

# Direkte und inverse elektromagnetische Streuprobleme für lokal gestörte periodische Medien

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

vorgelegt von

Alexander Konschin

Zentrum für Technomathematik

Universität Bremen

September 2019

*Alexander Konschin: Direkte und inverse elektromagnetische Streuprobleme für lokal gestörte periodische Medien*

**Erstgutachter**

Prof. Dr. Andreas Kirsch  
Karlsruher Institut für Technologie

**Zweitgutachter**

Prof. Dr. Marc Keßeböhmer  
Universität Bremen

**Drittgutachter**

PD Dr. Kersten Schmidt  
Technische Universität Darmstadt

**Datum des Promotionskolloquiums** 12. November 2019

## Zusammenfassung

---

In dieser Arbeit behandeln wir direkte und inverse Probleme, die aus der Streuung von elektromagnetischen und akustischen Wellen an einem unbeschränkten, inhomogenen und biperiodischen Medium mit einem lokalen Defekt hervorgehen. Die Annahme einer Störung im Medium, oder bereits die Wahl einer allgemeinen einfallenden Welle, verhindert die Reduktion des Problems auf eine periodische Zelle, wodurch die klassische Theorie nicht mehr angewandt werden kann und neue Methoden entwickelt werden müssen.

Wir analysieren das vektorwertige Streuproblem, welches durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben ist, sowie das skalarwertige Streuproblem, das durch die Helmholtz-Gleichung modelliert wird. Für beide Streuprobleme zeigen wir die eindeutige Existenz der Lösung unter möglichst geringen Annahmen hinsichtlich Regularität der Parameter. Hierfür wenden wir die Bloch-Floquet-Transformation auf das variationelle Problem an und erhalten so eine Familie von Problemen auf einem beschränkten Gebiet. Für diese Familie können wir die eindeutige Existenz der Lösung zeigen und anschließend die Lösung zu dem ursprünglichen Problem konstruieren, wofür im vektorwertigen Fall die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel eine wichtige Rolle annimmt. Neben der Existenztheorie verwenden wir die äquivalente Formulierung zur Herleitung einer numerischen Methode zur Approximation der Lösung, welche auf der Finite-Elemente-Methode aufbaut. Für beide Probleme betrachten wir zudem die Glattheit der Bloch-Floquet-Transformierten der Lösung bzgl. der Quasiperiodizität, wodurch wir insbesondere die Konvergenzordnung der numerischen Methode verbessern können.

Nach der Betrachtung des direkten Problems wenden wir uns dem Inversen Problem der Rekonstruktion der Störung zu. Wir definieren verschiedene Messoperatoren und zeigen für diese die Eindeutigkeit der Rekonstruktion und die Schlecht-Gestelltheit des Inversen Problems. Anschließend verwenden wir unsere numerische Methode für das direkte Problem, um die lokale Störung des bestrahlten Objektes mit Hilfe eines Newton-artigen Verfahrens zu rekonstruieren. Als eine alternative Rekonstruktionsmethode führen wir das bildgebende Verfahren mit den Namen Faktorisierungsmethode für die Problemstellung ein, die den Träger der Störung mit einem geringen numerischen Aufwand lokalisiert. Hierfür konstruieren wir einen Fernfeldoperator, zeigen seine Faktorisierung und betrachten numerische Ergebnisse.

## Abstract

---

We consider the direct and inverse scattering problem of electromagnetic and acoustic wave phenomena for an unbounded, inhomogeneous and bi-periodic media, which includes a local defect. The assumption of a perturbation or the choice of a general incident field prevents the reduction of the scattering problem to one periodic cell. Hence, the classical theory is not applicable and one has to solve the problem with new methods.

In the first part, we analyze the vector valued scattering problem, which is formulated in terms of the Maxwell's equations, as well as the scalar valued scattering problem modeled by the Helmholtz equation. For both scattering problems we show the unique solvability based on some reasonable presumptions on the regularity of the parameter. For that, we are going to use the Bloch-Floquet transform to derive a family of problems to a variational problem on a bounded domain. For this family we can show the unique existence of the solution, which allows us to construct the solution of the whole problem. Beside the existence theory, we stay in the transformed setting to derive a numerical method for the approximation of the solution by extending the finite-elements method. Moreover, we show some regularity results for the Bloch-Floquet transformed solution w.r.t. the quasiperiodicity, wherefrom, in particular, we can improve the performance of the numerical method.

After the consideration of the direct problem, we continue with the inverse problem of reconstructing the perturbation. For that, we consider different measurement operators, prove the uniqueness of the reconstruction and show the ill-posedness of the operators for the analysis of the inverse problem. Having the theory, we use our numerical method for the direct problem to apply a Newton method to reconstruct the perturbation of the scatterer. Furthermore, we introduce the Factorization method for our setting as a fast imaging method, which localizes the support of the perturbation with less numerical cost. In order to do so, we define a carefully designed far field operator, prove the factorization, and show numerical results.

## Veröffentlichungen

---

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Ergebnisse von Kapitel 3 sowie Unterkapitel 5.1 in [KL19] und die Faktorisierungsmethode aus Kapitel 6 in [HK20] zur Veröffentlichung akzeptiert wurden oder bereits veröffentlicht sind. Weiterhin wurde die Existenztheorie für die Maxwell-Gleichungen aus Kapitel 4 in [Kon19a] und Unterkapitel 5.2 sowie die numerische Methode aus Kapitel 4 in [Kon19b] zur Veröffentlichung eingereicht.

- [HK20] H. Haddar und A. Kirsch. „Factorization method for imaging a local perturbation in inhomogeneous periodic layers from far field measurements“. In: *Inverse Problems and Imaging* 14.1 (2020), S. 133.
- [KL19] A. Kirsch und A. Lechleiter. „Reconstruction of a local perturbation in inhomogeneous periodic layers from partial near field measurements“. In: *Inverse Problems* 35.11 (2019), S. 114006.
- [Kon19a] A. Kirsch. „Electromagnetic wave scattering from locally perturbed periodic inhomogeneous layers“. In: *submitted* (2019).
- [Kon19b] A. Kirsch. „Numerical scheme for electromagnetic scattering on perturbed periodic inhomogeneous media and reconstruction of the perturbation“. In: *submitted* (2019).

## Danksagung

---

Zuallererst möchte ich mich bei Prof. Dr. Armin Lechleiter für seine engagierte und enthusiastische Betreuung während meines Studiums bedanken, die wesentlich zu meinem Entschluss zu promovieren beitrug. Es ist sehr bedauerlich, dass wir nur so kurz die Gelegenheit hatten zusammenzuarbeiten. Einen großen Dank richte ich an Prof. Dr. Andreas Kirsch für das spontane Einspringen in die Betreuung meiner Promotion. Ich fühlte mich immer sehr wohl und willkommen bei den Treffen in Karlsruhe und vielen Dank, dass Sie stets ein offenes Ohr bei Fragen und Problemen hatten. Ein Dankeschön auch an Prof. Dr. Housseem Haddar für die Möglichkeit eines Forschungsaufenthalts sowie für das Beantworten meiner Fragen zur Faktorisierungsmethode und an Prof. Dr. Marc Keßeböhmer sowie an PD Dr. Kersten Schmidt für die Übernahme des Zweit- bzw. Drittgutachtens.

Ein herzliches Danke an die Kollegen der Arbeitsgruppe: Thies Gerken und Ehemalige sowie an Freunde und Kollegen außerhalb der Arbeitsgruppe: Pascal Fernsel, Artur Prugger, Konstantin Schäfer und Miriam Steinherr Zazo, die immer offen für fachliche und außerfachliche Diskussionen waren und den Büroalltag bereicherten. Nicht zuletzt möchte ich einen tiefen Dank an meine Familie und Julia richten, die mich bereits seit vielen Jahren auf meinem Weg unterstützen und begleiten. Ein besonderer Dank an Konstantin Schäfer, Julia Keller, Artjom und Arthur Konschin sowie Pascal Fernsel für die Mühe des Korrekturlesens.

Diese Arbeit entstand im Rahmen eines Graduiertenkollegs, finanziert durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft, bei der ich mich für die Möglichkeit der Promotion bedanke.

# Inhaltsverzeichnis

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Einleitung</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2. Theoretische Grundlagen</b>   | <b>5</b>  |
| 2.1. Grundlegendes und Notation . . . . .                                   | 5         |
| 2.2. Gewichtete Sobolev-Räume . . . . .                                     | 8         |
| 2.3. Quasiperiodische Sobolev-Räume . . . . .                               | 8         |
| 2.4. Horizontale Bloch-Floquet-Transformation . . . . .                     | 15        |
| 2.5. Bloch-Floquet-Transformation auf der Spur . . . . .                    | 17        |
| 2.6. Formel von Sherman, Morrison und Woodbury . . . . .                    | 20        |
| <b>3. Akustisches Streuproblem für lokal gestörte periodische Medien</b>    | <b>23</b> |
| 3.1. Formulierung des Streuproblems . . . . .                               | 25        |
| 3.2. Existenztheorie für den periodischen Brechungsindex . . . . .          | 27        |
| 3.3. Existenztheorie für den lokal gestörten Brechungsindex . . . . .       | 34        |
| 3.4. Regularität der Lösung bzgl. der Quasiperiodizität . . . . .           | 35        |
| 3.5. Bloch-Floquet-Transformation-basierte numerische Methode . . . . .     | 36        |
| 3.6. Variablentransformation für die inverse Bloch-Transformation . . . . . | 43        |
| 3.6.1. Variablentransformation im zweidimensionalen Raum . . . . .          | 44        |
| 3.6.2. Variablentransformation im dreidimensionalen Raum . . . . .          | 47        |
| 3.7. Numerische Beispiele . . . . .   | 48        |
| 3.7.1. Beispiele für das zweidimensionale Problem . . . . .                 | 48        |
| 3.7.2. Beispiele für das dreidimensionale Problem . . . . .                 | 51        |
| <b>4. Elektromagnetisches Streuproblem für gestörte periodische Medien</b>  | <b>59</b> |
| 4.1. Formulierung des Streuproblems . . . . .                               | 60        |
| 4.2. Reduktion auf ein variationelles Problem . . . . .                     | 63        |
| 4.3. Existenztheorie für periodische Permittivitäten . . . . .              | 69        |
| 4.3.1. Alternatives Problem auf beschränktem Gebiet . . . . .               | 70        |
| 4.3.2. Helmholtz-Zerlegung des Lösungsraumes . . . . .                      | 73        |
| 4.3.3. Eindeutige Lösung des quasiperiodischen Teilproblems . . . . .       | 79        |
| 4.3.4. Konstruktion der Lösung . . . . .                                    | 82        |
| 4.4. Existenztheorie für eine lokal gestörte Permittivität . . . . .        | 86        |
| 4.5. Regularität der Lösungen bzgl. der Quasiperiodizität . . . . .         | 88        |
| 4.6. Bloch-Floquet-Transformation-basierte numerische Methode . . . . .     | 90        |
| 4.7. Numerische Beispiele . . . . .   | 93        |
| <b>5. Rekonstruktion der Störung</b>  | <b>97</b> |
| 5.1. Inexaktes Newton-Verfahren für das skalare Streuproblem . . . . .      | 97        |
| 5.1.1. Injektivität der Messoperatoren . . . . .                            | 99        |

|  |            |
|--|------------|
| 5.1.2. Fréchet-Differenzierbarkeit und Schlecht-Gestelltheit . . . | 103        |
| 5.1.3. Regularisierungsmethode . . . . .                           | 107        |
| 5.1.4. Diskretisierung des Inversen Problems . . . . .             | 110        |
| 5.1.5. Numerische Beispiele . . . . .                              | 112        |
| 5.2. Newton-Verfahren für das vektorwertige Streuproblem . . . . . | 115        |
| 5.2.1. Definition und Eigenschaften des Messoperators . . . . .    | 116        |
| 5.2.2. Regularisierungsmethode . . . . .                           | 119        |
| 5.2.3. Diskretisierung und numerische Beispiele . . . . .          | 120        |
| <b>6. Faktorisierungsmethode für das skalare Problem</b>           | <b>123</b> |
| 6.1. Quasiperiodisches Streuproblem . . . . .                      | 125        |
| 6.2. Gestörtes unbeschränktes Streuproblem . . . . .               | 126        |
| 6.3. Fernfeld einer gestreuten Welle . . . . .                     | 126        |
| 6.4. Herleitung der Faktorisierungsmethode . . . . .               | 129        |
| 6.5. Numerische Beispiele . . . . .                                | 138        |
| 6.6. Numerische Beispiele für physikalische Daten . . . . .        | 143        |
| <b>A. Anhang</b>   | <b>147</b> |
| <b>B. Literaturverzeichnis</b>                                     | <b>151</b> |

# Abbildungsverzeichnis

---

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 1.1.  | Beispiele für fehlerfreie und defekte Nano-Gras-Strukturen. . .  | 1   |
| 3.1.  | Visualisierung einer möglichen Problemstellung. . . . .  | 27  |
| 3.2.  | Vergleich der Variablentransformationen im zweidimensionalen Raum. . . . .   | 46  |
| 3.3.  | Variablentransformation: Relativer $L^2(\Omega_0^R)$ -Fehler für verschiedene Referenzlösungen. . . . .              | 47  |
| 3.4.  | Variablentransformation: Verbesserung der Konvergenzordnung beim Verschieben des Intervalls. . . . .                 | 47  |
| 3.5.  | Vergleich der Variablentransformationen für das dreidimensionale Problem. . . . .                                    | 49  |
| 3.6.  | Brechungsindex und verschiedene Störungen für die numerischen Beispiele. . . . .                                     | 54  |
| 3.7.  | Vereinfachtes Modell einer defekten Nano-Gras-Struktur für numerische Beispiele. . . . .                             | 55  |
| 3.8.  | Numerische Approximation der Referenzlösungen für verschiedene Störungen und die benötigte Zeit der Methode. . . . . | 55  |
| 3.9.  | Einfluss der Wellenzahl auf die Approximation der Lösung. . .  | 56  |
| 3.10. | Einfluss der Absorption auf die Approximation der Lösung. . .  | 56  |
| 3.11. | Numerisches Beispiel für die Approximation im dreidimensionalen Raum. . . . .  | 57  |
| 4.1.  | Numerische Beispiele für das vektorwertige Streuproblem. . . .   | 95  |
| 5.1.  | Die ersten vier rechten Seiten für das Newton-Verfahren. . . . .   | 112 |
| 5.2.  | Rekonstruktion mit den Messoperatoren $\tilde{\Lambda}$ und $\tilde{\mathcal{S}}$ ( $d = 2$ ). . . .                 | 114 |
| 5.3.  | Drei Perioden der Nano-Gras-Struktur für die Rekonstruktion. . .   | 115 |
| 5.4.  | Die Störung und die gestreute Welle des Nano-Gras-Beispiels. .   | 115 |
| 5.5.  | Ergebnisse für das Nano-Gras-Beispiel. . . . .   | 116 |
| 5.6.  | Beispiel für die Rekonstruktion im dreidimensionalen Raum. . .   | 117 |
| 5.7.  | Beispiel der Rekonstruktion für das vektorwertige Problem. . .   | 121 |
| 6.1.  | Die Parameter und das Ergebnis für das erste Beispiel der Faktorisierungsmethode. . . . .                            | 140 |
| 6.2.  | Die Hauptparameter für die numerischen Experimente für die Faktorisierungsmethode. . . . .                           | 141 |
| 6.3.  | Ergebnisse für Beispiel 2 mit $k^2 = 0.4$ , $q = q_1$ , $\nu = 10^{-3}$ sowie $\nu = 10^{-6}$ . . . . .              | 141 |
| 6.4.  | Ergebnisse für Beispiel 3 mit $k^2 = 1.8$ , $\nu = 1$ und $\nu = 10^{-3}$ . . . .                                    | 141 |

|   |     |
|---|-----|
| 6.5. Ergebnisse für Beispiel 4 mit $k^2 = 0.09$ , $\nu = 10^{-3}$ und mit $k^2 = 3$ ,<br>$\nu = 1$ . . . . .  | 142 |
| 6.6. Ergebnisse für die Problemstellung mit der homogenen Dirichlet-Randbedingung auf $\Gamma^{-R}$ . . . . . | 142 |
| 6.7. Ergebnisse für FM und LSM mit $k^2 = 3$ und 1% relativen additiven Rauschen. . . . .                     | 144 |
| 6.8. Ergebnisse für FM und LSM mit $k^2 = 3$ und 1% relativen additiven Rauschen. . . . .                     | 145 |

## Einleitung

---

Das zerstörungsfreie Testen ist ein wichtiges Instrument zur automatisierten Werkstoffprüfung in der Produktion, welches die Möglichkeit bietet Kosten zu reduzieren und die Effizienz zu steigern. In den Ingenieurwissenschaften besteht ein entsprechend großes Interesse an der Entwicklung von solchen Verfahren, wie z. B. für das automatisierte Auffinden von Defekten in der Produktion von Nano-Gras (siehe [Zim+12]). Um die Störungen von solchen Nano-Gras-Strukturen maschinell schnell und automatisiert aufzufinden, bietet es sich an, die Streuung an dem Testobjekt zu erfassen, die z. B. von einem Laser als einfallendes Licht erzeugt wird, und anhand dieser Messdaten einen Defekt zu lokalisieren. Jedoch mangelt es aktuell an effizienten Algorithmen, um die Messdaten entsprechend auszuwerten (siehe [Pat10]). In dieser Arbeit analysieren wir diese Fragestellung mit mathematischen Methoden und entwickeln für gewisse Klassen von (Nano-Gras-)Strukturen eine numerische Methode zur Lokalisierung und Rekonstruktion der Störung.

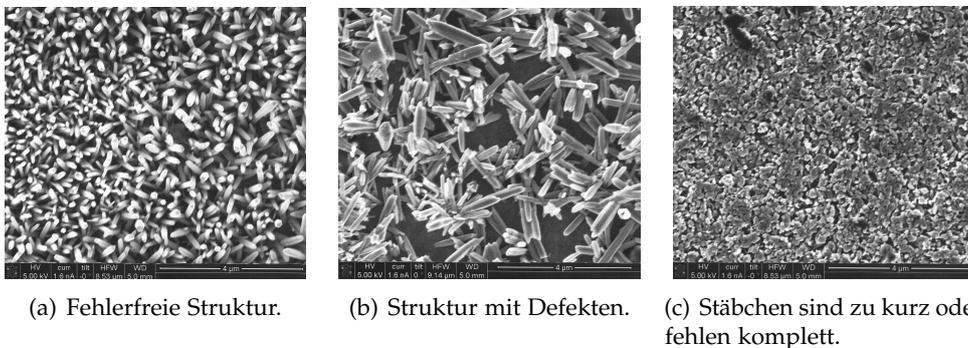


Abbildung 1.1.: Beispiele für fehlerfreie und defekte Nano-Gras-Strukturen (Quelle: Institute of Solid State Physics, Universität Bremen).

Aus mathematischer Sicht wird die Problemstellung durch ein *Inverses Problem* beschrieben, in dem man aus der Wirkung die Ursache herleiten will. Im Allgemeinen steht ein Inverses Problem dem sogenannten *direkten Problem* gegenüber, welches den Effekt aus einer Ursache beschreibt. Man versucht also bei einem Inversen Problem aus gegebenen Messdaten einen Parameter oder eine andere Größe zu rekonstruieren, die diese Daten erklärt. Dabei sind die Probleme meist *schlecht-gestellt*, was grob gesagt bedeutet, dass kleine Fehler in den Messungen einen großen Fehler in der Rekonstruktion verursachen

und diese damit unbrauchbar machen können. Ein entscheidender Teil in der Theorie der Inversen Probleme ist demnach die Annahme eines vorhandenen Rauschens in den Messdaten und der adäquate Umgang mit diesem.

Das vorliegende *Inverse Streuproblem* ist ein Spezialfall eines solchen Inversen Problems. Wenn eine einfallende Welle, z. B. erzeugt von einer Punktquelle, auf das Medium trifft, so entsteht eine gestreute Welle. Das Verhalten der gestreuten Welle wird dabei maßgeblich von dem Streumedium beeinflusst, welches in unserem Fall Nano-Gras-Strukturen sein sollen und im vektorwertigen Fall durch die Permittivität sowie die Permeabilität und im skalaren Fall durch den Brechungsindex beschrieben ist. Das direkte Problem wäre dementsprechend die Bestimmung der gestreuten Welle aus der Kenntnis der Parameter und der einfallenden Welle. Das hier betrachtete Inverse Streuproblem ist die Bestimmung der Störung der Parameter, wenn die einfallenden Wellen, gewisse Messdaten der gestreuten Wellen und die Eigenschaften der ungestörten Parameter bekannt sind.

