アドバーズ・セレクションと最適貸付契約

その他のタイトル	Optimal Banking Contracts with a Continuum of Types
著者	宇惠 勝也
雑誌名	關西大學商學論集
巻	58
号	1
ページ	55-71
発行年	2013-06-25
URL	http://hdl.handle.net/10112/00018767

アドバース・セレクションと最適貸付契約

宇 恵 勝 也

概要

本稿では，銀行が企業と貸付契約を締結する際に，すでに企業が私的情報を保有している状況における最適契約設計の問題を分析した．最も効率的なタイプの企業の借入額は自らのファーストベストの水準に一致するが，このタイプ以外の企業の借入額は自らのファーストベストの水準を下回るという意味で一種の信用割当を受ける．また，最も非効率的なタイプの企業は留保効用に等しい効用を得るに過ぎないが，しかし，このタイプ以外の企業は留保効用を上回る情報レントを獲得する．しかも，このレントは自分より非効率的なタイプの借入額に関する増加関数となることから，そのレントを節約するために借入額に歪みが生じ，信用割当が発生するのである．

キーワード：貸付，信用割当，私的情報，アドバース・セレクション，最適契約設計

1　はじめに

本稿では，銀行が企業と貸付契約を締結する際に，すでに企業が私的情報を保有している状況，すなわちアドバース・セレクション（adverse selection）の状況における最適契約設計の問題を分析する[1]．アドバース・セレクションは，金融市場においてはごく自然に生じる現象である．実際，貸手は通常，借手ほどには借手のプロジェクトのリスク・リターン特性について多くを知っているわけではない．資金の貸手は中古車の買手と同じ立場にいるのであり，貸手は借手のプロジェクトの「品質」を完全には知らないのである．この情報の非対称性の故に，プロジェクトへの投資資金の配分に非効率性が生じる恐れがある．中古車のケースと同様，こうした非効率性は，「良質」のプロジェクトが十分な信用供与を受けられずに「売れ残る」という形をとる可能性がある．このタイプの非効率性は一般に，信用割当（credit rationing）と呼ばれる．信用割当に関しては今や数多くの文献があるが，代表的な研究としては，Jaffee and Modigliani（1969），Smith（1972），Jaffee and Russell（1976），Keaton（1979），Fried and Howitt（1980），Stiglitz and Weiss（1981），Blackwell and Santomero（1982），Bester

[1] 本稿では，宇惠（2010，第2章）における企業のタイプが2種類のモデルを，それが連続変数のモデルへと拡張したモデルを構成し，分析している．なお，連続変数のモデルの取扱いについては，Bolton and Dewatripont（2005, Chapter 2），伊藤（2003，第1章），Fudenberg and Tirole（1991，Chapter 7），Laffont（1989, Chapter 10）を参照．

(1985)，De Meza and Webb (1987) を挙げることができる[2].

本稿のモデルでは，それぞれ異なる私的情報を保有する企業を異なるタイプ（type）に分類し，銀行と企業の利害に関連したすべての情報は，タイプの違いによって記述しつくされているという仮定を置く．この仮定の下，借手のタイプが連続変数であるケースについて分析し，どのような形で信用割当が生じ得るかを明らかにする．

このモデルは，(i) 契約設計者としての銀行は単一の主体である，(ii) 銀行は一つの企業と契約を結ぶ（または複数の企業が存在するが，それらの活動は互いに独立で，個別に契約を結んでも一般性を失わない)，(iii) いったん契約が設計されたならばそれが後に変更されることはない（すなわち，銀行は契約にコミットできる)，という状況を扱う．

本稿の構成は，以下の通りである．まず第2節で，モデルの基本的な設定を説明する．次いで第3節では，前節のモデルを分析するのに先立って，仮に企業のタイプが私的情報ではなく銀行にも知られているようなケース，すなわち対称情報のケースを考察する．第4節では，メカニズム理論の基本定理である表明原理が，第2節のモデルにおいて成り立つことを確認する．第5節では，表明原理を用いて銀行の直面する問題を制約付き最大化問題として定式化した後，誘因両立的なメカニズムの特徴付け，すなわち遂行問題の考察を行う．第6節では，前節の分析に基づいて銀行の直面する問題を整理し，最適解を導出して，その含意を検討する．その際，第3節で考察した対称情報のケースでの結果をベンチマークとして用いる．最後に第7節では，本稿の分析を通して得られた主要な結果を要約する．

2　モデルの基本的設定

ある地域経済の貸付市場において独占的な立場にある銀行が，企業と貸付契約を結ぶ状況を考えよう．なお，本稿のモデルにおいては，負債（預金を含む）市場は完全競争市場であると仮定する．銀行が貸し付ける金額を l という変数で表し，とり得る l の値の集合を $L \subset \mathbb{R}$ とし，$0 < \tilde{l} < +\infty$ なるある $\tilde{l}$ に対して $L = [0, \tilde{l}]$ と仮定する[3]．また，銀行が l だけの金額を貸し付けるために要する営業費用を $C(l)$ で表す．ここで，$C(\cdot)$ は2階連続微分可能で，$C(0) = 0$，$0 < l < \tilde{l}$ なる任意の l に対して $C'(l) > 0$，$C'(0) = 0$，$C'(\tilde{l}) = +\infty$，および任意の $l \geq 0$ に対して $C''(l) > 0$ を仮定する．銀行は，負債額 d の一定割合 κ を支払準備として保有し $(0 < \kappa < 1)$，残りをすべて貸付 l で運用するものとしよう．そうすると，銀行のバランスシートは，制約式

$$l = (1 - \kappa)d \quad \text{or} \quad d = \frac{l}{1 - \kappa}$$

---

[2] 信用割当に関するサーベイとしては，Jaffee and Stiglitz (1990) および Freixas and Rochet (1997, Chapter 5) を参照．

