

(H)ISTO É MATEMÁTICA – HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

*Ana Patrícia Martins¹, António Ribeiro¹, Helena Gomes¹, Luís Menezes¹,
Liliana Ferreira²*

¹ Escola Superior de Educação de Viseu (IPV) e CI&DEI, amartins@esev.ipv.pt

² Escola Superior de Educação de Viseu (IPV) e CI&DEI, ribeiro@esev.ipv.pt

³ Escola Superior de Educação de Viseu (IPV) e CI&DEI, hgomes@esev.ipv.pt

⁴ Escola Superior de Educação de Viseu (IPV) e CI&DEI, menezes@esev.ipv.pt

⁵ Inteligência a cores – Centro de Estudos, liliana.moranguita@hotmail.com

Resumo: O estudo da História da Matemática favorece a visão da matemática como um produto da atividade humana, em estreita ligação com o desenvolvimento da sociedade, e a sua integração no ensino da matemática contribui para o desenvolvimento de atitudes positivas dos estudantes em relação à disciplina. Para além disso, tarefas matemáticas com um contexto histórico contribuem para o desenvolvimento de capacidades transversais, como a comunicação e o raciocínio matemáticos. O recurso à história da matemática no ensino da disciplina constitui, também, uma forma inovadora de os professores ensinarem Matemática. Reconhecemos que, em Portugal, são ainda escassos os recursos didáticos que privilegiam o uso da história da matemática no ensino da disciplina, ao nível dos 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico (CEB) e também na formação de professores para os primeiros anos de escolaridade. Assim, pretendemos, com este projeto, estudar as potencialidades da integração da história da matemática no ensino da Matemática, tanto no ensino básico como na formação inicial de professores que ensinam Matemática aos primeiros anos. Para isso, começamos por estudar as conceções de professores dos 2.º e 3.º CEB e de futuros professores dos 1.º e 2.º CEB sobre a importância da história da matemática no ensino da disciplina. Procuramos também, numa lógica de desenvolvimento curricular, elaborar tarefas matemáticas baseadas em contextos da história da matemática para a sala de aula, com inclusão de orientações didáticas para a sua exploração.

Palavras-Chave: História da Matemática, ensino da Matemática, tarefas matemáticas, conceções de professores e de futuros professores.

Introdução

A visão de que a matemática é uma coleção de axiomas, teoremas e demonstrações destaca a sua estrutura estável, base fundamental de outras ciências. Ao mesmo tempo, favorece o entendimento da matemática como uma arte, um artifício à parte da imperfeição humana e só acessível a poucos. Seguindo esta perspetiva, o ensino da

Matemática tende a ser caracterizado pela lógica formal e pelo predomínio da razão absoluta. O conhecimento da forma como foi sendo “feita” matemática, dos seus avanços e recuos, a ligação ao desenvolvimento científico, tecnológico, social e cultural dos povos, mostra outra faceta sobre o conhecimento matemático, como um produto de uma herança cultural. Em termos de ensino, esta outra perspectiva é bastante relevante e poderosa, aproximando os estudantes da matemática, porque a torna mais significativa e “humana” (Arcavi & Tzanakis, 2002; Clark, Kjeldsen, Schorcht, Tzanakis, & Wang, 2016; D’Ambrosio, 1994; Davis & Hersh, 1995; Katz, 2000).

A importância da história da matemática no ensino da Matemática

A importância da história da matemática no ensino da Matemática tem vindo a ser defendida desde há muito tempo (Arcavi & Tzanakis, 2002; Clark *et al.*, 2016). Em meados do século XIX, Augustus De Morgan (1806-1871), matemático e presidente da *London Mathematical Society*, reflete sobre as vantagens do uso de uma abordagem histórica, como forma de combater uma Matemática que se estava a tornar “mecânica”, não privilegiando o “trabalhar o raciocínio e exercitar o pensamento”. Já na altura, considera urgente mudar a visão que os estudantes tinham dessa ciência, sublinhando que “colocam os dados de um problema num moinho e esperam que o resultado saia pronto do outro lado” (De Morgan, 1865, p. 11).