Um einen ersten Schritt in die Richtung einer mathematisch fundierten Analyse des oben beschriebenen Inversen Streuproblems zu gehen, werden wir statt der willkürlichen Stäbchen-Verteilung der Nano-Gras-Strukturen eine periodische Anordnung annehmen, deren Defekt durch eine lokale Störung modelliert wird und die Periodizität stört. Für die einfallende Welle setzen wir, im Gegensatz zur klassischen Theorie der quasiperiodischen Streuprobleme, keine Periodizitätsbedingung voraus. Für die Betrachtung des Inversen Problems müssen wir zunächst das direkte Problem analysieren. Wir werden hierfür sowohl die Lösbarkeit des akustischen als auch des elektromagnetischen Streuproblems untersuchen. Diese Analyse, primär die Existenztheorie des vektorwertigen Problems, wird den Kern dieser Arbeit darstellen. Aufgrund der Störung und wegen der nicht-periodischen einfallenden Welle kann das Streuproblem nicht ohne Weiteres von einem unbeschränkten Gebiet auf ein beschränktes Gebiet reduziert werden. Die Annahme der Periodizität des ungestörten Parameters ermöglicht uns dafür die Anwendung der Bloch-Floquet-Transformation, um eine variationelle Formulierung auf beschränkten Räumen in einer Integralform zu erhalten. Vor allem das elektromagnetische Streuproblem wird hierbei durch die unkonventionellen Lösungsräume und die Singularität in der Randbedingung hinreichend kompliziert. Auf Basis der Bloch-Floquet-Transformation werden wir zudem einen Algorithmus für die numerische Approximation der Lösung einführen. Da das transformierte Problem auf einem beschränkten Gebiet definiert ist, benötigen wir mit diesem Ansatz, abgesehen von der Ausstrahlungsbedingung nach oben hin, keine weitere künstliche Abschneidebedingung für die numerische Approximation.

---

Für die Entwicklung einer Methode zur Rekonstruktion der Störung aus künstlichen, verrauschten Messdaten werden wir Messoperatoren definieren und zeigen, dass die Rekonstruktion eindeutig ist und die dazugehörigen Inversen Probleme schlecht-gestellt sind. Hierzu betrachten wir Nah- und Fernfeldmessungen sowie die Messung der gesamten Welle auf einer beschränkten Menge. Zur Vorbereitung auf die Numerik des Inversen Problems berechnen wir zudem die Fréchet-Ableitung dieser Operatoren und den adjungierten Operator der Fréchet-Ableitung. Dann wenden wir ein inexaktes Newton-Verfahren auf die Messoperatoren an, um numerische Beispiele für die Qualität der Rekonstruktion zu geben. Mit dem Newton-Verfahren werden wir gute Ergebnisse für die Rekonstruktion der Störung erhalten. Ein solches Newton-artiges Verfahren hat jedoch immer den Nachteil, dass man viele Auswertungen des Vorwärtsoperators benötigt, was sehr viel Zeit in Anspruch nehmen kann. Wenn wir die Störung nur lokalisieren wollen und nicht den genauen Wert kennen müssen, dann bietet es sich alternativ an, ein bildgebendes Verfahren zu verwenden. Deswegen werden wir im letzten Teil die Faktorisierungsmethode für unsere Problemstellung entwickeln. Die Faktorisierungsmethode gibt eine theoretische Legitimation für ein numerisches Verfahren des Inversen Problems der Rekonstruktion des Trägers der Störung. Man setzt die Kenntnis der *Fernfelder* der gestreuten Wellen, die durch ebene Wellen aus jeder Richtung als einfallende Felder erzeugt werden, voraus. Nach der Adaption des Streuproblems auf ebene Wellen als einfallendes Feld ist die Idee, einen Fernfeld-Operator zu definieren und diesen in drei Operatoren zu zerlegen. Diese Zerlegung beschreibt dann ein binäres Kriterium, ob ein Punkt  $z \in \mathbb{R}^2$  innerhalb oder außerhalb des Trägers der Störung liegt.

Die Arbeit ist dabei wie folgt unterteilt: Nach einem einführenden Kapitel 2 mit Grundlagen, in dem wir insbesondere auf die Bloch-Floquet-Transformation und die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel eingehen, beginnen wir mit der Analyse des direkten Streuproblems und zeigen die eindeutige Lösbarkeit des skalaren Problems in Kapitel 3. Zudem führen wir in Kapitel 3 die numerische Methode zur Approximation der Lösung ein. Anschließend widmen wir uns dem vektorwertigen Problem in Kapitel 4, um auch hierfür die eindeutige Lösbarkeit des direkten Problems zu zeigen und die numerische Methode auf diese Problemstellung zu erweitern. Danach betrachten wir das Inverse Problem der Rekonstruktion der Störung, formulieren in Kapitel 5 die Problemstellung, analysieren diese und wenden ein Newton-Verfahren an, um numerische Ergebnisse zu präsentieren. Im letzten Kapitel 6 konstruieren wir die Faktorisierungsmethode für das skalare Problem als eine schnellere Alternative zu dem Newton-Verfahren.



## Theoretische Grundlagen und Notation

---

Als Einstieg in die Thematik und zur Klärung der Notation fassen wir in diesem Teil die mathematischen Grundlagen zusammen, die wir fortlaufend in der Arbeit verwenden werden. So führen wir in den Abschnitten 2.4 und 2.5 die Bloch-Floquet-Transformation ein, die ein grundlegendes Werkzeug der Analysis und der Numerik sein wird. Die Theorie der hierfür benötigten quasiperiodischen Sobolev-Räume fassen wir in Abschnitt 2.3 zusammen. Um das Streuproblem auf ein variationelles Problem zu reduzieren, müssen wir einen künstlichen Schnitt im Raum erzeugen, wodurch eine Randbedingung entsteht. Diese Randbedingung wird dann im vektorwertigen Fall durch den *Calderon-Operator* modelliert, wofür wir in Abschnitt 2.2 vorbereitend die gewichteten Sobolev-Räume einführen werden. In Abschnitt 2.6 beweisen wir zudem die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel.

### 2.1. Grundlegendes und Notation

Für eine natürliche Zahl  $d \geq 1$  und eine beliebige Menge  $\Omega$  soll  $\Omega^d$  das kartesische Produkt  $\Omega^d := \Omega \times \dots \times \Omega$  bezeichnen, deren Elemente durch  $x = (x_1, \dots, x_d)^\top \in \Omega^d$  mit  $x_i \in \Omega$  für  $1 \leq i \leq d$  gegeben sind. Üblicherweise werden wir  $\mathbb{R}^d, \mathbb{Z}^d$  sowie Quader, wie z. B.  $[-1/2, 1/2]^d$ , betrachten. Für ein  $x \in \Omega^d$  werden wir die euklidische Norm  $(\sum_{j=1}^d |x_j|^2)^{1/2}$  mit  $|x|$  abkürzen und bezeichnen für ein  $x \in \Omega^d$  und  $d \geq 2$  das Tupel  $(x_1, \dots, x_{d-1})^\top$  als  $\underline{x}$ . Mit der Notation  $\mathbb{R}_+^d$  wird die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\}$  bezeichnet.

Der Funktionenraum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  steht für den *Schwartz-Raum* und beinhaltet alle Funktionen  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , die für alle Multiindizes  $\alpha$  und  $\beta$  aus  $\mathbb{N}_0^n$  die Abschätzung

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha \frac{\partial^{|\beta|} \phi}{\partial x^\beta}(x) \right| < c$$

erfüllen. Der Raum ist mit einer Familie von Halbnormen

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \max_{|\beta| \leq N} (1 + |x|^2)^{N/2} \left| \frac{\partial^{|\beta|} \phi}{\partial x^\beta}(x) \right|, \quad N \in \mathbb{N}_0,$$

metrisiert und beinhaltet die Testfunktionen  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) := C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , die unendlich oft stetig differenzierbar sind und einen kompakten Träger besitzen. Die

Elemente des Dualraumes  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  heißen *temperierte Distributionen*. Der Operator

$$\mathcal{F}(f)(t) := \widehat{f}(t) := (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) e^{it \cdot \xi} d\xi \quad \text{für alle } f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$$

heißt *Fourier-Transformation* und der inverse Operator ist durch

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})(t) := (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{-it \cdot \xi} d\xi \quad \text{für alle } \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$$

gegeben. Die Fourier-Transformation  $\mathcal{F}$  lässt sich zu einem Isomorphismus auf  $\mathcal{S}$  sowie auf  $L^2(\mathbb{R}^d)$  erweitern. Für eine temperierte Distribution  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  wird die Fourier-Transformation  $\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  als  $\widehat{u}(\phi) := (\mathcal{F}u)(\phi) := u(\mathcal{F}\phi)$  definiert und ist ein Isomorphismus auf  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ .

Für Funktionen, die auf dem ganzen Raum  $\mathbb{R}^d$  gegeben sind, ist der Sobolev-Raum  $H^s(\mathbb{R}^d)$  für ein  $s \in \mathbb{R}$  definiert als

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : \widehat{u} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \quad \text{mit} \quad \left\| (1 + |\cdot|^2)^{s/2} \widehat{u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \infty \right\}.$$

Der Raum wird mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi$$

für  $u$  und  $v$  aus  $H^s(\mathbb{R}^d)$  und der entsprechend abgeleiteten Norm ausgestattet. Der Raum  $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$  ist die Darstellung des Dualraumes zu  $H^s(\mathbb{R}^d)$  bzgl. des  $L^2(\mathbb{R}^d)$ -Skalarproduktes. Für eine Teilmenge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  definieren wir den Sobolev-Raum  $H^n(\Omega)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , durch

$$H^n(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial x^\gamma} \in L^2(\Omega) \quad \text{für alle } \gamma \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |\gamma| \leq n \right\}$$

und statt den Raum mit dem üblichen Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^n(\Omega)} := \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^d, |\gamma| \leq n} \int_{\Omega} \frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^{|\gamma|} \overline{v}}{\partial x^\gamma} dx$$

für  $u$  und  $v \in H^n(\Omega)$  und der abgeleiteten Norm aus.

Es sei mit  $\nabla$  der Gradient als Operator bezeichnet. Wie gewohnt wird durch  $\nabla \cdot \phi := \text{div } \phi := \sum_{j=1}^3 \partial/\partial x_j \phi_j$  die Divergenz von  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^\top : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  beschrieben. Für zwei Vektoren  $x$  und  $y$  aus  $\mathbb{R}^3$  schreiben wir das Kreuzprodukt der beiden Vektoren als  $x \times y$ . Diese Notation verwenden wir, um die

Anwendung des curl-Operators auf  $\phi$  durch

$$\operatorname{curl} \phi := \nabla \times \phi := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \phi_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} \phi_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \phi_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} \phi_1 \end{pmatrix}$$

darzustellen. Analog zu den Sobolev-Räumen  $H^n(\Omega)$  definieren wir die Räume  $H(\operatorname{curl}; \Omega)$  und  $H(\operatorname{div}; \Omega)$  durch

$$H(\operatorname{curl}; \Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \operatorname{curl} u = \nabla \times u \in L^2(\Omega)\}$$

und

$$H(\operatorname{div}; \Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \operatorname{div} u = \nabla \cdot u \in L^2(\Omega)\}$$

mit den entsprechenden Skalarprodukten und Normen.

In dieser Arbeit werden wir mit Differentialoperatoren auf Spurräumen agieren, wofür wir zur Vereinfachung der Notation einige abkürzende Schreibweisen verwenden werden. Dazu setzen wir den transversen Teil eines Vektorfeldes  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^\top : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  als  $\phi_T := (\phi_1, \phi_2, 0)^\top$ . Zudem definieren wir zwei Differentialoperatoren  $\operatorname{div}_T \phi := \partial\phi_1/\partial x_1 + \partial\phi_2/\partial x_2$  und  $\operatorname{curl}_T \phi := \partial\phi_2/\partial x_1 - \partial\phi_1/\partial x_2$ . Analog definieren wir für eine Funktion  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  den Operator  $\nabla_T v := (\partial v/\partial x_1, \partial v/\partial x_2, 0)^\top$ .

Für die Spur einer genügend glatten Funktion  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem Lipschitz-Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  schreiben wir abkürzend  $\phi|_{\partial\Omega}$ . Es ist allgemein bekannt, dass der so definierte Spuroperator auf  $H^1(\Omega)$ -Funktionen erweitert werden kann und nach  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  abbildet. Für die beiden Räume  $H(\operatorname{curl}; \Omega)$  und  $H(\operatorname{div}; \Omega)$  können ebenfalls Spuroperatoren definiert werden, die wir im folgenden Satz zusammenfassen.

**Proposition 2.1.** *Es sei  $\Omega$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet in  $\mathbb{R}^3$  mit der äußeren Einheitsnormalen  $\nu$ . Dann hat der Operator  $\gamma_n(v) := v|_{\partial\Omega} \cdot \nu$  für  $v \in C^\infty(\overline{\Omega})^3$  eine stetige und lineare Fortsetzung von  $H(\operatorname{div}; \Omega)$  nach  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  und es gilt für alle  $v \in H(\operatorname{div}; \Omega)$  und  $\phi \in H^1(\Omega)$  die Gleichung*

$$(v, \nabla \phi)_{L^2(\Omega)^3} + (\operatorname{div} v, \phi)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_n(v), \phi \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

Analog lässt sich der Operator  $\gamma_t(v) := v \times \nu|_{\partial\Omega}$  für  $v \in C^\infty(\overline{\Omega})^3$  zu einem linearen und stetigen Operator von  $H(\operatorname{curl}; \Omega)$  nach  $H^{-1/2}(\partial\Omega)^3$  erweitern und es gilt für alle  $v \in H(\operatorname{curl}; \Omega)$  und  $\phi \in H^1(\Omega)^3$  die Gleichung

$$(\nabla \times v, \phi)_{L^2(\Omega)^3} - (v, \nabla \times \phi)_{L^2(\Omega)^3} = \langle \gamma_t(v), \phi \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)^3 \times H^{1/2}(\partial\Omega)^3}.$$

*Beweis:* Siehe [Mon03, Theorem 3.24] und [Mon03, Theorem 3.29].  $\square$

Später werden wir primär den Fall  $\nu = e_3 := (0, 0, 1)^\top$  und die entsprechenden Spurooperatoren betrachten. Für die Grundlagen der Integrationstheorie von Banachraum-wertigen Funktionen, die in der Arbeit fortlaufend implizit genutzt wird, sei auf [Yos80] verwiesen.

## 2.2. Gewichtete Sobolev-Räume

Im Folgenden werden wir gewichtete Sobolev-Räume  $H_t^s(\mathbb{R}^2)$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$ , einführen, die wir später für den Lösungsraum der Maxwell-Gleichungen benötigen. Wir definieren den gewichteten Schwartzraum  $\mathcal{S}_k(\mathbb{R}^2)$  für ein  $k > 0$  durch

$$\mathcal{S}_k(\mathbb{R}^2) := \left\{ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) : \left( \xi \mapsto \frac{\widehat{\phi}(\xi)}{|k^2 - |\xi|^2|^{1/4}} \right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \right\}.$$

Nach [Rit09, Proposition 4.4.3] gilt die Identität

$$\mathcal{S}_k(\mathbb{R}^2) = \left\{ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) : \left( \xi \mapsto |k^2 - |\xi|^2|^{t/2} \widehat{\phi}(\xi) \right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Meist wird in dieser Arbeit  $k > 0$  als eine beliebige, aber feste Wellenzahl des Streuproblems gewählt sein. Deswegen lassen wir den Index im Folgenden weg. Wenn wir den Dualraum zu  $\mathcal{S}_k(\mathbb{R}^2)$  durch  $\mathcal{S}'_k(\mathbb{R}^2)$  bezeichnen, so sollen die gewichteten Sobolev-Räume  $H_t^s(\mathbb{R}^2)$  definiert sein als

$$H_t^s(\mathbb{R}^2) := \left\{ u \in \mathcal{S}'_k(\mathbb{R}^2) : \left( (1 + |\cdot|^2)^{s/2} \left| \frac{1 + |\cdot|^2}{k^2 - |\cdot|^2} \right|^{t/2} \widehat{u} \right) \in L^2(\mathbb{R}^2) \right\},$$

die nach [Rit09, Theorem 4.4.6] Hilberträume sind.

## 2.3. Quasiperiodische Sobolev-Räume

Nun werden wir die Sobolev-Räume  $\alpha$ -*quasiperiodischer Funktionen* auf  $\mathbb{R}^d$  für  $d \in \mathbb{N}$  definieren. Für eine invertierbare Matrix  $\Lambda \in \mathbb{R}^{d \times d}$  heißt eine Funktion  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$   $\alpha$ -*quasiperiodisch mit der Periode*  $\Lambda$ , falls  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  und

$$u(x + \Lambda j) = e^{-i\alpha \cdot \Lambda j} u(x) \quad \text{für alle } j \in \mathbb{Z}^d \text{ und fast alle } x \in \mathbb{R}^d \text{ gilt.}$$

Die Funktion heißt  $\Lambda$ -*periodisch*, wenn  $\alpha \cdot \Lambda j$  ein Mehrfaches von  $2\pi$  für alle  $j \in \mathbb{Z}^d$  ist. Wir definieren die Menge

$$W_\Lambda := \left\{ \Lambda z : z \in \mathbb{R}^d, -\frac{1}{2} < z_i < \frac{1}{2} \text{ für alle } i = 1, \dots, d \right\}$$

und bezeichnen mit  $C_\alpha^m(\overline{W_\Lambda})$  den Raum der  $m$ -mal stetig differenzierbaren  $\alpha$ -quasiperiodischen Funktionen auf  $\mathbb{R}^d$  mit der Periode  $\Lambda$ . Für eine Funktion  $u$  aus dem Raum  $C_\alpha^1(\overline{W_\Lambda})$  ist die Funktion  $x \mapsto e^{i\alpha \cdot x} u(x)$   $\Lambda$ -periodisch und lässt sich bekanntlich punktweise durch eine Fourier-Reihe entwickeln, die absolut und gleichmäßig konvergiert (siehe [Kre89, Kapitel 8]). Damit lässt sich  $u$  als Fourier-Reihe

$$u(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \hat{u}_j e^{-i\alpha \cdot x} \phi_\Lambda^j(x)$$

darstellen mit den Fourier-Koeffizienten  $\hat{u}_j$  und den Funktionen  $\phi_\Lambda^j$ , die für alle  $j \in \mathbb{Z}^d$  durch

$$\hat{u}_j := \int_{W_\Lambda} u(x) e^{i\alpha \cdot x} \overline{\phi_\Lambda^j(x)} dx \quad \text{und} \quad \phi_\Lambda^j(x) := \frac{1}{|\det \Lambda|^{1/2}} e^{-i\Lambda^* j \cdot x} \quad (2.1)$$

mit  $\Lambda^* := 2\pi(\Lambda^{-1})^\top$  gegeben sind. Die Fourier-Reihen-Darstellung gilt weiterhin bzgl. der Konvergenz in der  $L^2(W_\Lambda)$ -Norm, wenn  $u$  aus  $L^2(W_\Lambda)$  gewählt wird. Die Menge  $\{\phi_\Lambda^j\}_{j \in \mathbb{Z}^d}$  ist ein Orthonormalsystem von  $L^2(W_\Lambda)$ , sodass die Parsevalsche Gleichung die Darstellbarkeit der Norm durch  $\|u\|_{L^2(W_\Lambda)}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |\hat{u}_j|^2$  impliziert.

**Proposition 2.2.** Für  $s \geq 0$  definieren wir als  $H_\alpha^s(W_\Lambda)$  den Raum aller  $L^2(W_\Lambda)$ -Funktionen, die bzgl. der Norm

$$\|u\|_{H_\alpha^s(W_\Lambda)} := \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (1 + |j|^2)^s |\hat{u}_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

einen endlichen Wert annehmen. Der Raum ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H_\alpha^s(W_\Lambda)} := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (1 + |j|^2)^s \hat{u}_j \overline{\hat{v}_j} \quad \text{für } u, v \in H_\alpha^s(W_\Lambda).$$

*Beweis:* Der eindimensionale Fall ist in [Kre89, Kapitel 8] zu finden, der sich leicht auf den  $d$ -dimensionalen Fall übertragen lässt.  $\square$

Die  $H_\alpha^m(W_\Lambda)$ -Norm,  $m \in \mathbb{N}_0$ , ist auf dem Raum  $C_\alpha^\infty(\overline{W_\Lambda})$  äquivalent zu der  $H^m(W_\Lambda)$ -Norm

$$\|u\|_{H^m(W_\Lambda)}^2 := \int_{W_\Lambda} |u(x)|^2 + \sum_{|\gamma|=m} \left| \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} u(x) \right|^2 dx \quad \text{für } u \in H^m(W_\Lambda),$$

was sich analog zu [Kre89, Theorem 8.4] zeigen lässt. Aus der Approximierbarkeit der Funktionen und der Vollständigkeit des Raumes folgt dadurch insbesondere, dass der Raum  $H_\alpha^m(W_\Lambda)$  der Abschluss von  $C_\alpha^\infty(\overline{W_\Lambda})$  bzgl. der  $H^m(W_\Lambda)$ -Norm ist.

