto o que es un abierto distinguido.

Estos espacios nos son útiles a la hora de calcular el grupo fundamental del espacio  $X$ . A continuación veremos resultados que relacionan espacio recubridor y grupo fundamental. Empezaremos viendo que es el levantamiento de una aplicación.

**Definición 2.26.** Sea  $p : E \rightarrow X$  una aplicación recubridora. Si  $g : Y \rightarrow X$  es una aplicación continua, para algún espacio topológico  $Y$ , llamamos **levantamiento** de  $g$  a toda aplicación  $\tilde{g} : Y \rightarrow E$  tal que  $p \circ \tilde{g} = g$ .

Cuando la aplicación es un camino tenemos el siguiente resultado.

**Lema 2.27.** Sea  $p : E \rightarrow X$  una aplicación recubridora con  $p(e_0) = x_0$ . Cualquier camino  $\alpha$  en  $X$  cuyo punto inicial sea  $x_0$ , tiene un único levantamiento  $\tilde{\alpha}$  que comience en  $e_0$ .

Si tenemos dos caminos homótopos ocurre lo siguiente.

**Lema 2.28.** Sean  $x_1, x_2 \in X$  y  $p : E \rightarrow X$  una aplicación recubridora con  $p(e_0) = x_0$ . Si  $\alpha$  y  $\beta$  son caminos homótopos en  $X$  que unen  $x_1$  con  $x_2$ , entonces sus respectivos levantamientos  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$  con  $e_0$  como punto inicial, terminan en el mismo elemento de  $E$  y son homótopos.

A partir del concepto de levantamiento vamos a poder definir la correspondencia del levantamiento, una aplicación que nos relaciona  $\pi_1(X, x_0)$  con la fibra  $p^{-1}(x_0)$ , donde  $p$  es una aplicación recubridora.

**Definición 2.29.** Sea  $p : E \rightarrow X$  aplicación recubridora con  $p(e_0) = x_0$ . Definimos la **correspondencia del levantamiento**, como la aplicación:

$$\phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0)$$

que lleva a cada  $[l] \in \pi_1(X, x_0)$  en el punto final de  $\tilde{l}$  (levantamiento de  $l$  que empieza en  $e_0$ ).

Teniendo en cuenta el Lema 2.28, podemos afirmar que  $\phi$  está bien definida. Observamos que depende de la elección de  $e_0$ .

Como una aplicación recubridora  $p : E \rightarrow X$  tal que  $p(e_0) = x_0$  es continua, tenemos que induce un homomorfismo  $p_*$  de  $\pi_1(E, e_0)$  en  $\pi_1(X, x_0)$ . Por tanto podemos definir un nuevo grupo  $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ , con el cual construimos la siguiente aplicación.



**Proposición 2.30.** Sean  $p : E \rightarrow X$  aplicación recubridora con  $p(e_0) = x_0$  y  $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ . La correspondencia del levantamiento  $\phi$  induce una aplicación inyectiva:

$$\Phi : \pi_1(X, x_0)/H \rightarrow p^{-1}(x_0)$$

donde  $\pi_1(X, x_0)/H$  son las clases a derecha que genera  $H$ .



## Capítulo 3

# Prueba mediante aproximación por polígonos

En este capítulo se expone la demostración del teorema de la curva Jordan elaborada originalmente por Helge Tverberg en [9]. A la hora de desarrollarla nos basamos principalmente en la versión que escribe Kosniowski en el capítulo 12.A de [3].

La demostración utiliza argumentos geométricos, donde la distancia va a jugar un papel fundamental para su desarrollo. Vamos a dividir la prueba en tres fases: demostración del resultado para polígonos de Jordan, construcción de una sucesión de polígonos aproximante a una curva de Jordan dada y la obtención final del teorema en cuestión, utilizando dicha sucesión.

Para comenzar, veremos que queremos decir cuando nos referimos a un polígono de Jordan.

**Definición 3.1.** Llamamos *polígono de Jordan*  $\Gamma$  a toda curva de Jordan tal que es una unión finita de  $n$  segmentos los cuales a lo sumo se intersecan en sus extremos. Denotamos  $E = \{e_i : 1 \leq i \leq n\}$  el conjunto de aristas (segmentos) y  $V = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$  al conjunto de vértices (extremos).

El conjunto de aristas le ordenamos de tal forma que dadas  $e_i$  y  $e_{i+1}$  éstas sean contiguas. Además para cada  $e_i$  su extremos serán  $v_i$  y  $v_{i+1}$ . Observemos que en algunos momentos llamamos  $v_{n+1}$  a  $v_1$  y  $e_{n+1}$  a  $e_1$ .

En  $\mathbb{R}^2$  vamos a considerar la distancia euclídea. Así, dados  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  denotamos por  $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ . Si  $A$  y  $B$  son dos subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ , usaremos  $d(A, B)$  para denotar la distancia entre ellos considerando la distancia euclídea.

**Lema 3.2.** *El teorema del curva de Jordan se cumple para polígonos de Jordan.*

*Prueba.* Sea  $\Gamma$  un polígono de Jordan, veamos que divide al plano en al menos dos componentes conexas. Para ello vamos a definir la función paridad sobre el complementario de  $\Gamma$  en  $\mathbb{R}^2$ :

$$\pi : \mathbb{R}^2 - \Gamma \longrightarrow \{0, 1\}$$

Tomamos un punto  $p \in \mathbb{R}^2 - \Gamma$  y sea  $L$  una semirrecta cualquiera cuyo origen es  $p$  (ver Figura 3.1). La aplicación  $\pi$  asocia a  $p$  el número de cortes de  $L$  con  $\Gamma$  módulo 2, donde cada corte lo contamos una vez salvo que: el corte se produzca en un vértice y sus aristas adyacentes queden ambas en

el mismo lado del plano respecto de  $L$  o en caso de que el corte sea a lo largo de una arista y sus dos aristas adyacentes queden al mismo lado de  $L$ , en estos casos contamos el corte de manera doble (ver Figura 3.2).

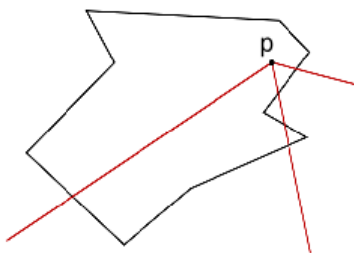


Figura 3.1: Aquí se muestran diferentes posibilidades para la elección de  $L$  dado  $p$

Debemos comprobar que la aplicación  $\pi$  está bien definida, es decir, que es independiente de la semirrecta que tomemos. Para ello dado un punto  $p$  tomamos la semirrecta horizontal que parte de  $p$  y queda a su derecha  $L_{p,0} = \{p + te_1 : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ , donde  $e_1 = (1, 0)$ . La recta  $L_{p,0}$  cortará al polígono  $\Gamma$  en  $N_0$  cortes contados como ya hemos visto. Para continuar definimos  $L_{p,\theta}$  la semirrecta que es el resultado de rotar un ángulo  $\theta$  en sentido antihorario  $L_{p,0}$  respecto de  $p$ , a continuación veremos que la paridad de  $N_\theta$ , número de cortes de  $L_{p,\theta}$  con  $\Gamma$ , es invariante para todo  $\theta$ .

Observamos que si rotamos de forma continua la semirrecta solo encontramos cambios en el número de cortes cuando encontramos un vértice ya que en el transcurso de un vértice a otro los cortes se dan en el interior de aristas, por lo tanto analizaremos como varía  $N_\theta$  cuando al rotar la semirrecta intersecamos un vértice, existen cuatro casos posibles:

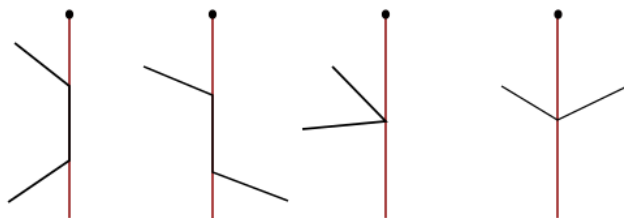


Figura 3.2: Esta figura muestra los distintos caso de corte con un vértice.

En caso de que haya dos vértices consecutivos en  $L_{p,\theta}$  y por tanto  $L_{p,\theta}$  contenga la arista que los une:

- Puede ocurrir que las aristas adyacentes a la contenida en  $L_{p,\theta}$  queden en el mismo lado del plano respecto de la semirrecta. En ese caso vemos que al aproximarnos por un lado tenemos dos cortes y que si nos aproximamos por el otro desaparecen. Mientras que en  $L_{p,\theta}$  esos dos cortes son contados y por tanto  $N_\theta$  varía en  $\pm 2$  lo cual no cambia su paridad.
- La otra opción es que las aristas adyacentes a la contenida queden cada una a un lado de la semirrecta, lo que quiere decir que cuando nos aproximamos por un lado tenemos un

corte que desaparece en el otro y viceversa. Además de que en  $L_{p,\theta}$  el corte con la arista y sus vértices se cuenta una vez y por tanto  $N_\theta$  no varía.

En caso de que  $L_{p,\theta}$  no contenga dos vértices consecutivos:

- La primera posibilidad es que las aristas adyacentes al vértice queden en el mismo lado del plano respecto de  $L_{p,\theta}$ . De forma que el aproximarnos por un lado nos da dos cortes que no aparecen en el otro mientras que el corte con el vértice se cuenta doble, por lo que  $N_\theta$  varía en  $\pm 2$  lo cual no cambia su paridad.
- El último caso consiste en que cada una de las aristas adyacentes al vértice quede en un lado distinto a la otra. De tal manera que cada una aporta un corte simple en un lado y en el otro no, y además el corte de  $L_{p,\theta}$  con el vértice es simple, con lo que no varía la paridad de  $N_\theta$ .

Visto esto podemos concluir que la paridad de  $p$  se puede asignar respecto de cualquier semirrecta que parta de dicho punto y por lo tanto  $\pi$  está bien definida.

Veamos que  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$  se divide en dos componentes, que se corresponden con el conjunto de puntos pares  $X_0 = \pi^{-1}(0)$  y el de los impares  $X_1 = \pi^{-1}(1)$ , donde ambos son conjuntos abiertos. Si tomamos un punto  $p \in X_0$  y definimos  $\epsilon = d(p, \Gamma)$  tenemos que la bola abierta  $B(p, \epsilon)$  está contenida en  $X_0$ : basta coger un punto  $q$  de la bola y la semirrecta que parte desde  $p$  y pasa por  $q$  para darnos cuenta que la semirrecta que parte de  $q$  y está contenida en la anterior contiene los mismos cortes. De forma análoga se prueba que  $X_1$  es abierto.

Ahora probaremos que ambos conjuntos son arco-conexos y por lo tanto conexos. Para ello sea:

$$\tau = \min_i \{ \min_{\substack{j \neq i-1 \\ j \neq i+1}} \{d(e_i, e_j)\} \}$$

es decir, la distancia mínima entre dos aristas no contiguas. Observamos que para el triángulo  $\tau$  no está definida, en ese caso tomaremos la mitad de la longitud de la altura mínima del triángulo. Tomamos dos puntos  $a, b \in \mathbb{R}^2 - \Gamma$ , tales que el segmento que los une interseque a  $e_1$  en un punto que no sea un vértice y de tal manera que tanto  $a$  como  $b$  disten  $\tau/2$  de  $\Gamma$ . Por como los hemos definido tenemos que si uno de los puntos es par, el otro será impar.

Veamos que podemos construir un lazo contenido en  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$  para el punto  $a$  y otro para el  $b$ . Para el punto  $a$  construimos  $l_a$  de la siguiente forma: recorremos el segmento paralelo a  $e_1$ , que está a distancia  $\tau/2$  de dicha arista y que contiene al punto  $a$ . En sentido a  $e_2$  hasta llegar a un punto  $q$  que diste  $\tau/2$  de  $e_2$ . Llegados a este punto se pueden dar dos casos:

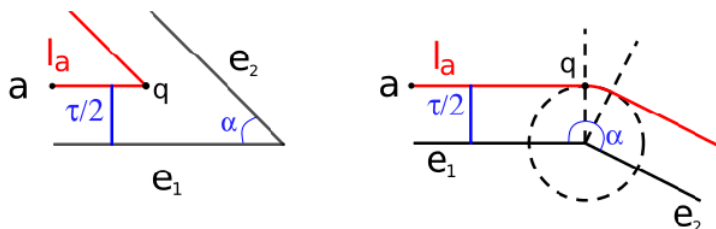


Figura 3.3: Caso 1:  $\alpha < \pi$

Caso 2:  $\alpha > \pi$ .

- Caso 1:  $\alpha < \pi$ . Continuaremos el camino por el segmento paralelo a  $e_2$ , que está a distancia  $\tau/2$  y que contiene a  $q$ , en sentido  $e_3$ .
- Caso 2:  $\alpha > \pi$ . Continuamos por el arco de la circunferencia centrada en el vértice intersección de  $e_1$  y  $e_2$  y de radio  $\tau/2$  hasta encontrarnos con el segmento paralelo a  $e_2$ , que está a distancia  $\tau/2$  y entonces seguir recorriéndole.

Una vez tenemos este tramo definido, continuamos actuando de la misma forma hasta llegar de nuevo al punto  $a$ . Por como hemos definido el lazo, éste no interseca a  $\Gamma$ , ya que los puntos del lazo están a distancia  $\tau/2$  de  $\Gamma$ . De forma análoga definimos  $l_b$  para el punto  $b$ .

Dado  $p \in \mathbb{R}^2 - \Gamma$  podemos tomar un segmento que una  $p$  con uno de los lazos  $l_a$  o  $l_b$  y no interseque al polígono, le llamamos  $m$ . Luego podemos establecer un camino en  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$  que una  $p$  con  $a$  o  $p$  con  $b$ .

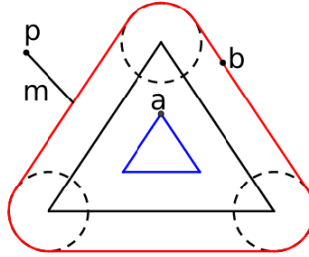


Figura 3.4: La imagen muestra un triángulo con ambos lazos y el segmento  $m$

Conclusión, los conjuntos  $X_0$  y  $X_1$  son abiertos, disjuntos y conexos por caminos (luego también conexos) en  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ . Por lo que son sus dos componentes conexas (ver Sección 2.3) ya que su unión es el total. Podemos ver que la componente de los puntos impares es acotada, pues para cualquier punto exterior una bola que contenga a  $\Gamma$  existen semirrectas que parten de él y no intersecan al polígono, es decir, dichos puntos son pares. Se observa que si tenemos dos puntos unidos por un camino en  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ , estos deben tener la misma paridad.  $\square$

Como propiedad interesante podemos decir que un polígono de Jordan  $\Gamma$  es la frontera de las componentes de  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ . Para probarlo tan solo hay que ver que toda bola abierta centrada en un punto del polígono contiene puntos pares e impares (toda bola interseca a ambas componentes).

El siguiente resultado nos dice que dada una curva de Jordan  $C$  podemos construir un polígono de Jordan que esté próximo a  $C$ .

**Lema 3.3.** *Sea  $C$  una curva de Jordan dada por  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Para todo  $\epsilon > 0$  existe un polígono de Jordan  $\Gamma$  dado por  $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de manera que para todo  $x \in \mathbb{S}^1$  se cumple que  $\|f(x) - g(x)\| < \epsilon$ .*

*Prueba.* Sean  $x, y \in \mathbb{S}^1$ , como consecuencia del Lema 2.5 y del Corolario 2.6 podemos afirmar que para todo  $\epsilon > 0$  existen:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \text{ tal que si } \|x - y\| < \epsilon_1 &\Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \frac{\epsilon}{2} \\ \epsilon_2 \text{ tal que si } \|f(x) - f(y)\| < \epsilon_2 &\Rightarrow \|x - y\| < \min(\epsilon_1, \sqrt{3}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

El elegir  $\sqrt{3}$  se debe a que si tenemos un subconjunto de  $\mathbb{S}^1$  cuyo diámetro es menor que  $\sqrt{3}$ , sabemos que dicho subconjunto está contenido en un arco que no es el total y cuyos extremos distan entre sí el diámetro del conjunto.