Já no início dos anos 2000, Arcavi e Tzanakis (2002) reveem os diversos argumentos a favor e contra a integração da história da matemática no ensino da disciplina, apontados por diversos autores, e desenvolvem cada um deles. Como objeções de ordem filosófica, elencam o seguinte: *i)* a história não é matemática; *ii)* a história pode ser “tortuosa” e confundir mais do que esclarecer; *iii)* os estudantes podem não possuir uma consciência histórica-temporal nem uma formação adequada em história; *iv)* muitos estudantes não gostam de História, pelo que não gostarão também de história da matemática, ou pelo menos não a considerarão menos desinteressante do que a própria Matemática; *v)* a matemática evoluiu para transformar numa rotina os problemas difíceis, pelo que não se justifica olhar para o passado; e *vi)* a história pode suscitar “o chauvinismo cultural e

o nacionalismo paroquial”. No que respeita a objeções de ordem prática a essa integração, os autores revistos por Arcavi e Tzanakis (2002) apontam: *i)* falta de tempo; *ii)* falta de recursos didáticos; *iii)* falta de formação em história da matemática por parte dos professores; e *iv)* dificuldade de integrar a componente da história da matemática na avaliação da disciplina. Ainda segundo Arcavi e Tzanakis (2002), os argumentos a favor desse uso podem ser sistematizados em cinco grandes domínios:

1. *Sobre o ensino da Matemática*, consideram que a história da matemática: *i)* mostra como os conceitos matemáticos surgem e as dificuldades no seu aperfeiçoamento, desmontando a ideia de produtos “polidos”; *ii)* proporciona um vasto repertório de questões relevantes para a motivação e envolvimento dos estudantes no trabalho matemático; *iii)* torna mais clara a inter-relação de diferentes domínios matemáticos e da Matemática com outras disciplinas; e *iv)* permite que os estudantes desenvolvam outras capacidades para além do domínio matemático, como ler, escrever, procurar recursos, documentar, discutir, analisar e “falar sobre” matemática.
2. *Sobre a natureza da matemática e da atividade matemática*, identificam como razões a favor: *i)* questões relativas a conteúdos matemáticos (a dúvida, o erro, argumentações intuitivas e abordagens alternativas fazem parte da atividade matemática); e *ii)* questões relativas à forma (a matemática evolui também na sua notação, terminologia, métodos computacionais e representações).
3. *Sobre a formação didática de professores*, os benefícios apontados são: *i)* conhecimento de dificuldades que surgiram na história e podem também surgir na sala de aula; *ii)* compreender a dificuldade de determinado conceito e adequação ao seu ensino num certo nível de escolaridade; *iii)* tomar consciência do processo criativo de “fazer” matemática; e *iv)* enriquecer o repertório de explicações, exemplos e abordagens alternativas a um conceito ou na resolução de problemas.
4. *Sobre a predisposição afetiva em relação à matemática* são apontadas as seguintes vantagens: *i)* a matemática é um corpo de conhecimento humano em constante evolução e não um sistema de regras rígidas; *ii)* reconhecer o valor de

ser persistente, de investigar, de questionar e de desenvolver formas criativas de pensamento; e *iii*) não ficar desencorajado pela falha, pelo erro ou incerteza, mas reconhecer o seu mérito na atividade matemática.

5. *Sobre o apreciar a matemática* como um empreendimento cultural humano, os autores indicam o reconhecimento: *i*) de que os desenvolvimentos matemáticos são determinados, em grande parte, por fatores sociais e culturais, mas que podem também surgir por razões intrínsecas à própria matemática; e *ii*) de que a matemática na sua forma moderna é um produto de uma cultura particular, a cultura ocidental.

História da Matemática no contexto internacional

Em 1969, o *National Council of Teachers of Mathematics*, instituição de relevo internacional no que respeita ao ensino da Matemática, dedicou o tema do 31.º *yearbook* à integração da História na aula de Matemática (NCTM, 1969). Desde então, ao nível internacional, o potencial da história da matemática no ensino da Matemática tem vindo a ser reconhecido e o seu uso tem sido crescente (Clark et al., 2016; Katz, 2000). Em 1972, a *International Commission on Mathematics Instruction* (ICMI) aprovou a criação do *International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics* (HPM), cuja atividade, desde então, tem sido bastante relevante. O impulso para a criação deste grupo assentou no princípio de que a História da Matemática “apareceu como uma «terapia para o dogmatismo», considerando a matemática não só como uma linguagem, mas também como uma atividade humana” (Clark et al., 2016).