Wenn wir eine Funktion  $u = u(\alpha, x)$  betrachten, die von  $x$  und  $\alpha$  abhängt, dann schreiben wir die Fourier-Koeffizienten als  $\widehat{u}_j(\alpha)$ . Punktweise in  $\alpha$  ist die Funktion wie in (2.1) darstellbar. Es sei für  $\alpha, x \in \mathbb{R}^2$  die endliche Summe der Fourier-Reihe als

$$(S_n u)(\alpha, x) := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d, |j| \leq n} \widehat{u}_j(\alpha) e^{-i\alpha \cdot x} \phi_\Lambda^j(x)$$

bezeichnet. Als Nächstes betrachten wir den Raum  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))$  für  $s \geq 0$  mit

$$I_\Lambda := \left\{ \Lambda^* z : z \in \mathbb{R}^d, -\frac{1}{2} < z_i < \frac{1}{2} \text{ für alle } i = 1, \dots, d \right\}.$$

Der Raum  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))$  ist durch

$$L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda)) := \left\{ u \in L^2(I_\Lambda \times W_\Lambda) : \int_{I_\Lambda} \|u(\alpha, \cdot)\|_{H_\alpha^s(W_\Lambda)}^2 d\alpha < \infty \right\}$$

definiert und mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))} := \int_{I_\Lambda} (u(\alpha, \cdot), v(\alpha, \cdot))_{H_\alpha^s(W_\Lambda)} d\alpha$$

ausgestattet. Aus der Proposition 2.2 folgt entsprechend, dass sich die Norm schreiben lässt als

$$\|u\|_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (1 + |j|^2)^s \|\widehat{u}_j(\alpha)\|_{L^2(I_\Lambda)}^2 \quad \text{für } u \in L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))$$

und dass für  $s = m \in \mathbb{N}_0$  die Norm äquivalent zu der  $L^2(I_\Lambda; H^m(W_\Lambda))$ -Norm ist, die gegeben ist durch

$$\|u\|_{L^2(I_\Lambda; H^m(W_\Lambda))}^2 := \int_{I_\Lambda} \|u(\alpha, \cdot)\|_{H^m(W_\Lambda)}^2 d\alpha.$$

**Proposition 2.3.** *Der Raum  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))$  ist für  $s \geq 0$  ein Hilbertraum und es gilt für alle  $u \in L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))$*

$$\|u - S_n u\|_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

*Beweis:* Es wird hier die Abgeschlossenheit und die Approximierbarkeit (bzw.

Darstellbarkeit als Fourier-Reihe) gezeigt, denn der Nachweis der Vektorraum- und Skalarprodukt-Axiome ist leicht nachzuprüfen. Der Beweis orientiert sich an [Kre89, Kapitel 8], worin der Sobolev-Raum der periodischen Funktionen auf  $\mathbb{R}$  eingeführt wird.

(i) Abgeschlossenheit: Es sei  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  eine Cauchy-Folge in  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))$ , dann gibt es nach der Definition einer Cauchy-Folge für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}_0$ , sodass für alle  $k, m \geq N$  und für alle  $M \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}^d \\ |j| \leq M}} (1 + |j|^2)^s \left\| \widehat{(\phi_k)}_j - \widehat{(\phi_m)}_j \right\|_{L^2(I_\Lambda)}^2 &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (1 + |j|^2)^s \left\| \widehat{(\phi_k)}_j - \widehat{(\phi_m)}_j \right\|_{L^2(I_\Lambda)}^2 \\ &\leq \varepsilon^2 \end{aligned}$$

gilt. Daraus folgt insbesondere, dass  $\{\widehat{(\phi_m)}_j\}_{m \in \mathbb{N}_0}$  für alle  $j \in \mathbb{Z}^d$  eine Cauchy-Folge in dem vollständigen Raum  $L^2(I_\Lambda)$  ist, die gegen  $v_j \in L^2(I_\Lambda)$  konvergiert. Wir setzen

$$v(\alpha, x) := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} v_j(\alpha) e^{i\alpha \cdot x} \phi_\Lambda^j(x),$$

so gilt für alle  $k \geq N$ , für alle  $M \in \mathbb{N}_0$  und für  $m \rightarrow \infty$  die Abschätzung

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d, |j| \leq M} (1 + |j|^2)^s \|v_j - \widehat{(\phi_k)}_j\|_{L^2(I_\Lambda)}^2 \leq \varepsilon^2.$$

Wir lassen anschließend  $M \rightarrow \infty$  laufen, sodass

$$\|v - u_k\|_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (1 + |j|^2)^s \|v_j - \widehat{(\phi_k)}_j\|_{L^2(I_\Lambda)}^2 \leq \varepsilon^2 \quad (2.2)$$

für alle  $k \geq N$  gilt. Aus der Definition des Raumes  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))$ , aus der Abschätzung (2.2), sowie aus der Dreiecksungleichung folgt  $v \in L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))$ , denn

$$\|v\|_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))} \leq \|u_k - v\|_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))} + \|u_k\|_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))} < \infty$$

für ein beliebiges  $k \geq N$ .

(ii) Die Approximierbarkeit folgt nun aus der Tatsache, dass eine Funktion  $u \in L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))$  einen endlichen Wert in der Norm besitzt und

$$\|u - S_n u\|_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d, |j| > n} (1 + |j|^2)^s \|\widehat{u}_j\|_{L^2(I_\Lambda)}^2$$

gilt. □

Die letzte Proposition und die Dichtheit von  $C_0^\infty(\overline{I_\Lambda})$  in  $L^2(I_\Lambda)$  impliziert insbesondere, dass der Raum  $C_0^\infty(\overline{I_\Lambda}; C_\alpha^\infty(\overline{W_\Lambda}))$  dicht in  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))$  liegt, denn  $x \mapsto e^{i\alpha \cdot x}(S_n u)(\alpha, x)$  lässt sich durch ein trigonometrisches Polynom in  $x$  mit Koeffizienten in  $C_0^\infty(\overline{I_\Lambda})$  annähern.

Als Nächstes charakterisieren wir den Dualraum des eben eingeführten Raumes  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))$ ,  $s \geq 0$ . Für alle Funktionale  $l$  aus dem Dualraum von  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))$  ist

$$l_j: L^2(I_\Lambda) \rightarrow \mathbf{C}, \quad w \mapsto l\left((\alpha, x) \mapsto w(\alpha) e^{i\alpha \cdot x} \phi_\Lambda^j(x)\right),$$

ein Funktional auf dem Hilbertraum  $L^2(I_\Lambda)$ . Demnach existiert eine eindeutige Funktion  $\widehat{l}_j \in L^2(I_\Lambda)$  mit  $(w, \widehat{l}_j)_{L^2(I_\Lambda)} = l_j(w)$  für alle  $w \in L^2(I_\Lambda)$ .

**Proposition 2.4.** Ein Funktional  $l \in L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))'$  lässt sich für  $s \geq 0$  durch

$$l(u) = \sum_{j \in \mathbf{Z}^d} (\widehat{u}_j, \widehat{l}_j)_{L^2(I_\Lambda)} \quad \text{für alle } u \in L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda)) \quad (2.3)$$

darstellen. Zudem ist die Operatornorm gegeben durch

$$\|l\|^2 = \sum_{j \in \mathbf{Z}^d} (1 + |j|^2)^{-s} \|\widehat{l}_j\|_{L^2(I_\Lambda)}^2 =: M_l^2. \quad (2.4)$$

*Beweis:* Wir wählen die Funktion

$$u_n(\alpha, x) := \sum_{j \in \mathbf{Z}^d, |j| \leq n} (1 + |j|^2)^{-s} \widehat{l}_j(\alpha) e^{i\alpha \cdot x} \phi_\Lambda^j(x), \quad (\alpha, x) \in I \times W_\Lambda,$$

für die

$$\|u_n\|_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))}^2 = \sum_{j \in \mathbf{Z}^d, |j| \leq n} (1 + |j|^2)^{-s} \|\widehat{l}_j\|_{L^2(I_\Lambda)}^2$$

und für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$\|l\| \geq \frac{|l(u_n)|}{\|u_n\|_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))}} = \left( \sum_{j \in \mathbf{Z}^d, |j| \leq n} (1 + |j|^2)^{-s} \|\widehat{l}_j\|_{L^2(I_\Lambda)}^2 \right)^{1/2}$$

gilt. Damit konvergiert die Reihe  $M_l^2$  mit der Abschätzung  $M_l \leq \|l\|$  und die Darstellung in (2.3) ist wohldefiniert, denn nach der Cauchy-Schwartz-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbf{Z}^d} |(\widehat{u}_j, \widehat{l}_j)_{L^2(I_\Lambda)}| &\leq \sum_{j \in \mathbf{Z}^d} (1 + |j|^2)^{-s} \|\widehat{l}_j\|_{L^2(I_\Lambda)}^2 \sum_{j \in \mathbf{Z}^d} (1 + |j|^2)^s \|\widehat{u}_j\|_{L^2(I_\Lambda)}^2 \\ &= M_l^2 \|u\|_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))}^2. \end{aligned}$$

Wie zuvor gesehen, lässt sich eine Funktion aus  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))$  als Fourierreihe darstellen, sodass die Darstellung von  $l$  in (2.3) aus der Stetigkeit der Funktionale folgt. Also gilt auch  $\|l\| \leq M_l$ , womit  $\|l\| = M_l$  gezeigt ist.  $\square$

Wir setzen für ein Funktional  $l \in L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))'$

$$(S_n l)(\alpha, x) := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d, |j| \leq n} \widehat{l}_j(\alpha) e^{-i\alpha \cdot x} \phi_\Lambda^j(x), \quad (\alpha, x) \in I \times W_\Lambda,$$

und

$$l_n(u) := \int_{I_\Lambda} (u(\alpha, \cdot), (S_n l)(\alpha, \cdot))_{L^2(W_\Lambda)} d\alpha \quad \text{für alle } u \in L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda)),$$

so erhalten wir aus der Gleichung (2.4) die Konvergenz

$$\|l - l_n\|^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d, |j| > n} (1 + |j|^2)^{-s} \|\widehat{l}_j\|_{L^2(I_\Lambda)}^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Aufgrund der Dichtheit der glatten Funktionen mit kompaktem Träger  $C_0^\infty(\overline{I_\Lambda})$  in  $L^2(I_\Lambda)$  ist eine Funktion  $x \mapsto e^{i\alpha \cdot x} (S_n l)(\alpha, x)$  durch ein trigonometrisches Polynom in  $x$  mit Koeffizienten in  $C_0^\infty(\overline{I_\Lambda})$  approximierbar. Der Dualraum lässt sich somit mit  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^{-s}(W_\Lambda))$  identifizieren, wobei der Raum als Abschluss der trigonometrischen Polynome (multipliziert mit  $x \mapsto e^{-i\alpha \cdot x}$ ) mit  $C_0^\infty(\overline{I_\Lambda})$ -Koeffizienten bzgl. der Norm

$$\|v\|_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^{-s}(W_\Lambda))}^2 := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (1 + |j|^2)^{-s} \|\widehat{v}_j\|_{L^2(I_\Lambda)}^2 \quad \text{für alle } v \in C_0^\infty(\overline{I_\Lambda}; C_\alpha^\infty(\overline{W_\Lambda}))$$

definiert ist.

Im Folgendem werden wir Funktionen betrachten, die von einer weiteren Raumkomponente abhängig sind. Für die Bloch-Floquet-Transformation werden wir diese letzte Raumkomponente jedoch ignorieren und die Transformation nur auf die ersten Komponenten anwenden. Wir bezeichnen hierzu mit  $C_0^\infty(\overline{I_\Lambda} \times \mathbb{R}; C_\alpha^\infty(\overline{W_\Lambda}))$  den Raum der Funktionen aus  $C^\infty(\mathbb{R}^{2d+1})$ , die  $\alpha$ -quasiperiodisch in  $\underline{x} \in W_\Lambda$  mit einer von  $\alpha \in I_\Lambda$  abhängigen Quasiperiodizität sind. Wir werden später für  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $R, R' \in \mathbb{R}$  mit den Räumen  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^m(W_\Lambda \times (R, R')))$  arbeiten. Den Raum definieren wir als den Abschluss von  $C_0^\infty(\overline{I_\Lambda} \times \mathbb{R}; C_\alpha^\infty(\overline{W_\Lambda}))$  bzgl. der  $L^2(I_\Lambda; H^m(W_\Lambda \times (R, R')))$ -Norm, die durch das Skalarprodukt

$$(u, v)_{L^2(I_\Lambda; H^m(W_\Lambda \times (R, R')))} := \int_{I_\Lambda} (u(\alpha, \cdot), v(\alpha, \cdot))_{H^m(W_\Lambda \times (R, R'))} d\alpha$$

induziert wird.

Es sei mit  $\simeq$  die Notation für eine Norm-Äquivalenz bezeichnet. Wenn wir für eine Funktion  $u$  aus  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^m(W_\Lambda \times (R, R')))$  die Komponente  $x_{d+1}$  festhalten, so können wir die Norm dieser Funktion als eine Reihe darstellen. Dies nutzen wir um für den Fall  $m = 1$  die Norm von  $u$  umzuschreiben in

$$\begin{aligned}
& \|u\|_{L^2(I_\Lambda; H^1(W_\Lambda \times (R, R')))}^2 \\
& \simeq \int_R^{R'} \left( \|u(\cdot, x_{d+1})\|_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^1(W_\Lambda))}^2 + \|\partial u / \partial x_{d+1}(\cdot, x_{d+1})\|_{L^2(I_\Lambda \times W_\Lambda)}^2 \right) dx_{d+1} \\
& = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (1 + |j|^2) \int_R^{R'} \|\widehat{u}_j(\cdot, x_{d+1})\|_{L^2(I_\Lambda)}^2 dx_{d+1} \\
& \quad + \int_R^{R'} \|\partial \widehat{u}_j / \partial x_{d+1}(\cdot, x_{d+1})\|_{L^2(I_\Lambda)}^2 dx_{d+1} \\
& \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (1 + |j|^2) \|\widehat{u}_j\|_{L^2(I_\Lambda \times (R, R'))}^2 + \|\widehat{u}_j\|_{L^2(I_\Lambda; H^1((R, R')))}^2.
\end{aligned}$$

Für ein beliebiges  $m \in \mathbb{N}_0$  lässt sich eine analoge Norm-Äquivalenz herleiten, woraus wir die folgende Proposition erhalten.

**Proposition 2.5.** *Für alle  $u \in L^2(I_\Lambda; H_\alpha^m(W_\Lambda \times (R, R')))$  mit  $m \in \mathbb{N}_0$  gilt*

$$\|u - S_n u\|_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^m(W_\Lambda \times (R, R')))} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Die Koeffizienten  $\widehat{u} = \widehat{u}(\alpha, x_{d+1})$  sind in diesem Fall zusätzlich von  $x_{d+1}$  abhängig.

*Beweis:* Wegen der Norm-Äquivalenzen können wir analog zu Proposition 2.3 (ii) argumentieren.  $\square$

Für ein  $R \in \mathbb{R}$  und  $\Gamma_0^R := W_\Lambda \times \{R\}$  lässt sich der Raum  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(\Gamma_0^R))$  für  $s \in \mathbb{R}$  mit dem Raum  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))$  identifizieren, sodass die Gültigkeit der Propositionen 2.3 und 2.4 über die Fourier-Reihen-Darstellung der Bildelemente erhalten bleibt. Bezeichnen wir mit  $H_p^s(W_\Lambda)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , und  $H_p^m(W_\Lambda \times (R, R'))$ ,  $m \in \mathbb{N}$  und  $R' > R$ , die beiden Räume für  $\alpha = 0$ , so entnehmen wir [Kre89, Kapitel 8.3], dass  $H_p^{m'}(\Gamma_0^R)$  mit  $m' := m - \frac{1}{2}$  der Spurraum von  $H_p^m(W_\Lambda \times (R, R'))$  ist. Jede Funktion aus  $u \in H_\alpha^m(W_\Lambda \times (R, R'))$  lässt sich als  $(x, x_{d+1}) \mapsto e^{i\alpha \cdot x} u_p(x, x_{d+1})$  mit  $u_p \in H_p^m(W_\Lambda \times (R, R'))$  für  $x \in \mathbb{R}^{d+1}$  schreiben, sodass wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\Gamma_0^R}^2 & \|u\|_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^{m'}(\Gamma_0^R))}^2 = \int_{I_\Lambda} \|u_p(\alpha, \cdot)\|_{H_p^{m'}(\Gamma_0^R)}^2 d\alpha \\
& \leq \int_{I_\Lambda} C_{S_{pur}}^2 \|u_p(\alpha, \cdot)\|_{H_p^m(W_\Lambda \times (R, R'))}^2 d\alpha \\
& = C_{S_{pur}}^2 \|u\|_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^m(W_\Lambda \times (R, R')))}^2
\end{aligned}$$

erhalten. Das bedeutet, dass der Raum  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^{m'}(\Gamma_0^R))$  als der Spurraum von  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^m(W_\Lambda \times (R, R')))$  betrachtet werden kann, wobei der Spuroperator nur auf die  $(d+1)$ -te bis  $(2d+1)$ -te Komponente wirkt.

## 2.4. Horizontale Bloch-Floquet-Transformation

Die Bloch-Floquet-Transformation spielt eine entscheidende Rolle in der Analyse des direkten Problems und in der numerischen Methode zur Approximation der Lösung. Wir werden in diesem Abschnitt die Transformation einführen und die für uns relevanten Eigenschaften beleuchten. Es sei im Folgenden die Dimension auf  $d \in \{2, 3\}$  und  $\Omega := \mathbb{R}^{d-1} \times (R, R')$  für  $R, R' \in \mathbb{R}$  festgesetzt.

**Definition 2.6** (Horizontale Bloch-Floquet-Transformation). Es sei  $\Lambda$  eine invertierbare Matrix aus  $\mathbb{R}^{(d-1) \times (d-1)}$ . Die *horizontale Bloch-Floquet-Transformation*  $\mathcal{J}_\Omega$  ist für  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $(\underline{x}, x_d) \in \overline{\Omega}$  und  $\alpha \in \mathbb{R}^{d-1}$  definiert durch

$$(\mathcal{J}_\Omega \phi)(\alpha, \underline{x}, x_d) := \frac{\sqrt{|\det \Lambda|}}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} \phi(\underline{x} + \Lambda j, x_d) e^{i\alpha \cdot \Lambda j}.$$

Da die Funktionen  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  einen kompakten Träger haben, ist der Operator wohldefiniert.

**Lemma 2.7.** Es sei  $\Omega := \mathbb{R}^{d-1} \times (R, R')$ . Für ein  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\Omega)$  ist die Bloch-Floquet-Transformierte  $\mathcal{J}_\Omega \phi$  periodisch bzgl.  $\alpha$  mit der Periode  $\Lambda^* := 2\pi(\Lambda^{-1})^\top$  und  $\alpha$ -quasiperiodisch mit der Periode  $\Lambda$  bzgl.  $\underline{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$ .

*Beweis:* Setze  $c := (2\pi)^{-(d-1)/2} |\det \Lambda|^{1/2}$ , dann folgt die Aussage direkt aus der Definition, denn für alle  $l \in \mathbb{Z}^{d-1}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^{d-1}$  und für alle  $x \in \overline{\Omega}$  gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_\Omega \phi)(\alpha + \Lambda^* l, \underline{x}, x_d) &= c \sum_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} \phi(\underline{x} + \Lambda j, x_d) e^{i(\alpha + \Lambda^* l) \cdot \Lambda j} \\ &= c \sum_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} \phi(\underline{x} + \Lambda j, x_d) e^{i\alpha \cdot \Lambda j} e^{i2\pi l \cdot j} \\ &= (\mathcal{J}_\Omega \phi)(\alpha, \underline{x}, x_d) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_\Omega \phi)(\alpha, \underline{x} + \Lambda l, x_d) &= c \sum_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} \phi(\underline{x} + \Lambda(j+l), x_d) e^{-i\alpha \cdot \Lambda l} e^{i\alpha \cdot \Lambda(j+l)} \\ &= e^{-i\alpha \cdot \Lambda l} (\mathcal{J}_\Omega \phi)(\alpha, \underline{x}, x_d). \end{aligned}$$

□

Das letzte Lemma zeigt, dass es hinreichend ist, die transformierte Funktion  $\mathcal{J}_\Omega \phi$  auf  $\bar{I} \times W_\Lambda \times [R, R']$  oder auf  $\bar{I} \times \mathbb{R}^{d-1} \times [R, R']$  zu betrachten. Die folgenden zwei Sätze aus [Lec16, Theorem 8] und [Lec16, Korollar 5] bilden die Basis für die Anwendung der Transformation auf die variationelle Formulierung.

**Proposition 2.8.** Wir setzen  $\Omega := \mathbb{R}^{d-1} \times (R, R')$  und  $\Omega_0 := W_\Lambda \times (R, R')$ .