[3] $\tilde{l}$ は，銀行が設定している最大融資可能額であると解釈できる．なお，$\mathbb{R}$ は実数の集合を表す．

で表される．他方，銀行の利潤は，貸付利子率を i_L，市場利子率を i_M で示せば，

$$i_L l - i_M d - C(l)$$

となるから，この式に上の制約式を代入して d を消去し整理すれば次式を得る．

$$\begin{aligned} i_L l - i_M d - C(l) &= (1+i_L)l - \left[l + \left(\frac{i_M}{1-\kappa}\right) l + C(l) \right] \\ &= r - c(l) \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，$r = (1+i_L)l$ は，企業が銀行に対して支払う元利合計額であり，また関数

$$c(l) = l + \left(\frac{i_M}{1-\kappa}\right) l + C(l) \tag{2}$$

は，新たに定義された銀行の費用関数である[4]．費用関数 $c(l)$ は，貸付の元本額，貸付の（支払準備率を考慮した）機会費用，貸付の営業費用関数から構成される．$c(\cdot)$ は 2 階連続微分可能で，$c(0) = 0$，$0 < l < \tilde{l}$ なる任意の l に対して $c'(l) > 0$，また，

$$c'(0) = 1 + \frac{i_M}{1-\kappa} \tag{3}$$

であり，$c'(\tilde{l}) = +\infty$，および任意の $l \geq 0$ に対して $c''(l) > 0$ である．以上より，銀行の効用はその利潤，すなわち，

$$V(l, r) = r - c(l) \tag{4}$$

で与えられるものとする．

次に，企業の保有する私的情報を次のように定式化する．本稿では，企業のタイプの連続体 (continuum of types) を想定する．すなわち，可能な企業のタイプの集合（タイプ空間）を Θ で表し，$\Theta = [\theta_0, \theta_1]$，$0 < \theta_0 < \theta_1$ という実数集合上の閉区間と仮定する．以下ですぐに明らかとなるように，本稿のモデルでは，タイプ θ_0 の企業が「最も非効率的」な企業であり，θ の値が大きい企業ほど相対的に効率的な企業である．真のタイプ $\theta \in \Theta$ の値は企業のみが知っていると仮定する．Θ 上の確率密度関数を $f(\theta)$ とし，任意の $\theta \in \Theta$ に対して $f(\theta) > 0$ を仮定する．また，確率分布関数を $F(\theta)$ と記す．ただし，タイプの確率分布に関する情報は企業と銀行の共有知識とする．

タイプが θ の企業が，銀行から l だけの資金を借り入れて自らの投資プロジェクトへ投入した結果として期末に獲得する価値額（投資収益）を $b(l, \theta)$ と書き，$b(l, \theta) = \theta l$ と仮定する．つまり，企業のタイプが異なると，同じ金額の資金を借り入れても投資収益が異なってくるのである．$\theta > 0$ であるから，どのタイプにとっても借入額が多いほど投資収益は大きくなる．ま

[4] 費用関数 $c(\cdot)$ は，宇惠（2010，第 1 章・第 2 章）の費用関数と同一である．

た，$\theta > \theta', \theta' \in \Theta$ のとき，任意の $l > 0$ について $b(l,\theta) > b(l,\theta')$ かつ $b_l(l,\theta) > b_l(l,\theta')$ が成り立つことから[5]，タイプ θ の値の大きな企業の方が相対的に効率的な企業であり，同じ借入額であっても，その投資収益および限界収益はタイプ θ の方がタイプ θ' よりも高いことを示している．企業は期末に元利合計額 r を銀行に支払う．そこで，借入額が l，元利合計額が r のときのタイプ θ の企業の効用は，企業の利益

$$U(l,r,\theta) = b(l,\theta) - r = \theta l - r, \quad \forall\theta \in \Theta \tag{5}$$

で与えられるとする．

いま，銀行の効用と企業の効用の和 $V + U$ を総余剰 S と記せば，それは，

$$S(l,\theta) = V(l,r) + U(l,r,\theta) = b(l,\theta) - c(l), \quad \forall\theta \in \Theta \tag{6}$$

で表される．本稿のモデルでは，銀行の効用関数と企業の効用関数はいずれも準線形関数であると仮定している．したがって，銀行も企業も共にリスク中立的（risk neutral）であり，両者の貨幣に対する限界効用は一定でかつ等しいので，総余剰は両者の間で受渡しされる元利合計額（移転額）には依存しない．

本稿で考察する問題の経済変数は，企業の借入額 l と企業が支払う元利合計額 r である．そこで，実現可能な配分（allocation）の集合を，

$$Y = \{(l,r) : l \in L, r \in \mathbb{R}\}$$

で表し，Y の代表的要素を $y = (l,r) \in Y$ と書く．これらの変数は，裁判所のような第三者によって「観察可能かつ立証可能」（observable and verifiable）であり，故に，それらの変数に基づく形で契約を書くことができ，契約は強制可能（enforceable）と仮定する[6]．

すでに述べたように，企業のタイプは銀行にはわからない．そこで銀行は，企業に対して投資収益の見積りに関するレポートの提出を求め，その内容に応じて異なる借入額と元利合計額を指示できるような仕組みを考える．M を企業が銀行に提出することのできる可能なレポートの集合（メッセージ空間）とし，代表的要素を $m \in M$ と書く．提出された m に基づいて借入額と元利合計額を決定するルールを μ と書く．これは M から $Y = L \times \mathbb{R}$ への写像で，$\mu(m)$ はレポートが m のときの借入額と元利合計額を表す．すなわち，$\mu(m) = (\delta(m), \omega(m))$ であり，レポートが m のとき金額 $\delta(m) \in L$ の資金を借り入れるよう指示し，その資金の返済に際して金額 $\omega(m) \in \mathbb{R}$ の元利合計額を支払うよう指示する．