Como eventos internacionais na área, destacam-se os encontros do grupo HPM, realizados a cada quatro anos, a par dos encontros da *International Commission on Mathematics Education* (ICME), iniciados em 1984, com a publicação de atas (em 1996, realizou-se em Portugal, Braga); os encontros da *European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*, também desde 1984; e a participação do HPM no *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME), desde 2009.

Duas referências ímpares no que respeita ao conhecimento de bibliografia e atividades relevantes para o uso da história da matemática no ensino da Matemática, a nível internacional, são Clark et al. (2016) e Fasanelli e Fauvel (2006), os primeiros autores, a partir de 2000, que destacamos no que se segue; a segunda referência relativa a contributos anteriores a 2000. Clark et al. (2016) fazem um levantamento bibliográfico bastante amplo de trabalhos no âmbito da história no ensino da Matemática, onde se incluem livros, atas de conferências e encontros (com hiperligações, sempre que disponíveis), teses de doutoramento, artigos em revistas científicas, artigos em obras coletivas, artigos em conferências internacionais e material de pesquisa, com destaque para os disponíveis *on-line*.

Ao nível de jornais e *newsletters* internacionais, destaca-se o jornal *on-line*, de acesso livre, *Convergence: Where Mathematics, History and Teaching Interact*, publicado desde 2004 pela *Mathematical Association of America* e a *HPM Newsletter*, com tiragem trienal desde 1980 e disponível *on-line* há pouco mais de uma década, na *página web do grupo HPM*. Como revista internacional, destaca-se o *Bulletin of the British Society for the History of Mathematics*, que privilegia a investigação em história da matemática e incentiva o seu uso em educação matemática.

História da Matemática no contexto nacional

Em Portugal, não existe uma longa tradição de investigação do uso da história da matemática na educação matemática. Parecem, também, ser escassos os recursos didáticos que apontam para o uso da história da matemática no ensino da disciplina, ao nível dos 2.º e 3.º CEB e também na formação de professores para os primeiros anos de escolaridade. Apesar de existirem algumas teses de mestrado, teses de doutoramento e também relatórios finais de estágio do ensino básico realizados no âmbito da conclusão de cursos de licenciatura, ao nível do 2.º ciclo (Ferreira, 2019; Pedroso, 2013; Sousa, 2013), do 3.º ciclo do ensino básico (Gonçalves, 2011), dos 3.º ao 12.º anos de escolaridade (Neves, 2007), na formação inicial de professores do ensino básico (Jorge, 2008), e ainda outros contributos fora do âmbito académico, (Martinho & Gil, 2014;

Pinto, 2011; Ponte, 1992; Ponte & Guimarães, 2014), não são abundantes os recursos para aplicação em sala de aula.

Ao nível dos manuais escolares de Matemática para o ensino básico, predominam notas históricas pontuais, não privilegiando a abordagem de conteúdos matemáticos numa perspetiva histórica (Ferreira, 2019; Gil, 2012).

O projeto (H)ISTO É MATEMÁTICA

Partindo das ideias anteriores, (H)ISTO É MATEMÁTICA é um projeto de investigação que se está a iniciar e que pretende estudar as potencialidades do uso da História da Matemática no ensino da Matemática, tanto no ensino básico como na formação inicial de professores que ensinam Matemática aos primeiros anos. O título do projeto, “(H)ISTO É MATEMÁTICA”, pretende realçar a ideia da história da matemática tornada presente no ensino e na aprendizagem da Matemática.

Com este projeto, pretendemos, em primeiro lugar, conhecer as conceções de professores dos 2.º e 3.º CEB e de futuros professores dos 1.º e 2.º CEB sobre as potencialidades da história da matemática no ensino da Matemática. O estudo dos últimos justifica-se pelo facto de a ESEV ter, na sua oferta formativa, cursos de mestrado em ensino nesses níveis. Em segundo lugar, procuramos elaborar tarefas matemáticas, baseadas em contextos da história da matemática para a sala de aula, com inclusão de orientações didáticas para a sua exploração. Por último, procuramos compreender o impacto, no ensino e na aprendizagem da Matemática, de tarefas matemáticas baseadas em contextos da história da matemática.