(a) Die Bloch-Floquet-Transformation  $\mathcal{J}_\Omega$  lässt sich zu einem isometrischen Isomorphismus zwischen den Räumen  $L^2(\Omega)$  und  $L^2(I_\Lambda; L^2(\Omega_0))$  erweitern. Die Inverse ist für  $\tilde{\phi} \in \mathcal{J}_\Omega(C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\Omega))$ ,  $x \in \bar{\Omega}_0$  und  $l \in \mathbb{Z}^{d-1}$  durch

$$(\mathcal{J}_\Omega^{-1}\tilde{\phi})(\underline{x} + \Lambda l, x_d) := \frac{\sqrt{|\det \Lambda|}}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \int_{I_\Lambda} \tilde{\phi}(\alpha, \underline{x}, x_d) e^{-i\alpha \cdot \Lambda l} d\alpha \quad (2.5a)$$

$$= \frac{\sqrt{|\det \Lambda|}}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \int_{I_\Lambda} \tilde{\phi}(\alpha, \underline{x} + \Lambda l, x_d) d\alpha \quad (2.5b)$$

gegeben, wobei im zweiten Fall die Funktion  $\tilde{\phi}$   $\alpha$ -quasiperiodisch auf den ganzen  $\mathbb{R}^{d-1}$  bzgl.  $\underline{x}$  fortgesetzt wurde.

(b) Für jedes  $s \in \mathbb{R}$  kann die Bloch-Floquet-Transformation  $\mathcal{J}_\Omega$  zu einem Isomorphismus zwischen  $H^s(\Omega)$  und  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(\Omega_0))$  erweitert werden, deren inverse Abbildung durch (2.5) beschrieben ist.

**Proposition 2.9.** Es sei  $\Omega := \mathbb{R}^{d-1} \times (R, R')$  und  $\Omega_0 := W_\Lambda \times (R, R')$ . Für  $s \in \mathbb{R}$  gleicht der inverse Operator

$$\mathcal{J}_\Omega^{-1}: L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(\Omega_0)) \rightarrow H^s(\Omega) \quad \text{von} \quad \mathcal{J}_\Omega: H^s(\Omega) \rightarrow L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(\Omega_0))$$

dem adjungierten Operator

$$\mathcal{J}_\Omega^*: L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(\Omega_0)) \rightarrow H^s(\Omega) \quad \text{zu} \quad \mathcal{J}_\Omega: H^{-s}(\Omega) \rightarrow L^2(I_\Lambda; H_\alpha^{-s}(\Omega_0)).$$

Die Bloch-Floquet-Transformation besitzt weitere Eigenschaften, die wir später verwenden wollen. Es lässt sich schnell nachrechnen, dass das Differenzieren und die Anwendung der Bloch-Floquet-Transformation vertauschbar sind. Eine weitere Eigenschaft der Transformation ist, dass sich periodische Funktionen analog zu einer Konstante verhalten und herausziehen lassen.

**Lemma 2.10.** Es sei  $\Omega := \mathbb{R}^{d-1} \times (R, R')$ . Für alle  $u \in H^m(\Omega)$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ , und für alle Multiindizes  $\gamma \in \mathbb{N}_0^m$  mit  $|\gamma| \leq m$  gilt die Gleichheit

$$\mathcal{J}_\Omega \left( \frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial x^\gamma} \right) = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma} (\mathcal{J}_\Omega u) \quad \text{in } L^2(I_\Lambda \times W_\Lambda \times (R, R')).$$

*Beweis:* Es ist leicht nachzurechnen, dass diese Gleichheit für alle Testfunktionen  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  erfüllt ist. Aufgrund der Dichtheit der Testfunktionen in  $H^m(\Omega)$  und der Stetigkeit der Bloch-Floquet-Transformation gilt die Gleichheit für alle Funktionen aus  $H^m(\Omega)$ .  $\square$

**Lemma 2.11.** *Es sei  $\Omega := \mathbb{R}^{d-1} \times (R, R')$ . Für alle Funktionen  $q \in L^\infty(\Omega)$ , die  $\Lambda$ -periodisch in den ersten  $(d-1)$  Komponenten sind, und für alle  $u \in L^2(\Omega)$ , gilt für  $\alpha \in I_\Lambda$  und  $x \in \Omega$  fast überall die Gleichung*

$$(\mathcal{J}_\Omega(qu))(\alpha, \underline{x}, x_d) = q(\underline{x}, x_d)(\mathcal{J}_\Omega u)(\alpha, \underline{x}, x_d).$$

*Beweis:* Für alle  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  und für alle fast überall  $\Lambda$ -periodischen Funktionen  $q \in L^\infty(\Omega)$  gilt

$$\begin{aligned} & (\mathcal{J}_\Omega(q\phi))(\alpha, \underline{x}, x_d) \\ &= \frac{\sqrt{|\det \Lambda|}}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} q(\underline{x} + \Lambda j, x_d) \phi(\underline{x} + \Lambda j, x_d) e^{i\alpha \cdot \Lambda j} \\ &= \frac{\sqrt{|\det \Lambda|}}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} q(\underline{x}, x_d) \phi(\underline{x} + \Lambda j, x_d) e^{i\alpha \cdot \Lambda j} \\ &= q(\underline{x}, x_d)(\mathcal{J}_\Omega \phi)(\alpha, \underline{x}, x_d) \end{aligned}$$

fast überall in  $x$ . Wegen der Stetigkeit der Bloch-Floquet-Transformation und der Dichtheit der Testfunktionen  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  in dem Raum  $L^2(\Omega)$  gilt die Gleichheit für alle  $u \in L^2(\Omega)$ .  $\square$

Die horizontale Bloch-Floquet-Transformation wirkt nur auf  $\underline{x}$  und ist unabhängig von der Breite des Streifens. Deswegen werden wir statt  $\mathcal{J}_\Omega$  vereinfachend  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}$  schreiben, wobei die Notation mit der für die (nicht-horizontale) Bloch-Floquet-Transformation zusammenfällt, die wir im nächsten Abschnitt betrachten.

## 2.5. Bloch-Floquet-Transformation auf der Spur

Als Nächstes betrachten wir die Bloch-Floquet-Transformation, die wir auf die Randbedingung der Differentialgleichungen anwenden werden.

**Definition 2.12** (Bloch-Floquet-Transformation). Die *Bloch-Floquet-Transformation*  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}$  ist für  $d \in \{2, 3\}$ ,  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $\underline{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$  und  $\alpha \in \mathbb{R}^{d-1}$  durch

$$(\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}\phi)(\alpha, \underline{x}) := \frac{\sqrt{|\det \Lambda|}}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} \phi(\underline{x} + \Lambda j) e^{i\alpha \cdot \Lambda j}$$

definiert.

Für eine Funktion  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  ist  $(\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}\phi)(\alpha, \cdot)$  eine quasiperiodische Funktion, die in einer Fourier-Reihe dargestellt werden kann. Die Fourier-Koeffizienten sind hierbei durch die Fourier-Transformierte von  $\phi$  beschrieben, wie wir im nächsten Lemma festhalten werden.

**Lemma 2.13.** *Für ein  $u \in H^s(\mathbb{R}^{d-1})$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , gilt für  $\alpha \in I_\Lambda$  und  $\underline{x} \in W_\Lambda$  die Fourier-Reihen-Darstellung*

$$(\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}u)(\alpha, \underline{x}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} \mathcal{F}(u)(\alpha + \Lambda^*j) e^{-i\alpha \cdot \underline{x}} \phi_\Lambda^j(\underline{x})$$

bzgl. der  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))$ -Norm.

*Beweis:* Wir wählen zunächst eine Funktion  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , für die das Bild  $(\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}\phi)$  unter der Bloch-Floquet-Transformation in  $L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))$  liegt und nach den Propositionen 2.3 und 2.4 in einer Fourier-Reihe dargestellt werden kann. Wegen der Gleichheit  $\exp(i\Lambda^*j \cdot \Lambda l) = 1$  mit  $j, l \in \mathbb{Z}^{d-1}$  und der Endlichkeit der Summe  $(\widehat{\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}\phi})_j(\alpha)$  für  $j \in \mathbb{Z}^{d-1}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}\phi})_j(\alpha) &= \frac{1}{|\det \Lambda|^{1/2}} \int_{W_\Lambda} e^{i\alpha \cdot \underline{x}} (\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}\phi)(\alpha, \underline{x}) e^{i\Lambda^*j \cdot \underline{x}} \, d\underline{x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \int_{W_\Lambda} e^{i\alpha \cdot \underline{x}} \sum_{l \in \mathbb{Z}^{d-1}} \phi(\underline{x} + \Lambda l) e^{i\alpha \cdot \Lambda l} e^{i\Lambda^*j \cdot \underline{x}} \, d\underline{x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi(\tilde{\underline{y}}) e^{i(\alpha + \Lambda^*j) \cdot \tilde{\underline{y}}} \, d\tilde{\underline{y}} \\ &= \mathcal{F}(\phi)(\alpha + \Lambda^*j). \end{aligned}$$

Wir kürzen die Summe über die Summanden, für die  $|j| \leq N$  gilt, mit  $T_N u$  ab und wählen ein  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit  $\|u - \phi\|_{H^s(\mathbb{R}^{d-1})} < \varepsilon$ , das aufgrund der Dichtheit der Menge  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  in  $H^s(\mathbb{R}^{d-1})$  existiert. Wir wählen dann ein  $N \in \mathbb{N}$  groß genug, sodass die Gleichungen von Parseval und von Plancherel die Fourier-Reihen-Darstellung durch

$$\begin{aligned} &\| \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}u - T_N u \|_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))} \\ &\leq \| \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}\phi - T_N \phi \|_{L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))} + \| \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} \| \| u - \phi \|_{H^s(\mathbb{R}^{d-1})} \\ &\quad + \left( \sum_{|j| \leq N} (1 + |j|^2)^s \| \mathcal{F}(u - \phi) \|_{L^2(I + \Lambda j)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon + \| \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} \| \varepsilon + c \left( \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (1 + |\xi|^2)^s | \mathcal{F}(u - \phi)(\xi) |^2 \, d\xi \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\leq (1 + \|\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}\| + c) \varepsilon$$

impliziert. □

Das Lemma 2.13 sagt damit aus, dass die Bloch-Floquet-Transformation für ein festes  $\alpha \in I$  auf die  $\alpha$ -quasiperiodischen Anteile der Funktion abbildet, die durch die Fourier-Transformation charakterisiert werden können. Das nächste Korollar überführt die Fourier-Koeffizienten-Gleichung auf den Urbildraum.

**Folgerung 2.14.** *Insbesondere folgt aus der Fourier-Reihen-Darstellung einer Funktion  $\tilde{u} \in L^2(I_\Lambda; H_\alpha^s(W_\Lambda))$  für  $s \in \mathbb{R}$ , die nach den Propositionen 2.3 und 2.4 existiert, die Gleichheit*

$$(\widehat{\tilde{u}})_j(\alpha) = \mathcal{F} \left( \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}^{-1} \tilde{u} \right) (\alpha + \Lambda^* j) \quad \text{für alle } \alpha \in I_\Lambda \text{ und } j \in \mathbb{Z}^{d-1}.$$

Für  $\Gamma^R := \mathbb{R}^{d-1} \times \{R\}$ ,  $R \in \mathbb{R}$ , definieren wir die Bloch-Floquet-Transformation  $\mathcal{J}_{\Gamma^R}$  auf dem Spurraum  $H^s(\Gamma^R)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , als Fortsetzung der Bloch-Floquet-Transformation  $\mathcal{J}_{\Gamma^R}$  auf  $C_0^\infty(\Gamma^R)$ , die für  $\underline{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$  und  $\alpha \in \mathbb{R}^{d-1}$  durch

$$(\mathcal{J}_{\Gamma^R} \phi)(\alpha, \underline{x}, R) := \frac{\sqrt{|\det \Lambda|}}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} \phi(\underline{x} + \Lambda j, R) e^{i\alpha \cdot \Lambda j}$$

gegeben ist. Wegen der Identifizierung von  $\Gamma^R$  mit  $\mathbb{R}^{d-1}$  kann die Bloch-Floquet-Transformation  $\mathcal{J}_{\Gamma^R}$  analog zu der Transformation  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}$  behandelt werden und alle Aussagen bleiben erhalten. Zudem gilt das folgende Lemma:

**Lemma 2.15.** *Es sei  $\Omega := \mathbb{R}^{d-1} \times (R, R')$ . Für  $u \in H^m(\Omega)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , und  $R \in \mathbb{R}$  gilt*

$$\mathcal{J}_{\Gamma^R}(u|_{\Gamma^R})(\alpha, \cdot, R) = (\mathcal{J}_\Omega u)|_{\Gamma_0^R}(\alpha, \cdot, R) \quad \text{fast überall in } \alpha \in I_\Lambda.$$

*Beweis:* Für ein  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $(\underline{x}, x_d) \in \overline{\Omega}$  und für fast alle  $\alpha \in I_\Lambda$  gilt die Identität

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_\Omega \phi)|_{\Gamma_0^R}(\alpha, \cdot, R) &= (\mathcal{J}_\Omega \phi)(\alpha, \cdot, R) = \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}(\underline{x} \mapsto \phi(\underline{x}, R))(\alpha, \cdot) \\ &= \mathcal{J}_{\Gamma^R}(\phi|_{\Gamma^R})(\alpha, \cdot, R). \end{aligned}$$

Wegen der Dichtheit der Testfunktionen  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  in  $H^m(\Omega)$  und der Stetigkeit der Bloch-Floquet-Transformationen sowie der Spurooperatoren folgt die Aussage für alle Funktionen. □

Ein analoges Resultat lässt sich für die Spurooperatoren für  $H(\text{curl}; \Omega)$  und  $H(\text{div}; \Omega)$  zeigen.

**Folgerung 2.16.** *Das Lemma 2.15 kann für  $d = 3$  analog für die Spuren der Sobolev-Räume  $H(\text{curl}; \Omega)$  und  $H(\text{div}; \Omega)$  gezeigt werden, die in*

$$TH^{-1/2}(\Gamma^R) := \left\{ u \in H^{-1/2}(\Gamma^R)^3 : u_3 = 0 \right\} \quad \text{bzw.} \quad H^{-1/2}(\Gamma^R)$$

liegen.

*Beweis:* Die Herleitung der Darstellung der Spurräume findet man in [Mon03, Section 3.5]. Die Argumentation für die Vertauschung von der Transformation und der schwachen Differentierbarkeit kann dann analog zu Lemma 2.15 geführt werden.  $\square$

## 2.6. Formel von Sherman, Morrison und Woodbury

Wenn ein invertierbarer Operator als Superposition aus zwei Teiloperatoren gegeben ist, dann erlaubt die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel die Inverse in Form dieser zwei Operatoren zu beschreiben. Wir werden später  $\alpha$ -quasiperiodische variationelle Probleme betrachten, welche eine Abhängigkeit von  $\alpha \in I_\Lambda$  besitzen. Die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel erlaubt uns dann eine Beschreibung der Abhängigkeit der Lösungsoperatoren des vektorwertigen elektromagnetischen Problems von dem Parameter  $\alpha$  anzugeben, welche wir sowohl für die Konstruktion der Lösung, als auch zur Beschreibung der Regularität der Lösung bzgl.  $\alpha$  nutzen werden. Die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel findet man in der Literatur in unterschiedlichen Versionen, siehe z. B. in [Hag89] für endlichdimensionale Räume. Wir zeigen den Satz in der Form, wie wir diesen später anwenden möchten.

### Satz 2.17

Es seien  $H_1$  und  $H_2$  zwei Hilberträume und  $S \in \mathcal{L}(H_1)$  sowie  $D \in \mathcal{L}(H_2)$  zwei invertierbare, lineare und beschränkte Operatoren. Weiterhin sollen zwei weitere lineare und stetige Operatoren  $Z_1 \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  und  $Z_2 \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  gegeben sein, sodass

$$B := S + Z_2^* D Z_1 \in \mathcal{L}(H_1) \quad \text{und} \quad G := D^{-1} + Z_1 S^{-1} Z_2^* \in \mathcal{L}(H_2)$$

invertierbar sind. Dann lässt sich die Inverse von  $B$  darstellen als

$$B^{-1} = S^{-1} - S^{-1} Z_2^* \left( D^{-1} + Z_1 S^{-1} Z_2^* \right)^{-1} Z_1 S^{-1}. \quad (2.6)$$

*Beweis:* Bezeichne den Operator aus (2.6) zunächst mit  $C$ . Nach den Voraussetzungen sind  $S$ ,  $D$ ,  $B$  und  $G$  stetig invertierbar und  $C$  als zusammengesetzter Operator linear und stetig. Wir bezeichnen mit  $I_1 \in \mathcal{L}(H_1)$  und  $I_2 \in \mathcal{L}(H_2)$  die zwei Identitätsabbildungen und können damit direkt nachrechnen, dass

$$\begin{aligned}
CB &= \left( S^{-1} - S^{-1}Z_2^* \left( D^{-1} + Z_1 S^{-1} Z_2^* \right)^{-1} Z_1 S^{-1} \right) (S + Z_2^* D Z_1) \\
&= I_1 + S^{-1} Z_2^* D Z_1 - S^{-1} Z_2^* G^{-1} Z_1 - S^{-1} Z_2^* G^{-1} Z_1 S^{-1} Z_2^* D Z_1 \\
&= I_1 + S^{-1} Z_2^* G^{-1} \left[ \left( D^{-1} + Z_1 S^{-1} Z_2^* \right) D - I_2 - Z_1 S^{-1} Z_2^* D \right] Z_1 \\
&= I_1 + S^{-1} Z_2^* G^{-1} \left[ I_2 + Z_1 S^{-1} Z_2^* D - I_2 - Z_1 S^{-1} Z_2^* D \right] Z_1 \\
&= I_1
\end{aligned}$$

gilt, sodass  $B^{-1} = CBB^{-1} = C$  erfüllt sein muss. □



## Akustische Streuung an lokal gestörten biperiodischen inhomogenen Medien

---

Als Erstes behandeln wir die Helmholtz-Gleichung im Fall eines lokal gestörten biperiodischen Mediums, wodurch ein akustisches oder ein elektromagnetisches Streuproblem im TE-Mode modelliert wird (siehe [Néd01] für die Herleitung). Für eine bessere Übersichtlichkeit nehmen wir ohne Einschränkungen an, dass das Streuobjekt auf einem perfekt elektrischen Leiter aufliegt und dass das Medium die Periode  $2\pi$  besitzt. Der allgemeinere Fall, dass die Periode anders ist oder dass das Medium sich frei im Raum befindet, kann völlig analog behandelt werden. Dieses Kapitel ist Teil der Veröffentlichung [KL19].

In der mathematischen Theorie zur Lösung von unbeschränkten periodischen Streuproblemen wird üblicherweise die einfallende Welle als quasiperiodisch angenommen. In diesem Fall kann man das Problem auf eine periodische Zelle zurückführen und leitet somit ein variationelles Problem auf einem beschränkten Gebiet her (vgl. [Sch03; BS94; DF92; AN92; BDC95; Bao94; Bao95; Kir93] für das direkte Problem und [Kir94] für das Inverse Problem). Wenn die Periodizität jedoch gestört wird oder man eine nicht-periodische einfallende Welle gegeben hat, dann schlägt diese Reduktion in der Regel fehl und man behandelt die Fragestellung als ein allgemeines Problem auf sogenannten *rauen* Oberflächen. Der Nachteil des allgemeinen Ansatzes ist, dass man höhere Regularitätsanforderungen an die Parameter stellen muss, wie z. B. Monotonie des Brechungsindex, also  $\frac{n^2}{\partial x_d} \geq 0$  und  $n^2 \leq 1$  fast überall in  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{2, 3\}$  (vgl. [LR10; HL11; Hu+15; Mei+00]). Durch die Annahme der Periodizität des ungestörten Parameters genügt es in unserem Fall anzunehmen, dass das Medium auf einer offenen Menge absorbierend wirkt, um die Eindeutigkeit und die Existenz der Lösung zu folgern. Für schallweiche Objekte, für die man das Streuproblem mit  $n^2 = 1$  betrachtet, gibt es bereits umfassende Arbeiten zur Existenztheorie in [CM05] und [CE10]. Die Bloch-Floquet-Transformation wurde auf ein Streuproblem für die akustische Streuung an einer schallweichen periodischen Oberfläche in den Arbeiten [LZ17b; Zha18; LZ17c] angewandt, um eine lokale Störung in der Oberfläche numerisch zu rekonstruieren. Zudem wurde die Transformation in [JLF06; FJ16; ESZ09] auf den Fall eines lokal gestörten Wellenleiters angewandt. Es gibt auch eine erste Arbeit für den Fall

eines inhomogenen Streuobjektes in [HN17a], wofür jedoch die vereinfachende Voraussetzung, dass die Wellenzahl komplexwertig mit nicht verschwindenden Imaginärteil ist, angenommen wurde.

Wir betrachten für unsere Problemstellung eine reell-wertige Wellenzahl  $k > 0$  und ein inhomogenes Streumedium, wofür wir annehmen, dass die Menge  $\{\text{Im } n^2 > 0\}$ , auf der das Medium absorbierend wirkt, eine offene Kugel beinhaltet. Durch die Annahme der Periodizität des ungestörten Mediums können wir die Bloch-Floquet-Transformation auf das Streuproblem anwenden. Dadurch erhalten wir eine Familie von quasiperiodischen Streuproblemen auf einem beschränkten Gebiet, für die wir die Fredholm-Theorie verwenden, um die eindeutige Lösbarkeit zu zeigen. Im Anschluss muss nur noch die Äquivalenz der beiden Probleme gezeigt werden. Auf Basis der Bloch-Floquet-Transformation werden wir zudem einen Algorithmus für die numerische Approximation der Lösung einführen, da das transformierte Problem anschließend auf einem beschränkten Gebiet definiert ist und wir keine künstliche Abschneidebedingung festlegen müssen. Dies stellt einen Vorteil gegenüber anderen Verfahren, wie z. B. die Methode aus [Bei+14] und [Bei+15], dar. Die Betrachtung der Regularität der Lösung bzgl. ihrer quasiperiodischen Teile erlaubt uns die Konvergenz der numerischen Methode zu beschleunigen, wofür wir verschiedene Möglichkeiten einer geeigneten Variablentransformation betrachten werden.