したがって，銀行は，契約として次の二つの選択を行うことになる．すなわち，(i) どのようなレポートを提出させるか，つまり集合 M の選択，および (ii) それぞれのレポートに対して

---

[5] ここで，$b_l(l,\theta) = \partial b(l,\theta)/\partial l$ である．

[6] 契約は，銀行または企業が契約に書かれた借入額と元利合計額から逸脱しようとしても，適切な均衡逸脱の罰則（out-of-equilibrium penalties）を用いて強制され得るものとする．

どのような借入額と元利合計額を指示するか，つまりルール $\mu(\cdot) = (\delta(\cdot), \omega(\cdot))$ の選択，の2点である．このように選ばれる (M, μ) を，以下では改めて，契約（contract）と呼ぶことにしよう[7]．

このモデルにおける意思決定のタイミングは，次のようになる．

1. 銀行が契約を選択し，企業に提示する．企業が契約を受け入れない場合には，ゲームは終了する．企業が契約を受け入れた場合には，次のステージに進む．
2. 企業は，契約に従ってメッセージ空間からレポートを選択し，銀行に提出する．
3. 銀行は，契約のルールに従って借入額と元利合計額を指示する．
4. 指示された金額を借り入れた企業は，その資金を投資プロジェクトへ投入した結果，期末において投資収益を獲得し，元利合計額を銀行へ支払う．

ここで，次の3点に注意しよう．まず，銀行は企業と貸付契約を結ぶに当たり，交渉の余地のないオファー（take-it-or-leave-it offer）をする（すなわち，すべての交渉力は銀行側にある）と仮定されている．次に，締結された契約は裁判所のような第三者によって強制されると仮定されており，したがって，契約不履行の可能性は最初から排除されている．最後に，銀行の提示する契約が企業に受け入れられなかった場合の効用値，すなわち，留保効用（reservation utility）が外生的に与えられると仮定する．具体的には，この場合には取引が行われないため，$(l, r) = (0, 0)$ に対応する効用値を手に入れると仮定する．よって，銀行と企業の効用は各々，$-c(0)$ と $b(0, \theta)$ であり，仮定によりいずれもゼロとなる．

モデルの基本的設定を締めくくるに当たり，次の二つの条件を仮定する．第1の条件は，

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}\right) \leq 0, \quad \forall \theta \in \Theta \tag{7}$$

であり，これは「単調危険率条件」（monotone hazard rate condition）と呼ばれる．ここで，危険率（hazard rate）とは $\lambda(\theta) = f(\theta)/(1 - F(\theta))$ で与えられ，企業のタイプが θ 以下の区間に含まれていないときに次の $d\theta$ の区間に含まれる条件付き確率である．したがって，危険率が単調に増加するという条件は，タイプが効率的になるほど企業が次の区間に含まれやすくなることを意味する[8]．他方，第2の条件は次の通りである．

$$\theta_0 - \frac{1}{f(\theta_0)} > c'(0) \tag{8}$$

ここで，$c'(0)$ は (3) で与えられている．条件 (8) は，条件 (7) の下でモデルの最適解が内点解となるための条件である．この条件は，市場利子率 i_M が低いほど，あるいは銀行の支払準備

[7] (M, μ) は，一般には，メカニズム（mechanism）と呼ばれる．

[8] 単調危険率条件は，一様分布，正規分布，指数分布，およびその他の頻繁に用いられる分布に対して成立する．この条件に関しては，Bolton and Dewatripont（2005, Chapter 2）および伊藤（2003，第1章）を参照．

率 κ が低いほど，満たされる可能性が高まる．

3　ベンチマーク：対称情報のケース

前節のモデルを分析するのに先立って，仮に企業のタイプが私的情報ではなく銀行にも知られているようなケースを考察する．この対称情報のケースでの結果をベンチマークとして，非対称情報のケースでの結果を後に評価する．

銀行にとって望ましい借入額と元利合計額が企業のタイプに依存することは明らかであるから，タイプが θ の企業に指示する借入額と元利合計額のペアを $y(\theta) = (l(\theta), r(\theta))$ で表すこととし，$y^{fb}(\theta) = (l^{fb}(\theta), r^{fb}(\theta))$ を対称情報という仮想のケースでの最適な解とする．この解は，ファーストベスト（first-best）である．銀行が θ を観察できるならば，各 $\theta \in \Theta$ の値に対して次の問題を解く．

$$\max_{y(\theta)} r(\theta) - c(l(\theta)) \quad \text{subject to} \quad U(l(\theta), r(\theta), \theta) = b(l(\theta), \theta) - r(\theta) \geq 0$$

明らかに，最適解において参加制約は有効（binding）となる，すなわち等号で成立するから[9]，この問題を次のように書き換えても同値である．

$$\max_{l(\theta)} b(l(\theta), \theta) - c(l(\theta))$$

元利合計額は企業から銀行への移転であるから，タイプ θ の企業との取引から生み出される総余剰は元利合計額には依存せず $b(l(\theta), \theta) - c(l(\theta))$ となり，ファーストベストの借入額は次のように決定される．

$$\theta = c'(l^{fb}(\theta)), \quad \forall \theta \in \Theta$$

ここで，$c(\cdot)$ の厳密な凸性により目的関数 $b(l(\theta), \theta) - c(l(\theta))$ が厳密な凹関数となること，境界値の仮定（$c'(\tilde{l}) = +\infty$）および条件 (8) より，解は一意で L の内点となる．仮定より $c''(l) > 0$ であるから，$l^{fb}(\theta)$ は θ の厳密な増加関数となり，効率的なタイプほど借入額は大きくなる．

契約締結時の交渉力はすべて銀行側にあるから，元利合計額 $r(\theta)$ は企業が取引に参加することを保証する水準に決る．すなわち，(5) と $l(\theta) = l^{fb}(\theta)$ より，

$$U(l^{fb}(\theta), r(\theta), \theta) = b(l^{fb}(\theta), \theta) - r(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^{fb}(\theta) = \theta l^{fb}(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta$$