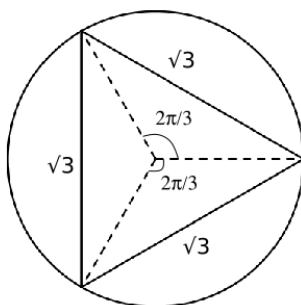


Figura 3.5: La imagen ilustra las posibilidades para un arco de diámetro menor que  $\sqrt{3}$

Sabiendo ésto definimos  $\delta = \min(\epsilon_2, \epsilon/2)$  y construimos un recubrimiento cerrado del plano mediante cuadrados, cuyo diámetro (la diagonal) tenga longitud  $\delta$  y tal que la intersección de dos cuadrados sea una arista o sea vacía. Una vez lo tenemos llamamos  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  al menor subconjunto finito del recubrimiento tal que  $C \subset \bigcup_{i=1}^n S_i$ , tenemos garantizada la existencia de  $\mathcal{S}$  puesto que  $C$  es acotada.

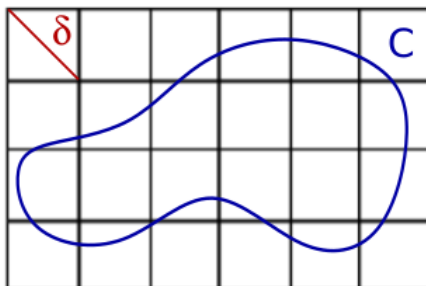


Figura 3.6: Éste es un ejemplo de como podemos cubrir  $C$  mediante cuadrados de diámetro  $\delta$ .

Haciendo uso de esta construcción vamos a definir una sucesión de curvas de Jordan que nos dará como resultado el polígono  $\Gamma$  que buscamos.

Sea  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ , tomamos en primer lugar  $S_1$  y vemos que  $f^{-1}(S_1) \subseteq A_1$  donde  $A_1$  es un arco cerrado minimal en  $\mathbb{S}^1$  distinto del total (esto se deduce aplicando (3.1) ya que  $\delta \leq \epsilon_2$ ). A los extremos de dicho arco les llamamos  $a, b \in \mathbb{S}^1$  y éste lo parametrizamos como camino mediante un homeomorfismo  $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow A_1$  con  $\alpha_1(0) = a$  y  $\alpha_1(1) = b$ . Teniendo lo anterior en cuenta definimos  $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mediante  $s(t) = (1-t)f(a) + tf(b)$ , ésta es continua por ser suma y producto de funciones continuas. A partir de ella construimos  $g_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$g_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in (\mathbb{S}^1 - A_1) \cup \{a, b\} \\ s(\alpha_1^{-1}(x)) & \text{si } x \in A_1 \end{cases} .$$

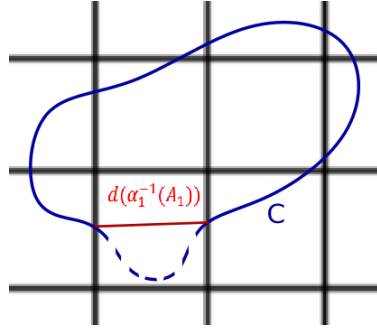


Figura 3.7: Aquí vemos como obtener una nueva curva, sustituyendo parte de  $C$  por un segmento.

Tenemos que  $f$  es continua en el arco  $(\mathbb{S}^1 - A_1) \cup \{a, b\}$ ,  $s \circ \alpha_1^{-1}$  es continua en  $A_1$  por ser composición de continuas y en la intersección de dichos conjuntos las funciones coinciden. Por el lema de pegado podemos concluir que  $g_1$  es continua.

Además  $g_1$  es cerrada, pues  $f$  lo es por ser homeomorfismo y  $s \circ \alpha_1^{-1}$  también por ser una aplicación continua de un espacio compacto en uno Hausdorff (ver [6] p.189).

Finalmente, observamos que  $s \circ \alpha_1^{-1}$  es biyectiva cuando restringimos el conjunto de llegada a su imagen y sabemos que  $f$  también lo es con respecto a su imagen. Como sus imágenes son disjuntas, salvo en los extremos del segmento, donde ambas aplicaciones coinciden tenemos que  $g_1$  es biyectiva.

Podemos decir que  $g_1$  es un homeomorfismo de  $\mathbb{S}^1$  en  $g_1(\mathbb{S}^1) = G_1$  y por lo tanto define una nueva curva de Jordan  $G_1$ .

De forma general podemos definir la rectificación como el proceso de obtener una curva de Jordan a partir de una dada por  $f$ . De manera que la nueva curva toma los valores del segmento que une  $f(a)$  y  $f(b)$  en un arco  $A \subset \mathbb{S}^1$ , donde  $a$  y  $b$  son sus extremos y los valores de la curva original en el arco complementario.

Así pues definimos  $g_2$  como la rectificación de  $g_1$  en  $A_2$ , el menor arco cerrado que contiene a  $g_1^{-1}(S_2)$ , y de manera sucesiva mediante el mismo proceso obtenemos  $g_n$  que define un polígono de Jordan el cual vamos a ver que cumple la propiedad buscada.

Para ello tomamos cualquier  $x \in \mathbb{S}^1$  y supongamos que  $f(x) \neq g_n(x)$ , de no ser así ya lo tendríamos. Dicho  $x$  cumple que su imagen por  $f$  está contenida en algún  $S_j$  con  $1 \leq j \leq n$ , lo que implica que  $f(x) = g_{j-1}(x) \neq g_j(x) = g_n(x)$  (donde  $g_0 = f$ ) y además  $x \in A_j$  donde  $A_j$  es un arco de  $\mathbb{S}^1$  a cuyos extremos llamaremos  $p$  y  $q$ . Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned} \|f(p) - f(q)\| &\leq \delta \leq \epsilon_2 \stackrel{(3.1)}{\implies} \|p - q\| \leq \epsilon_1 \\ &\implies \|p - x\| \leq \epsilon_1 \\ &\implies \|f(x) - f(p)\| < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

donde la segunda implicación se debe a que  $\|p - x\| \leq \|p - q\|$ , puesto que  $\|p - q\| < \sqrt{3}$  (ver Figura 3.5).

Al ser  $p$  y  $q$  extremos del arco sobre el que rectificamos, la nueva curva que se obtiene tiene la



misma imagen en dichos puntos, entonces:

$$\begin{aligned} \|f(x) - g_n(x)\| &= \|f(x) - f(p) + f(p) - g_n(x)\| \\ &= \|f(x) - f(p) + g_j(p) - g_j(x)\| \\ &\leq \|f(x) - f(p)\| + \|g_j(p) - g_j(x)\| < \frac{\epsilon}{2} + \delta \leq \epsilon \end{aligned}$$

donde  $\|g_j(p) - g_j(x)\| < \delta$  se debe a que ambas imágenes se encuentran en el mismo cuadrado de la colección  $\mathcal{S}$ .

Por tanto hemos probado que para todo  $x \in \mathbb{S}^1$  se cumple que  $\|f(x) - g_n(x)\| < \epsilon$ . Ésto prueba el resultado tomando  $g = g_n$ .  $\square$

La siguiente propiedad de los polígonos de Jordan nos será útil para probar el teorema de la curva de Jordan. Para desarrollar las ideas de la demostración nos hemos apoyado en [7].

**Proposición 3.4.** *Sea  $\Gamma$  un polígono de Jordan dado por  $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Entonces la componente acotada de  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$  contiene un disco abierto, cuya frontera interseca a  $\Gamma$  en dos puntos  $g(a)$  y  $g(b)$  tales que  $\|a - b\| \geq \sqrt{3}$ .*

*Prueba.* En primer lugar, veremos que existe un disco  $D_0$  en la componente acotada  $X$ , cumpliendo que su frontera interseca a  $\Gamma$  en al menos dos puntos  $g(a)$  y  $g(b)$  tales que  $\|a - b\|$  es maximal (la distancia máxima que se puede dar entre dos punto  $a$  y  $b$  con esas características). Sea  $\mathcal{D} = \{D \subset X : D \text{ disco abierto tal que existen } a, b \in \mathbb{S}^1 \text{ con } g(a), g(b) \in \text{Fr}(D)\}$ . Para todo  $D \in \mathcal{D}$  podemos definir  $t(D) = \max\{\|a - b\| : g(a), g(b) \in \text{Fr}(D)\}$ . Tomamos  $\rho = \sup\{t(D) : D \in \mathcal{D}\}$ , podemos hacerlo porque  $t(D) \in [0, 2]$ , además tenemos que  $\rho \neq 0$  por ser  $\mathcal{D} \neq \emptyset$ .

Teniendo en cuenta lo anterior podemos definir una sucesión de discos  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $D_n \in \mathcal{D}$ , tal que  $t(D_n) \rightarrow \rho$ . Como los discos están contenidos en la componente acotada, sus centros  $c_n$  también. Así  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de puntos acotada en  $\mathbb{R}^2$  y por tanto podemos tomar una subsucesión convergente  $\{c_j\}_{j \in J \subseteq \mathbb{N}}$ .

Sea  $c$  el límite de  $\{c_j\}_{j \in J}$ , veamos que está en la componente acotada. Como  $t(D_j) \rightarrow \rho$ , tenemos que para cada  $j$  existen dos puntos  $g(a_j), g(b_j) \in \text{Fr}(D_j)$  tales que  $\|a_j - b_j\| \rightarrow \rho$ , entonces por el Corolario 2.6, para un  $j$  lo suficientemente grande,  $\|g(a_j) - g(b_j)\| \geq \delta > 0$ . Como el diámetro de  $D_j$  es mayor que  $\|g(a_j) - g(b_j)\|$  tenemos que  $\mu = d(c, \Gamma) \geq \delta/2 > 0$  y  $c \in X$ .

Observamos que el disco con centro  $c$  y radio  $\mu$ , cumple las propiedades para ser el disco  $D_0$  que buscábamos. Pues la sucesión  $\{D_j\}_{j \in J}$  es una sucesión de discos y tal que  $c_j \rightarrow c$  y  $r_j \rightarrow \mu$  donde  $r_j$  es cada radio. Además  $\{c_j\}_{j \in J} \subseteq \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  por lo que  $t(D_0) = \rho$ , es decir, es maximal.

En segundo lugar, vamos a suponer que  $\|a - b\| < \sqrt{3}$ . Si observamos la Figura 3.5 vemos que  $a$  y  $b$  son extremos de un arco  $A$ , cuya longitud es mayor que  $4\pi/3$ . Entonces tenemos que la frontera de  $D_0$  no corta a  $g(A) - \{g(a), g(b)\}$ , pues dado  $c \in A - \{a, b\}$  veamos que  $\max\{\|a - c\|, \|b - c\|\} > \|a - b\|$ .

Sea  $\alpha$  el menor ángulo que forman los radios que se corresponden con los puntos  $a$  y  $b$  (el cuál sabemos que mide menos de  $2\pi/3$ ). Si definimos  $t$  como el punto de  $\mathbb{S}^1$  cuyo radio forma un ángulo  $\alpha$  con  $a$  y es distinto de  $b$  (ver Figura 3.8), tenemos que los puntos que se encuentran en el arco  $A_1$  que determinan  $t$  y  $b$  que no contiene a  $a$  (marcado en rojo en la Figura 3.8) distan de  $a$  un valor mayor que  $\|a - b\|$ . De manera análoga se ve que en el arco  $A_2$  determinado por  $s$  y  $a$  que no contiene a  $b$  (arco en verde) se encuentran los puntos de  $\mathbb{S}^1$  que distan de  $a$  más

que  $\|a - b\|$ . Como  $3\alpha < 2\pi$ , tenemos que la unión de  $A_1$  y  $A_2$  es  $A$ , lo que implica que si  $c \in A - \{a, b\}$  entonces  $\max\{\|a - c\|, \|b - c\|\} > \|a - b\|$ .

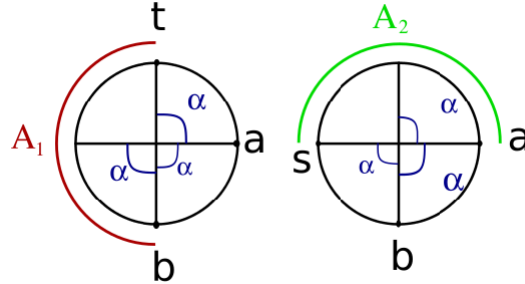


Figura 3.8: Se muestra los arcos  $A_1$  y  $A_2$  cuyos puntos distan más que  $\|a - b\|$  de  $a$  y  $b$  respectivamente.

Por último vamos a distinguir las distintas situaciones que se pueden dar para el disco  $D_0$  y veremos que es absurdo suponer que  $\|a - b\| < \sqrt{3}$ . Supongamos que  $v_1, v_2, \dots, v_m$ , son los vértices de  $\Gamma$  contenidos  $g(A)$  y ordenados de manera que si recorremos  $g(A)$  de  $g(a)$  a  $g(b)$  nos los encontramos en el orden de sus subíndices. Tenemos que existen cuatro situaciones posibles:

$$\begin{aligned} v_1 &\neq g(a) \text{ y } v_m \neq g(b) \\ v_1 &\neq g(a) \text{ y } v_m = g(b) \\ v_1 &= g(a) \text{ y } v_m \neq g(b) \\ v_1 &= g(a) \text{ y } v_m = g(b) \end{aligned}$$

En la primera de ellas  $v_1 \neq g(a)$  y  $v_m \neq g(b)$ , por lo que tenemos que  $D_0$  es un disco tangente a un par de aristas, la que contiene a  $g(a)$  y la que contiene a  $g(b)$ . Veremos que podemos encontrar otro disco  $D'_0$  en la componente acotada de  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$  tal que la frontera de  $D'_0$  corta a  $\Gamma$  en dos puntos  $g(a')$  y  $g(b')$  con  $\|a - b\| < \|a' - b'\|$ .

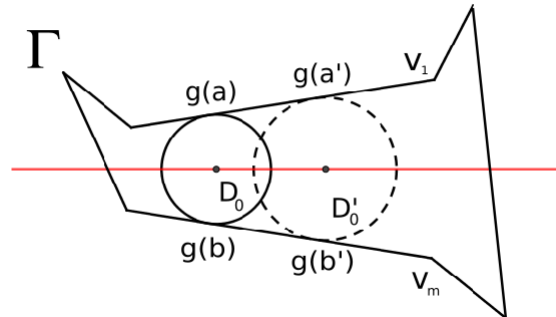


Figura 3.9: Construcción del nuevo disco, primera situación.

Tomando las rectas que contienen a ambas aristas tangentes, podemos trazar la bisectriz que pasa por el centro de  $D_0$ . En ella se encuentran todos los centros de los discos tangentes a las dos aristas ya mencionadas. Existe un disco  $D'_0$ , cuya frontera es tangente a dichas aristas en  $g(a')$  y  $g(b')$  puntos de  $g(A)$ , que se encuentra en la componente acotada de  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ . Basta tomar

el disco  $D_0$  y desplazarle moviendo su centro por la bisectriz manteniendo la tangencia a las aristas, según el desplazamiento del centro que tomemos, así será la longitud del nuevo radio. De esta manera podemos controlar que el disco se mantenga en la componente acotada. En caso de que las aristas fuesen paralelas sería suficiente con desplazar  $D_0$ .