Es sei die Dimension  $d = 2, 3$  fest und  $\Lambda \in \mathbb{R}^{(d-1) \times (d-1)}$  eine invertierbare Matrix. Die Menge  $I_\Lambda \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$  und die  $j$ -te Einheitszelle  $W_\Lambda^j \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$  sollen für alle  $j \in \mathbb{Z}^{d-1}$  Bezeichnungen für die Mengen

$$I_\Lambda := \left\{ \Lambda^* z : z \in \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^{d-1} \right\} \quad \text{und} \quad W_\Lambda^j := \left\{ \Lambda(z + j) : z \in \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^{d-1} \right\}$$

sein. Zur besseren Übersichtlichkeit werden wir ohne Einschränkungen für die Einheitsmatrix  $I_{d-1} \in \mathbb{R}^{(d-1) \times (d-1)}$  die Matrizen als  $\Lambda = 2\pi I_{d-1}$  und  $\Lambda^* = I_{d-1}$  festlegen, sodass sich die Mengen auf  $I := I_\Lambda = (-1/2, 1/2)^{d-1}$  und  $W^j := W_\Lambda^j = (-\pi, \pi)^{d-1} + 2\pi j$  für  $j \in \mathbb{Z}^{d-1}$  reduzieren. Weiterhin setzen wir für alle  $R \geq 0$  die Mengen

$$\Omega^R := \mathbb{R}^{d-1} \times (0, R) \quad \text{sowie} \quad \Omega_0^R := W_\Lambda^0 \times (0, R)$$

und für alle  $R \geq 0$  die Mengen  $\Gamma^{\pm R}$  und  $\Gamma_0^{\pm R}$  als

$$\Gamma^{\pm R} := \mathbb{R}^{d-1} \times \{\pm R\} \quad \text{sowie} \quad \Gamma_0^{\pm R} := W_\Lambda^0 \times \{\pm R\}.$$

Auf dem Gebiet  $\Omega^R$  und dem entsprechenden Rand  $\Gamma^0 \cup \Gamma^R$  werden wir später das variationelle Problem formulieren. Die Mengen  $\Omega_0^R$  und  $\Gamma_0^R$  stellen jeweils eine Periode der entsprechenden ganzen Menge dar. Wir werden primär mit den Rändern  $\Gamma^R$  und  $\Gamma_0^R$  für  $R > 0$  arbeiten, im Kapitel 6 werden wir dann zusätzlich noch die Mengen  $\Gamma^{-R}$  und  $\Gamma_0^{-R}$  verwenden.

### 3.1. Formulierung des Streuproblems

Wir nehmen an, dass der ungestörte Brechungsindex  $n_p^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$   $2\pi$ -periodisch in  $\underline{x} := (x_1, \dots, x_{d-1})$  ist und die Bedingung  $n_p^2 = 1$  für  $x_d > R_0 > 0$  sowie für  $x_d < 0$  erfüllt. Die lokale Störung  $q \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  soll den Träger innerhalb von  $\Omega_0^{R_0}$  besitzen und der gestörte Brechungsindex durch  $n^2 := n_p^2 + q$  beschrieben sein. Wir bezeichnen mit  $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$  den Raum der Funktionen, die für alle offenen Gebiete  $G$  in  $H^1(G)$  liegen.

Das Streuproblem ist dadurch formuliert, dass wir eine Gesamtwelle  $u^t = u + u^{\text{inc}}$  finden, die sich in eine einfallende Welle  $u^{\text{inc}}$  und eine gestreute Welle  $u$  mit  $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d) \cap H^1((-\pi, \pi)^{d-1} \times (-R, R))$  für alle  $R > R_0$  aufteilt und für eine feste Wellenzahl  $k > 0$  die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u^t + k^2 n^2 u^t = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d$$

erfüllt. Unter der Annahme, dass die einfallende Welle bekannt und die rechte Seite  $f := k^2(n^2 - 1)u^{\text{inc}}$  eine Funktion aus  $L^2((-\pi, \pi)^{d-1} \times (-R_0, R_0))$  ist, kann das Problem umformuliert werden zu: Gesucht ist eine Funktion  $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d) \cap H^1((-\pi, \pi)^{d-1} \times (-R, R))$  für alle  $R > R_0$ , die die Gleichung

$$\Delta u + k^2 n^2 u = -f \quad \text{in } \mathbb{R}^d$$

löst. Für diese Arbeit werden wir primär das etwas abgeänderte Problem betrachten, dass  $u|_{\Gamma^0} = 0$  und  $u(\underline{x}, x_d) = 0$  für  $x_d < 0$  gilt. Dies hat keinen Einfluss auf die Analysis, vereinfacht jedoch die Notation und damit insbesondere auch das Nachvollziehen der Argumente. Deshalb definieren wir den Raum der  $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$ -Funktionen eingeschränkt auf  $\mathbb{R}_+^d$  und deren Spur auf  $\Gamma^0$  verschwindet als  $H_{0,\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^d)$  und betrachten im Folgenden das Problem, dass eine Funktion  $u \in H_{0,\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^d) \cap H^1(\Omega^R)$  gesucht wird, die die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 n^2 u &= -f && \text{in } \mathbb{R}_+^d \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma^0 \end{aligned}$$

erfüllt.

Oberhalb des Streuobjektes soll die gestreute Welle die sogenannte *angular spectrum representation* als Ausstrahlungsbedingung der Form

$$u^R(x) := \frac{1}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{i\underline{x}\cdot\underline{\xi} + i\sqrt{k^2 - |\underline{\xi}|^2}(x_d - R)} \widehat{u}(\underline{\xi}, R) \, d\underline{\xi} \quad \text{für } x_d > R \quad (3.1)$$

erfüllen, wobei  $\widehat{u}$  die Fourier-Transformierte von  $u|_{\Gamma^R}$  ist und für die Wurzelfunktion  $\sqrt{k^2 - |\underline{\xi}|^2} = i\sqrt{|\underline{\xi}|^2 - k^2}$  für  $|\underline{\xi}| > k$  gelten soll. Die Ausstrahlungsbedingung ist für alle  $R' > R$  aus  $H^1(\mathbb{R}^{d-1} \times (R, R')) \cap C^\infty(\mathbb{R}^{d-1} \times (R, \infty))$  und löst das äußere Problem

$$\begin{aligned} \Delta u^R + k^2 u^R &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^{d-1} \times (R, \infty) \\ u^R &= u && \text{auf } \Gamma^R. \end{aligned}$$

Durch formelles Differenzieren von  $u^R$  erhalten wir den *Dirichlet-Neumann-Operator*  $T$ .

**Lemma 3.1.** *Der lineare und stetige Operator  $T: H^{1/2}(\Gamma^R) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma^R)$  ist für ein  $\phi \in H^{1/2}(\Gamma^R) \cap L^1(\Gamma^R)$  durch*

$$T(\phi)(\underline{x}, R) := \frac{i}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sqrt{k^2 - |\underline{\xi}|^2} \mathcal{F}(\phi)(\underline{\xi}) e^{i\underline{x}\cdot\underline{\xi}} \, d\underline{\xi}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^{d-1},$$

gegeben und wird als *Dirichlet-Neumann-Operator* bezeichnet. Zudem erfüllt der Operator für alle  $\phi \in H^{1/2}(\Gamma^R)$  die Ungleichungen

$$-\operatorname{Re} \langle T\phi, \phi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma^R) \times H^{1/2}(\Gamma^R)} \geq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} \langle T\phi, \phi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma^R) \times H^{1/2}(\Gamma^R)} \geq 0.$$

*Beweis:* Dies wurde in [CM05, Lemma 2.4] und [CM05, Lemma 3.2] gezeigt.  $\square$

Um die homogene Dirichlet-Randbedingung an der  $x$ -Achse in den Lösungsraum einzubauen, bezeichnen wir den Unterraum der  $H^1(\Omega^R)$ -Funktionen, deren Spur auf  $\Gamma^0$  verschwindet, als  $\widetilde{H}^1(\Omega^R)$ , sodass wir das folgende variationelle Problem lösen wollen:

**Problemstellung 1**

Finde für  $n^2 = n_p^2 + q \in L^\infty(\Omega^R)$  und für ein Funktional  $f$  aus dem Dualraum  $\widetilde{H}^1(\Omega^R)'$  eine Funktion  $u \in \widetilde{H}^1(\Omega^R)$ , sodass die Gleichung

$$a_q(u, v) := \int_{\Omega^R} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - k^2 n^2 u \bar{v} \, dx - \int_{\Gamma^R} T(u|_{\Gamma^R}) \bar{v} \, dS = \int_{\Omega^R} f \bar{v} \, dx$$

für alle  $v \in \widetilde{H}^1(\Omega^R)$  erfüllt ist.

In der Abbildung 3.1 ist die Visualisierung einer beispielhaften Problemstellung zu sehen. Die Bezeichnung „Dirichlet-Neumann-Operator“ kommt daher, dass man das äußere Problem als ein klassisches Dirichlet-Randwertproblem im oberen Halbraum  $\mathbb{R}^{d-1} \times (R, \infty)$  betrachtet, wofür es mit (3.1) eine ausstrahlende Lösung gibt. Aus dieser Lösung leitet man anschließend die Neumann-Randbedingung für das innere Problem her, das wir nun betrachten.

Für gewisse reell-wertige Wellenzahlen  $k > 0$  und einen reell-wertigen Brechungsindex können Oberflächenwellen auftreten, wodurch die Eindeutigkeit nicht gewährleistet werden kann. Deswegen nehmen wir einen kleinen Bereich an, in dem das Medium absorbierend auf die gestreute Welle wirkt.

**Annahme 1.** Die Menge  $\{\text{Im } n_p^2 > 0\}$  ist nicht leer und beinhaltet eine offene Kugel. Zudem soll für den Realteil des Brechungsindex die untere Schranke  $\text{Re } n_p^2 \geq c > 0$  gelten. Für den Imaginärteil nehmen wir  $\text{Im } (n_p^2 + q) \geq 0$  an.

Das Ziel in diesem Abschnitt ist die eindeutige Existenz der Lösung des variationellen Problems 1 zu zeigen.

### Satz 3.2

Unter der Annahme 1 besitzt das variationelle Problem 1 eine eindeutige Lösung.

Um Satz 3.2 zu beweisen, beschäftigen wir uns zuerst mit dem  $\alpha$ -quasiperiodischen Streuproblem.

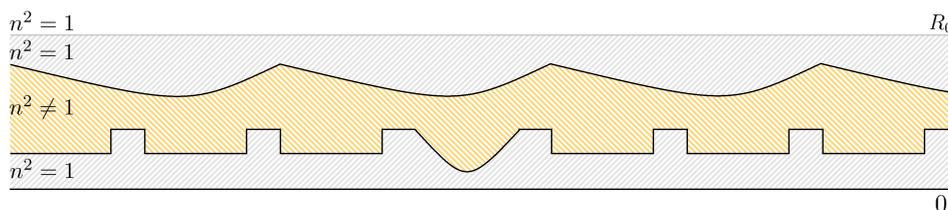


Abbildung 3.1.: Visualisierung einer möglichen Problemstellung.

## 3.2. Existenztheorie für den periodischen Brechungsindex

Um die Existenzaussage zeigen zu können, werden wir uns zunächst mit dem quasiperiodischen Problem beschäftigen. Wir führen in Lemma 3.4 das variationelle Problem 1 auf eine Familie von quasiperiodischen Problemen

zurück, welche wir durch die Anwendung der Bloch-Floquet-Transformation erhalten. Dafür betrachten wir in diesem Abschnitt zunächst den Fall, dass die Störung verschwindet, also  $q = 0$  und  $n^2 = n_p^2$  gilt, und führen für feste  $\alpha \in \bar{I}$  das quasiperiodische Streuproblem ein. Für ein  $\tilde{u} \in L^2(I; L^2(\Omega_0^R))$  schreiben wir hierzu abkürzend  $u_\alpha := \tilde{u}(\alpha, \cdot)$  für ein  $\tilde{u} \in L^2(I; L^2(\Omega_0^R))$  und verwenden die Notation

$$\alpha_j := (j + \alpha) \quad \text{und} \quad \beta_j := \sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2} = \sqrt{k^2 - |\alpha + j|^2},$$

wobei der Schnitt der komplexen Ebene so gewählt ist, dass für  $|\alpha_j|^2 > k^2$  die Gleichung  $\sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2} = i\sqrt{|\alpha_j|^2 - k^2}$  gilt.

Wir betrachten den Raum  $\tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)$  der  $H^1(\Omega_0^R)$ -Funktionen, die  $\alpha$ -quasiperiodisch in  $\underline{x}$  sind und deren Spur auf  $\Gamma_0^R$  verschwindet. In diesem Fall soll die gestreute Welle die sogenannte *Rayleigh-Ausstrahlungsbedingung* erfüllen, die durch  $u_\alpha^R(\underline{x}, x_d) := u^R(\alpha, \underline{x}, x_d)$ ,

$$u^R(\alpha, \underline{x}, x_d) := \frac{1}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} \widehat{(u_\alpha|_{\Gamma_0^R})}_j e^{-i\alpha_j \cdot \underline{x} + i\beta_j(x_d - R)} \quad \text{für } x_d > R, \quad (3.2)$$

gegeben ist. Analog zum kontinuierlichen Fall erhalten wir den ( $\alpha$ -quasiperiodischen) Dirichlet-Neumann-Operator  $T_\alpha$  durch das formelle partielle Differenzieren nach der letzten Komponente und dem Einschränken auf  $\Gamma_0^R$ , sodass

$$\frac{\partial u_\alpha^R}{\partial x_d} \Big|_{\Gamma_0^R}(\underline{x}, R) = \frac{1}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} i\beta_j \widehat{(u_\alpha|_{\Gamma_0^R})}_j e^{-i\alpha_j \cdot \underline{x}} =: T_\alpha(u_\alpha|_{\Gamma_0^R})(\underline{x}, R)$$

für  $\underline{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$  definiert ist.

**Lemma 3.3.** *Der Operator  $T_\alpha: H_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R) \rightarrow H_\alpha^{-1/2}(\Gamma_0^R)$ , bezeichnet als quasiperiodischer Dirichlet-Neumann-Operator, ist linear und beschränkt mit einer von  $\alpha$  unabhängigen Konstante. Zudem gelten für ein  $\phi \in H_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R)$  die Ungleichungen*

$$-\operatorname{Re} \langle T_\alpha \phi, \phi \rangle_{H_\alpha^{-1/2}(\Gamma_0^R) \times H_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R)} \geq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} \langle T_\alpha \phi, \phi \rangle_{H_\alpha^{-1/2}(\Gamma_0^R) \times H_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R)} \geq 0.$$

*Beweis:* Für  $j \in \mathbb{Z}^{d-1}$  gilt die Abschätzung

$$\frac{|\beta_j|^2}{1 + |j|^2} = \frac{|k^2 - |\alpha_j|^2|}{1 + |j|^2} \leq \frac{k^2 + (|\alpha| + |j|)^2}{1 + |j|^2} \leq k^2 + 4.$$

Mit dieser Abschätzung und der Parseval-Gleichung rechnen wir nach, dass

$$\begin{aligned} \|T_\alpha \phi\|_{H_\alpha^{-1/2}(\Gamma_0^R)}^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} (1 + |j|^2)^{-1/2} |\beta_j|^2 |\widehat{\phi}_j|^2 \\ &\leq (k^2 + (|\alpha| + 1)^2) \sum_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} (1 + |j|^2)^{1/2} |\widehat{\phi}_j|^2 \\ &\leq (k^2 + 4) \|\phi\|_{H_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R)}^2 \end{aligned}$$

gilt und insbesondere das Bild in  $H_\alpha^{-1/2}(\Gamma_0^R)$  liegt. Die Ungleichungen ergeben sich aus direktem Nachrechnen durch

$$-\operatorname{Re} \langle T_\alpha \phi, \phi \rangle = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}^{d-1} \\ |\alpha_j| \geq k}} |\beta_j| |\widehat{\phi}_j|^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} \langle T_\alpha \phi, \phi \rangle = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}^{d-1} \\ |\alpha_j| < k}} |\beta_j| |\widehat{\phi}_j|^2 \geq 0,$$

wobei wir hier die Normierungskonstante weggelassen haben.  $\square$

**Lemma 3.4.** *Es sei  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}$  als  $\mathcal{J}$  abgekürzt. Eine Funktion  $u \in \widetilde{H}^1(\Omega^R)$  löst die Problemstellung 1 für  $q = 0$  genau dann, wenn  $\mathcal{J}u \in L^2(I; \widetilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R))$  das transformierte variationelle Problem*

$$\begin{aligned} &\int_I \left[ \int_{\Omega_0^R} \nabla_x \mathcal{J}u \cdot \nabla_x \bar{v} - k^2 n_p^2 \mathcal{J}u \bar{v} \, dx - \int_{\Gamma_0^R} T_\alpha(\mathcal{J}u|_{\Gamma_0^R}) \bar{v}|_{\Gamma_0^R} \, dS \right] d\alpha \\ &= \int_I \int_{\Omega_0^R} (\mathcal{J}f)(\alpha, \cdot) \bar{v} \, dx \, d\alpha \end{aligned} \quad (3.3)$$

für alle  $v \in L^2(I; \widetilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R))$  löst. Zudem sind die Ausstrahlungsbedingungen (3.1) und (3.2) äquivalent nach der Transformation.

*Beweis:* Es sei weiterhin die Abkürzung  $u_\alpha := (\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}u)(\alpha, \cdot) \in \widetilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)$  für  $u \in \widetilde{H}^1(\Omega^R)$  definiert. Aus Kapitel 2 wissen wir, dass die Bloch-Floquet-Transformation ein Isomorphismus zwischen  $\widetilde{H}^s(\Omega^R)$  und  $L^2(I; \widetilde{H}_\alpha^s(\Omega_0^R))$  für alle  $s \in \mathbb{R}$  ist, dass der adjungierte Operator  $\mathcal{J}^*$  dem inversen Operator  $\mathcal{J}^{-1}$  gleicht, dass die schwache Differenzierbarkeit mit der Transformation vertauschbar ist und die Gleichheit  $\mathcal{J}(n_p^2 w) = n_p^2 \mathcal{J}w$  für alle  $w \in L^2(\Omega^R)$  gilt. Die Anwendung dieser Eigenschaften impliziert

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^R} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - k^2 n_p^2 u \bar{v} \, dx &= \int_{\Omega^R} \nabla u \cdot \overline{\mathcal{J}^{-1}(\mathcal{J} \nabla \bar{v})} - k^2 n_p^2 u \overline{\mathcal{J}^{-1}(\mathcal{J} \bar{v})} \, dx \\ &= \int_I \int_{\Omega_0^R} \nabla_x(\mathcal{J}u) \cdot \nabla_x(\overline{\mathcal{J} \bar{v}}) - k^2 n_p^2(\mathcal{J}u)(\overline{\mathcal{J} \bar{v}}) \, dx \, d\alpha. \end{aligned}$$

Die Äquivalenz der rechten Seite kann analog gezeigt werden, sodass nur noch die Äquivalenz auf dem Rand zu zeigen bleibt.