となる．ファーストベストの借入額 $l^{fb}(\theta)$ を投資プロジェクトへ投入した結果として期末に獲得される投資収益に等しい水準に元利合計額を決めてやれば，企業の効用はゼロとなり，取引

[9] 仮定により，企業の留保効用はゼロであるから，制約式 $U(l(\theta), r(\theta), \theta) = b(l(\theta), \theta) - r(\theta) \geq 0$ は，タイプ θ の企業が銀行の提示する契約を受け入れるための条件，すなわち参加制約である．この制約に関しては，第5節でも説明する．

に参加しない場合の効用と等しくなる．このような場合には，企業は取引に参加すると仮定する[10]．かくして取引の利益はすべて銀行の手に渡ることとなる．$r^{fb}(\theta)$ もまた θ の厳密な増加関数となり，効率的なタイプほど返済額は大きくなる．

4 表明原理

以下では非対称情報のケースに戻り，第2節のモデルを分析する．そこでまず，メカニズム理論の基本定理である表明原理（revelation principle）がこのモデルにおいて成り立つことを，伊藤（2003）第1章および Laffont and Martimort（2002）第2章に依拠しながら確認しよう[11]．

第2節で述べたように，銀行が設計する契約またはメカニズムは，メッセージ空間 M と配分ルール $\mu : M \to Y$ より構成される．ここで，Y は配分の集合であり，$y = (l, r) \in Y$ である．また，企業と銀行の効用は各々，効用関数 $U(y, \theta)$ および $V(y)$ で表される．第2節のモデルで想定されているアドバース・セレクションのケースでは，企業のみが契約締結時に自らの真のタイプを知っている．換言すれば，ゲームの開始時点においてすでに銀行と企業の間に非対称情報が存在している．このような不完備情報ゲームを分析する際には，当該ゲームを不完全情報ゲームに変換するのが標準的な方法である．この変換は，元のゲームの前に「ある事前確率分布にしたがって企業の真のタイプが選択され，企業にのみそのタイプが知らされる」という手番を付け加えることでなされる．また，この事前確率分布は銀行と企業の共有知識である．このように不完全情報ゲームに変換されたゲームにおける企業の戦略は，メカニズム (M, μ) を所与としたとき，$\sigma : \Theta \to M$ という関数で表される．ここで $\sigma(\theta)$ は，真のタイプが θ である企業が報告するメッセージである．銀行は企業のタイプを観察できないため，メッセージ空間 M と配分ルール μ を選択し，他方，企業は (M, μ) を所与として，自らの戦略 σ を決定するのである．

いま，メカニズム (M, μ) を所与としたとき，企業の戦略 σ^* が，

$$U(\mu(\sigma^*(\theta)), \theta) \geq U(\mu(m), \theta), \quad \forall m \in M, \forall \theta \in \Theta \tag{9}$$

を満たすとき，σ^* をメカニズム (M, μ) の下での企業の最適戦略と呼ぶ．(9) は，企業がタイプ θ のときにレポート $\sigma^*(\theta)$ を選択することによって，効用を最大にできることを意味している．この式の右辺で $m = \sigma^*(\theta'), \theta' \neq \theta$ と置けば，次の関係が成立することがわかる．

$$U(\mu(\sigma^*(\theta)), \theta) \geq U(\mu(\sigma^*(\theta')), \theta) \quad \forall \theta' \in \Theta \tag{10}$$

---

10 このように仮定しても問題がないのは，銀行は $r^{fb}(\theta)$ よりもほんの僅かだけ少なく企業から元利合計額を徴収することによって，参加することを企業が厳密に選好するようにできるからである．

11 表明原理に基づくメカニズム・デザイン（mechanism design）の理論に関しては，Myerson（1979, 1981），坂井・藤中・若山（2009，第1章・第4章），Fudenberg and Tirole（1991，Chapter 7）も参照．

すなわち，企業がタイプ θ のとき，別のタイプ θ' にとって最適なレポートを提出しても効用は増加しない．

最後に，メッセージ空間 M がタイプ空間 Θ に等しいメカニズムを直接表明メカニズム（direct revelation mechanism）と定義しよう．このメカニズムの下では，企業はレポートとして直接自分のタイプを申告することを求められる．以上により，表明原理について述べる準備がすべて整った．

表明原理 任意のメカニズム (M, μ) を考え，その下での企業の最適戦略を σ^* とする．このとき，次の特徴を持つ直接表明メカニズム (Θ, y) が存在する．

(i) 自らの真のタイプを伝達することが最適である：任意の $\theta \in \Theta$ に対して $\sigma(\theta) = \theta$ を満たす戦略 σ が，(Θ, y) に対する企業の最適戦略となる．

(ii) (M, μ) の下で実現される配分と同一の配分が，(Θ, y) の下で戦略 σ によって実現される：任意の $\theta \in \Theta$ に対して $y(\sigma(\theta)) = \mu(\sigma^*(\theta))$ が成り立つ．

（証明） いま，$y(\cdot)$ を，任意の $\theta \in \Theta$ に対して $y(\theta) = \mu(\sigma^*(\theta))$ によって定義すれば，(10) より，

$$U(y(\theta), \theta) \geq U(y(\theta'), \theta) \quad \forall \theta' \in \Theta$$

となる．これは，新たに設計された直接表明メカニズム (Θ, y) の下では，自らの真のタイプを正直に報告する戦略 $\sigma(\theta) = \theta$ が最適であることを示しており，この結果と $y(\cdot)$ の定義より $y(\sigma(\theta)) = y(\theta) = \mu(\sigma^*(\theta))$ が実現される． **（証了）**