Tanto la segunda como la tercera situación son análogas, por lo que solo desarrollaremos la contradicción para la segunda:  $v_1 \neq g(a)$  y  $v_m = g(b)$  (ver Figura 3.10). Tenemos que la frontera de  $D_0$  es tangente a la arista de  $\Gamma$  que contiene  $g(a)$ , a la que llamaremos  $l_a$ , en dicho punto. Suponemos que la arista de  $g(A)$  que tiene por extremo a  $g(b)$  no es tangente a la frontera de  $D_0$ , pues en ese caso actuaríamos como en la primera situación. Si trazamos la recta que contiene a  $l_a$ , podemos definir la parábola de los puntos que equidistan de la recta y de  $g(b)$ . Tomando la circunferencia frontera de  $D_0$  y desplazando su centro por la parábola a la vez que mantenemos la tangencia con  $l_a$ , de tal forma que dicha tangencia se produzca en el arco  $g(A)$ , encontramos un nuevo disco  $D'_0$  en la componente acotada de  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ . Puesto que el crecimiento del radio depende del desplazamiento del centro, podemos controlar que el disco se mantenga en dicha componente. La frontera de  $D'_0$  interseca a  $\Gamma$  en  $g(a)$  y  $g(b')$ , con  $\|a - b\| < \|a' - b\|$  lo cual entra en contradicción con que  $\|a - b\|$  sea maximal.

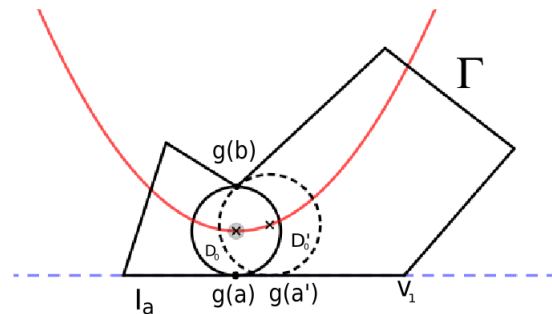


Figura 3.10: Construcción del nuevo disco, segunda situación.

En la cuarta situación tenemos un disco cuya frontera corta a  $\Gamma$  en al menos dos vértices (ver Figura 3.11). La arista de  $g(A)$  que tiene por extremo a  $g(a)$  la llamaremos  $l_a$  y la que tiene a  $g(b)$  por extremo la denotaremos  $l_b$ . Estas aristas pueden encontrarse en diversas posiciones respecto a la frontera del disco. En el caso de que ambas sean tangentes estamos en una situación similar a la primera. Sin embargo, si solo una de ellas es tangente y la otra no, nos encontramos en una situación como la segunda o tercera. La última opción es que ninguna de las dos aristas sea tangente y entonces tenemos que ver otra manera de encontrar un disco que nos de la contradicción.

Tomamos la circunferencia frontera de  $D_0$  y desplazando su centro por los puntos de la mediatriz del segmento que une  $g(a)$  con  $g(b)$  y que están contenidos en la componente acotada del polígono que forman  $g(A)$  y los radios correspondientes a  $g(a)$  y  $g(b)$  en  $D_0$  (ver Figura 3.11). A su vez, la nueva circunferencia que obtenemos la imponemos la condición de pasar por  $g(a)$  y  $g(b)$ , en algún momento la circunferencia se encontrara en uno de los tres casos siguientes: una de las aristas  $l_a$  o  $l_b$  es tangente a la frontera del disco (actuando como en la segunda situación llegamos a una contradicción), las dos aristas  $l_a$  y  $l_b$  son tangentes a la frontera del disco (actuando como

en la primera situación llegamos a una contradicción) o como último caso la frontera de dicho disco interseca a  $g(A)$  en un punto distinto de  $g(a)$  y  $g(b)$ , lo cual nos lleva a una contradicción con que  $\|a - b\|$  es maximal.

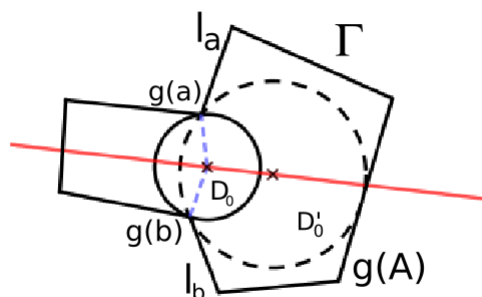


Figura 3.11: Construcción del nuevo disco, cuarta situación.

□

Para elaborar la prueba del teorema de Jordan necesitaremos de un elemento auxiliar al que llamaremos cuerda:

**Definición 3.5.** Dada una curva de Jordan  $C$ , llamamos **cuerda** de la curva, a un segmento  $\gamma$  en el plano  $\mathbb{R}^2$  cuyos únicos puntos en común con  $C$  son sus extremos.

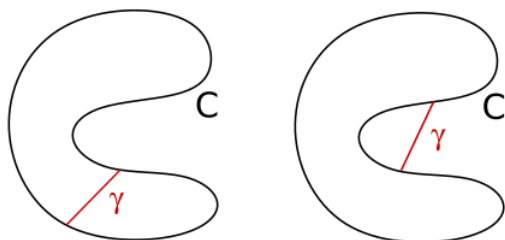


Figura 3.12: La imagen muestra el dibujo de dos cuerdas distintas para una curva  $C$

El siguiente resultado nos será útil en la prueba del teorema de la curva de Jordan, para su demostración nos hemos basado en las ideas que aparecen en el artículo de Tverberg ([9]).

**Lema 3.6.** Sean  $\Gamma$  un polígono de Jordan dado por  $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $X$  una componente de  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ . Dados  $a, b \in X$  verificando que  $d(\{a, b\}, \Gamma) \geq \delta > 0$  y tales que para toda cuerda  $\gamma$  en  $X \cup \Gamma$  cuya longitud sea menor que  $2\delta$ , se cumple que los puntos  $a$  y  $b$  quedan en la misma componente de  $X - \gamma$ , entonces tenemos que existe un camino  $\alpha$  en  $X$  que los une y tal que  $d(\alpha([0, 1]), \Gamma) \geq \delta$ .

*Prueba.* En primer lugar, observemos que si  $a'$  es un punto de  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$  tal que está unido con  $a$  mediante el camino  $\alpha'$  y  $d(\alpha'([0, 1]), \Gamma) \geq \delta$  entonces  $a'$  y  $b$  cumplen la hipótesis de este lema. Ya que tenemos un camino que une  $a$  con  $a'$  y está a una distancia mayor o igual que  $\delta$  de  $\Gamma$ , lo que implica que no existe ninguna cuerda  $\gamma$  en  $X \cup \Gamma$  que sea de longitud menor que  $2\delta$  y deje

$a$  y  $a'$  en distintas componentes de  $X - \gamma$  y entonces tampoco ocurre esto para  $a'$  y  $b$ . Por tanto, nos basta probar el caso en que  $d(a, \Gamma) = d(b, \Gamma) = \delta$ . Comenzamos por tomar  $g(u_a)$  y  $g(u_b)$  tal que  $\|g(u_a) - a\| = \|g(u_b) - b\| = \delta$ . Supongamos que la arista que contiene a  $g(u_a)$  es  $e_1$ , si no fuese así las renombramos.

A continuación, construiremos el camino  $\alpha$ , como la curva que describe el centro  $c$  de un disco cerrado  $D$  de radio  $\delta$ , cuando le deslizamos de forma que su frontera sea tangente a  $\Gamma$ . Empezando con el disco centrado en  $a$  y por tanto tangente en  $g(u_a)$  (primer punto por el que desliza), avanzamos por el polígono en el orden creciente de las aristas. Llamaremos  $d$  al punto del polígono por el que desliza el disco.

Cuando llegamos a una posición en que la frontera de  $D$  es tangente al polígono en otro punto, además del punto  $d$ , que no es el opuesto a  $d$  en la circunferencia que delimita el disco, continuamos deslizando por la arista  $e_i$  con mayor subíndice, entre todas las que son tangentes a la frontera del disco. De ésta manera el disco alcanza una posición en la que  $d$  es  $g(u_b)$ , como probamos en el siguiente párrafo.

Supongamos que  $D$  no llega a la posición en que desliza sobre  $g(u_b)$ . Entonces existe una cuerda  $\gamma$  de longitud menor que  $2\delta$  y por cuyos extremos,  $g(u_1)$  y  $g(u_2)$ , desliza  $D$ . Éstos determinan un subarco  $A_1 \subseteq \Gamma$ , por cuyos puntos interiores no desliza  $D$  y que contiene a  $g(u_b)$  entre dichos puntos.

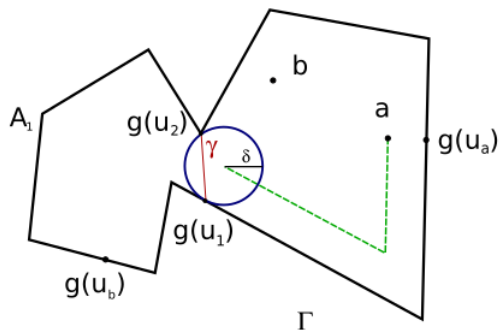


Figura 3.13: Ejemplo de polígono donde  $D$  no alcanza  $g(u_b)$ .

Tenemos que  $X - \gamma$  se divide en dos componentes conexas. A la componente que contiene el punto  $a$  la llamaremos  $Y$ , mientras que a la otra la llamaremos  $Z$ . Sabemos por hipótesis que  $b \in Y$  y por construcción  $c \in Y$ . Por otro lado, como  $g(u_b) \in A_1$ , tenemos que está contenido en la frontera de  $Z$ .

Consideremos  $S$  la circunferencia de radio  $\delta$  centrada en  $b$  y el radio que une su centro con  $g(u_b)$ . Dicho radio corta a la cuerda  $\gamma$  ya que  $b \in Y$  y  $g(u_b) \in Fr(Z)$ , por tanto la cuerda corta a  $S$  en dos puntos ya que sus extremos no están contenidos en la región interior de  $S$ .

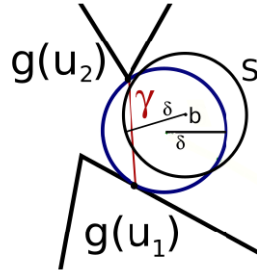


Figura 3.14: La circunferencia  $S$  interseca a  $\gamma$ .

Entonces tenemos que  $g(u_b)$  está contenido en el disco cerrado de radio  $\delta$  cuya frontera es  $S$  y contiene a  $g(u_1)$  y  $g(u_2)$ . Pero esto es absurdo ya que el interior de dicho disco no contiene puntos del polígono y si  $g(u_b)$  está en la frontera del disco entonces  $D$  se puede deslizar hasta  $g(u_b)$ .

Finalmente, tenemos que ver que  $c$  puede alcanzar  $b$ . Ya sabemos que  $D$  puede deslizar hasta  $g(u_b)$ , si éste punto no es un vértice ya lo tenemos. En caso de que sea un vértice, lo único que podría impedirlo es la existencia de una cuerda  $\gamma'$  en  $\Gamma$  de longitud menor que  $2\delta$ , la cual tenga como extremo a  $f(u_b)$  e interseque al segmento que une  $b$  con  $c$ . Pero esa cuerda no existe por hipótesis ya que entonces  $b$  y  $c$  estarían de distinta componente de  $X - \gamma'$ . Por lo que ya tenemos nuestro camino  $\alpha$  tal que  $d(\alpha([0, 1]), \Gamma) \geq \delta$ .

□

Una vez expuestos los anteriores resultados estamos en disposición de probar el teorema de la curva de Jordan.

**Teorema 3.7** (Teorema de la curva de Jordan). *Sea  $C$  un curva de Jordan dada por  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  entonces ésta separa al plano  $\mathbb{R}^2$  en dos componentes conexas.*

*Prueba.* Esta prueba consta de dos partes, en primer lugar ver que  $C$  separa  $\mathbb{R}^2$  (es decir, que  $\mathbb{R}^2 - C$  no es conexo) y en segundo probar que  $\mathbb{R}^2 - C$  tiene dos únicas componentes.

Veamos que por lo menos tenemos dos componentes: existe una componente no acotada, porque podemos tomar una circunferencia centrada en un punto de  $C$  y con radio lo suficientemente grande para que  $C$  quede en su interior. Así, el exterior de la circunferencia es un conjunto no acotado y conexo en  $\mathbb{R}^2 - C$ .

A continuación veamos que existe también una componente acotada. En virtud del Lema 3.3, podemos tomar la sucesión  $1/i$  con  $i \in \mathbb{N}$  y con ella contruir una familia aproximante de polígonos de Jordan cuyo límite sea  $C$ , es decir:

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_i, \dots \text{ con sus correspondientes } f_1, f_2, \dots, f_i, \dots$$

de tal forma que para todo  $x \in \mathbb{S}^1$  tenemos que  $\|f_i(x) - f(x)\| < \frac{1}{i}$

Por lo que tenemos que  $f_i \rightarrow f$  cuando  $i \rightarrow \infty$ .

La Proposición 3.4 nos garantiza para cada  $\Gamma_i$  la existencia de una circunferencia  $S_i$ , que delimita un disco abierto contenido en la componente acotada de  $\mathbb{R}^2 - \Gamma_i$ . Dicha circunferencia contiene al menos dos puntos  $f_i(a_i)$  y  $f_i(b_i)$  tales que  $\|a_i - b_i\| \geq \sqrt{3}$ . Por otro lado podemos

tomar una circunferencia  $S_0$  de tal manera que  $C$  y  $\Gamma_i$  están contenidos en su interior y por tanto también lo está  $S_i$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

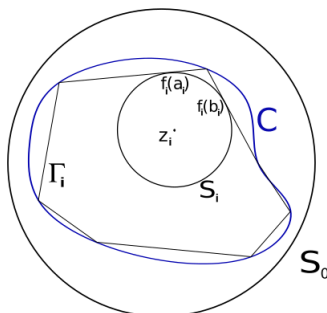


Figura 3.15

Una vez tenemos esto, construimos la sucesión  $z_1, z_2, \dots, z_i, \dots$ , de puntos en  $\mathbb{R}^2$ , donde cada  $z_i$  es el centro de  $S_i$ . Como la sucesión está contenida en el interior de  $S_0$ , está acotada y por tanto admite una subsucesión convergente a un punto  $z \in \mathbb{R}^2$ . Así podemos suponer que la sucesión construida tiende a  $z$  (si no la cambiamos por una subsucesión convergente).

Veamos ahora que para un  $n \in \mathbb{N}$  lo suficientemente grande  $z_n$  y  $z$  están en la misma componente de  $\mathbb{R}^2 - \Gamma_n$ . En virtud del Corolario 2.6 sabemos que existe un número real  $\delta > 0$  tal que si  $\|x - y\| \geq \sqrt{3}$  entonces  $\|f(x) - f(y)\| \geq \delta$ , de donde obtenemos que  $\|f(a_n) - f(b_n)\| \geq \delta$ . Si cogemos  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$  y todo  $x \in \mathbb{S}^1$  se dé que  $\|f_n(x) - f(x)\| < \delta/4$ , tenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \delta &\leq \|f(a_n) - f(b_n)\| \\ &\leq \|f(a_n) - f_n(a_n)\| + \|f_n(a_n) - f(b_n)\| \\ &< \frac{1}{4}\delta + \|f_n(a_n) - f(b_n)\| \end{aligned}$$

y por lo tanto  $\|f_n(a_n) - f(b_n)\| > \frac{3}{4}\delta$ . Luego

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\delta &< \|f_n(a_n) - f(b_n)\| \\ &< \|f_n(a_n) - f_n(b_n)\| + \|f_n(b_n) - f(b_n)\| \\ &< \|f_n(a_n) - f_n(b_n)\| + \frac{1}{4}\delta \end{aligned}$$

de donde obtenemos que:

$$\|f_n(a_n) - f_n(b_n)\| > \frac{1}{2}\delta$$

Luego el diámetro de  $S_i$  es mayor que  $\delta/2$  y por consiguiente  $d(z_n, \Gamma_n) > \delta/4$ . Además existe un  $n_1 \geq N$  tal que si  $n \geq n_1$  tenemos que  $\|z_n - z\| < \delta/4$ , así pues para todo  $n \geq n_1$ , se tiene que  $z$  y  $z_n$  están en la misma componente (la acotada) de  $\mathbb{R}^2 - \Gamma_n$ .