Es sei der Spuroperator  $\gamma_{\Gamma^R}: \tilde{H}^1(\Omega^R) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma^R)$  sowie der Spuroperator  $\gamma_{\Gamma_0^R}: \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R) \rightarrow H_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R)$  gegeben. Die Identifikation der Inversen mit dem adjungierten Operator der Bloch-Floquet-Transformation ergibt

$$\int_{\Gamma^R} T(\gamma_{\Gamma^R} u) \gamma_{\Gamma^R} \bar{v} \, dS = \int_I \int_{\Gamma_0^R} (\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} T(\gamma_{\Gamma^R} u))(\alpha, \underline{x}) \overline{(\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} \gamma_{\Gamma^R} v)}(\alpha, \underline{x}) \, dS(\underline{x}) \, d\alpha.$$

Aus Lemma 2.15 folgt  $\gamma_{\Gamma_0^R} \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} u = \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} \gamma_{\Gamma^R} u$ , sodass nur noch

$$T_\alpha(\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} u)(\alpha, \cdot) = (\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} T u)(\alpha, \cdot) \quad \text{für alle } u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$$

zu zeigen bleibt. Für glatte Funktionen mit kompaktem Träger  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  und für die Fourier-Basisfunktionen  $\{\phi_\Lambda^j\}$  aus (2.1) definieren wir den Operator

$$(\tilde{J}\phi)(\alpha, \underline{x}) := \sum_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} \phi(\alpha + j) e^{-i\alpha \cdot \underline{x}} \phi_\Lambda^j(\underline{x}) \quad \text{für } (\alpha, \underline{x}, R) \in I \times \Gamma_0^R,$$

welcher nach Lemma 2.13 beschrieben werden kann durch  $\tilde{J} = \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} \circ \mathcal{F}^{-1}$ . Das bedeutet, dass für  $s \in \mathbb{R}$  der Operator  $\tilde{J}$  ein Isomorphismus zwischen den Räumen  $L_s^2(\Gamma^R)$  und  $L^2(I; H_\alpha^s(\Gamma_0^R))$  darstellt, wobei  $L_s^2(\Gamma^R)$  als der Teilraum von  $L^2(\Gamma^R)$  definiert ist, deren Funktionen  $w$  einen endlichen Wert bzgl. der Norm  $\|\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{s/2} w(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}$  annehmen. Das Einsetzen des Operators in die Definition des Dirichlet-Neumann-Operators  $T$  impliziert

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} \circ T u &= \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} \circ \mathcal{F}^{-1} \left( \xi \mapsto i\sqrt{k^2 - |\xi|^2} \mathcal{F}(\gamma_{\Gamma^R} u)(\xi) \right) \\ &= \tilde{J} \left( \xi \mapsto i\sqrt{k^2 - |\xi|^2} \mathcal{F}(\gamma_{\Gamma^R} u)(\xi) \right). \end{aligned}$$

Da  $(\xi \mapsto i\sqrt{k^2 - |\xi|^2} \mathcal{F}(\gamma_{\Gamma^R} u)(\xi)) \in L_{s-1}^2(\mathbb{R}^{d-1})$  und nach Folgerung 2.14  $\mathcal{F}(\gamma_{\Gamma^R} u)(\alpha + j) = \widehat{(\gamma_{\Gamma_0^R} u)_\alpha}_j(\alpha)$  gilt, ist damit die behauptete Identität gezeigt.

Die Äquivalenz der Ausstrahlungsbedingungen kann durch die Nutzung der selben Identität  $\widehat{(\gamma_{\Gamma_0^R} u)_\alpha}_j(\alpha) = \mathcal{F}(\gamma_{\Gamma^R} u)(\alpha + j)$  (aus der Folgerung 2.14) direkt nachgerechnet werden.  $\square$

Dementsprechend sind das variationelle Problem 1 mit verschwindender Störung  $q$  und die Formulierung in der Integralform (3.3) äquivalent, sodass wir alternativ den folgenden Satz zeigen können.

**Satz 3.5**

Wenn die Annahme 1 erfüllt ist, dann existiert eine eindeutige Lösung zu dem variationellen Problem in der Integralform aus (3.3).

Die Aussage teilen wir in mehrere Teilaussagen auf und zeigen diese getrennt. Zunächst zitieren wir hierzu den Satz über die eindeutige Fortsetzbarkeit.

**Proposition 3.6.** Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{2, 3\}$ , ein Gebiet,  $w \in H_{\text{loc}}^2(G)$  und es gelte für ein  $V \in L^\infty(G)$  die Ungleichung  $|\Delta w(x)| \leq V(x)|w(x)|$  fast überall in  $G$ . Dann verschwindet  $w$  auf dem ganzen Gebiet  $G$ .

*Beweis:* Das Resultat ist unter dem Namen *weak continuation property* bekannt, für Beweise sei z. B. auf [Mon03, Lemma 4.15] für  $d = 3$  oder auf [Mül54] verwiesen.  $\square$

**Lemma 3.7.** Unter der Annahme 1 existiert für alle  $\alpha \in \bar{I}$  eine eindeutige Lösung  $w_\alpha \in \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)$  zum variationellen Problem

$$\begin{aligned} a_\alpha(w_\alpha, v) &:= \int_{\Omega_0^R} \nabla_x w_\alpha \cdot \nabla_x \bar{v} - k^2 n_p^2 w_\alpha \bar{v} \, dx - \int_{\Gamma_0^R} T_\alpha(w_\alpha|_{\Gamma_0^R}) \bar{v}|_{\Gamma_0^R} \, dS \\ &= \int_{\Omega_0^R} (\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} f)(\alpha, \cdot) \bar{v} \, dx \end{aligned} \quad (3.4)$$

für alle  $\bar{v} \in \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)$ .

*Beweis:* Es sei  $w_\alpha \in \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)$  für ein festes  $\alpha \in \bar{I}$ . Aus Lemma 3.3 folgt die Gårding Ungleichung

$$\operatorname{Re} a_\alpha(w_\alpha, w_\alpha) \geq \|w_\alpha\|_{H_\alpha^1(\Omega_0^R)}^2 - \|1 - k^2 n_p^2\|_{L^2(\Omega_0^{R_0})} \|w_\alpha\|_{L^2(\Omega_0^R)}^2.$$

Für den Fall  $\|1 - k^2 n_p^2\|_{L^2(\Omega_0^{R_0})} = 0$  ist das Problem nach dem Satz von Lax und Milgram A.4 eindeutig lösbar. Wegen der kompakten Einbettung von  $\tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)$  in  $L^2(\Omega_0^R)$  nach [McL00, Theorem 3.27] ist der Differentialoperator somit ein Fredholm-Operator mit Index Null. Für die Anwendung der Fredholm-Alternative A.3 müssen wir also nur noch die Eindeutigkeit zeigen, um ebenso die Existenz der Lösung zu erhalten.

Wenn nun die rechte Seite verschwindet, dann folgt aus Lemma 3.3 und den Voraussetzung  $\operatorname{Im} n_p^2 \geq 0$  sowie  $\operatorname{Im} n_p^2 > 0$  auf einer offenen Kugel, dass die Ungleichung

$$0 = \operatorname{Im} \left( \int_{\Omega_0^R} k^2 n_p^2 |w_\alpha|^2 \, dx + \int_{\Gamma_0^R} T_\alpha(w_\alpha) \bar{w}_\alpha \, dS \right) \geq \int_{\Omega_0^R} k^2 (\operatorname{Im} n_p^2) |w_\alpha|^2 \, dx \geq 0$$

erfüllt ist. Insbesondere folgern wir daraus, dass  $w_\alpha$  auf der offenen Kugel, in der  $\text{Im } n_p^2 > 0$  gilt, verschwindet. Der Satz über die eindeutige Fortsetzbarkeit 3.6 impliziert damit, dass  $w_\alpha$  überall in  $\Omega_0^R$  verschwindet.  $\square$

Mit derselben Argumentation erhalten wir die Eindeutigkeit des variationellen Problems in der Integralform (3.3).

**Folgerung 3.8.** *Unter der Annahme 1 gibt es für jede rechte Seite maximal eine Lösung zu dem variationellen Problem (3.3).*

*Beweis:* Nach Lemma 3.3 folgern wir für eine Lösung  $w \in L^2(I; \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R))$  zu  $(\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}f) = 0$  die Abschätzung

$$0 = \text{Im} \left( \int_I \int_{\Omega_0^R} k^2 n_p^2 |w_\alpha|^2 \, dx \, d\alpha + \int_I \int_{\Gamma_0^R} T_\alpha(w_\alpha) \bar{w}_\alpha \, dS \, d\alpha \right) \geq 0,$$

wobei  $w_\alpha := w(\alpha, \cdot)$  definiert ist. Deshalb verschwindet  $w_\alpha$  auf einer offenen Kugel in  $\Omega_0^R$  für fast alle  $\alpha \in I$ . Da  $w_\alpha$  die Helmholtz-Gleichung fast überall in  $I$  löst, folgt aus dem Satz über die eindeutige Fortsetzbarkeit 3.6, dass  $w_\alpha$  überall bzgl.  $x$  und fast überall in  $I$  verschwindet.  $\square$

Nun zeigen wir die Verbindung zwischen dem Problem in der Integralform (3.3) und dem variationellen Problem, das punktweise für  $\alpha \in \bar{I}$  definiert ist.

**Lemma 3.9.** *Unter der Annahme 1 ist das variationelle Problem (3.3) eindeutig lösbar.*

*Beweis:* Es sei mit  $(\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}f)(\alpha, \cdot)$  die transformierte rechte Seite gegeben, dann bezeichnen wir mit  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \bar{I}}$  die Lösungen zu dem variationellen Problem (3.4), die nach Lemma 3.7 existieren. Wir definieren die Funktion  $w$  als  $w(\alpha, \cdot) := u_\alpha$  für alle  $\alpha \in \bar{I}$ , welche nach Konstruktion das Problem (3.3) löst. Zu zeigen bleibt, dass  $w$  in dem Lösungsraum  $L^2(I; \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R))$  liegt. Hierfür wollen wir zunächst zeigen, dass der Lösungsoperator  $L_\alpha$  für das  $\alpha$ -quasiperiodische variationelle Problem (3.4) gleichmäßig stetig auf  $\bar{I}$  ist, woraus dann insbesondere folgt, dass die Operatoren gleichmäßig beschränkt auf  $\bar{I}$  sind.

Wir betrachten zunächst die Stetigkeit der Sesquilinearform  $a_\alpha$  aus (3.4). Für jede Funktion  $v_\alpha \in \tilde{H}_\alpha^1(\Omega^R)$  gibt es eine Funktion  $v_\alpha^p$  aus dem Raum für  $\alpha = 0$ , den wir mit  $\tilde{H}_p^1(\Omega_0^R) := \tilde{H}_0^1(\Omega_0^R)$  bezeichnen, sodass

$$v_\alpha(\underline{x}, x_d) = e^{i\alpha \cdot \underline{x}} v_\alpha^p(\underline{x}, x_d) \quad \text{und} \quad \|v_\alpha\|_{\tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)} = \|v_\alpha^p\|_{\tilde{H}_p^1(\Omega_0^R)}$$

erfüllt ist. Für zwei Funktionen  $v_\alpha, u_\alpha \in \tilde{H}_\alpha^1(\Omega^R)$  wählen wir, wie eben beschrieben, zwei passende Funktionen  $v_\alpha^p, u_\alpha^p \in \tilde{H}_p^1(\Omega^R)$ . Das Einsetzen dieser Funktionen in die Sesquilinearform  $a_\alpha$  ergibt die abgeänderte Sesquilinearform

$$b_\alpha(u_\alpha^p, v_\alpha^p) := \int_{\Omega_0^R} \left( \nabla u_\alpha^p \cdot \nabla \bar{v}_\alpha^p + (|\alpha|^2 - k^2 n_p^2) u_\alpha^p \bar{v}_\alpha^p + i u_\alpha^p (\alpha \cdot \nabla_{\underline{x}} \bar{v}_\alpha^p) - i \bar{v}_\alpha^p (\alpha \cdot \nabla_{\underline{x}} u_\alpha^p) \right) dx - \int_{\Gamma_0^R} S_\alpha(u_\alpha^p|_{\Gamma_0^R}) \bar{v}_\alpha^p|_{\Gamma_0^R} dS,$$

wobei der Operator  $S_\alpha$  definiert ist als

$$\int_{\Gamma_0^R} S_\alpha(u_\alpha^p|_{\Gamma_0^R}) \bar{v}_\alpha^p|_{\Gamma_0^R} dS := \sum_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} i \beta_j(\alpha) \widehat{(u_\alpha^p|_{\Gamma_0^R})_j} \overline{\widehat{(v_\alpha^p|_{\Gamma_0^R})_j}}.$$

Im Unterschied zu  $T_\alpha$  ist der Operator  $S_\alpha$  nur in den Koeffizienten  $\beta_j(\alpha) := \sqrt{k^2 - |\alpha + j|^2}$  von  $\alpha$  abhängig. Wir wählen  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^{d-1}$  und  $\alpha_\varepsilon \in \mathbb{R}^{d-1}$ , sodass  $|\alpha_\varepsilon - \alpha| < \varepsilon$  erfüllt ist. Dann gilt für alle  $u, v \in \tilde{H}_p^1(\Omega_0^R)$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |b_{\alpha_\varepsilon}(u, v) - b_\alpha(u, v)| &\leq (|\alpha_\varepsilon|^2 - |\alpha|^2 + 2|\alpha_\varepsilon - \alpha|) \|u\|_{\tilde{H}_p^1(\Omega_0^R)} \|v\|_{\tilde{H}_p^1(\Omega_0^R)} \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} |\beta_j(\alpha_\varepsilon) - \beta_j(\alpha)| \left| \widehat{(u|_{\Gamma_0^R})_j} \overline{\widehat{(v|_{\Gamma_0^R})_j}} \right| \\ &\leq (|\alpha_\varepsilon|^2 - |\alpha|^2 + 2|\alpha_\varepsilon - \alpha|) \|u\|_{\tilde{H}_p^1(\Omega_0^R)} \|v\|_{\tilde{H}_p^1(\Omega_0^R)} \\ &\quad + C(\alpha_\varepsilon, \alpha) \|u\|_{\tilde{H}_p^1(\Omega_0^R)} \|v\|_{\tilde{H}_p^1(\Omega_0^R)}, \end{aligned}$$

wobei die Konstante  $C(\alpha_\varepsilon, \alpha)$  definiert ist als

$$C(\alpha_\varepsilon, \alpha) := c_{\text{Spur}} \sup_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} \frac{|(k^2 - |j + \alpha_\varepsilon|^2)^{1/2} - (k^2 - |j + \alpha|^2)^{1/2}|}{(1 + |j|^2)^{1/2}}.$$

Für  $j = 0$  und für  $j \in \mathbb{Z}^{d-1}$  mit  $k^2 = |j + \alpha|^2$  ist der Bruch von  $C(\alpha_\varepsilon, \alpha)$  stetig in  $\bar{I}$  und geht gegen Null für  $\alpha_\varepsilon \rightarrow \alpha$ . Für jedes weitere  $j \in \mathbb{Z}^{d-1}$  ist

$$\begin{aligned} &\frac{|(k^2 - |j + \alpha_\varepsilon|^2)^{1/2} - (k^2 - |j + \alpha|^2)^{1/2}|}{(1 + |j|^2)^{1/2}} \\ &= \frac{||j + \alpha_\varepsilon|^2 - |j + \alpha|^2|}{(1 + |j|^2)^{1/2} |(k^2 - |j + \alpha_\varepsilon|^2)^{1/2} + (k^2 - |j + \alpha|^2)^{1/2}|}. \end{aligned}$$

Für alle  $j \in \mathbb{Z}^{d-1}$  mit  $k^2 \neq |j + \alpha|^2$  ist der Wert  $\beta_j(\alpha)$  entweder in  $(-\infty, 0)$ , oder in  $i(0, \infty)$  enthalten, und erfüllt  $|\beta_j(\alpha)| > \delta$  für ein kleines  $\delta > 0$  unabhängig von  $j$ . Daraus folgt  $|(k^2 - |j + \alpha_\varepsilon|^2)^{1/2} + (k^2 - |j + \alpha|^2)^{1/2}| \geq \delta$  für alle  $\alpha_\varepsilon \in \bar{I}$  und wir erhalten die Stetigkeit des Operators  $\alpha \mapsto b_\alpha$  von  $\bar{I}$  nach

$\mathcal{L}(\tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R); \mathcal{L}(\tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R); \mathbb{C}))$  durch die Abschätzung

$$C(\alpha_\varepsilon, \alpha) \leq \sup_{j \in \mathbb{Z}^{d-1}} \frac{c}{|j|^\delta} \left| \sum_{i=1}^{d-1} (\alpha_\varepsilon - \alpha)_i (\alpha_\varepsilon + \alpha + 2j)_i \right| \rightarrow 0 \quad \text{für } \alpha_\varepsilon \rightarrow \alpha.$$

Da die beiden Sesquilinearformen  $a_\alpha$  und  $b_\alpha$  äquivalent sind und die Normen der entsprechenden Räume übereinstimmen, ist somit auch die Sesquilinearform  $a_\alpha$  stetig in  $\alpha$ . Aus der Neumannschen Reihe [A.1](#) folgern wir, dass der Lösungsoperator  $\alpha \mapsto L_\alpha$  stetig von  $\alpha \in \bar{I}$  abhängt und die Kompaktheit der Menge  $\bar{I}$  die Existenz einer von  $\alpha$  unabhängigen Konstante  $C := \sup_{\alpha \in \bar{I}} \|L_\alpha\|$  impliziert. Insbesondere ist die Funktion  $w$  ein Element aus  $L^2(I; \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R))$ , denn

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^2(I; \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R))}^2 &= \int_I \|w_\alpha\|_{\tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)}^2 \, d\alpha \leq \int_I \|L_\alpha\|^2 \|(\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} f)(\alpha, \cdot)\|_{\tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)}^2 \, d\alpha \\ &\leq C^2 \|\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} f\|_{L^2(I; \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R))}^2. \end{aligned}$$

□

### 3.3. Existenztheorie für den lokal gestörten Brechungsindex

Aus der Kombination von Satz [3.5](#) und Lemma [3.4](#) folgt die eindeutige Existenz der Lösung für die Problemstellung [1](#) im ungestörten Fall. Nun möchten wir den Fall betrachten, dass die Störung  $q \in L^\infty(\Omega_0^{R_0})$  nicht verschwindet.

*Beweis von Satz [3.2](#):* Für eine Störung  $q \in L^\infty(\Omega_0^R)$  ist die Sesquilinearform  $l: \tilde{H}^1(\Omega^R) \times \tilde{H}^1(\Omega^R) \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$l(u, v) := \int_{\Omega^R} k^2 q u \bar{v} \, dx,$$

eine kompakte Störung des Differentialoperators, da  $q$  einen kompakten Träger in  $\Omega_0^{R_0}$  besitzt und nach [[McL00](#), Theorem 3.27] der Sobolev-Raum  $H^1(\Omega_0^{R_0})$  kompakt eingebettet in  $L^2(\Omega_0^{R_0})$  ist. Wie wir zuvor gezeigt haben, ist das ungestörte Problem eindeutig lösbar, sodass das variationelle Problem [1](#) einen Fredholm-Operator von Index Null darstellt und wir nach Satz [A.3](#) nur noch die Eindeutigkeit zeigen müssen. Sei hierzu  $u$  die Lösung des variationellen Problems [1](#) für die rechte Seite  $f = 0$ . Mit den Abschätzung des Dirichlet-Neumann-Operators aus Lemma [3.1](#) erhalten wir

$$0 \geq \operatorname{Im} \int_{\Omega^R} k^2 (n_p^2 + q) |u|^2 \, dx = \int_{\Omega^R} k^2 \left[ \operatorname{Im} (n_p^2 + q) \right] |u|^2 \, dx \geq 0.$$

Damit verschwindet  $u$  auf der offenen Menge in  $\{\operatorname{Im} n_p^2 > 0\} \setminus \Omega_0^R$ . Nach dem Satz über die eindeutige Fortsetzbarkeit 3.6 verschwindet  $u$  demnach auf ganz  $\Omega^R$ .  $\square$

### 3.4. Regularität der Lösung bzgl. der Quasiperiodizität

Im diesem letzten Teil der Theorie betrachten wir noch die Regularität der Lösung des variationellen Problems 1 bzgl. der Quasiperiodizität. Dieses Resultat können wir später z. B. für eine bessere Approximation der inversen Bloch-Floquet-Transformation nutzen, indem wir eine passende Transformation des Gebietes  $I$  wählen. Das Vorgehen führt zu einer höheren Konvergenzrate der numerischen Methode, unter der Voraussetzung, dass die rechte Seite genügend glatt ist. Definiere dafür die Menge der Singularitäten

$$\mathcal{A} := \left\{ \alpha \in \bar{I} : |\alpha + j| = k \quad \text{für ein } j \in \mathbb{Z}^{d-1} \right\}. \quad (3.5)$$

Zunächst behandeln wir die Regularität des ungestörten Problems, die direkt aus dem Satz über die Neumannsche Reihe folgt.

**Proposition 3.10.** *Wir bezeichnen mit  $u_\alpha$  die Lösung des Problems (3.4) mit rechter Seite  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} f(\alpha, \cdot)$ . Wenn die rechte Seite  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} f$  analytisch in  $\alpha \in \bar{I}$  ist, dann ist auch der Operator  $\alpha \mapsto u_\alpha$  analytisch in  $\bar{I} \setminus \mathcal{A}$ . Zudem gibt es für alle  $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$  ein  $j_0 \in \mathbb{Z}^{d-1}$  und eine Umgebung  $U(\hat{\alpha}) \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$  von  $\hat{\alpha}$ , sodass die Lösung  $u_\alpha$  in zwei analytische Funktionen  $u_\alpha^{(1)}$  und  $u_\alpha^{(2)}$  der Form*

$$u_\alpha = u_\alpha^{(1)} + \sqrt{k^2 - |\alpha + j_0|^2} u_\alpha^{(2)} \quad \text{für } \alpha \in U(\hat{\alpha})$$

zerlegt werden kann.