以上の分析より，第2節のモデルにおいて表明原理が成立することが確認できた．各タイプが正直に自らのタイプを申告することが最適な直接表明メカニズムは，誘因両立的（incentive compatible）なメカニズムと呼ばれる．表明原理により，誘因両立的な直接表明メカニズムに限定して分析を進めても一般性は失われない．すなわち，銀行が契約を自由に設計し，提示できるのであれば，銀行の期待効用を最大にするメカニズムは，正直に自らのタイプを申告することが企業の最適戦略となっている直接表明メカニズムのなかに必ず存在する．したがって以下では，一般性を失うことなく，銀行が $y(\theta) = (l(\theta), r(\theta))$ という形式の契約を提示するケースに限定して分析を進めよう．なお，以下では誤解の生じるおそれのない限り，直接表明メカニズムを $y(\cdot)$ と簡略化して記すこととする．

5 誘因両立的なメカニズムの特徴付け

以下では，直接表明メカニズム $y(\cdot)$ が連続微分可能と仮定し，Laffont（1989, Chapter 10），伊藤（2003，第1章）および Bolton and Dewatripont（2005, Chapter 2）に依拠しながら分析を進める．前節の分析より，銀行の直面する問題は，以下のような制約付き最大化問題として定式化できる．

問題（$\mathscr{P}$）

$$\max_{y(\theta)} \int_{\theta_0}^{\theta_1} [S(l(\theta),\theta) - U(l(\theta),r(\theta),\theta)]f(\theta)d\theta \tag{11}$$

subject to

$$U(l(\theta),r(\theta),\theta) \geq U(l(\tilde{\theta}),r(\tilde{\theta}),\theta), \quad \forall\theta,\tilde{\theta} \in \Theta \tag{IC}$$

$$U(l(\theta),r(\theta),\theta) \geq 0, \quad \forall\theta \in \Theta \tag{PC}$$

ここで，目的関数 (11) は銀行の期待効用である．制約式 (IC) は誘因両立制約（incentive compatibility constraints）であり，どのタイプの企業にとっても正直に自分のタイプを申告することが最適戦略となっている[12]．制約式 (PC) は，どのタイプの企業も銀行の提示する契約を受け入れるための条件，すなわち，参加制約（participation constraints）である．

一般に，プリンシパルが直面する問題を，遂行問題（implementation problem）と最適化問題（optimization problem）とに分けて分析するのが便利である．ここで，遂行問題とは「どのような関数 $l(\theta)$ が誘因両立的であるのか」という問題であり，最適化問題とは「すべての遂行可能な $l(\theta)$ 関数のなかで，どれが銀行にとって最善であるのか」という問題である．この節ではまず遂行問題について分析し，その結果に基づいて次節で最適化問題を考察する．

まず，遂行問題を解くための基本的な仮定である Spence-Mirrlees の単一交差条件（Spence-Mirrlees single-crossing condition : SCC）

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{\partial U/\partial l}{\partial U/\partial r}\right) > 0 \tag{SCC}$$

を導入しよう．いま，企業の無差別曲線の傾きは，(5) より，

$$\left.\frac{dr}{dl}\right|_{U:\mathrm{const}} = -\frac{\partial U/\partial l}{\partial U/\partial r} = \frac{\partial b}{\partial l}(l,\theta) = \theta \tag{12}$$

[12] 銀行の問題（$\mathscr{P}$）を第3節の対称情報下での問題と比較すると，制約の中に誘因両立制約が新たに付け加わっていることがわかる．表明原理により，誘因両立制約を満たす直接表明メカニズムの中から銀行の期待効用を最大にするメカニズムを選択しても一般性を失わないため，この制約が加わった．

となり，(SCC) が満たされているため θ に関して厳密に増加する．したがって，任意の θ について，タイプ θ の企業の無差別曲線は，$\theta' < \theta$ を満たす任意のタイプ θ' の無差別曲線と最大1回下から交差することになる．

次に，企業の効用関数が単一交差条件 (SCC) を満たすことから，銀行の最適化問題（$\mathscr{P}$）の誘因両立制約 (IC) は，包絡線条件と単調性条件という二つ一組の制約と同値であることを示そう．誘因両立制約 (IC) は，(5) を考慮すれば次のように表される．

$$U(l(\theta), r(\theta), \theta) = b(l(\theta), \theta) - r(\theta) \geq b(l(\tilde{\theta}), \theta) - r(\tilde{\theta}) = U(l(\tilde{\theta}), r(\tilde{\theta}), \theta), \quad \forall \theta, \tilde{\theta} \in \Theta \quad \text{(IC')}$$

すなわち，タイプ θ の企業は，自らの申告 $\tilde{\theta}$ に関して $U(l(\tilde{\theta}), r(\tilde{\theta}), \theta)$ を最大にする．この最適化問題の局所的な一階必要条件は，次の通りである．

$$\frac{\partial U}{\partial l}(l(\tilde{\theta}), r(\tilde{\theta}), \theta)\frac{dl}{d\theta}(\tilde{\theta}) + \frac{\partial U}{\partial r}(l(\tilde{\theta}), r(\tilde{\theta}), \theta)\frac{dr}{d\theta}(\tilde{\theta}) = 0 \tag{13}$$

よって，正直な申告 $\tilde{\theta} = \theta$ が最適戦略となるための必要条件は，

$$\frac{\partial U}{\partial l}(l(\theta), r(\theta), \theta)\frac{dl}{d\theta}(\theta) + \frac{\partial U}{\partial r}(l(\theta), r(\theta), \theta)\frac{dr}{d\theta}(\theta) = 0 \tag{14}$$

となる．ここで，正直な申告は θ の任意の値に対して成り立たねばならないから，(14) は θ に関する恒等式として次式のように表される．

$$\frac{\partial U}{\partial l}(l(\theta), r(\theta), \theta)\frac{dl}{d\theta}(\theta) + \frac{\partial U}{\partial r}(l(\theta), r(\theta), \theta)\frac{dr}{d\theta}(\theta) = 0, \quad \forall \theta \in \Theta \tag{15}$$