Finalmente, utilizando lo anterior vamos a ver que  $\mathbb{R}^2 - C$  tiene una componente acotada y lo haremos por reducción al absurdo: suponemos que  $z$  pertenece a la componente no acotada

de  $\mathbb{R}^2 - C$ , ésto implica que existe un camino  $\alpha$  en  $\mathbb{R}^2 - C$  que une  $z$  con un punto exterior a  $S_0$  (pues las componentes conexas son arco-conexas) y en consecuencia podemos tomar  $\rho = d(\alpha([0, 1]), C)$ . Por otro lado podemos encontrar un  $n$  lo suficientemente grande como para que  $\|f_n(x) - f(x)\| < \rho/2$ , de modo que obtenemos que  $d(\alpha([0, 1]), \Gamma_n) > \rho/2$ , y además teníamos que  $\Gamma_n \subset S_0$ . Es decir, la imagen de  $\alpha$  está contenida en  $\mathbb{R}^2 - \Gamma_n$ , luego  $z$  se encuentra en la componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 - \Gamma_n$  cuando  $n$  es lo suficientemente grande (puesto que el punto final de  $\alpha$  se encuentra en la componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 - \Gamma_n$ , ya que está contenido en el exterior de  $S_0$ ) lo que entra en contradicción con lo probado.

Luego  $\mathbb{R}^2 - C$  posee al menos una componente acotada y otra no acotada, nos quedaría por ver la segunda parte, es decir, que solo se compone de esas dos componentes:

Por reducción al absurdo supongamos que  $\mathbb{R}^2 - C$  posee más de dos componentes y cojamos por tanto  $p, q, r \in \mathbb{R}^2$  tal que cada uno de ellos pertenece a una componente distinta. Tomamos  $\tau = d(\{p, q, r\}, C)$  y teniendo en cuenta la sucesión de polígonos aproximante sabemos que existe  $n_2$  tal que si  $n \geq n_2$  entonces  $\|f_n(x) - f(x)\| < \tau/2$  para todo  $x \in \mathbb{S}^1$ . En consecuencia, aplicando la desigualdad triangular,  $d(\{p, q, r\}, \Gamma_n) \geq \tau/2$ , es decir, los puntos no pertenecen a los polígonos  $\Gamma_n$ , lo que implica que dos de los tres puntos están en la misma componente  $X_n$  de  $\mathbb{R}^2 - \Gamma_n$  (puesto que el Lema 3.2 nos garantiza que  $\mathbb{R}^2 - \Gamma_n$  tiene dos componentes conexas). Supongamos que  $p$  y  $q$  se encuentran en la misma componente  $X_n$  de  $\mathbb{R}^2 - \Gamma_n$  (la acotada o la no acotada) para todo  $n$  lo suficientemente grande, esto se puede suponer dado que si no ocurre podemos tomar una subsucesión de polígonos contenida en la original de manera que se cumpla lo dicho.

Ahora supongamos que existe  $\delta$  con  $0 < \delta < \tau$  e infinitos polígonos  $\Gamma_n$  tales que los puntos  $p$  y  $q$  están unidos por un camino  $g_n$  en  $X_n$  con  $d(g_n([0, 1]), \Gamma_n) \geq \delta$ . Sabemos que dentro del conjunto de los índices, para un  $n$  suficiente grande, se tiene que  $\|f_n(x) - f(x)\| < \delta/2$  para todo  $x \in \mathbb{S}^1$ , entonces  $d(g_n([0, 1]), C) > \delta/2$ . Esto implica que el camino  $g_n$  une  $p$  y  $q$  sin intersectar a  $C$ , pero habíamos supuesto que  $p$  y  $q$  están en diferentes componentes de  $\mathbb{R}^2 - C$ . Como consecuencia, aplicando el Lema 3.6, tenemos que

existen infinitos polígonos  $\Gamma_n$  tales que poseen una cuerda  $\gamma_n$  en  $X_n \cup \Gamma_n$ , de longitud  $\delta_n < \tau$ , la cual separa a  $X_n$  en dos componentes conexas con  $p$  y  $q$  en componentes distintas y tal que  $\delta_n$  tiende a 0.

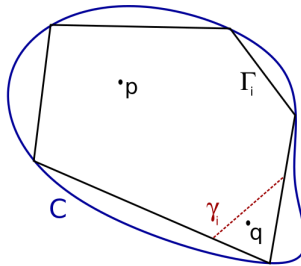


Figura 3.16: Polígono con dicha propiedad.

Tomamos los sub-índices de los polígonos que cumplen lo anterior y los ordenamos de forma creciente, par construir la sucesión  $\{\Gamma_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  con  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$ . Sea



$f_{n_i} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Gamma_{n_i}$  el homeomorfismo correspondiente a  $\Gamma_{n_i}$ , llamamos  $f_{n_i}(a_i)$  y  $f_{n_i}(b_i)$  a los extremos de  $\gamma_{n_i}$ . Dado que  $\delta_{n_i} \rightarrow 0$  cuando  $i \rightarrow \infty$ , tenemos que:

$$\|f_{n_i}(a_i) - f_{n_i}(b_i)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } i \rightarrow \infty$$

Como la sucesión  $\{\Gamma_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  también aproxima a  $C$ , de lo anterior deducimos:

$$\|f(a_i) - f(b_i)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } i \rightarrow \infty \text{ y entonces } \|a_i - b_i\| \rightarrow 0.$$

Ya que  $p$  y  $q$  están en distinta componente de  $X_{n_i} - \gamma_{n_i}$ , podemos suponer que  $p$  está en la componente limitada por  $\gamma_i$  y  $f_{n_i}(A_i)$ , siendo  $A_i$  el menor arco de  $\mathbb{S}^1$  entre  $a_i$  y  $b_i$ . Como  $\|a_i - b_i\| \rightarrow 0$ , tenemos que para un  $i$  lo suficientemente grande, el diámetro de dicha componente es menor que  $\tau/2$  y en consecuencia  $\|p - f_{n_i}(a_i)\| < \tau/2$ .

Luego para un  $i$  lo suficientemente grande ocurre que:

$$\|p - f(a_i)\| \leq \|p - f_{n_i}(a_i)\| + \|f_{n_i}(a_i) - f(a_i)\| < \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2} = \tau.$$

Lo que entra en contradicción con la forma en que tomamos  $p$ , pues teníamos que  $d(\{p, q, r\}, C) = \tau$ . Finalmente, podemos concluir que  $\mathbb{R}^2 - C$  tiene dos componentes conexas.  $\square$



## Capítulo 4

# Prueba vía el teorema del punto fijo de Brouwer

Este capítulo consiste en demostrar el teorema basándonos en la prueba presentada por Ryuji Maehara en el artículo [4]. Previo a los pasos más directos de la demostración, exponemos algunos resultados relevantes en topología, tales como el “teorema de extensión de Tietze” o el “teorema del punto fijo de Brouwer”, cuyas demostraciones se pueden encontrar en [6]. Estos resultados son fundamentales para desarrollar la demostración.

La prueba se dispone en dos fases. La primera consiste en usar el teorema del punto fijo de Brouwer, para probar que si  $\mathbb{R}^2 - C$  no es conexo, entonces  $C$  es la frontera de las componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 - C$ . Mientras que en la segunda construiremos una serie de caminos, con ciertas propiedades, mediante las cuales podremos concluir la demostración.

El teorema de extensión de Tietze nos va a permitir extender funciones continuas, definidas sobre espacios contenidos en otros más grandes y que cumplen ciertas propiedades. Para ello necesitamos saber que es un espacio normal y conocer el lema de Urysohn que probaremos a continuación.

**Definición 4.1.** *Un espacio topológico  $(X, \tau)$  se dice que es **normal** si dados dos subconjuntos cerrados disjuntos  $A$  y  $B$ , existen dos conjuntos abiertos disjuntos  $U$  y  $V$  tales que  $A \subset U$  y  $B \subset V$ .*

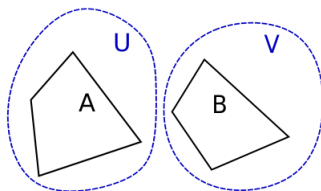


Figura 4.1

**Ejemplo.** *El plano  $\mathbb{R}^2$  con la topología usual es un espacio normal, pues todo espacio métrico es normal. El subespacio  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  de  $\mathbb{R}^2$  también lo es con la topología*

de subespacio, dado que cualquier subespacio cerrado de un espacio normal es normal (ver [11] p.100). Este último ejemplo nos será útil más adelante.

El siguiente resultado lo utilizaremos en la prueba del lema de Urysohn, que veremos a continuación.

**Lema 4.2.** Sean  $X$  un espacio topológico normal,  $A$  un cerrado de  $X$  y  $U$  un abierto con  $A \subset U$ , entonces existe un abierto  $V$  tal que

$$A \subset V \subset \bar{V} \subset U.$$

*Prueba.* Como  $X$  es normal, podemos tomar abiertos disjuntos  $V$  y  $W$  con  $A \subset V$  y  $X - U \subset W$ . Entonces tenemos que  $V \subset X - W \subset U$  y como  $X - W$  es cerrado, entonces  $\bar{V} \subset X - W$ . Luego

$$A \subset V \subset \bar{V} \subset X - W \subset U.$$

□

Ahora, veremos un resultado cuya demostración no es intuitiva.

**Lema 4.3** (Lema de Urysohn). Sean  $X$  un espacio normal y  $A, B$  subconjuntos cerrados y disjuntos. Dado un intervalo cerrado  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  existe una aplicación continua:

$$f : X \longrightarrow [a, b]$$

tal que  $f(x) = a$  para todo  $x \in A$  y  $f(x) = b$  para todo  $x \in B$ .

*Prueba.* Basta probarlo para el intervalo  $[0, 1]$  puesto que este es homeomorfo a  $[a, b]$ . La idea consiste en definir una familia de subconjuntos abiertos de  $X$  haciendo uso de su normalidad y con ellos definir la función buscada.

Tomamos  $\mathbb{Q}$  como conjunto de índices y definimos la familia de conjuntos  $\{U_q\}_{q \in \mathbb{Q}}$ . En primer lugar, tomamos  $P = \{p \in \mathbb{Q} : 0 \leq p \leq 1\}$  y construimos los conjuntos  $U_p$  con  $p \in P$  como sigue, empezamos por:

$$U_1 = X - B \\ U_0 \text{ tal que } A \subset U_0 \text{ y } \bar{U}_0 \subset U_1$$

Podemos garantizar que existe un subconjunto con las propiedades de  $U_0$ , aplicando el Lema 4.2 a los conjuntos  $A$  y  $U_1$ .

Una vez tenemos los dos primeros conjuntos definidos, vamos a definir de manera recursiva los demás  $U_p$ , para ello los ordenamos en una sucesión, donde 0 y 1 serán los primeros elementos. Ésto es posible ya que  $P$  es un conjunto numerable.

Definimos  $P_n$  como los  $n$  primeros elementos de la sucesión y suponemos que los conjuntos  $U_p$  con  $p \leq n$  están definidos con la siguiente propiedad:

$$s < t \Rightarrow \bar{U}_s \subset U_t \tag{4.1}$$

Sea  $r$  el elemento  $n + 1$  de la sucesión de tal forma que  $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$ . Debido a la forma de ordenación de  $P_{n+1}$  (inducida por el orden natural de  $\mathbb{R}$ ), existen dos números  $v$  y  $w$  en  $P_n$  tales que  $v$  es el inmediato predecesor a  $r$  y  $w$  el inmediato sucesor, ya que  $0 < r < 1$ , entonces:

$$v < w \text{ y } \bar{U}_v \subset U_w$$

Y por tanto, dado que  $X$  es normal, por el Lema 4.2 aplicado a  $\bar{U}_v$  y  $U_w$  tenemos que existe  $U$  tal que:

$$\bar{U}_v \subset U \text{ y } \bar{U} \subset U_w$$

De esta manera definimos  $U_r = U$ . Veamos que en  $P_{n+1}$  se sigue cumpliendo la propiedad (4.1). Tomamos  $p \in P_{n+1}$  tal que  $p < v$  entonces tenemos que:

$$\bar{U}_p \subset \bar{U}_v \subset U_r$$

y análogamente si tomamos  $p > w$

$$\bar{U}_r \subset \bar{U}_w \subset U_p.$$

Así pues y de forma recursiva tenemos definida la familia de conjuntos  $\{U_p\}_{p \in P}$  con la propiedad (4.1).

Tras definirlos en  $P$  vamos a extender la familia de conjuntos a todos los racionales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} U_q &= \emptyset & \text{si } q < 0 \\ U_q &= X & \text{si } q > 1 \end{aligned}$$

Es trivial ver que se sigue cumpliendo (4.1).

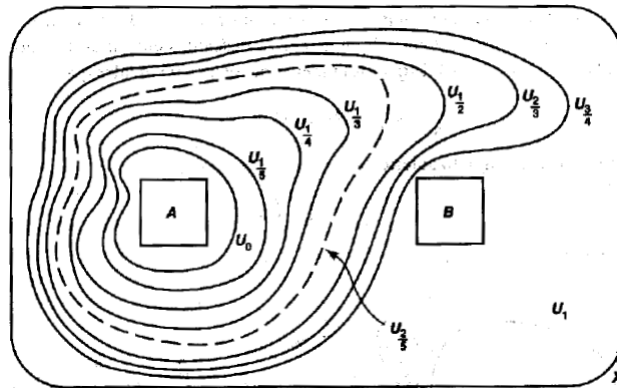


Figura 4.2: En la imagen, tomada de [6], se muestra una construcción de los conjuntos  $U_p$ .

En segundo lugar, vamos a definir una función, que más tarde veremos que es la que buscábamos. Para ello, para cada  $x \in X$ , definimos el conjunto:

$$\mathbb{Q}(x) = \{q \in \mathbb{Q} : x \in U_q\}$$

que contiene a todos los racionales mayores que 1 y ninguno menor que 0, debido a como hemos definido los conjuntos. Luego  $\mathbb{Q}(x)$  es un conjunto acotado inferiormente por un número del intervalo  $[0, 1]$  y como es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  tiene ínfimo, en  $[0, 1]$ . Entonces, podemos definir la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\rightarrow \inf \mathbb{Q}(x) \end{aligned}$$

Por último vemos que cumple los requisitos para ser la función que necesitamos. Sabemos que  $A \subset U_q$  para todo  $q \geq 0$ , por lo que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in A$ . Por otro lado, tenemos que  $B \subset U_q$  si y solo si  $q > 1$ , lo que se traduce en que  $f(x) = 1$  para todo  $x \in B$ .

Ya solo nos queda ver la continuidad, para ello debemos tener en cuenta que como consecuencia de la definición de  $f$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{si } x \in \overline{U}_r &\Rightarrow f(x) \leq r \\ \text{si } x \notin U_r &\Rightarrow f(x) \geq r \end{aligned} \tag{4.2}$$

Probaremos la continuidad de la función cuando cambiamos el espacio de llegada por  $\mathbb{R}$ . En ese caso, como  $f(X) \subseteq [0, 1]$  tenemos que  $f$  también es continua con  $[0, 1]$  como espacio de llegada. Veamos que para cada  $x \in X$  tenemos que, si tomamos un entorno  $V$  de  $f(x)$  en  $\mathbb{R}$ , podemos encontrar otro entorno  $U$  de  $x$  tal que  $f(U) \subset V$ . Todo entorno de  $f(x)$  en  $\mathbb{R}$  contiene un intervalo  $(c, d)$  al que pertenece  $f(x)$ , por lo que bastará probarlo para este tipo de intervalos. Sea por tanto  $x_0 \in X$  y  $f(x_0) \in (c, d) \subset \mathbb{R}$ , tomamos dos racionales  $s$  y  $t$  tales que:

$$c < s < f(x_0) < t < d$$

y tomamos el abierto:

$$U = U_t - \overline{U}_s.$$

Este conjunto es un entorno de  $x_0$ , ya que es abierto y contiene a  $x_0$ , porque como  $s < f(x_0)$  entonces  $x_0 \notin \overline{U}_s$  y como  $f(x_0) < t$  entonces  $x_0 \in U_t$ . Además veamos que  $f(U) \subset (c, d)$ . Sea  $x \in U$  sabemos que  $x \in U_t$  y  $x \notin \overline{U}_s$ , luego por las implicaciones (4.2) tenemos que  $s \leq f(x) \leq t$ , es decir,  $f(x) \in [s, t] \subset (c, d)$ .