Trabalho já realizado

No âmbito do mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e Ensino de Matemática e de Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico, ministrado na ESEV, Ferreira (2019) realizou um estudo numa turma do 6.º ano de escolaridade de uma escola do distrito de Viseu, com o objetivo de aferir formas de trabalho na sala de aula de Matemática que recorressem a episódios da história da matemática. O estudo procurou identificar

i) tópicos matemáticos do 6.º ano de escolaridade que permitem uma abordagem do ponto de vista da história da matemática, privilegiando o desenvolvimento da generalização de ideias matemáticas; *ii)* exemplos existentes nos manuais escolares do 6.º ano de escolaridade, ao nível da abordagem histórica de conceitos matemáticos, que privilegiam o desenvolvimento da generalização de ideias matemáticas; e *iii)* estratégias de generalização mobilizadas pelos alunos na resolução de tarefas matemáticas envolvendo episódios da história da matemática.

Foram desenhadas e implementadas quatro tarefas matemáticas, nos domínios de Álgebra (sequências e regularidades), Geometria e Medida (sólidos geométricos e área do círculo) e Números e Operações (crivo de Eratóstenes), sendo que neste texto se apresentam apenas duas tarefas, “Sequências e Regularidades. O contributo grego” (anexo 1) e “Relação de Euler. O contributo de Euler” (anexo 2). No que se segue, apenas se desenvolve sobre a implementação da primeira.

A tarefa *Sequências e Regularidades* foi realizada numa turma constituída por 23 alunos, dos quais 6 já tinham tido uma retenção no seu percurso escolar. Apesar de se mostrarem recetivos a propostas de trabalho que se distanciavam do trabalho usual em sala de aula, evidenciavam pouca autonomia e prolongavam para além do tempo usual a resolução de tarefas. A tarefa destaca uma das características mais curiosas da Matemática pitagórica, os números figurados, em particular os números triangulares e os números quadrados. A proposta permite desenvolver a generalização de ideias matemáticas, isto porque os alunos têm de ser capazes de encontrar a lei de formação de uma sequência parcialmente conhecida.

Foi possível categorizar diferentes estratégias nas resoluções dos alunos, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), as quais evidenciam diferentes graus de complexidade. A estratégia de representação e contagem permitiu o recurso à representação pictórica de termos, onde se evidencia o uso de contagens (figura 1).

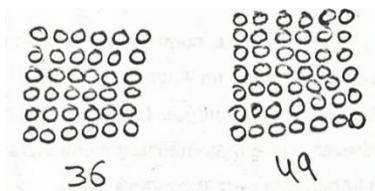


Figura 1. Estratégia de representação e contagem

A estratégia de decomposição de termos favoreceu o estabelecer de relações entre os termos e as suas posições e a identificação de uma lei de formação, ou termo geral, a qual permitiu determinar termos de ordens distantes (figura 2).

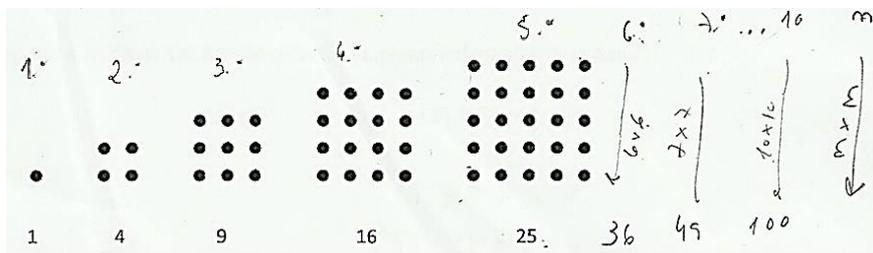


Figura 2. Estratégia de decomposição de termos (lei de formação)

A estratégia aditiva (figura 3), com recurso à recursividade, possibilitou a descoberta de termos próximos, mas dificultou a determinação de termos distantes.

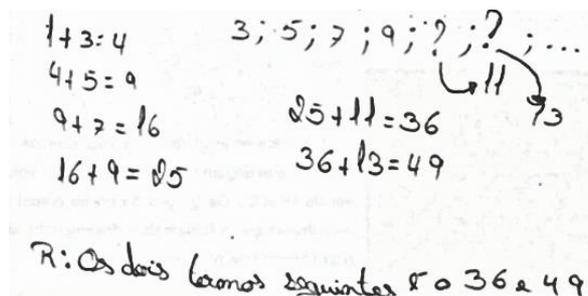


Figura 3. Estratégia aditiva com recurso à recursividade

Ao compararem as estratégias representadas nas figuras 2 e 3, os alunos tomaram consciência da forma mais vantajosa para determinar termos próximos ou distantes de uma sequência. Houve, ainda, alunos que recorreram à estratégia do objeto inteiro, apesar do raciocínio usado estar incorreto (figura 4).