他方，企業の最適化問題に対する局所的な二階必要条件は，$\tilde{\theta} = \theta$ で評価すると，次の通りである．

$$\frac{\partial^2 U}{\partial l^2}\left(\frac{dl}{d\theta}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial l \partial r}\frac{dl}{d\theta}\frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial l}\frac{d^2 l}{d\theta^2} + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{d^2 r}{d\theta^2} \leq 0 \tag{16}$$

ここで，(15) は θ に関する恒等式であるから，両辺を θ で微分すると，

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U}{\partial l^2}\left(\frac{dl}{d\theta}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial l \partial r}\frac{dl}{d\theta}\frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial l}\frac{d^2 l}{d\theta^2} + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{d^2 r}{d\theta^2} \\ &\quad + \frac{\partial^2 U}{\partial l \partial \theta}\frac{dl}{d\theta} + \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}\frac{dr}{d\theta} = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

となり，この式を用いて (16) を書き換えると，

$$\frac{\partial^2 U}{\partial l \partial \theta}\frac{dl}{d\theta} + \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}\frac{dr}{d\theta} \geq 0 \tag{18}$$

を得る．この最後の式を (15) を用いて更に書き換えると，

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial l \partial \theta} - \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}\frac{\partial U/\partial l}{\partial U/\partial r}\right)\frac{dl}{d\theta} \geq 0 \tag{19}$$

となる．ここで，

$$\frac{\partial^2 U}{\partial l \partial \theta} - \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}\frac{\partial U/\partial l}{\partial U/\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial U/\partial l}{\partial U/\partial r}\right)$$

を考慮すれば，局所的な二階必要条件 (16) は，次のように書き直される．

$$\frac{\partial U}{\partial r}\frac{dl}{d\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial U/\partial l}{\partial U/\partial r}\right) \geq 0 \tag{20}$$

第 2 節のモデルでは，(12) より，

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial U/\partial l}{\partial U/\partial r}\right) = -1$$

となることから単一交差条件 (SCC) が満たされ，他方，(5) より $\partial U/\partial r = -1$ である．かくして，局所的な二階必要条件 (20) は，単調性条件（the condition of monotonicity）

$$\frac{dl}{d\theta}(\theta) \geq 0, \quad \forall \theta \in \Theta \tag{M}$$

に帰着する．すなわち，借入額 $l(\theta)$ は θ の増加関数でなければならない．

それでは次に，局所的な必要条件 (15)・(M) は，タイプ θ の企業が自分のタイプを正直に申告するための大域的な十分条件であることを示す．いま，

$$\phi(\tilde{\theta}, \theta) = U(l(\tilde{\theta}), r(\tilde{\theta}), \theta)$$

と置く．ここで証明したいのは，局所的な必要条件

$$\phi_1(\theta, \theta) = \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\theta}}(\theta, \theta) = 0 \qquad \text{（一階条件）}$$

$$\phi_{11}(\theta, \theta) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{\theta}^2}(\theta, \theta) \leq 0 \qquad \text{（二階条件）}$$

が満たされるときに，

$$\phi(\theta, \theta) \geq \phi(\tilde{\theta}, \theta), \quad \forall \theta, \tilde{\theta} \in \Theta \tag{21}$$

が成り立つことである．

一階条件 $\phi_1(\theta, \theta) = 0$ を考慮すれば，二階条件は，

$$\phi_{12}(\theta, \theta) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{\theta} \partial \theta}(\theta, \theta) \geq 0$$

と書き換えることができる[13]．したがって，$\tilde{\theta} < \theta$ に対して，

$$\phi(\theta, \theta) - \phi(\tilde{\theta}, \theta) = \int_{\tilde{\theta}}^{\theta} \phi_1(\tau, \theta) d\tau \geq \int_{\tilde{\theta}}^{\theta} \phi_1(\tau, \tau) d\tau = 0$$

[13] 簡単な計算により，$\phi_{12}(\theta, \theta) \geq 0$ は (20) と同値であることが確認できる．

であり，他方，$\theta < \tilde{\theta}$ に対して，

$$\phi(\theta,\theta) - \phi(\tilde{\theta},\theta) = \int_{\tilde{\theta}}^{\theta} \phi_1(\tau,\theta)d\tau = -\int_{\theta}^{\tilde{\theta}} \phi_1(\tau,\theta)d\tau \geq -\int_{\theta}^{\tilde{\theta}} \phi_1(\tau,\tau)d\tau = 0$$

である．よって，(21) が証明された．すなわち，銀行の最適化問題（$\mathscr{P}$）における誘因両立制約 (IC) は，制約 (15)・(M) と同値である．

以上の分析より，誘因両立制約の一階条件 (15) を考慮すれば，包絡線定理により，

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{d\theta}(l(\theta),r(\theta),\theta) &= \frac{\partial U}{\partial l}(l(\theta),r(\theta),\theta)\frac{dl}{d\theta}(\theta) + \frac{\partial U}{\partial r}(l(\theta),r(\theta),\theta)\frac{dr}{d\theta}(\theta) + \frac{\partial U}{\partial \theta}(l(\theta),r(\theta),\theta) \\
&= \frac{\partial U}{\partial \theta}(l(\theta),r(\theta),\theta) \\
&= \frac{\partial b}{\partial \theta}(l(\theta),\theta) \\
&= l(\theta)
\end{aligned}$$

すなわち，

$$\frac{dU}{d\theta}(l(\theta),r(\theta),\theta) = l(\theta) \tag{EC}$$

となる．よって，直接表明メカニズム $y(\cdot)$ が誘因両立制約 (IC) を満たすならば，任意のタイプ θ に対する借入額 $l(\theta)$ が正の値をとる限り，$U(\cdot,\cdot,\cdot)$ は θ の厳密な増加関数となる．ここで，$U(\cdot,\cdot,\cdot)$ が連続微分可能なので両辺の積分をとっても等号が成立することから，次式が得られる．

$$U(l(\theta),r(\theta),\theta) = U(l(\theta_0),r(\theta_0),\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta} l(s)ds \tag{EC'}$$