Lo que demuestra que la aplicación es continua y por tanto cumple lo que queríamos.  $\square$

Tras probar éste lema estamos en disposición de enunciar y demostrar el teorema de extensión de Tietze.

**Teorema 4.4** (Teorema de extensión de Tietze). *Sean  $X$  un espacio normal y  $A$  un subespacio cerrado de  $X$ . Dada una función continua  $f : A \rightarrow [a, b]$ , existe una extensión a todo  $X$ , es decir, una función continua  $F : X \rightarrow [a, b]$  tal que  $F|_A = f$ .*

*Prueba.* La demostración consiste en construir una función en  $X$ , como límite de una sucesión de funciones en  $X$  que aproximan a  $f$  en  $A$  y por lo tanto, la función límite será igual a  $f$  en  $A$ , lo que nos dará una extensión.

En primer lugar vamos a diseñar una estrategia para definir funciones  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  tales que ajusten, de cierto modo, en  $A \subset X$  a una función continua ya definida  $f : A \rightarrow [-r, r]$  para un cierto  $r \in \mathbb{R}$  fijado. Para ello realizamos la siguiente división de  $[-r, r]$ :

$$I_1 = \left[-r, -\frac{1}{3}r\right], \quad I_2 = \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right], \quad I_3 = \left[\frac{1}{3}r, r\right]$$

Con ella construimos los conjuntos  $B = f^{-1}(I_1)$  y  $C = f^{-1}(I_3)$  y a continuación por el Lema de Urysohn podemos asegurar que existe una función continua:

$$g : X \rightarrow \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$$

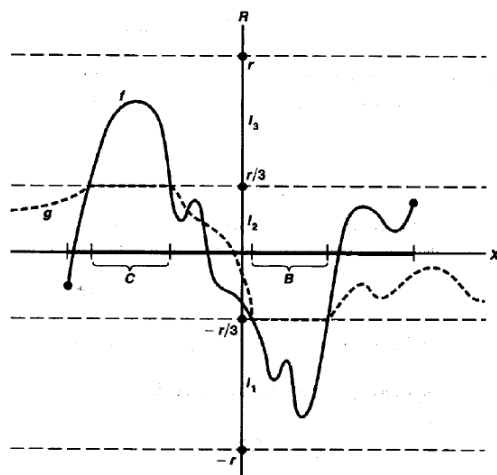


Figura 4.3: Esta imagen, tomada de [6], muestra un ejemplo de funciones  $f$  y  $g$ .

cumpliendo además que  $g(x) = -\frac{1}{3}r$  si  $x \in B$  y  $g(x) = \frac{1}{3}r$  para  $x \in C$ .

Además podemos observar que para cada  $a \in A$ , la distancia entre  $f(a)$  y  $g(a)$  está acotada, De hecho,

$$|f(a) - g(a)| \leq \frac{2}{3}r$$

como consecuencia de que:

$$\begin{aligned} \text{si } a \in B &\Rightarrow f(a), g(a) \in I_1 \\ \text{si } a \in C &\Rightarrow f(a), g(a) \in I_3 \\ \text{si } a \notin B \cup C &\Rightarrow f(a), g(a) \in I_2. \end{aligned}$$

En segundo lugar, haciendo uso de esta estrategia, vamos a construir una función que demuestre el teorema. Para facilitar la demostración lo probaremos para funciones continuas  $f : A \rightarrow [-1, 1]$ , ésto es suficiente puesto que este intervalo es homeomorfo a  $[a, b]$ . Así pues tenemos que  $f$  cumple las hipótesis para aplicar la anterior estrategia y en consecuencia podemos definir:

$$g_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$$

verificando que

$$\begin{aligned} |g_1(x)| &\leq 1/3 \text{ para todo } x \in X \\ |f(a) - g_1(a)| &\leq 2/3 \text{ para todo } a \in A \end{aligned}$$

Ahora mediante un proceso inductivo definiremos una sucesión de funciones. Tenemos  $f - g_1$  que aplica  $A$  en  $[-2/3, 2/3]$  por lo que podemos construir una función  $g_2$  tal que:

$$\begin{aligned} |g_2(x)| &\leq \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} \right) \text{ para todo } x \in X \\ |f(a) - g_1(a) - g_2(a)| &\leq \left( \frac{2}{3} \right)^2 \text{ para todo } a \in A. \end{aligned}$$

Mediante el paso inductivo, suponemos que tenemos definidas  $g_1, g_2, \dots, g_n$  tales que:

$$|f(a) - g_1(a) - g_2(a) - \cdots - g_n(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ para todo } a \in A$$

y utilizando la anterior estrategia podemos definir  $g_{n+1}$  de forma que:

$$|g_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ para todo } x \in X$$

$$|f(a) - g_1(a) - g_2(a) - \cdots - g_{n+1}(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \text{ para todo } a \in A$$

Por lo que tenemos definidas  $g_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y con ellas podemos construir la siguiente aplicación en  $X$ :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

Hemos de comprobar que está bien definida, es decir, que la suma converge. Para ello veremos que es absolutamente convergente. Por el criterio de comparación, tenemos que como:

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

y  $1/3 \sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^{n-1}$  es una serie geométrica de razón  $2/3$ , es decir, es convergente. La serie que define nuestra función es absolutamente convergente, lo que implica que es convergente y en consecuencia  $g$  está bien definida.

Para ver que  $g$  es continua es suficiente con demostrar que  $s_n(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x)$  converge uniformemente. Sea  $k \in \mathbb{N}$  con  $k > n$ :

$$\begin{aligned} |s_k(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{i=n+1}^k g_i(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{3} \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{3} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} - \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Con lo que si hacemos  $k \rightarrow \infty$  tenemos que:

$$|g(x) - s_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ para todo } x \in X.$$



Por lo que concluimos que  $s_n$  converge uniformemente a  $g$  y por tanto  $g$  es continua en  $X$ . Por la construcción de la función  $g$  sabemos que  $g(a) = f(a)$  para todo  $a \in A$  dado que:

$$|f(a) - s_n(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Para terminar la prueba debemos comprobar que la imagen de  $g$  está contenida en  $[-1, 1]$ , ésto se deduce de que  $|\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)| \leq 1/3 \sum_{n=0}^{\infty} (2/3)^n = 1$ .

Con lo que si tomamos  $F = g$  tenemos que es una extensión continua a todo  $X$  de la función  $f$  como enuncia el teorema.  $\square$

**Teorema del punto fijo de Brower para el disco.** Es un resultado conocido y de uso común en la topología y más en concreto en la topología algebraica, el cual nos asegura lo siguiente:

**Teorema 4.5.** *Sea  $f : D \rightarrow D$  una aplicación continua, donde  $D$  es un disco cerrado, entonces ésta posee al menos un punto fijo, es decir, existe un punto  $x \in D$  tal que  $f(x) = x$ .*

*Prueba.* Se puede ver en [6] p. 398-399.  $\square$

Con los anteriores resultados ya podemos desarrollar la prueba del teorema de la curva de Jordan. Comenzaremos por un lema fundamental para realizarla:

**Lema 4.6.** *Sea  $C$  una curva de Jordan, en caso de que  $\mathbb{R}^2 - C$  sea un conjunto no conexo, tenemos que cada componente tiene como frontera a  $C$ .*

*Prueba.* Por ser  $C$  acotada sabemos que existe una única componente no acotada en  $\mathbb{R}^2 - C$ , pues existe una bola que contiene a  $C$ , tal que el complementario de la bola es un conexo contenido en  $\mathbb{R}^2 - C$  y cuyo interior es acotado. Como hemos asumido que  $\mathbb{R}^2 - C$  no es conexo existirá al menos una componente acotada.

Tomamos un par de componentes conexas  $U$  (la tomamos de forma que sea acotada) y  $W$  de  $\mathbb{R}^2 - C$ , éstas son disjuntas, abiertas y arco-conexas ya que  $\mathbb{R}^2 - C$  es localmente conexo (ver Sección 2.3). En consecuencia  $W$  no interseca a  $\bar{U}$  por lo que:

$$Fr(U) = \bar{U} \cap (\overline{\mathbb{R}^2 - U}) = \bar{U} \cap (\mathbb{R}^2 - U) \subseteq C$$

luego tenemos que la frontera de cada componente está contenida en la curva de Jordan  $C$ . Queremos ver que  $Fr(U) = C$ , para ello vamos a suponer que no es así y en ese caso podemos construir una aplicación, que contradiga el teorema del punto fijo de Brower.

Supongamos que  $Fr(U) \neq C$ . Tenemos que  $Fr(U)$  está contenida en un arco cerrado  $A$  de  $C$  (espacio homeomorfo al intervalo  $[0, 1]$ ). Tomamos un punto  $p \in U$  y  $S$  una circunferencia que contenga a  $C$  en su interior y cuyo centro sea  $p$ , llamaremos  $D$  al disco cerrado que determina  $S$ .

Tenemos el arco cerrado  $A$  que como ya hemos dicho es homeomorfo a  $[0, 1]$  y vamos a ver como podemos conseguir una aplicación continua de  $D$  en  $A$ . Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow A$  un homeomorfismo que define el arco, entonces tenemos que su inversa es continua  $\alpha^{-1} : A \rightarrow [0, 1]$ . Por el teorema de extensión de Tietze, dado que  $A$  es cerrado y  $D$  normal, podemos construir una aplicación continua  $\bar{\alpha}^{-1} : D \rightarrow [0, 1]$ . Por composición de aplicaciones continuas definimos la siguiente aplicación  $r = \alpha \circ \bar{\alpha}^{-1} : D \rightarrow A$  continua, con la propiedad de que  $r(x) = id(x)$  para todo

$x \in A$  y  $r(p) \neq p$ .

A continuación construimos  $q : D \rightarrow D - \{p\}$  :

$$q(x) = \begin{cases} r(x) & \text{si } x \in \bar{U} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R}^2 - U \end{cases}$$

esta aplicación es continua por el lema de pegado. Puesto que tenemos dos aplicaciones continuas,  $r$  y la identidad, definidas sobre los conjuntos cerrados  $\bar{U}$  y  $\mathbb{R}^2 - U$  y además  $Fr(U) = \bar{U} \cap (\mathbb{R}^2 - U)$  está contenido en  $A$  donde  $r$  es la identidad. También se puede observar que  $S$  queda contenida en  $\mathbb{R}^2 - U$  y así  $q(x) = x$  para todo  $x \in S$ .

Sea  $\pi$  la proyección de  $\mathbb{R}^2 - \{p\}$  sobre  $S$  dada por:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^2 - \{p\} &\longrightarrow S \\ x &\longmapsto \frac{x - p}{\|x - p\|} + p \end{aligned}$$

y  $t$  la aplicación antipodal  $t : S \rightarrow S$ , que rota sus puntos  $\pi$  radianes, por lo que no deja ninguno fijo.

Para acabar con la prueba definimos la aplicación continua  $t \circ \pi \circ q : D \rightarrow D$  que no tiene puntos fijos, porque  $Im(t \circ \pi \circ q) \subseteq S$  y tenemos que  $t \circ \pi \circ q(x) = t \circ \pi(x) = t(x)$  para todo  $x \in S$ , por tanto contradice el teorema de punto fijo de Brouwer y hemos llegado a una contradicción.  $\square$

Además de este resultado introduciremos ahora otro más, para el que necesitamos la siguiente noción:

**Definición 4.7.** Dados  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  y  $c < d$ , llamamos **región rectangular** al subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  dado por  $E(a, b|c, d) = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ .

**Lema 4.8.** Sean  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow E(a, b|c, d)$  aplicaciones continuas tales que cumplen que

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= (a, y_0) & \alpha(1) &= (b, y_1) & c &\leq y_0, y_1 \leq d \\ \beta(0) &= (x_0, c) & \beta(1) &= (x_1, d) & a &\leq x_0, x_1 \leq b \end{aligned}$$

entonces existen  $s, t \in [0, 1]$  tales que  $\alpha(s) = \beta(t)$ .

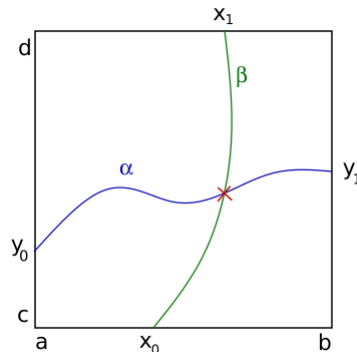


Figura 4.4: Ejemplo de caminos que cumplen el lema.

*Prueba.* Este enunciado posee una demostración basada en el uso del teorema de los valores intermedios, tal vez más conocida para el lector que la que expondremos a continuación. Pero ya que la demostración de este capítulo se basa en [4] desarrollaremos la prueba basandonos en lo que allí aparece.

El razonamiento de esta prueba consiste en la construcción de una aplicación que entre en contradicción con el teorema del punto fijo de Brouwer. Supongamos que no existen dichos  $s$  y  $t$  y definimos  $N : E(0, 1|0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$N(x, y) = \max\{|\alpha_1(x) - \beta_1(y)|, |\alpha_2(x) - \beta_2(y)|\}$$

donde  $\alpha(z) = (\alpha_1(z), \alpha_2(z))$  y  $\beta(z) = (\beta_1(z), \beta_2(z))$ .

Sabemos que  $N(x, y) > 0$  puesto que hemos supuesto que  $\alpha$  y  $\beta$  nunca toman el mismo valor y de esta forma tiene sentido definir la siguiente aplicación continua  $F : E(0, 1|0, 1) \rightarrow E(0, 1|0, 1)$ :

$$F(x, y) = \left( \frac{1}{2} \frac{\beta_1(y) - \alpha_1(x)}{N(x, y)} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \frac{\alpha_2(x) - \beta_2(y)}{N(x, y)} + \frac{1}{2} \right)$$

Una vez definida dicha aplicación veamos que no tiene puntos fijos; su imagen esta contenida en la frontera de  $E(0, 1|0, 1)$ , ya que al menos una de sus dos componentes toma el valor 1 ó 0, con lo que en caso de existir un punto fijo éste se encontraría dentro de dicho borde. En ese caso, tiene que darse al menos una de estas cuatro situaciones  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  ó  $y = 1$ , en las cuáles veremos que es imposible tener un punto fijo. Supongamos  $x = 0$ , si existiese un punto fijo se daría lo siguiente:

$$\frac{1}{2} \frac{\beta_1(y) - \alpha_1(0)}{N(0, y)} + \frac{1}{2} = 0$$

Pero ésto es imposible dado que  $\alpha_1(0) = a$ , luego

$$\frac{\beta_1(y) - \alpha_1(0)}{N(0, y)} = \frac{\beta_1(y) - a}{N(0, y)} \geq 0$$

y por tanto la parte a la izquierda de la igualdad es mayor o igual que  $\frac{1}{2}$ .

Pongámonos en el caso en que  $x = 1$ , en consecuencia debe ocurrir que:

$$\frac{1}{2} \frac{\beta_1(y) - \alpha_1(1)}{N(1, y)} + \frac{1}{2} = 1$$

Pero no puede darse ya que como  $\alpha_1(1) = b$  y  $\beta_1(y) \leq b$ , tenemos que la parte a la izquierda de la igualdad es menor o igual que  $\frac{1}{2}$ .

Mediante un razonamiento análogo para los otros casos llegamos a la conclusión de que esta aplicación no tiene puntos fijos. La región rectangular  $E(0, 1|0, 1)$  es homomomorfa a un disco cerrado en  $\mathbb{R}^2$ , por lo tanto podemos construir una aplicación continua del disco en él mismo sin puntos fijos, lo cuál es absurdo y por tanto existen  $s, t \in [0, 1]$  tal que  $\alpha(s) = \beta(t)$ .  $\square$

Por último, estamos en disposición de dar la prueba del teorema de la curva de Jordan.