*Beweis:* Das Resultat kann analog zu [Kir93, Theorem a] gezeigt werden, wo der Fall des quasiperiodischen Streuproblems mit schallweichen Randbedingungen behandelt wird. Grob zusammengefasst lässt sich der zur Sesquilinearform  $a_\alpha$  gehörige Differentialoperator  $D_\alpha$  für analytisch von  $\alpha$  abhängigen Operatoren in die Summe  $D_\alpha^{(1)} + \sqrt{k^2 - |\alpha + j_0|^2} D_\alpha^{(2)}$  zerlegen. Wegen der Konvergenz  $\sqrt{k^2 - |\alpha + j_0|^2} \rightarrow 0$  für  $|\alpha + j_0|^2 \rightarrow k^2$  folgt aus der Neumannschen Reihe A.1, dass die Inverse in derselben Form zerlegt werden kann.  $\square$

Da der Störteil der Sesquilinearform unabhängig von  $\alpha$  ist, erhalten wir auch in diesem Fall eine analoge Zerlegung.

**Satz 3.11**

Es sei  $u \in \tilde{H}^1(\Omega^R)$  die Lösung zu dem (gestörten) variationellen Problem 1 zu einer rechten Seite  $f \in L^2(\Omega^R)$ , setze  $u_\alpha := \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}u(\alpha, \cdot)$  und es sei  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}f$  analytisch in  $\alpha \in \bar{I}$ . Dann ist  $u_\alpha$  analytisch in  $\alpha \in \bar{I} \setminus \mathcal{A}$  und für alle  $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$  gibt es ein  $j_0 \in \mathbb{Z}^{d-1}$  und eine Umgebung  $U(\hat{\alpha})$  von  $\hat{\alpha}$ , sodass zwei analytische Funktionen  $u_\alpha^{(1)}$  und  $u_\alpha^{(2)}$  existieren und  $u_\alpha$  zerlegt werden kann in

$$u_\alpha = u_\alpha^{(1)} + \sqrt{k^2 - |\alpha + j_0|^2} u_\alpha^{(2)} \quad \text{für } \alpha \in U(\hat{\alpha}). \quad (3.6)$$

*Beweis:* Es sei  $K_q \in \mathcal{L}(L^2(I; \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)))$  die Riesz-Darstellung des Operators  $(w \mapsto k^2 q \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}^{-1} w) \in \mathcal{L}(L^2(I; \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)), L^2(I; \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)))'$ ,

$$(K_q w, v)_{L^2(I; \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R))} = k^2 \int_I \int_{\Omega_0^R} q(\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}^{-1} w) \bar{v} \, dx \, d\alpha \quad \text{für alle } v \in L^2(I; \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)).$$

Der Operator  $K_q$  bildet Funktionen aus  $L^2(I; \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R))$  auf Funktionen ab, die unabhängig von  $\alpha$  sind und somit insbesondere auch analytisch in  $\alpha$  sind. Setze  $w = \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}^{-1} u \in L^2(I; \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R))$  als die Lösung zu dem gestörten variationellen Problem 1 und bezeichne mit  $A \in \mathcal{L}(L^2(I; \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)))$  die Riesz-Darstellung des ungestörten invertierbaren Differentialoperators, also für  $q = 0$ , sowie mit  $\tilde{f}$  die Riesz-Darstellung von der rechten Seite  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} f$ . Dann können wir die Differentialgleichung als Operatorgleichung der Form

$$w = A^{-1} \tilde{f} + A^{-1} K_q w \in L^2(I; \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R))$$

schreiben. Da die rechte Seite  $\tilde{f}$  und  $K_q w$  analytisch in  $\alpha$  sind, folgt aus Satz 3.10 die behauptete Zerlegung (3.6) für  $w$ .  $\square$

**Bemerkung 3.12.** Das Resultat kann ohne Weiteres auf den Fall erweitert werden, dass die rechte Seite  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} f$  eine analoge Zerlegung der Form  $f_\alpha = f_\alpha^{(1)} + \sqrt{k^2 - |\alpha + j_0|^2} f_\alpha^{(2)}$  besitzt, wobei  $f_\alpha^{(1)}$  und  $f_\alpha^{(2)}$  analytisch in  $\alpha$  sind.

### 3.5. Bloch-Floquet-Transformation-basierte numerische Methode

In diesem Unterkapitel erläutern wir die Diskretisierung des variationellen Problems 1 auf einem unbeschränkten Gebiet mit einer nicht verschwindenden lokalen Störung. Die Anwendung der Bloch-Floquet-Transformation erlaubt

uns das unbeschränkte Problem ohne Abschneidebedingungen zu diskretisieren. Daraus erhalten wir ein Gleichungssystem, das sich auf natürlicher Weise in Teilprobleme aufteilt und sich dadurch sehr gut parallelisieren lässt. Der hier hergeleitete Algorithmus wird zudem essentiell für die Numerik des Inversen Problems der Rekonstruktion der Störung sein.

Zunächst wenden wir die Bloch-Floquet-Transformation an, um das Problem

$$\int_I \left( a_\alpha(w_\alpha, v_\alpha) - \int_{\Omega_0^R} k^2 q(\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}^{-1} w) \bar{v}_\alpha \, dx \right) d\alpha = \int_I \int_{\Omega_0^R} (\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} f)(\alpha, \cdot) \bar{v}_\alpha \, dx \, d\alpha \quad (3.7)$$

für  $w_\alpha = (\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} w)(\alpha, \cdot)$ ,  $w \in \tilde{H}^1(\Omega^R)$ ,  $v_\alpha = (\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} v)(\alpha, \cdot)$ ,  $v \in \tilde{H}^1(\Omega^R)$ , zu erhalten. Um  $\alpha$ -abhängige quasiperiodische Räume  $\tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)$  zu vermeiden, werden wir stattdessen Funktionen aus dem Raum  $\tilde{H}_p^1(\Omega_0^R) := \tilde{H}_0^1(\Omega_0^R)$ , also dem quasiperiodischen Raum für  $\alpha = 0$ , betrachten. Jede Funktion  $w_\alpha$  aus  $\tilde{H}_\alpha^1(\Omega^R)$  lässt sich durch  $w_\alpha(\underline{x}, x_d) = e^{-i\alpha \cdot \underline{x}} w_\alpha^p(\underline{x}, x_d)$  für ein  $w_\alpha^p \in \tilde{H}_p^1(\Omega_0^R)$  identifizieren. Da der Gradient damit zu  $(\nabla_x - i\alpha)w_\alpha^p$  wird, können wir die Sesquilinearform  $a_\alpha$  für alle  $w_\alpha^p, v \in \tilde{H}_p^1(\Omega_0^R)$  umformulieren zu

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\alpha(w_\alpha^p, \bar{v}) &:= \int_{\Omega_0^R} \nabla_x w_\alpha^p \cdot \nabla_x \bar{v} - i w_\alpha^p (\alpha \cdot \nabla_x \bar{v}) + i (\alpha \cdot \nabla_x w_\alpha^p) \bar{v} + |\alpha|^2 w_\alpha^p \bar{v} \\ &\quad - k^2 n_p^2 w_\alpha^p \bar{v} \, dx - \int_{\Gamma_0^R} T_\alpha(w_\alpha^p|_{\Gamma_0^R}) \bar{v}|_{\Gamma_0^R} \, dS, \end{aligned}$$

wobei der Dirichlet-Neumann-Operator  $T_\alpha$  gleich bleibt, da der Wert der Fourier-Koeffizienten unverändert bleibt. Wir setzen  $\mathcal{J}v := e^{i\alpha \cdot \underline{x}} \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}} v$  für  $v \in L^2(I; \tilde{H}_p^1(\Omega_0^R))$  und

$$\tilde{b}(w, v) := -k^2 \int_I \int_{\Omega_0^R} e^{i\alpha \cdot \underline{x}} q(\mathcal{J}^{-1} w) \bar{v} \, dx \, d\alpha \quad \text{für } w, v \in L^2(I; \tilde{H}_p^1(\Omega_0^R)),$$

sodass wir das transformierte Problem (3.7) umformulieren können zu

$$\int_I \tilde{a}_\alpha(w(\alpha, \cdot), v(\alpha, \cdot)) \, d\alpha + \tilde{b}(w, v) = \int_I \int_{\Omega_0^R} \mathcal{J} f \bar{v} \, dx \, d\alpha. \quad (3.8)$$

Der Störteil  $\tilde{b}$  koppelt die  $\alpha$ -quasiperiodischen Komponenten der transformierten Lösung, sodass die quasiperiodischen Teilprobleme nicht einfach getrennt gelöst werden können.

Nun wollen wir die Gleichung (3.8) diskretisieren. Als Erstes diskretisieren wir das Intervall  $\bar{I}$  durch  $N^{d-1}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , äquidistante Punkte  $\alpha_N^n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N^{d-1}$ , die wir mit  $\alpha_N^n := -\frac{1}{2} - \frac{1}{2N} + \frac{n}{N}$  im zweidimensionalen Fall und mit

$$\alpha_N^n := \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2N} + \frac{\lfloor (n-1)/N \rfloor}{N}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2N} + \frac{(n-1) \bmod N}{N} \right)$$

im dreidimensionalen Fall durchnummerieren können. Zu jeden Punkt definieren wir eine Funktion der lokal konstanten Knotenbasis  $\{\psi_N^n\}_{n=1}^{N^{d-1}}$ , sodass die Finite-Elemente-Funktion  $\psi_N^n$  der Einsfunktion auf  $I_N^n := \alpha_N^n + [-1/2N, 1/2N]^{d-1}$  und der Nullfunktion auf  $\bar{I} \setminus I_N^n$  entspricht.

Als Nächstes beschäftigen wir uns mit der Diskretisierung des Sobolev-Raumes  $\tilde{H}_p^1(\Omega_0^R)$ . Sei dazu  $\mathcal{T}$  eine Triangulierung von  $\bar{\Omega}_0^R = [-\pi, \pi]^{d-1} \times [0, R]$ , die aus  $2^{d \cdot M}$  Rechtecken bzw. Quadern besteht, sodass  $\bar{\Omega}_0^R = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \bar{T}$  erfüllt ist und die natürliche Zahl  $M \in \mathbb{N}$  für die Anzahl der Verfeinerungen steht. Im Folgenden soll mit  $\tilde{M}$  die Anzahl der Knotenpunkte  $\{x^m\}_{m=1}^{\tilde{M}} \subseteq \bar{\Omega}_0^R$  bezeichnet werden, die äquidistant in jede Richtung verteilt sind. Weiterhin soll mit  $\phi_M^m$ ,  $m = 1, \dots, \tilde{M}$ , die stetige und stückweise lineare Funktion bezeichnet werden, für die  $\phi_M^m(x^l) = \delta_m(l)$  für alle  $l = 1, \dots, \tilde{M}$  gilt, wobei  $\delta_m(l)$  die charakteristische Funktion ist. Da die Lösung auf dem unteren Rand  $\Gamma_0^0$  die homogene Dirichlet-Randbedingung erfüllt, nehmen wir die Knotenpunkte auf diesem Teil des Randes aus der Menge der Knotenbasis heraus.

Wir kombinieren die beiden Diskretisierungen, indem wir den Finite-Elemente-Raum  $V_{N, \tilde{M}}$  als

$$V_{N, \tilde{M}} := \left\{ \tilde{v}(\alpha, x) = \sum_{n=1}^{N^{d-1}} \sum_{m=1}^{\tilde{M}} v^{n,m} \psi_N^n(\alpha) \phi_M^m(x), v^{n,m} \in \mathbb{C} \right\} \quad (3.9)$$

wählen. Wir suchen also die Finite-Elemente-Funktion  $\tilde{w} \in V_{N, \tilde{M}}$ , die die Gleichung

$$\int_I \tilde{a}_\alpha(\tilde{w}(\alpha, \cdot), \tilde{v}(\alpha, \cdot)) \, d\alpha + \tilde{b}(\tilde{w}, \tilde{v}) = \int_I \int_{\Omega_0^R} (\mathcal{J}f) \tilde{v} \, dx \, d\alpha \quad (3.10)$$

für alle  $\tilde{v} \in V_{N, \tilde{M}}$  erfüllt.

Für Funktionen  $\tilde{w} \in V_{N, \tilde{M}}$  können wir den inversen Operator  $\mathcal{J}^{-1}$  der Bloch-Floquet-Transformation durch die Trapezregel darstellen, denn es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-1} \tilde{w} &= \sum_{n=1}^{N^{d-1}} \int_{I_N^n} \sum_{m=1}^{\tilde{M}} e^{-i\alpha \cdot x} w^{n,m} \psi_N^n(\alpha) \phi_M^m(x) \, d\alpha \\ &\approx \sum_{n=1}^{N^{d-1}} \int_{I_N^n} \sum_{m=1}^{\tilde{M}} e^{-i\alpha_N^n \cdot x^m} w^{n,m} \psi_N^n(\alpha) \phi_M^m(x) \, d\alpha \\ &= \sum_{m=1}^{\tilde{M}} \left( \frac{1}{N^{d-1}} \sum_{n=1}^{N^{d-1}} e^{-i\alpha_N^n \cdot x^m} w^{n,m} \right) \phi_M^m(x) \\ &=: \sum_{m=1}^{\tilde{M}} u_M^m \phi_M^m(x) =: u_{\tilde{M}}(x) =: \mathcal{J}_N^{-1}(\{w^{n,m}\}_{n,m})(x). \end{aligned}$$

Die Sesquilinearform  $\tilde{a}_\alpha$  ist stetig für alle  $\alpha \in \mathbb{R}^{d-1}$  und sogar analytisch für  $\alpha \in \mathbb{R}^{d-1}$ , für die es kein  $j \in \mathbb{Z}^{d-1}$  mit  $k = |\alpha + j|$  gibt. Deswegen erhalten wir für alle  $n \in \{1, \dots, N^{d-1}\}$  eine gute Approximation der Integrale  $\int_{I_N^n} \tilde{a}_\alpha(\psi_N^n \phi_{\tilde{M}}^l, \psi_N^n \phi_{\tilde{M}}^m) d\alpha$  und  $\tilde{b}(\tilde{w}, \psi_N^n \phi_{\tilde{M}}^m)$  durch

$$\begin{aligned} \int_{I_N^n} \tilde{a}_\alpha(\psi_N^n \phi_{\tilde{M}}^l, \psi_N^n \phi_{\tilde{M}}^m) d\alpha &\approx \frac{1}{N^{d-1}} \tilde{a}_{\alpha_N^n}(\phi_{\tilde{M}}^l, \phi_{\tilde{M}}^m), \\ \tilde{b}(\tilde{w}, \psi_N^n \phi_{\tilde{M}}^m) &\approx b_N^n(\tilde{w}, \psi_N^n \phi_{\tilde{M}}^m) \\ &:= \frac{-k^2}{N^{d-1}} \int_{\Omega_0^R} e^{i\alpha_N^n \cdot x} q(\mathcal{J}^{-1}\tilde{w}) \phi_{\tilde{M}}^m dx \\ &\approx \frac{1}{N^{d-1}} \sum_{l=1}^{\tilde{M}} u_{\tilde{M}}^l b_N^n(\phi_{\tilde{M}}^l, \phi_{\tilde{M}}^m). \end{aligned}$$

Wir definieren für alle  $n = 1, \dots, N^{d-1}$  und  $m = 1, \dots, \tilde{M}$  die Werte der diskreten rechten Seite  $F_{m,n}$  als

$$F_{m,n} := N^{d-1} \int_{I_N^n} \int_{\Omega_0^R} \mathcal{J}f(\alpha, \cdot) \phi_{\tilde{M}}^m dx d\alpha$$

und suchen die diskrete Lösung

$$\begin{aligned} (W^\top, U^\top) &:= (w^{1,1}, \dots, w^{1,\tilde{M}}, w^{2,1}, \dots, w^{N^{d-1},\tilde{M}}, u_{\tilde{M}}^1, \dots, u_{\tilde{M}}^{\tilde{M}}) \\ &=: (W_1^\top, \dots, W_{N^{d-1}}^\top, U^\top) \in \mathbb{C}^{(N^{d-1}+1)\tilde{M}}, \end{aligned}$$

die für  $m = 1, \dots, \tilde{M}$  und  $n = 1, \dots, N^{d-1}$  das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\tilde{M}} \tilde{w}^{n,l} \tilde{a}_{\alpha_N^n}(\phi_{\tilde{M}}^l, \phi_{\tilde{M}}^m) + \sum_{l=1}^{\tilde{M}} u_{\tilde{M}}^l b_N^n(\phi_{\tilde{M}}^l, \phi_{\tilde{M}}^m) &= F_{m,n}, \\ u_{\tilde{M}}^m - \frac{1}{N^{d-1}} \sum_{n=1}^{N^{d-1}} e^{-i\alpha_N^n \cdot x^m} w^{n,m} &= 0 \end{aligned}$$

löst. Wenn wir für  $n = 1, \dots, N^{d-1}$  die Vektoren der rechten Seite als  $F_n := (F_{1,n}, \dots, F_{\tilde{M},n})^\top$  und  $F := (F_1^\top, \dots, F_{N^{d-1}}^\top)^\top$  sowie die Matrizen  $A_n$ ,  $B_n$  und  $C_n$  durch

$$\begin{aligned} (A_n)_{m,l} &:= \tilde{a}_{\alpha_N^n}(\phi_{\tilde{M}}^l, \phi_{\tilde{M}}^m) \\ (B_n)_{m,l} &:= b_N^n(\phi_{\tilde{M}}^l, \phi_{\tilde{M}}^m) \\ C_n &:= \frac{-1}{N^{d-1}} \text{diag}(e^{-i\alpha_N^n \cdot x^1}, \dots, e^{-i\alpha_N^n \cdot x^{\tilde{M}}}) \end{aligned}$$

definieren, dann führen wir das diskretisierte variationelle Problem auf das

Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & I_{\tilde{M}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ U \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 & B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{N^{d-1}} & B_{N^{d-1}} \\ C_1 & C_2 & \dots & C_{N^{d-1}} & I_{\tilde{M}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_{N^{d-1}} \\ U \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

zurück, welches in kompakter Weise der Form

$$AW + BU = F \tag{3.11a}$$

$$CW + U = 0 \tag{3.11b}$$

geschrieben werden kann.

Das lineare Gleichungssystem ist hochdimensional, dünnbesetzt und unsymmetrisch, sodass der iterative Gleichungssystem-Löser GMRES eine gute Wahl darstellt. Die Rayleigh-Randbedingung für  $\Gamma_0^R$  ist eine Fourier-Reihe, wofür wir zum einen die Fourier-Koeffizienten der einzelnen Knotenfunktionen berechnen müssen und zum anderen die Einträge für die Randknoten vollbesetzt sind. Dadurch wird die Systemmatrix  $A$  weniger dünnbesetzt und erhält Einträge außerhalb der Bandstruktur, sodass GMRES mehr Iterationen zum Lösen des linearen Gleichungssystems benötigt als bei üblichen Randbedingungen. Anstelle das Gleichungssystem (3.11) direkt oder alternativ das Gleichungssystem

$$(A + BC)W = F, \tag{3.12}$$

welches dem variationellen Problem (3.10) entspricht, zu lösen, wenden wir GMRES zunächst auf das Schurkomplement

$$\left[ I_{\tilde{M}} - CA^{-1}B \right] U = -CA^{-1}F \tag{3.13}$$

an und lösen anschließend die Gleichung  $AW = F - BU$ . Die Matrix  $A$  des ungestörten Problems ist eine Block-Diagonalmatrix, die aus den Blöcken  $A_i, i = 1, \dots, N^{d-1}$ , auf der Diagonalen besteht. Mit dem Schurkomplement-Ansatz nutzen wir diese besondere Struktur, um das lineare Gleichungssystem blockweise durch GMRES zusammen mit der unvollständigen LU-Zerlegung (genauer: ILU(0), vgl. [Saa03, Section 10.3.2]) für jeden Block als Vorkonditionierer zu lösen und die Rechnungen für die einzelnen Blöcke mit Hilfe

von *Message Passing Interface* (MPI) auf ein Cluster aus mehreren Rechnern zu verteilen. Zusätzlich verteilen wir auch das Auswerten der Matrizen  $B$  und  $C$ , die ebenfalls aus  $N^{d-1}$  Blöcken bestehen, auf das Cluster. Dadurch wird sowohl das Rechnen parallelisiert, als auch der Speicherbedarf der Matrizen  $A_i$  und  $B_i$  auf alle Rechner verteilt. Für den ersten Schritt (3.13) benötigt GMRES üblicherweise etwa 20 Auswertungen von  $A^{-1}$  und  $B$ , wobei die Anzahl der Auswertungen jedoch stark von der Norm von  $B$  abhängig ist.