以上の分析より，直接表明メカニズム $y(\cdot)$ が誘因両立制約 (IC) を満たすための必要十分条件は，次の二つ一組の条件で与えられる．

(a) 包絡線条件（the envelope condition）: (EC')
(b) 単調性条件 : (M)

6 最適なメカニズムの導出

前節の分析より，銀行の最適契約設計の問題（$\mathscr{P}$）は，次のように書き換えられる．

問題（$\mathscr{P}'$）

$$\max_{y(\theta)} \int_{\theta_0}^{\theta_1} [S(l(\theta),\theta) - U(l(\theta),r(\theta),\theta)]f(\theta)d\theta \tag{11}$$

subject to

$$U(l(\theta), r(\theta), \theta) = U(l(\theta_0), r(\theta_0), \theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta} l(s)ds \tag{EC'}$$

$$\frac{dl}{d\theta}(\theta) \geq 0, \quad \forall\theta \in \Theta \tag{M}$$

$$U(l(\theta), r(\theta), \theta) \geq 0, \quad \forall\theta \in \Theta \tag{PC}$$

ここで，制約式 (EC') は包絡線条件，制約式 (M) は単調性条件であり，これら 2 条件が，直接表明メカニズム $y(\cdot)$ が誘因両立制約 (IC) を満たすための必要十分条件である．

以下では標準的な手順に従って問題（$\mathscr{P}'$）を解くことにしよう．まず，(EC) より，直接表明メカニズム $y(\cdot)$ が誘因両立制約 (IC) を満たすならば，銀行がどのタイプとも契約を結び融資を行う限り $U(\cdot,\cdot,\cdot)$ は θ の厳密な増加関数となることから，(PC) は

$$U(l(\theta_0), r(\theta_0), \theta_0) \geq 0 \tag{PC'}$$

に置きかえられる．

次に，目的関数を (EC') を用いて書き直そう．部分積分を用いると，

$$\begin{aligned}\int_{\theta_0}^{\theta_1} U(l(\theta), r(\theta), \theta)f(\theta)d\theta = &- U(l(\theta), r(\theta), \theta)[1 - F(\theta)]\Big|_{\theta_0}^{\theta_1} \\ &+ \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{dU}{d\theta}(l(\theta), r(\theta), \theta)[1 - F(\theta)]d\theta \\ =& U(l(\theta_0), r(\theta_0), \theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta_1} l(\theta)\frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}f(\theta)d\theta\end{aligned}$$

となるから，この式を目的関数に代入することにより，問題（$\mathscr{P}'$）は次のように書き換えられる．

問題（P）

$$\max_{l(\theta)} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[S(l(\theta), \theta) - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}l(\theta)\right] f(\theta)d\theta - U(l(\theta_0), r(\theta_0), \theta_0) \tag{22}$$

subject to

$$\frac{dl}{d\theta}(\theta) \geq 0, \quad \forall\theta \in \Theta \tag{M}$$

$$U(l(\theta_0), r(\theta_0), \theta_0) \geq 0 \tag{PC'}$$

この問題の解は，明らかに参加制約 (PC') を等号で満たす．したがって，銀行の問題は次のよ

うに書き直される．

問題（P'）

$$\max_{l(\theta)} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[S(l(\theta),\theta) - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} l(\theta) \right] f(\theta) d\theta \tag{23}$$

subject to

$$\frac{dl}{d\theta}(\theta) \geq 0, \quad \forall \theta \in \Theta \tag{M}$$

ここで，次の関数を定義する．

$$\Phi(l,\theta) = S(l,\theta) - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} l \tag{24}$$

そうすると，銀行の問題は，単調性条件 (M) の制約の下で $E_\theta[\Phi(l,\theta)]$ を最大にする問題に帰着する．以下では，ひとまず単調性条件を無視して問題を解き，そうして得られた解がこの条件を満たすことを確認する，という手順で分析を進めよう．

$l^*(\theta)$ が問題（P'）の解であるための一階条件は，次のオイラー方程式（Euler's equation）が成立することである．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l}(l^*,\theta) = \theta - c'(l^*) - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} = 0, \quad \forall \theta \in \Theta \tag{25}$$

この式を整理すると，

$$\theta = c'(l^*(\theta)) + \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} \tag{26}$$

となる．二階条件は，仮定より $c''(l) > 0$ であるから，

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial l^2}(l^*,\theta) = -c''(l^*) < 0$$

となり満たされる．一方，l と θ に関する交差微分の値は，

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial l \partial \theta}(l^*,\theta) = 1 - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} \right) \tag{27}$$

となる．仮定により単調危険率条件 (7) が満たされるため，この交差微分の値は正となり，最適な $l^*(\theta)$ は θ の厳密な増加関数となることから，単調性条件 (M) が満たされる．

最適解 $(l^*(\theta), r^*(\theta))$ においては $U(l^*(\theta_0), r^*(\theta_0), \theta_0) = 0$ であるから，包絡線条件 (EC') より，タイプ θ の情報レントは次のようになる．

$$U(l^*(\theta), r^*(\theta), \theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} l^*(s) ds \tag{28}$$

すなわち，最も非効率的なタイプ θ_0 は留保効用（ゼロ）に等しい効用を得るに過ぎないが，しかし，θ_0 以外の企業は留保効用を上回る情報レントを獲得し，しかも，このレントは自分より非効率的なタイプの借入額に関する増加関数である．θ_0 以外の企業に正直に自分のタイプを申告させるためにはレントを残さざるを得ないが，そのレントを節約するために，タイプ θ_1 を除くタイプの借入額が過少となることを (26) は示しているのである．かくして，借入額の大きさに応じて企業をスクリーニングすることは，最も効率的なタイプ以外の企業に対する一種の信用割当となる．そこで次に，この点についてより詳しく検討しよう．