**Teorema 4.9** (Teorema de la curva de Jordan). *Sea  $C$  un curva de Jordan dada por  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  entonces ésta separa al plano  $\mathbb{R}^2$  en dos componentes.*

*Prueba.* Ya sabemos que en  $\mathbb{R}^2 - C$  existe una única componente no acotada, por tanto lo que haremos será probar que también existe una única componente acotada.

El conjunto  $C$  es compacto, por tanto existen  $a, b \in C$  tales que  $\|a - b\| = \max\{\|x - y\| : x, y \in C\}$ . Podemos suponer que  $a = (-1, 0)$  y  $b = (1, 0)$ , si no fuese así, mediante la composición de una homotecia, una rotación y una traslación, obtenemos la curva  $C$  redimensionada de forma que los puntos  $a$  y  $b$  cumplan lo dicho. Si consideramos la región  $E(-1, 1 | -2, 2)$  tenemos que contiene a  $C$  y que su frontera únicamente la interseca en  $a$  y  $b$ .

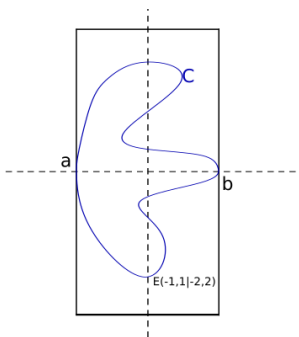


Figura 4.5: Ejemplo de curva en  $E(-1, 1 | -2, 2)$

En primer lugar, determinaremos una serie de puntos auxiliares, para poder definir caminos que junto al Lema 4.8 nos permitirán probar el resultado. Sean  $n = (0, 2)$  y  $s = (0, -2)$  los puntos centrales de los lados horizontales en el rectángulo frontera de la región  $E(-1, 1 | -2, 2)$ . El segmento que los une  $\overline{ns}$ , se interseca con los dos arcos en que  $a$  y  $b$  dividen a  $C$ . Si tomamos todos los puntos de intersección de  $\overline{ns}$  y  $C$  existe uno cuya segunda coordenada es mayor a todas las demás, al que llamaremos  $l$ , así pues denotamos  $J_n$  al arco de  $C$  que interseca a  $\overline{ns}$  en dicho punto y  $J_s$  al otro arco. Además dentro de  $J_n$  distinguimos el punto  $m$  que se define como aquél cuya segunda coordenada es la menor dentro de los puntos de intersección de  $J_n$  y  $\overline{ns}$ . Ahora, definimos  $p$  como el punto de intersección de  $J_s$  y  $\overline{ms}$  que tiene la mayor segunda coordenada y  $q$  como el punto de intersección de  $J_s$  y  $\overline{ms}$  que tiene la menor segunda coordenada (notesé que  $p$  y  $q$  pueden ser el mismo punto, lo mismo ocurre para  $m$  y  $l$ ).

Por último definimos  $z_0$  como el punto medio del segmento  $\overline{mp}$ , la siguiente imagen nos da una idea visual de la situación de cada punto.

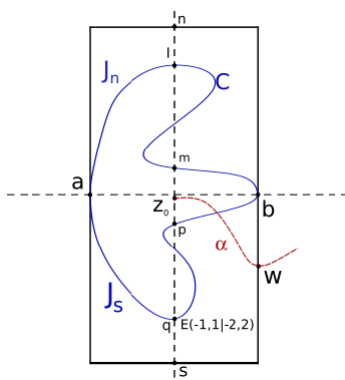


Figura 4.6: La imagen muestra la curva y los distintos puntos y caminos que hemos definido.

Fijada esta notación veamos que la componente de  $\mathbb{R}^2 - C$  que contiene a  $z_0$ , llamémosla  $U$ , es acotada y única. Si  $U$  no es acotada, como es arco-conexa (ver Sección 2.3) existe un camino que une  $z_0$  con un punto de  $U$  exterior a la región rectangular, sea  $\alpha$  dicho camino y  $w$  el primer punto del camino desde  $z_0$  que se encuentra en la frontera de  $E(-1, 1 | -2, 2)$ . Podemos tomar el subcamino de  $\alpha$  que une  $z_0$  y  $w$  lo llamaremos  $\alpha_w$  (ver Figura 4.6).

Seguidamente tomaremos un par de caminos que contradigan el Lema 4.8. Si  $w$  tiene su segunda coordenada menor que 0, tomamos  $\gamma = \overline{nl} * \widehat{lm} * \overline{mz_0} * \alpha_w * \widehat{ws}$  y  $J_s$  (donde  $\widehat{lm}$  representa el subarco de  $J_n$  que une  $l$  y  $m$  y  $\widehat{ws}$  es el menor arco de la frontera de  $E(-1, 1 | -2, 2)$  que une  $w$  y  $s$ ). El camino  $\gamma$  y el que define  $J_s$  cumplen las hipótesis del Lema 4.8, pero no tienen puntos en común, luego  $U$  debe estar acotada. En caso de que  $w$  tenga su segunda coordenada mayor que 0, tomamos  $\gamma = \overline{sz_0} * \alpha_w * \widehat{wn}$  y  $J_n$  con los que de nuevo llegamos a una contradicción análoga a la anterior. Entonces podemos concluir que  $U$  es acotada. La siguiente imagen nos da una idea de los caminos tomados.

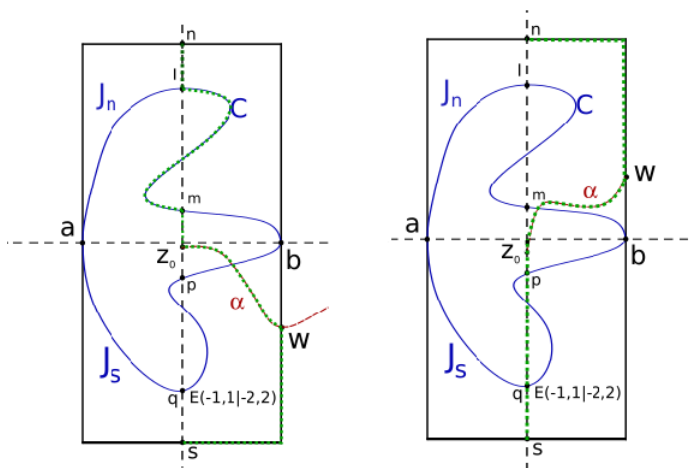


Figura 4.7: Aquí tenemos las dos opciones para el camino  $\gamma$ .

Para terminar la prueba demostraremos que  $U$  es la única componente acotada de  $\mathbb{R}^2 - C$ . Supongamos que existe otra componente acotada  $W$ , ésta tiene que estar contenida en  $E(-1, 1 | -2, 2)$  por ser acotada. Ahora vamos a demostrar que bajo estas hipótesis podemos llegar a una contradicción con el lema anterior. Sea el camino  $\beta = \overline{nl} * \widehat{lm} * \overline{mp} * \widehat{pq} * \overline{qs}$ , que no contiene ningún punto de  $W$  pues cada camino que lo compone está contenido en  $C$  o en otra componente;  $\overline{nl}$  y  $\overline{qs}$  están contenidos en la componente no acotada puesto que  $n$  y  $s$  se pueden conectar por caminos a cualquier punto exterior a  $E(-1, 1 | -2, 2)$ ,  $\widehat{lm}$  y  $\widehat{pq}$  son subarcos de  $C$  y  $\overline{mp}$  contiene a  $z_0$ , luego está contenido en  $U$ .

Tenemos que  $a$  y  $b$  no están en  $\beta$ , debido a la forma de definir los puntos y los caminos de la concatenación. Luego existe una bola abierta para cada punto, tal que no interseca a  $\beta$  y además contiene al menos un punto de  $W$ , ya que  $a, b \in \overline{W}$  por el Lema 4.6. Sean  $B_a$  y  $B_b$  dichas bolas, tomamos  $a_1 \in B_a \cap W$  y  $b_1 \in B_b \cap W$  y definimos dentro de ellas  $\widetilde{aa_1}$  y  $\widetilde{bb_1}$  como los segmentos que unen  $a$  con  $a_1$  y  $b$  con  $b_1$  respectivamente.

Dado que  $a_1, b_1 \in W$  existe un camino en  $W$  que los une  $\widetilde{a_1b_1}$  y en consecuencia podemos

construir el camino  $\overline{aa_1} * \widetilde{a_1b_1} * \overline{b_1b}$ , el cual no corta a  $\beta$  y por lo tanto entra en contradicción con el Lema 4.8, lo que implica que no existe  $W$  y por tanto  $U$  es la única componente acotada.  $\square$

## Capítulo 5

# Prueba con técnicas de topología algebraica

El capítulo trata la prueba del teorema de Jordan que aparece en [6], más concretamente en el capítulo 10. En ella se emplean resultados de la topología algebraica, todos ellos en relación con el grupo fundamental y los espacios recubridores. Cabe destacar que utilizaremos  $\mathbb{S}^2$  sin un punto, de forma continuada para probar propiedades de  $\mathbb{R}^2$ .

La prueba empieza viendo que una curva de Jordan separa al plano  $\mathbb{R}^2$ , luego se prueba que  $\mathbb{R}^2$  no deja de ser conexo al abstraerle un arco (espacio homeomorfo a  $[0, 1]$ ) y mediante los anteriores resultados llegaremos al final de la prueba demostrando el teorema de la curva de Jordan.

En primer lugar, vamos a identificar el plano  $\mathbb{R}^2$  y la esfera sin un punto  $\mathbb{S}^2 - \{p\}$ , sabemos que esto es posible mediante el homeomorfismo que define la proyección estereográfica desde el punto  $p$ . El motivo de hacerlo es que nos facilitará la prueba y nos permitirá usar ciertos resultados sobre la esfera, que veremos más adelante. El siguiente lema nos relaciona la conexión en ambos conjuntos cuando les abstraemos un subespacio compacto.

**Lema 5.1.** *Sean  $h$  el homeomorfismo de  $\mathbb{S}^2 - \{p\}$  en  $\mathbb{R}^2$ ,  $A$  un subespacio compacto de  $\mathbb{S}^2$  tal que  $p \notin A$ . Si  $\mathbb{S}^2 - A$  tiene  $n$  componentes conexas entonces  $\mathbb{R}^2 - h(A)$  también tiene  $n$  componentes conexas. Además, dada  $U$  una componente de  $\mathbb{S}^2 - A$  entonces si  $p \in U$  se tiene que  $h(U)$  es la componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 - h(A)$  y si por el contrario  $p \notin U$  tenemos que  $h(U)$  es una componente acotada de  $\mathbb{R}^2 - h(A)$ .*

*Prueba.* En primer lugar debemos ver que  $\mathbb{S}^2 - A$  y  $\mathbb{S}^2 - (A \cup \{p\})$  tienen las mismas componentes. Para ello basta probar que si  $U$  es la componente de  $\mathbb{S}^2 - A$  que contiene a  $p$ , entonces  $U - \{p\}$  es conexo en  $\mathbb{S}^2 - (A \cup \{p\})$ . Dado que  $\mathbb{S}^2 - A$  es localmente conexo, sabemos que  $U$  es abierta, lo cual nos será útil a continuación.

Supongamos que  $U - \{p\}$  no es conexo, es decir, existen dos conjuntos abiertos en  $U - \{p\}$  (y por tanto en  $\mathbb{S}^2 - (A \cup \{p\})$ ) y no triviales  $M$  y  $N$ , tales que  $M \cup N = U - \{p\}$  y  $M \cap N = \emptyset$ . Como  $p$  no está en  $A$ , podemos tomar un entorno  $W$  de  $p$  en  $\mathbb{S}^2 - A$ , que sea homeomorfo a una bola abierta en  $\mathbb{R}^2$ . Por lo que  $W$  es conexo en  $\mathbb{S}^2 - A$ , lo que implica que está contenido en  $U$ .

Sabemos  $W - \{p\}$  es conexo en  $\mathbb{S}^2 - (A \cup \{p\})$ , ya que es homeomorfo a la bola sin un punto. En consecuencia,  $W - \{p\}$  está contenido en su totalidad en  $M$  o en  $N$ . Supongamos que

$W - \{p\} \subset M$ , puesto que  $W$  es un entorno de  $p$  disjunto de  $N$ , tenemos que  $p$  no es un punto de acumulación de  $N$ . Como  $U$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{S}^2 - A$  y tanto  $M$  como  $N$  son abiertos de  $\mathbb{S}^2 - (A \cup \{p\})$ , tenemos que  $M \cup \{p\}$  y  $N$  son conjuntos abiertos en  $\mathbb{S}^2 - A$ . Además, son no triviales y cumplen que  $(M \cup \{p\}) \cup N = U$  y  $(M \cup \{p\}) \cap N = \emptyset$  lo cual es absurdo ya que  $U$  es conexo.

Veamos ahora la correspondencia entre componentes conexas. Si consideramos  $\{U_\alpha\}$  la familia de componentes conexas de  $\mathbb{S}^2 - A$  podemos definir una nueva familia de conjuntos  $V_\alpha = h(U_\alpha - \{p\})$ . Las componentes  $U_\alpha$  son conexas, disjuntas y abiertas, ésto se debe a que  $\mathbb{S}^2 - A$  es localmente conexo. En consecuencia y por ser  $h$  homeomorfismo los conjuntos  $V_\alpha$  son conexas, disjuntos y abiertos en  $\mathbb{R}^2 - h(A)$  y  $\mathbb{R}^2 - h(A) = \cup_\alpha V_\alpha$ , lo que implica que son sus componentes conexas (Ver Sección 2.3), es decir, ambos conjuntos tienen el mismo número de componentes.

Por último, veremos que si  $U_p$  es la componente conexa de  $\mathbb{S}^2 - A$  que contiene a  $p$  entonces su imagen por  $h$  es la única componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 - h(A)$ . Como  $A$  es compacto,  $h(A)$  también, por lo que  $h(A)$  es cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^2$ . Esto implica que  $\mathbb{R}^2 - h(A)$  tiene una única componente no acotada, puesto que podemos definir una bola cerrada de tal manera que  $h(A)$  este contenida en su interior que es acotado y el exterior es conexo en  $\mathbb{R}^2 - h(A)$ .

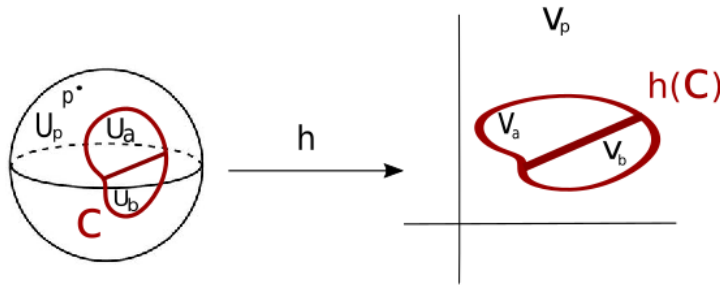


Figura 5.1: Homeomorfismo  $h : \mathbb{S}^2 - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^2$

Ahora si observamos el conjunto  $\mathbb{S}^2 - U_p$  vemos que es compacto en  $\mathbb{S}^2$ , ya que es un subespacio cerrado de  $\mathbb{S}^2$  y éste es compacto. En consecuencia  $h(\mathbb{S}^2 - U_p)$  es cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^2$  lo que quiere decir que  $h(U_p)$  es la componente no acotada.  $\square$

Nuestro siguiente objetivo consiste en demostrar que una curva de Jordan separa el plano en al menos dos componentes conexas. Para ello necesitaremos de un par de resultados de la topología algebraica.

**Lema 5.2** (Lema de homotopía nula). Sean  $a$  y  $b$  dos puntos en  $\mathbb{S}^2$ ,  $A$  un espacio compacto y

$$k : A \rightarrow \mathbb{S}^2 - \{a, b\}$$

una aplicación continua. Si  $a$  y  $b$  pertenecen a la misma componente de  $\mathbb{S}^2 - k(A)$  entonces  $k$  es homotópicamente nula.