Handwritten mathematical work showing a sequence of calculations:

$$5+5$$
$$5^2 \text{ termo} = 25$$
$$25+25=50$$

Figura 4. Estratégia do objeto inteiro

A exploração da conjectura errada de que o 10.º termo é o dobro do 5.º termo promoveu aprendizagens significativas, envolvendo os conceitos de teste, refutação, conjectura e generalização.

Considerações finais

A utilização da história da matemática no ensino da Matemática, potenciando aprendizagens com significado, é um desafio para todos os professores de Matemática e para as instituições de formação de professores, tanto ao nível da sua conceptualização como da produção de recursos. É este o desafio que procuramos abraçar, apoiados naquilo que é o conhecimento atual da investigação, nacional e internacional. Para isso, procuramos conhecer o terreno e saber o que temos nesta área. Depois, produzir recursos para o ensino da Matemática apoiado na história da matemática, avaliando a sua viabilidade no ensino e o seu impacto na aprendizagem dos alunos.

Referências

- Arcavi, A., Tzanakis, C. (2002). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer.
- Clark, K., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., Tzanakis, C., & Wang, X. (2016). History of mathematics in mathematics education. Recent developments. In L. Radford, F. Furinghetti, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the ICME Satellite Meeting – HPM 2016* (pp. 135-179). Montpellier: IREN de Montpellier.
- D’Ambrosio, U. (1994). Cultural framing of mathematics teaching and learning. In R. Biebler, R. W. Scholz, R. Strässer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 443-455). Dordrecht: Kluwer.
- Davis, P. J. & Hersch, R. (1995). *A Experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

- De Morgan, A. (1865). Speech of Professor De Morgan, President, at the first meeting of the London Mathematical Society. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1 (1866), 1-11.
- Fasanelli, F., & Fauvel, J. (2006). History of the international study group on the relations between the history and pedagogy of mathematics: The first 25 years 1976–2000. In F. Furinghetti, S. Kaisjer, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings HPM 2004 & ESU* (pp. x-xxviii). Iraklion: University of Crete, Greece.
- Ferreira, L. (2019). *A generalização de ideias matemática no 6.º ano de escolaridade em tarefas que recorrem a episódios da História da Matemática* (Relatório Final de Estágio de licenciatura não publicado). Escola Superior de Educação de Viseu, Viseu.
- Gil, P. (2012). *A história da matemática no fomento de uma cultura de argumentação em sala de aula* (Tese de doutoramento não publicada). Universidade do Minho, Minho. Obtido de <http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/25355>
- Gonçalves, I. (2011). *Os Problemas da Matemática O seu papel na Matemática e nas aulas de Matemática* (Tese de doutoramento não publicada). Universidade da Madeira, Funchal. Obtido de <https://digituma.uma.pt/handle/10400.13/559>
- Jorge, F. (2008). *Formação Inicial de Professores do Ensino Básico:Um percurso centrado na história da matemática* (Tese de doutoramento não publicada). Universidade de Aveiro, Aveiro. Obtido de <http://ria.ua.pt/handle/10773/1455>
- Katz, V. J., Ed. (2000). *Using history to teach mathematics: An international perspective*. New York, NY: Cambridge University Press.
- Martinho, M. H., & Gil, P. D. B. (2014). O professor e o desenvolvimento da capacidade de argumentação: Equações do 2.º grau na Antiga Babilónia com alunos do 9.º ano. In J. P. da Ponte (Org.), *Práticas profissionais de professores de Matemática* (pp. 313-340). Lisboa: Universidade de Lisboa.
- NCTM. (1969). *Historical topics for the mathematics classroom*. Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics (31st NCTM Yearbook, reprinted 1989).
- Neves, E. (2007). *Episódios da história da matemática para o ensino*. Lisboa: FCUL, Departamento de Matemática
- Pedroso, H. (2013). *A aprendizagem da matemática com recurso à história: uma proposta pedagógica para o 5.º ano* (Relatório de Estágio de mestrado não publicado), Universidade de Lisboa - Instituto de Educação, Lisboa. Obtido de <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/10303>
- Pinto, H. (2011). *A história da matemática na sala de aula*. Lisboa: Associação Ludus.
- Ponte, J.; Branco, N.; Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento
- Ponte, J. P., & Guimarães, H. (2014). Notes for a history of the teaching of algebra. In A. Karp, & G. Schubring (Eds.), *Handbook on the history of mathematics education* (pp. 459-472). New York: Springer.
- Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, 3(2), 3-8.