最適な融資スケジュール $l^*(\theta)$ を決定する条件 (26) を書き直すと，

$$[\theta - c'(l^*(\theta))]f(\theta) = 1 - F(\theta) \tag{29}$$

となる．右辺は $\theta = \theta_1$ のケースを除いて正であるから，最も効率的なタイプ θ_1 を除くタイプの企業に指示される借入額は，各々のファーストベストの水準を下回る．この歪みは，上で説明したように，企業への情報レントを節約するという動機から生じる．等式 (29) の左辺は，タイプ θ の借入額 l をわずかに増加させることによる期待総余剰の増分を表しており，他方，右辺はそのような変化による，θ 以上のタイプの（期待される）情報レントの増分を表している．ここで，$1 - F(\theta)$ はタイプが θ 以上である確率である．最適な $l^*(\theta)$ は，これらの便益と損失の期待値が等しくなるところで決定される．

最適な返済スケジュール $r^*(\theta)$ は，企業の効用関数 (5) と (28) より，

$$r^*(\theta) = \theta l^*(\theta) - \int_{\theta_0}^{\theta} l^*(s)ds \tag{30}$$

となる．よって，返済スケジュールは上の情報レントと対称的な結果となっている．つまり，最も非効率的なタイプ θ_0 の返済額は自らのファーストベストの返済額に等しく，他方，θ_0 を除くタイプが支払う返済額は，自分よりも非効率的なタイプの借入額に関する減少関数となっている．

7　結　　論

本稿では，銀行が企業と貸付契約を締結する際に，すでに企業が私的情報を保有している状況，すなわちアドバース・セレクションの状況における最適契約設計の問題を分析した．対称情報の場合の最適契約（ファーストベストの解）をベンチマークとし，非対称情報下で導かれた最適契約を評価した．本稿の分析を通して得られた主要な結果は，次の通りである．

第 1 に，タイプが効率的な企業ほど借入額が大きくなる．

第 2 に，最も効率的なタイプの企業の借入額は自らのファーストベストの水準に一致するが，このタイプ以外の企業の借入額は各々のファーストベストの水準を下回るという意味で過小となり，一種の信用割当を受ける．

第3に，最も非効率的なタイプの企業は留保効用に等しい効用を得るに過ぎないが，しかし，このタイプ以外の企業は留保効用を上回る情報レントを獲得し，しかも，このレントは自分より非効率的なタイプの借入額に関する増加関数となる．

最後に，最も非効率的なタイプ以外の企業に正直に自分のタイプを申告させるためにはレントを残さざるを得ないことから，このレントを削減するために，最も効率的なタイプ以外の企業の借入額は過小となる．こうした借入額の歪み，すなわち信用割当が銀行の設計する契約を最適にするのである．

参考文献

[1] Bester, H.（1985），“Screening versus Rationing in Credit Markets with Imperfect Information,” *American Economic Review.* 75: 850 – 855.

[2] Blackwell, N. and Santomero, A.（1982），“Bank Credit Rationing and the Customer Relation,” *Journal of Monetary Economics.* 9: 121 – 129.

[3] Bolton, P. and Dewatripont, M.（2005），*Contract Theory.* Cambridge, MA: The MIT Press.

[4] De Meza, D. and Webb, D. C.（1987），“Too Much Investment: A Problem of Asymmetric Information,” *Quarterly Journal of Economics.* 102: 281 – 292.

[5] Freixas, X. and Rochet, J.-C.（1997），*Microeconomics of Banking.* Cambridge, MA: The MIT Press.

[6] Fried, J. and Howitt, P.（1980），“Credit Rationing and Implicit Contract Theory,” *Journal of Money, Credit, and Banking.* 12: 471 – 487.

[7] Fudenberg, D. and Tirole, J.（1991），*Game Theory.* Cambridge, MA: The MIT Press.

[8] Jaffee, D. M. and Modigliani, F.（1969），“A Theory and Test of Credit Rationing,” *American Economic Review.* 59: 850 – 872.

[9] Jaffee, D. M. and Russell, T.（1976），“Imperfect Information, Uncertainty, and Credit Rationing,” *Quarterly Journal of Economics.* 90: 651 – 666.

[10] Jaffee, D. M. and Stiglitz, J.（1990），“Credit Rationing,” In B. M. Friedman and F. H. Hahn (eds.), *Handbook of Monetary Economics, Volume II.* Amsterdam: North-Holland. ch. 16, pp. 837 – 888.

[11] Keaton, W.（1979），*Equilibrium Credit Rationing.* New York: Garland Publishing Company.

[12] Laffont, J.-J.（1989），*The Economics of Uncertainty and Information.* Cambridge, MA: The MIT Press.

[13] Myerson, R. B. (1979) , "Incentive Compatibility and the Bargaining Problem," *Econometrica.* 47: 61 – 73.

[14] Myerson, R. B. (1981) , "Optimal Auction Design," *Mathematics of Operations Research.* 6: 58 – 63.

[15] Smith, V. L. (1972) , "A Theory and Test of Credit Rationing: Some Generalizations," *American Economic Review.* 62: 66 – 76.

[16] Stiglitz, J. E. and Weiss, A. (1981) , "Credit Rationing in Markets with Imperfect Information," *American Economic Review.* 71: 393 – 410.

[17] 伊藤秀史（2003），『契約の経済理論』有斐閣.

[18] 宇惠勝也（2010），『金融契約の経済理論』ミネルヴァ書房.

[19] 坂井豊貴・藤中裕二・若山琢磨（2009），『メカニズムデザイン ― 資源配分制度の設計とインセンティブ ―』ミネルヴァ書房.