*Prueba.* Como ya sabemos podemos establecer un homeomorfismo  $h$  de  $\mathbb{S}^2 - \{b\}$  en  $\mathbb{R}^2$  y además podemos hacer que  $h(a) = (0, 0)$  (basta con componer el homeomorfismo que ya teníamos con la traslación del plano que lleva la imagen de  $a$  en  $(0, 0)$ ). A partir de esto podemos reescribir el enunciado del lema de la siguiente forma:



Sean  $A$  un espacio compacto y  $g : A \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  una aplicación continua. Si  $(0,0)$  está en la componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 - g(A)$ , entonces  $g$  es homotópicamente nula.

Como  $g(A)$  es imagen de un compacto por una aplicación continua en  $\mathbb{R}^2$ , está acotado y podemos tomar una bola  $B$ , centrada en  $(0,0)$  y con el radio lo suficientemente grande para que contenga a  $g(A)$ . A continuación tomamos un punto  $p \in \mathbb{R}^2$  que esté fuera de la bola y por tanto en la componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 - g(A)$  al igual que  $(0,0)$ .

Sabemos que  $\mathbb{R}^2$  es localmente conexo por caminos, por lo que  $\mathbb{R}^2 - g(A)$  lo es con la topología de subespacio. Así pues, podemos afirmar que las componentes conexas y las conexas por caminos son las mismas en  $\mathbb{R}^2 - g(A)$  (ver propiedades de componentes conexas en el capítulo 2).

Por último, vamos a ver que la aplicación constante  $e_{-p}$  que lleva todos los elementos de  $A$  en  $-p$  y  $g$  son homótopas. Hemos visto que podemos tomar un camino  $\alpha$  que una  $(0,0)$  con  $p$  y a partir de él definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} G : A \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \\ (a, t) &\longrightarrow g(a) - \alpha(t) \end{aligned}$$

que está bien definida ya que el camino  $\alpha$  y la imagen de  $g$  son disjuntos, y es continua por ser una resta de aplicaciones continuas. Por lo que  $G$  es una homotopía entre  $g$  y la aplicación  $g_1$  definida por  $g_1(a) = g(a) - p$  para todo  $a \in A$ .

De nuevo definimos otra homotopía entre  $g_1$  y la aplicación constante  $e_{-p}$  dada por  $e_{-p}(a) = -p$ :

$$\begin{aligned} H : A \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \\ (a, t) &\longrightarrow t \cdot g(a) - p \end{aligned}$$

Se observa que  $H$  nunca toma el valor  $(0,0)$  ya que  $t \cdot g(a)$  está contenido en la bola  $B$  y  $-p$  no (pues  $p$  no está en  $B$ , cuyo centro es  $(0,0)$ ), además es continua por ser suma y producto de continuas. En conclusión,  $g \sim g_1 \sim e_{-p}$  (donde  $\sim$  representa la relación de homotopía entre funciones).  $\square$

Además del anterior resultado vamos a probar otro, que relaciona grupos fundamentales de espacios topológicos con los de algunos de sus subespacios y que necesitaremos más adelante.

**Lema 5.3.** Sean  $X$  un espacio topológico con  $X = U \cup V$  donde  $U$  y  $V$  son abiertos en  $X$  y  $x_0 \in U \cap V$  tal que este conjunto es conexo por caminos. Si tomamos las inclusiones de  $U$  y  $V$  en  $X$

$$\begin{aligned} i : U &\rightarrow X, & j : V &\rightarrow X \\ u &\rightarrow u & v &\rightarrow v \end{aligned}$$

entonces las imágenes de los homomorfismo inducidos por  $i$  y  $j$ :

$$\begin{aligned} i_* : \pi_1(U, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_0), & j_* : \pi_1(V, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [\gamma] &\longrightarrow [i \circ \gamma] & [\delta] &\longrightarrow [j \circ \delta] \end{aligned}$$

generan  $\pi_1(X, x_0)$ .

*Prueba.* Dicho de otra manera este resultado afirma que bajo estas hipótesis todo lazo  $l$  en  $X$  con base en  $x_0$  es homótopo a uno de la forma  $s_1 * s_2 * \cdots * s_n$  donde cada  $s_i$  es un lazo con base en  $x_0$  y contenido totalmente en  $U$  o en  $V$ .

En primer lugar, vamos a dividir el intervalo  $[0, 1]$  en subintervalos que van a estar determinados por  $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$  de tal manera que  $l([a_i, a_{i+1}])$  esté contenido totalmente en  $U$  o en  $V$  y  $l(a_i) \in U \cap V$ . Esto es posible puesto que por el lema del número de Lebesgue, aplicado en  $[0, 1]$  con el recubrimiento  $\{l^{-1}(U), l^{-1}(V)\}$ , podemos tomar una subdivisión  $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$  que cumpla que  $l([b_i, b_{i+1}])$  está contenido en  $U$  o  $V$ , en caso de que exista un  $b_i$  tal que  $l(b_i) \notin U \cap V$  lo podemos eliminar obteniendo una nueva división uniendo los intervalos  $[b_{i-1}, b_i]$  y  $[b_i, b_{i+1}]$  en uno. Esto es debido a que si  $l(b_i) \in U - V$  entonces  $l([b_{i-1}, b_i])$  y  $l([b_i, b_{i+1}])$  están contenidos en  $U$  y de manera análoga si  $l(b_i) \in V$ . Así repitiendo, un número finito de veces, el último proceso de eliminar los  $b_i$  que no cumplen nuestras necesidades, obtendremos la división que queríamos.

Sea  $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$  una división de  $[0, 1]$  con la propiedad antes descrita. Definimos los subcaminos  $l_i$  en  $X$  como la composición  $l \circ h_i$ , donde  $h_i$  es un homeomorfismo de  $[0, 1]$  en  $[a_{i-1}, a_i]$ , tal que  $h_i(0) = a_{i-1}$  y  $h_i(1) = a_i$ , por lo que tenemos que:

$$[l] = [l_1] * [l_2] * \cdots * [l_n]$$

Por último, utilizaremos la hipótesis de que  $U \cap V$  es conexo por caminos. Entonces podemos tomar caminos  $\alpha_i$  de tal forma que unen  $x_0$  con  $l(a_i)$ , para  $\alpha_0$  y  $\alpha_n$  tomaremos el camino constante en  $x_0$  y a partir de ellos definiremos los siguientes lazos con base en  $x_0$ :

$$s_i = (\alpha_{i-1} * l_i) * \alpha_i^{-1}$$

con lo que podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} [l] &= [l_1] * [l_2] * \cdots * [l_n] \\ &= [(\alpha_0 * l_1) * \alpha_1^{-1}] * [(\alpha_1 * l_2) * \alpha_2^{-1}] * \cdots * [(\alpha_{n-1} * l_n) * \alpha_n^{-1}] \\ &= [s_1] * [s_2] * \cdots * [s_n]. \end{aligned}$$

□

Ahora veremos como una curva cerrada simple separa al plano  $\mathbb{R}^2$ , es decir, al sustraérsela el nuevo conjunto deja de ser conexo.

**Teorema 5.4** (Teorema de separación de Jordan). *Sea  $C$  una curva de Jordan dada por  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , entonces  $C$  separa el plano en al menos dos componentes.*

*Prueba.* Por el Lema 5.1 sabemos que este teorema es equivalente a probar:

Si  $C$  es un subespacio homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{S}^2$ , entonces  $\mathbb{S}^2 - C$  tiene al menos dos componentes conexas.

Como  $\mathbb{S}^2$  es localmente conexo por caminos,  $\mathbb{S}^2 - C$  también lo es con la topología de subespacio, por tanto las componentes conexas por caminos y las conexas son las mismas. Para probar el teorema supondremos que  $\mathbb{S}^2 - C$  es conexo por caminos y así llegaremos a una contradicción. En primer lugar, vamos describir el conjunto de manera que podamos aplicar el Lema 5.3. Por ser  $C$  una curva cerrada simple la podemos ver como la unión de dos arcos  $A_1$  y  $A_2$  tales que solo tienen en común los puntos  $p$  y  $q$ .

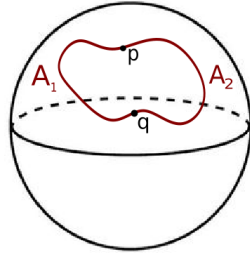


Figura 5.2: Se ve como  $p$  y  $q$  separan la curva en dos arcos.

De esta manera podemos definir los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{S}^2 - \{p, q\} \\ U &= \mathbb{S}^2 - A_1 \\ V &= \mathbb{S}^2 - A_2 \end{aligned}$$

Se observa que  $X = U \cup V$  y  $U \cap V = \mathbb{S}^2 - C$ , además hemos supuesto que este último es conexo por caminos y entonces estamos bajo las hipótesis del lema que queríamos, por lo que podemos calcular el grupo fundamental de  $X$ , en términos de los grupos fundamentales de  $U$  y  $V$ .

Tomamos  $x_0 \in U \cap V$  y ahora vamos a demostrar que  $i_* : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ , el homomorfismo inducido por la inclusión de  $U$  en  $X$ , es el homomorfismo nulo. Sean  $l$  un lazo en  $U$  con base en  $x_0$  y  $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  la aplicación dada por  $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ , entonces  $l$  induce una aplicación  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow U$  tal que  $h \circ p = l$  (ver Lema 2.9, ya que  $p$  es aplicación cociente).

Si tomamos  $i \circ h : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ , podemos observar que  $i \circ h(\mathbb{S}^1)$  no corta a  $A_1$  por como está definido. Esto implica que  $p$  y  $q$  están en la misma componente conexa de  $\mathbb{S}^2 - i \circ h(\mathbb{S}^1)$ , puesto que existe un arco que los une. Por el Lema 5.2 de homotopía nula  $i \circ h$  es homotópicamente nula, lo cual implica que  $(i \circ h)_*$  es el homomorfismo nulo (ver Proposición 2.24). Pero como:

$$(i \circ h)_*([p]) = [i \circ h \circ p] = [i \circ l] = i_*([l])$$

luego  $i_*$  es el homomorfismo trivial. De forma análoga  $j_* : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ , el homomorfismo inducido por la inclusión de  $V$  en  $X$ , es trivial.

Como conclusión, aplicando el Lema 5.3 tenemos que  $\pi_1(X, x_0)$  es el grupo trivial, pero esto no es posible porque  $X$  es homeomorfo al cilindro cerrado cuyo grupo fundamental es  $\mathbb{Z}$ . Por lo que  $\mathbb{S}^2 - C$  tiene al menos dos componentes.  $\square$

Para acabar el capítulo tenemos que demostrar que  $C$  tan solo separa el plano en dos componentes conexas. Veremos antes de ello algunos resultados, que nos ayudaran en la demostración en cuestión. El siguiente lema nos recuerda al Lema 5.3 puesto que el objetivo es el mismo, pero las hipótesis varían.

**Lema 5.5.** *Sea  $X$  un espacio topológico con  $X = U \cup V$  donde  $U$  y  $V$  son dos abiertos de  $X$ , tal que la intersección  $U \cap V$  se puede escribir como  $A \cup B$  siendo  $A$  y  $B$  abiertos disjuntos de  $X$ . Tomamos  $a \in A$  y  $b \in B$  y supongamos que existen un camino  $\alpha$  en  $U$  que une  $a$  con  $b$  y un camino  $\beta$  en  $V$  que une  $b$  con  $a$ . Definimos  $l = \alpha * \beta$ .*

- $\langle [l] \rangle$  es un subgrupo cíclico infinito de  $\pi_1(X, a)$ .

- Si  $\pi_1(X, a)$  es un grupo cíclico infinito, entonces está generado por  $[l]$ .
- Sea un elemento  $a' \in A$  y supongamos que existen un camino  $\gamma$  en  $U$  que va de  $a$  hasta  $a'$  y un camino  $\delta$  en  $V$  que va de  $a'$  hasta  $a$ . Definimos el lazo  $s = \gamma * \delta$ , entonces  $\langle [l] \rangle$  y  $\langle [s] \rangle$  solo tienen en común el elemento neutro.

*Prueba.* En primer lugar construiremos un espacio recubridor  $E$  de  $X$  mediante copias de  $U$  y  $V$ . Definamos por tanto los siguientes conjuntos:

$$U \times \{2n\} \text{ y } V \times \{2n + 1\} \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}$$

Con todos ellos construimos:

$$Y = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U \times \{2n\} \right) \cup \left( \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V \times \{2n + 1\} \right)$$

Y definimos  $E$  como el cociente de  $Y$  al identificar:

$$\begin{aligned} (x, 2n) &\text{ con } (x, 2n - 1) && \text{ para todo } x \in A \\ (x, 2n) &\text{ con } (x, 2n + 1) && \text{ para todo } x \in B \end{aligned}$$

Con estos conjuntos podemos definir las siguientes aplicaciones:  $\pi : Y \rightarrow E$  la aplicación cociente y  $\rho : Y \rightarrow X$  la proyección dada por  $\rho(x, m) = x$ .

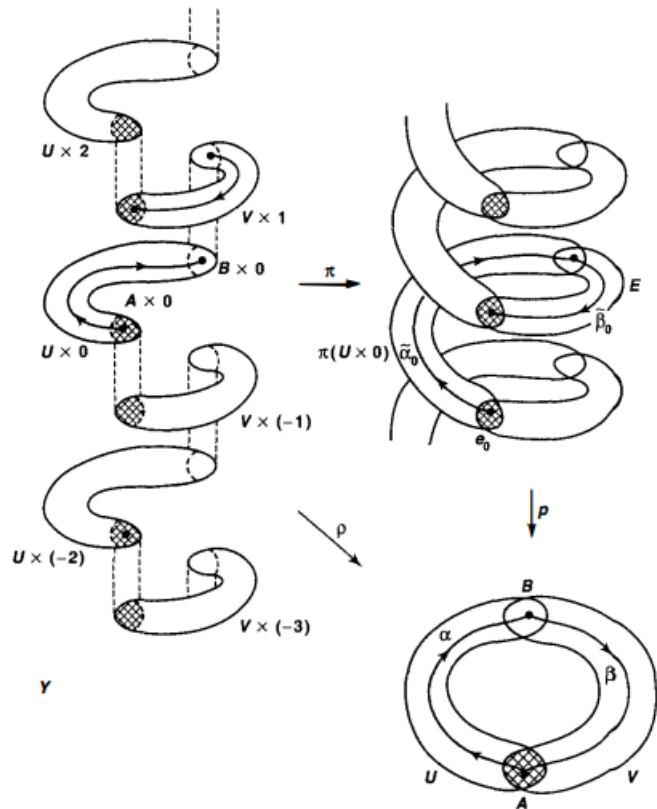


Figura 5.3: Esquema con las distintas aplicaciones y como se relacionan (imagen tomada de [6] p. 439).

Aplicando el Lema 2.9, tenemos que la aplicación  $\rho$  induce otra aplicación continua  $p : E \rightarrow X$  tal que  $\rho = p \circ \pi$ . Veamos que  $p$  es una aplicación recubridora y por tanto  $E$  es un espacio recubridor de  $X$ .

La aplicación  $p$  es sobreyectiva, puesto que  $\rho$  lo es, pues dado un  $x_0 \in X$  existe un  $(x_0, n) \in Y$  con  $\rho((x_0, n)) = x_0$ . Luego  $p(\pi((x_0, n))) = x_0$ , es decir,  $p$  es sobreyectiva como queríamos ver. Nos queda por demostrar que para cada  $x \in X$  existe un entorno que lo contiene y cuya imagen inversa es la unión de conjuntos abiertos disjuntos, tales que cuando restringimos  $p$  a cualquiera de ellos la aplicación es homeomorfismo. Tomaremos  $U$  y  $V$  y veremos que cumplen lo que necesitamos.

Para ello necesitaremos probar que  $\pi$  es una aplicación abierta, como  $Y$  es unión de los conjuntos  $\{U \times \{2n\}\}$  y  $\{V \times \{2n+1\}\}$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , que son abiertos y disjuntos, basta probarlo para los abiertos contenidos en ellos. Sea  $W \times \{2n_0\}$  un abierto de  $U \times \{2n_0\}$  con  $n_0 \in \mathbb{Z}$  y  $W$  abierto en  $U$ , tenemos que:

$$\pi^{-1}(\pi(W \times \{2n_0\})) = (W \times \{2n_0\}) \cup ((W \cap B) \times \{2n_0 + 1\}) \cup ((W \cap A) \times \{2n_0 - 1\})$$

este conjunto es la unión de tres abiertos en  $Y$  y por tanto es abierto en  $Y$ . Por la definición de topología cociente  $\pi(W \times \{2n_0\})$  es abierto en  $E$ , lo que prueba que  $\pi$  es abierta.