Sousa, L. (2013). *Números reais: história e didática* (Tese de mestrado não publicada), Universidade de Lisboa, Lisboa. Obtido de <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/9383>

Anexo 1 – Tarefa Sequências e Regularidades

Sequências e regularidades - O contributo grego



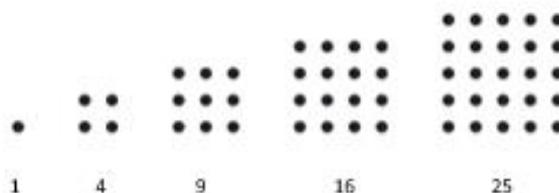
A matemática, como a conhecemos, teve parte da sua origem na Antiga Grécia por volta do século VI a.C.. Os gregos foram os primeiros a reconhecer que a matemática desempenhava um papel importante para o conhecimento.

Este povo não dispunha de símbolos próprios para representar os números. Usavam o alfabeto para esse efeito (as nove primeiras letras para os nove primeiros números, as nove seguintes para os nove primeiros múltiplos de 10, etc.), o que não era muito prático. Talvez, por esta razão, atribuísem formas aos números, que hoje designamos por *números figurados*.

1	α	10	ι	100	ρ
2	β	20	κ	200	σ
3	γ	30	λ	300	τ
4	δ	40	μ	400	υ
5	ε	50	ν	500	φ
6	Ϛ	60	ξ	600	χ
7	ζ	70	ο	700	ψ
8	η	80	π	800	ω
9	θ	90	ι	900	Ϙ

Os números figurados são aglomerados de pontos dispostos em formas geométricas.

1. Observa os primeiros 5 termos da sequência dos números quadrados.



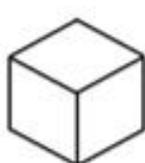
- 1.1. Indica os dois termos seguintes da sequência anterior. Utiliza palavras, esquemas ou cálculos para justificares a tua resposta.
- 1.2. Descobre o 10.º número quadrado. Explica como pensaste, através de palavras, esquemas ou cálculos.
- 1.3. Como podes descobrir qualquer número quadrado? Justifica a tua resposta.

Anexo 2 – Tarefa *Relação de Euler*

Relação de Euler O contributo de Euler

Leonhard Euler (1707 – 1783) foi um matemático e físico suíço de grande prestígio. Atualmente, Euler é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos e os seus interesses abarcavam quase todos os aspetos da matemática nos campos da Geometria, da Trigonometria, do Cálculo, das equações diferenciais e da Teoria dos números.

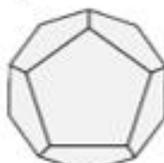
Em 1750, Euler dedicou-se ao estudo de prismas e pirâmides e identificou uma regularidade nos poliedros convexos, em particular nos que se seguem.



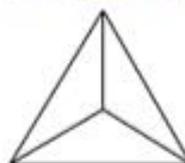
A



B



C



D



E

Parte I

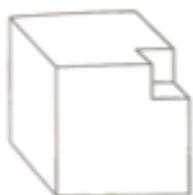
1. Observa as faces dos poliedros acima. O que concluis?
2. Preenche a tabela seguinte e descobre uma regularidade nos poliedros anteriores. Podes usar os modelos distribuídos.

Poliedro	N.º de faces (F)	N.º de vértices (V)	N.º de faces + n.º de vértices (F+V)	N.º de arestas (A)
A				
B				
C				
D				
E				

Parte II

3. Identifica os sólidos que conheces.

4. Investiga se essa relação se verifica nos poliedros que te são apresentados. Regista as tuas conclusões



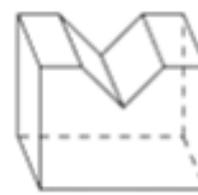
A



B



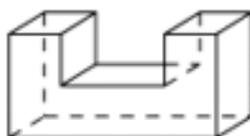
C



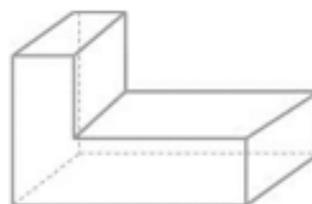
D



E



F



G



H



I



J