Tenemos que  $p^{-1}(U) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} \pi(U \times \{2n\})$  donde cada conjunto  $\pi(U \times \{2n\})$  es abierto en  $E$  y disjunto de los demás. Si restringimos  $p$  a uno de estos conjuntos  $\pi(U \times \{2n_0\})$ , tenemos una aplicación igual a la siguiente composición:

$$\pi(U \times \{2n_0\}) \xrightarrow{\pi^{-1}|_{\pi(U \times \{2n_0\})}} U \times \{2n_0\} \xrightarrow{\rho} U$$

luego  $p$  es la composición de dos homeomorfismos. La aplicación  $\pi^{-1}|_{\pi(U \times \{2n_0\})}$  es homeomorfismo, pues sabemos que  $\pi|_{U \times \{2n_0\}} : U \times \{2n_0\} \rightarrow \pi(U \times \{2n_0\})$  es continua, sobreyectiva y abierta, con ver que es inyectiva tendríamos que es homeomorfismo y por tanto su inversa también. Para ver que es inyectiva basta observar que dados dos elementos distintos de  $U \times \{2n_0\}$  no les identificamos para construir el espacio cociente  $E$ . Por otro lado  $\rho|_{U \times \{2n_0\}}$  también es homeomorfismo ya que es biyectiva y su inversa es continua. Podemos concluir que  $p|_{\pi(U \times \{2n_0\})} : \pi(U \times \{2n_0\}) \rightarrow U$  es homeomorfismo y por tanto  $p$  es aplicación recubridora.

En segundo lugar, vamos a definir unos levantamientos del lazo  $l$  que nos permitirán demostrar el primer punto de nuestro lema. Consideramos la familia de puntos  $p^{-1}(a) = \{e_n : e_n = \pi(a, 2n)\}$ , definimos  $\tilde{l}_n = \tilde{\alpha}_n * \tilde{\beta}_n$  un levantamiento de  $l$ , donde:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_n(s) &= \pi((\alpha(s), 2n)) \\ \tilde{\beta}_n(s) &= \pi((\beta(s), 2n+1)). \end{aligned}$$

Observemos que el levantamiento  $\tilde{l}_n$  empieza en  $e_n$  y termina en  $e_{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_n(0) &= \pi((a, 2n)) = e_n & \tilde{\alpha}_n(1) &= \pi((b, 2n)) \\ \tilde{\beta}_n(0) &= \pi((b, 2n+1)) & \tilde{\beta}_n(1) &= \pi((a, 2n+1)) = \pi((a, 2n+2)) = e_{n+1}. \end{aligned}$$

Ahora probaremos que  $[l]$  genera un subgrupo infinito de  $\pi_1(X, a)$ . Para ello es suficiente probar que  $[l]^m$  no es el elemento neutro para cualquier  $m \in \mathbb{Z}^+$ . Observemos que:

$$\tilde{r} = \tilde{l}_0 * \tilde{l}_1 * \cdots * \tilde{l}_{m-1}$$

es un levantamiento de:

$$r = l * l * \overset{m}{\dots} * l.$$

Teniendo en cuenta que la correspondencia del levantamiento (ver Definición 2.29), con  $e_0$  como punto de inicio de los levantamientos, es una aplicación bien definida:

$$\phi : \pi_1(X, a) \longrightarrow p^{-1}(a)$$

y que  $\tilde{r}$  termina en  $e_m$ , podemos concluir que  $[r] = [l]^m$  no es el elemento neutro.

Para probar el segundo punto utilizaremos de nuevo la correspondencia del levantamiento. Esta aplicación es sobreyectiva, porque como hemos visto  $\phi([l]^m) = e_m$  y de forma similar se demuestra que  $\phi([l^{-1}]^m) = e_{-m}$ . Si tomamos  $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$  tenemos que la siguiente aplicación es inyectiva (ver Proposición 2.30):

$$\begin{aligned} \Phi : \pi_1(X, a)/H &\rightarrow p^{-1}(a) \\ [\eta] &\longrightarrow \phi([\eta]). \end{aligned}$$

Además también es sobreyectiva, ya que lo era  $\phi$  y los elementos con distinta imagen pertenecen a distinta clase de  $\pi_1(X, a)/H$ . Por tanto  $\Phi$  es biyectiva, lo que implica que  $H$  es trivial, ya que el cociente de un grupo cíclico infinito por un subgrupo no trivial es finito y  $p^{-1}(a)$  no lo es. En consecuencia  $\Phi = \phi$  y como  $\phi$  lleva el subgrupo  $\langle [l] \rangle$  en  $p^{-1}(a)$  tenemos que  $\langle [l] \rangle = \pi_1(X, a)$ .

En último lugar, probaremos el tercer punto. Sea  $s = \gamma * \delta$ , como  $\gamma$  está en  $U$  y  $\delta$  en  $V$  podemos definir los siguientes levantamientos:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(s) &= \pi(\gamma(s), 0) \\ \tilde{\delta}(s) &= \pi(\delta(s), -1) \end{aligned}$$

de  $\gamma$  y  $\delta$ . Así  $\tilde{s} = \tilde{\gamma} * \tilde{\delta}$  es levantamiento de  $s$  y además es una lazo en  $E$  con base en  $e_0$ , pues:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(0) &= \pi(\gamma(0), 0) = \pi(a, 0) = e_0 \\ \tilde{\gamma}(1) &= \pi(\gamma(1), 0) = \pi(a', 0) \\ \tilde{\delta}(0) &= \pi(\delta(0), -1) = \pi(a', -1) \\ \tilde{\delta}(1) &= \pi(\delta(1), -1) = \pi(a, -1) = e_0. \end{aligned}$$

Podemos concluir que los subgrupos  $\langle [l] \rangle$  y  $\langle [s] \rangle$  solo tienen en común el elemento neutro, ya que  $\phi([l]^m) = e_m$ , mientras que  $\phi([s]^m) = e_0$  puesto que su levantamiento es un lazo. Luego  $[l]^m \neq [s]^k$  para todo  $m$  y  $k$  enteros no nulos.  $\square$

A continuación veremos el lema de “no separación”, que nos dice que un arco no desconecta a  $\mathbb{S}^2$ . Este nos servirá para demostrar nuestro objetivo final.

**Lema 5.6.** *Sea  $A$  un arco en  $\mathbb{S}^2$ , entonces  $\mathbb{S}^2 - A$  es conexo.*

*Prueba.* Lo primero que haremos será probar el siguiente enunciado:

Sean  $A_1$  y  $A_2$  dos arcos tales que su unión es  $A$  y su intersección es un único punto  $p$ . Si tomamos  $a, b \in \mathbb{S}^2 - A$  de tal forma que pueden unirse mediante un camino, tanto en  $\mathbb{S}^2 - A_1$  como en  $\mathbb{S}^2 - A_2$ . Entonces también se pueden unir en  $\mathbb{S}^2 - A$ .

Supongamos que  $a$  y  $b$  no se pueden unir mediante un camino en  $\mathbb{S}^2 - A$ , a continuación describiremos los conjuntos en términos del Lema 5.5 para llegar a una contradicción. Sean:

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{S}^2 - \{p\} \\ U &= \mathbb{S}^2 - A_1 \\ V &= \mathbb{S}^2 - A_2 \end{aligned}$$

se puede observar que  $X = U \cup V$  y  $U \cap V = \mathbb{S}^2 - A$ , por tanto  $U \cap V$  no es conexo por caminos. Sean  $M$  la componente conexa por caminos de  $U \cap V$  que contiene al punto  $a$  y  $N$  la unión de las restantes componentes conexas de  $U \cap V$ . Estos conjuntos  $M$  y  $N$  son abiertos en  $\mathbb{S}^2 - A$ , puesto que este último es localmente conexo por caminos, también lo son en  $X$ , pues  $\mathbb{S}^2 - A$  es un subconjunto abierto de él.

Como  $a$  y  $b$  se pueden conectar por caminos tanto en  $U$  como en  $V$ , podemos aplicar el Lema 5.5 y concluir que  $\pi_1(X, a)$  contiene un subgrupo cíclico infinito, pero esto es absurdo puesto que sabemos que la esfera sin un punto es homeomorfa al plano cuyo grupo fundamental es el trivial.

Ahora utilizaremos el anterior enunciado para probar lo que queríamos. Sabemos que  $\mathbb{S}^2 - A$  es localmente conexo por caminos, por tanto las componentes conexas y las conexas por caminos son las mismas. Entonces bastará probar que  $\mathbb{S}^2 - A$  es conexo por caminos.

Supongamos que existen dos puntos  $a$  y  $b$  tales que no es posible unirlos por un camino en  $\mathbb{S}^2 - A$ . Teniendo en cuenta el enunciado anterior y tomando un homeomorfismo  $h : [0, 1] \rightarrow A$  que determina el arco, podemos ver el arco como la unión de  $A_1 = h([0, 1/2])$  y  $A_2 = h([1/2, 1])$  y entonces  $a$  y  $b$  no se pueden conectar por caminos en uno de estos dos espacios  $\mathbb{S}^2 - A_1$  o  $\mathbb{S}^2 - A_2$ . Supongamos que es en el primero y llamamos  $I_1 = [0, 1/2]$ .

Podemos repetir el argumento y dividir  $A_1$  en  $B_1 = h([0, 1/4])$  y  $B_2 = h([1/4, 1/2])$  de tal manera que en uno de los dos nuevos espacios  $\mathbb{S}^2 - B_1$  o  $\mathbb{S}^2 - B_2$  no se pueden unir  $a$  y  $b$ . De esta forma y repitiendo indefinidamente el proceso encontramos una sucesión de subintervalos de  $[0, 1]$ , de tal manera que:

$$[0, 1] \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

y donde se cumple que  $a$  y  $b$  no se pueden unir mediante un camino en  $\mathbb{S}^2 - h(I_i)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

Esta familia de subintervalos cumple que para cualquier subcolección finita, la intersección es no vacía, lo cual al ser  $[0, 1]$  compacto implica que  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i \neq \emptyset$  (ver [6] p.193). Como la intersección de todos los intervalos es no vacía y la longitud de  $I_i$  es  $(1/2)^i$ , es decir, tiende a 0 cuando  $i \rightarrow \infty$ , tenemos que  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i = \{x\}$  donde  $x$  es un elemento del intervalo  $[0, 1]$ .

Finalmente consideramos el espacio  $\mathbb{S}^2 - h(x)$ , éste es homeomorfo al plano y por tanto es conexo por caminos, lo cual implica que en  $\mathbb{S}^2 - h(x)$  existe un camino  $\alpha$ , uniendo  $a$  y  $b$ . La imagen de  $\alpha$  es compacta y por lo tanto cerrada, por lo que existe un entorno  $V$  de  $h(x)$  que no interseca a la imagen de  $\alpha$ . Al ser  $h$  continua existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $i > m$  tenemos que  $h(I_i) \subset V$ . Ésto es absurdo ya que entonces  $\alpha$  es un camino en  $\mathbb{S}^2 - h(I_i)$  y esto entra en contradicción con la propiedad que tienen todos los  $I_i$  de que en  $\mathbb{S}^2 - h(I_i)$  no existe un camino que una  $a$  con  $b$ .  $\square$

Tras los resultados ya expuestos estamos en condiciones de probar el Teorema de la curva de Jordan. Veamos entonces que  $C$  tan solo separa al plano en dos componentes.

**Teorema 5.7** (Teorema de la curva de Jordan). *Sea  $C$  una curva de Jordan, dada por el homeomorfismo  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , entonces  $C$  separa al plano en dos componentes conexas.*

*Prueba.* Probaremos que  $\mathbb{S}^2 - h(C)$  tiene un máximo de dos componentes, donde  $h$  es el homeomorfismo que lleva el plano  $\mathbb{R}^2$  en la esfera sin un punto, que no está en  $h(C)$ . Con esto probaríamos que  $C$  divide al plano en un máximo de dos componentes y junto al Teorema 5.4 (Teorema de separación de Jordan) habremos probado nuestro enunciado.

Sea  $A = h(C)$  lo podemos ver como la unión de dos arcos  $A_1$  y  $A_2$ , tales que se intersecan en dos puntos  $\{p, q\}$  y así definimos:

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{S}^2 - \{p, q\} \\ U &= \mathbb{S}^2 - A_1 \\ V &= \mathbb{S}^2 - A_2 \end{aligned}$$

donde  $X = U \cup V$  y  $U \cap V = \mathbb{S}^2 - A$  y por tanto  $U \cap V$  no es conexo.

Supongamos que  $U \cap V$  tiene más de dos componentes, sean  $M$  y  $N$  dos de ellas y  $\tilde{N}$  la unión del resto. Dichos conjuntos son abiertos en  $\mathbb{S}^2 - A$  por ser este localmente conexo. Tomemos un punto en cada uno de los anteriores conjuntos  $m \in M$ ,  $n \in N$  y  $\tilde{n} \in \tilde{N}$ . Además sabemos que  $\mathbb{S}^2 - A_1$  y  $\mathbb{S}^2 - A_2$  son conexos por caminos luego podemos tomar caminos en  $U$ :

$$\begin{aligned} \alpha &\text{ que une } m \text{ con } \tilde{n} \\ \gamma &\text{ que une } m \text{ con } n \end{aligned}$$

y los siguientes en  $V$ :

$$\begin{aligned} \beta &\text{ que une } \tilde{n} \text{ con } m \\ \delta &\text{ que une } n \text{ con } m \end{aligned}$$

y con ellos construir los lazos en  $X$  con base en  $m$  dados por:

$$l = \alpha * \beta \text{ y } s = \gamma * \delta.$$

Podemos ver  $U \cap V$  como la unión de los abiertos  $M \cup N$  y  $\tilde{N}$ , con lo que el Lema 5.5 implicaría que  $[l]$  no es el elemento neutro de  $\pi_1(X, m)$ . Por otro lado si lo vemos como la unión de  $M$  y  $N \cup \tilde{N}$  tenemos que  $[s]$  no es el elemento neutro de  $\pi_1(X, m)$ . Como  $\pi_1(X, m)$  es  $\mathbb{Z}$ ,  $[l]^r = [s]^k$  para ciertos  $r, k \in \mathbb{Z}$  no nulos, lo cual entra en contradicción con el tercer punto del Lema 5.5.  $\square$



# Bibliografía

- [1] F. Etayo, *Elementos de Topología Algebraica: Grupo Fundamental y Clasificación de Superficies*. Ed. Sanz y Torres, 2016.
- [2] C. Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. Ed. Gauthier-Villars, Paris 1887, vol. 3, 587-594.
- [3] C. Kosniowski, *Topología Algebraica*. Ed. Reverté S.A., 1992.
- [4] R. Maehara, *The Jordan Curve Theorem Via the Brouwer Fixed Point Theorem*. Amer. Math. Monthly 91 (1984), n° 10, 641-643.
- [5] E. E. Moise, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Ed. Springer-Verlag, 1977.
- [6] J.R. Munkres, *Topología*. Ed. Pearson Educación S.A., 2002.
- [7] R. Schwartz, *The Cut Locus and the Jordan Curve Theorem*. 2015. Disponible en <https://www.math.brown.edu/~res/mathnotes.html>
- [8] C. Thomassen, *The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces*. Amer. Math. Monthly 99 (1992), n° 2, 116-130.
- [9] H. Tverberg, *A proof of the Jordan curve theorem*. Bulletin of the London Mathematical Society (1980), n° 12, 34-38.
- [10] O. Veblen, *Theory on plane curves in non-metrical analysis situs*. Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), n° 1, 83-98.
- [11] S. Willard, *General Topology*. Ed. Dover Publications, 2004.
- [12] <https://es.wikipedia.org>