Natürlich lässt sich auch das Gleichungssystem (3.12) in Blöcke zerteilen. Der Schurkomplement-Ansatz (3.13) hat jedoch zwei Vorteile: Wir bezeichnen hierzu mit  $\tilde{A}^{-1}$  die unvollständige LU-Zerlegung und verwenden diese als Vorkonditionierer. Dann erhalten wir für das direkte Lösen die Gleichung

$$\tilde{A}^{-1}(A + BC)W = \tilde{A}^{-1}F. \quad (3.14)$$

Wenn wir den Vorkonditionierer für  $A^{-1}$  in das Schurkomplement (3.13) einfügen, erhalten wir

$$\left[ I_{\tilde{M}} - C(\tilde{A}^{-1}A)^{-1}\tilde{A}^{-1}B \right] U = -C(\tilde{A}^{-1}A)^{-1}\tilde{A}^{-1}F. \quad (3.15)$$

Für (3.15) muss nur  $A$  selbst, statt dem gestörten System  $A + BC$ , invertiert werden, wofür der Vorkonditionierer  $\tilde{A}^{-1}$  eine bessere Approximation der Inversen ist und GMRES weniger Iterationen für das Lösen benötigt. So sind es für ein numerisches Beispiel mit  $M = 5$  und  $N = 128$  etwa  $16 \cdot 60 = 960$  Auswertungen von  $A$  und 16 Auswertungen von  $B$  für den Schurkomplement-Ansatz (3.13) und etwa jeweils 1570 Auswertungen von  $A$  und  $B$  für den Ansatz (3.12). Bei der ersten Form (3.12) muss also viel häufiger die Matrix  $A + BC$  ausgewertet werden, wodurch die Synchronisation die Leistung stark reduziert und die Parallelisierung schlecht ausgeschöpft wird. Numerisch lässt sich auch beobachten, dass ab  $M = 5$  der Schurkomplement-Ansatz (3.13) deutlich schneller ist. So benötigt der erste Ansatz (3.12) in einem Beispiel mit  $M = 5$  und  $N = 128$  etwa 181 Sekunden, während der zweite Ansatz (3.13) nur 21 Sekunden auf demselben Arbeitsrechner (Intel i7-4790 mit  $8 \times 3.6$ GHz Kernen und 32GB Arbeitsspeicher, Finite-Elemente-Bibliothek *deal.II*) benötigt. Bei größerer örtlicher Verfeinerungen ist der erste Ansatz schneller, was jedoch weniger relevant für uns ist, da wir ein möglichst feines Gitter haben wollen. Ein weiterer Vorteil ist, dass das Gleichungssystem (3.13) in  $\mathbb{C}^{\tilde{M}}$  gelöst wird, während die Gleichung (3.12) in  $\mathbb{C}^{(N^{d-1}+1)\tilde{M}}$  gelöst werden muss, sodass GMRES beim Schurkomplement-Ansatz (3.13) weniger Speicher für die orthogonalen Vektoren eines GMRES-Schrittes benötigt und das Gleichungssystem maximal nach  $\tilde{M}$  Schritten gelöst ist. Die Anzahl der Iterationen für das Lösen

des Gleichungssystems (3.13) wird hierbei maßgeblich von der Trägergröße und dem Wert der Störung beeinflusst, denn je größer die Störung, desto mehr weicht die Matrix  $I_{\tilde{M}} + BA^{-1}C$  von der Identitätsmatrix ab. Dies werden wir bei den numerischen Beispielen weiter beleuchten.

Betrachten wir als Nächstes die Konvergenzrate der numerischen Methode. Die Konvergenzrate hängt von der Konvergenzordnung der Finite-Elemente-Methode, dem Abschneidefehler der Rayleigh-Randbedingung und der Konvergenzordnung der diskreten inversen Bloch-Floquet-Transformation ab. Die Konvergenz der Finite-Elemente-Methode für quasiperiodische Probleme mit der abgeschnittenen Rayleigh-Randbedingung ist in [Bao95, Theorem 4.1] untersucht worden.

**Proposition 3.13.** *Es sei  $u \in H^l_\alpha(\Omega_0^R)$ ,  $l \geq 2$ , eine Lösung zu dem zweidimensionalen (ungestörten) quasiperiodischen Problem (3.4),  $M \geq M_0 \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Raum-Diskretisierungen mit  $M_0$  ausreichend groß,  $J \geq J_0 \in \mathbb{N}$  die Abschneideschranke für Rayleigh-Randbedingung (die Summe geht über  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $|j| \leq J$ ) mit  $J_0$  ausreichend groß,  $R' > R$  und  $u_{M,J}$  die Finite-Elemente-Lösung. Dann gelten die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} \|u - u_{M,J}\|_{L^2(\Omega_0^R)} &\leq C \left(2^{-M} + J^{-1/2}\right) \|u - u_{M,J}\|_{H^1(\Omega_0^R)} \\ &\quad + C 2^{-M} e^{-(R'-R)\sqrt{(J-|\alpha|)^2 - k^2}} \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma_0^{R'})} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|u - u_{M,J}\|_{H^1(\Omega_0^R)} &\leq C 2^{-M(l-1)} \|u\|_{H^l(\Omega_0^R)} \\ &\quad + C e^{-1/2(R'-R)\sqrt{(J-|\alpha|)^2 - k^2}} \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma_0^{R'})}. \end{aligned}$$

Weniger bekannt ist die Konvergenzrate der diskreten inversen Bloch-Floquet-Transformation. Erste Resultate hierzu findet man in den Arbeiten von Lechleiter und Zhang (siehe [LZ17b, Theorem 13], [LZ17c, Theorem 13] und [Zha18]).

**Proposition 3.14.** *Es sei  $w \in W^{1,p}(I; H^1_\alpha(\Omega_0^R))$ ,  $p \in (1, \infty]$ , dann ist der Approximationsfehler der diskreten inversen Bloch-Floquet-Transformation  $\mathcal{J}_N^{-1}$  beschränkt durch*

$$\left\| \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}^{-1} w - \mathcal{J}_N^{-1} w \right\|_{H^1(\Omega^R)} \leq C N^{-1} \|w\|_{W^{1,p}(I; H^1_\alpha(\Omega_0^R))}.$$

*Beweis:* Dies wurde in [LZ17b, Theorem 13] für den zweidimensionalen Raum und in [LZ17c, Theorem 13] für den dreidimensionalen Raum gezeigt.  $\square$

Durch die Wahl einer passenden Variablentransformation können wir die nicht differenzierbaren Stellen  $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$  der Lösung, die nach Satz 3.11 existieren, kompensieren und eine höhere Konvergenzordnung der diskreten inversen Bloch-Floquet-Transformation erhalten. Dies wird zum Beispiel für Lösungen mit einer rechten Seite, die einen kompakten Träger in  $\Omega_0^R$  besitzt, relevant. Wir werden uns in Abschnitt 3.6 erneut mit Variablentransformationen und Fehlerschranken beschäftigen.

### 3.6. Variablentransformation für die inverse Bloch-Floquet-Transformation

In dem Regularitätsresultat 3.11 haben wir gesehen, dass für eine rechte Seite  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}f$ , die analytisch in  $\alpha$  ist, die Lösung überall stetig und außerhalb von  $\mathcal{A} \subseteq \bar{I}$  analytisch in  $\alpha$  ist. Eine Untermenge von rechten Seiten aus  $L^2(\Omega^R)$ , die Analytizität in  $\alpha$  erfüllen, ist die Menge aller  $f \in L^2(\Omega^R)$  mit kompaktem Träger, die wir für die Rekonstruktion der Störung mithilfe der Newton-Methode verwenden werden. Die Idee ist nun eine Variablentransformation  $g: \bar{I} \rightarrow \bar{I}$  zu finden, sodass der Integrand von

$$\int_I w(\alpha, x) \, d\alpha = \int_I w(g(t), x) |\det Dg(t)| \, dt$$

eine glatte und periodische Funktion in  $t \in \bar{I}$  wird. In diesem Fall ist bekannterweise die Konvergenzordnung der Trapezregel sehr hoch, was aus der Euler-Maclaurinschen-Summenformel folgt. Zumindest für den zweidimensionalen Fall gibt es in [Zha18, Theorem 29] ein zusammenfassendes Konvergenzresultat, welches wir hier in einer angepassten Version zitieren. Wir bezeichnen hierzu für  $n \in \mathbb{N}$  die Menge aller  $n$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $\phi: \Omega \rightarrow H$ ,  $H$  Hilbertraum, die selbst und deren ersten  $n$  Ableitungen periodisch sind, als  $C_p^n(\Omega; H)$ . Für das Intervall  $\bar{I}$  gibt es maximal zwei Punkte  $\hat{\alpha} \in I$ , für die es ein  $j \in \mathbb{Z}$  gibt mit  $|\hat{\alpha} + j| = k$ . Das Intervall  $\bar{I}$  sei entsprechend in drei Teile  $\bar{I} = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup [a_2, a_3]$  unterteilt, sodass  $a_0 = -\frac{1}{2}$ ,  $a_3 = \frac{1}{2}$  und für  $a_1$  und  $a_2$  es  $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$  gibt mit  $|a_1 + j_1| = |a_2 + j_2| = k$ . Falls  $a_1 = a_2$  gilt, so soll  $\bar{I} = [a_0, a_1] \cup \emptyset \cup [a_2, a_3]$  betrachtet werden. Bezeichne mit  $\tilde{I} = [b_0, b_1]$  eins der drei Teilintervalle von  $\bar{I}$  und mit  $\tilde{N} \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Diskretisierungspunkte von  $\tilde{I}$ .

**Proposition 3.15.** *Es sei  $w \in \tilde{H}^1(\Omega^R)$  die Lösung des zweidimensionalen variationalen Problems 1, für die die Bloch-Floquet-Transformierte  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}f$  der rechten Seite*

$f \in L^2(\Omega^{R_0})$  analytisch ist, setze

$$v(t, x) := \mathcal{J}_{\mathbb{R}} w(g(t), x) g'(t)$$

und bezeichne mit  $\mathcal{Q}$  die numerische Quadratur durch die Trapezregel. Es sei weiterhin  $n \in \mathbb{N}$  und  $g \in C^\infty(\tilde{I}; \tilde{I})$  mit  $g(b_0) = b_0$ ,  $g(b_1) = b_1$ ,  $g'(t) > 0$  für alle  $t \in (b_0, b_1)$  und  $\frac{d^m}{dt} g(b_0) = \frac{d^m}{dt} g(b_1) = 0$  für alle  $m \in \{1, \dots, 2n + 3\}$ .

Dann ist  $v \in C_p^{2n}(\tilde{I}; H_{g(t)}^1(\Omega_0^R)) \cap C^\infty(\tilde{I}; H_{g(t)}^1(\Omega_0^R))$  und der Quadraturfehler ist für  $s = 0, 1, 2$  beschränkt durch

$$\left\| \int_{\tilde{I}} v(t, \cdot) dt - \mathcal{Q}(v) \right\|_{H^s(\Omega_0^R)} \leq C \frac{1}{N^{2n+1/2}} \|v\|_{C^{2n+1}(\tilde{I}; H^s(\Omega_0^R))}.$$

Wenn wir den Abschneidefehler der Rayleigh-Randbedingung vernachlässigen, dann ist eine direkte Konsequenz aus den Propositionen 3.13 und 3.15 die folgende Schranke des Gesamtfehlers.

**Satz 3.16**

Es sei  $w \in H^2(\Omega^R)$  die Lösung des zweidimensionalen variationellen Problems 1, für die die Bloch-Floquet-Transformierte  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}} f$  der rechten Seite  $f$  aus  $L^2(\Omega^{R_0})$  analytisch in  $\alpha$  ist, und sei  $w_{M,N} \in V_{N,\tilde{M}}$  die Approximation der Lösung mit der numerischen Methode aus Unterkapitel 3.5 mit einer Variablentransformation wie in Proposition 3.15. Dann ist der Approximationsfehler für  $l = 0, 1$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  beschränkt durch

$$\|w - w_{M,N}\|_{H^l(\Omega^R)} \leq C \left( 2^{-M(2-l)} + \frac{1}{N^{2n+1/2}} \right) \|v\|_{C^{2n+1}(\tilde{I}; H^2(\Omega_0^R))}.$$

*Beweis:* Man kann analog zu [Zha18, Theorem 32] argumentieren. □

### 3.6.1. Variablentransformation für das zweidimensionale Problem

Wir wollen nun Beispiele solcher Variablentransformationen betrachten und zwar zunächst für das zweidimensionale Streuproblem. Hierfür betrachten wir für  $\hat{k} := |k - \lfloor k + 0.5 \rfloor|$  und für Funktionen  $r^B: [-1/2, -\hat{k}] \rightarrow [-1/2, -\hat{k}]$  und  $r^M: [-\hat{k}, \hat{k}] \rightarrow [-\hat{k}, \hat{k}]$  die Variablentransformation

$$g(t) := \begin{cases} r^B(t), & t \in [-1/2, -\hat{k}], \\ r^M(t), & t \in [-\hat{k}, \hat{k}], \\ r^B(-t), & t \in [\hat{k}, 1/2], \end{cases}$$

wobei wir  $r^B$  sowie  $r^M$  als eine der Hilfsfunktionen

$$\begin{aligned}\phi_{l,m}^1(t) &:= \int_l^t \exp\left(\frac{-1}{(s-l)(m-s)}\right) ds, & \phi_{l,m}^2(t) &:= \int_l^t \exp\left(\frac{-(s-l)}{(m-s)}\right) ds, \\ \phi_{l,m}^3(t) &:= \int_l^t (s-l)^4(s-m)^4 ds, & \phi_{l,m}^4(t) &:= \int_l^t (s-l)^4 ds, \\ \phi_{l,m}^5(t) &:= \int_l^t (s-l)^6(s-m)^6 ds\end{aligned}$$

mit den entsprechenden Grenzen  $l, m \in \{-1/2, -\widehat{k}, \widehat{k}\}$  wählen. Die Variablentransformation bewirkt, dass mehr Diskretisierungspunkte von  $\bar{l}$  in dem Bereich um die  $\widehat{a} \in \mathcal{A}$  liegen, wo sich die Funktion am schnellsten ändert. In Abbildung 3.2 ist eine Visualisierung zu sehen, wie die Diskretisierungspunkte  $\alpha_N^n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , durch die Variablentransformationen verteilt werden und wie der Fehler sich verhält. Um den Fehler zu berechnen, nehmen wir die Hankel-Funktionen für  $k = \sqrt{0.4}$ , um die Referenzlösung

$$u_1(x_1, x_2) = \frac{i}{4} \left( H_0^{(1)}(k(x_1^2 + (x_2 + 7)^2)) - H_0^{(1)}(k(x_1^2 + (x_2 + 9)^2)) \right) \frac{x_2}{5} \quad (3.16)$$

zu definieren, die die Darstellung (3.6) erfüllt und deren Bloch-Floquet-Transformierte wir durch

$$\mathcal{J}_{\mathbb{R}}(u_1)(\alpha, x_1, x_2) \approx \sum_{m=-40}^{40} e^{-imx_1 + i\sqrt{k^2 - (\alpha+m)^2}(x_2+8)} \operatorname{sinc}\left(\sqrt{k^2 - (\alpha+m)^2}\right)$$

approximieren (siehe [LZ17a] zur Herleitung). Für numerische Beispiele wählen wir  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , mit

$$\begin{aligned}r_1^B(t) &:= \phi_{-1/2, -\widehat{k}}^2(t) / \phi_{-1/2, -\widehat{k}}^2(-\widehat{k}), & r_1^M(t) &:= \phi_{-\widehat{k}, \widehat{k}}^1(t) / \phi_{-\widehat{k}, \widehat{k}}^1(\widehat{k}), \\ r_2^B(t) &:= \phi_{-1/2, -\widehat{k}}^3(t) / \phi_{-1/2, -\widehat{k}}^3(-\widehat{k}), & r_2^M(t) &:= \phi_{-\widehat{k}, \widehat{k}}^1(t) / \phi_{-\widehat{k}, \widehat{k}}^1(\widehat{k}), \\ r_3^B(t) &:= \phi_{-1/2, -\widehat{k}}^4(t) / \phi_{-1/2, -\widehat{k}}^4(-\widehat{k}), & r_3^M(t) &:= \phi_{-\widehat{k}, \widehat{k}}^3(t) / \phi_{-\widehat{k}, \widehat{k}}^3(\widehat{k}), \\ r_4^B(t) &:= \phi_{-1/2, -\widehat{k}}^3(t) / \phi_{-1/2, -\widehat{k}}^3(-\widehat{k}), & r_4^M(t) &:= \phi_{-\widehat{k}, \widehat{k}}^3(t) / \phi_{-\widehat{k}, \widehat{k}}^3(\widehat{k}), \\ r_5^B(t) &:= \phi_{-1/2, -\widehat{k}}^5(t) / \phi_{-1/2, -\widehat{k}}^5(-\widehat{k}), & r_5^M(t) &:= \phi_{-\widehat{k}, \widehat{k}}^5(t) / \phi_{-\widehat{k}, \widehat{k}}^5(\widehat{k}).\end{aligned}$$

Die Verteilungen und der Fehlerverlauf der Beispiele für  $k^2 = 0.4$  ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Die Konvergenzordnung ist im schlechtesten Fall bei 1.46 mit der Identität und im besten Fall bei 5.13 bzw. 5.19 mit  $g_4$  und  $g_5$ .

Als Nächstes untersuchen wir, wie sich die Variablentransformation auswirkt, wenn wir Referenzlösungen betrachten, die keine Singularität in  $\mathcal{A}$  haben. Hierfür nehmen wir

$$u_2(x_1, x_2) = \frac{\sin(x_1)}{x_1} \frac{x_2}{5} \quad (3.17)$$

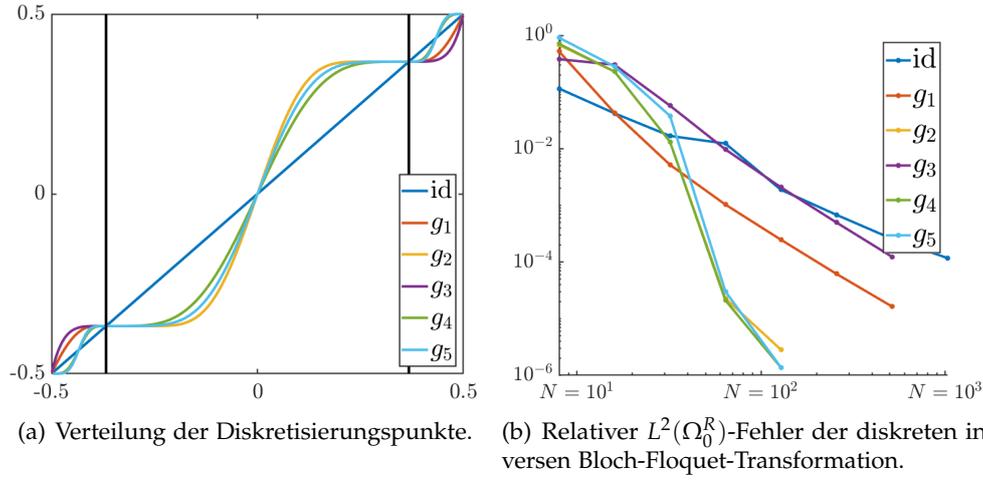


Abbildung 3.2.: Vergleich der Variablentransformationen im zweidimensionalen Raum.

sowie

$$u_3(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{1}{10}(x_1 - 1)^2 + \frac{1}{10}(x_2 - 5)^2\right) \frac{x_2}{5} \quad (3.18)$$

als Referenzlösungen, deren Bloch-Floquet-Transformierte  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}u_i$ ,  $i \in \{2, 3\}$ , wir durch

$$\mathcal{J}_{\mathbb{R}}(u_i)(\alpha, x_1, x_2) \approx \sum_{j=-300}^{300} u_i(x_1 + 2\pi j, x_2) e^{2\pi i \alpha(j+x_1)}$$

approximieren. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.3 zu sehen. In diesem Fall wird durch  $g_4$  eine genauso schnelle Konvergenz wie bei  $u_1$  erzeugt. Die Identität ist jedoch bei der sehr schnell abfallenden Funktion  $u_3$  bereits optimal. Der Diskretisierungsfehler im Ort für die Abbildung 3.3 liegt bei  $10^{-6}$ , welcher die untere Schranke festlegt.

Eine weitere Möglichkeit ist, das Intervall  $\bar{I} = [-1/2, 1/2]$  auf  $\tilde{I} = [-\hat{k}, 1 - \hat{k}]$  zu verschieben und damit  $\tilde{I}$  in nur zwei Intervalle aufteilen zu müssen, da der linke Rand eine Singularität ist. Dadurch sammeln sich die Diskretisierungspunkte schneller an den Singularitäten und wir können durch weniger Verfeinerungen auf die gewünschte Konvergenzordnung kommen. Wir betrachten in der Abbildung 3.4 den Fehler der diskreten inversen Bloch-Floquet-Transformation mit  $g_4$  als Variablentransformation für das neue Intervall  $\tilde{I}$  im Vergleich zu dem alten Intervall  $\bar{I}$ . Die Konvergenzordnung steigt für die Referenzlösung  $u_1$  auf 6.63.

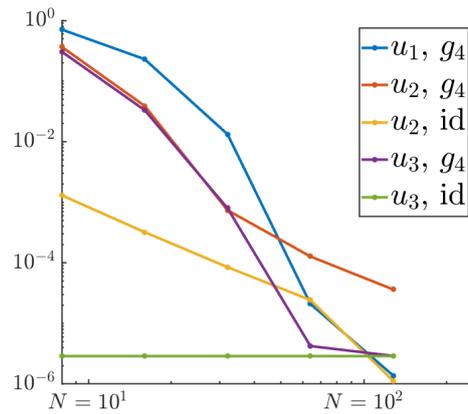


Abbildung 3.3.: Variablentransformation: Relativer  $L^2(\Omega_0^R)$ -Fehler für verschiedene Referenzlösungen.

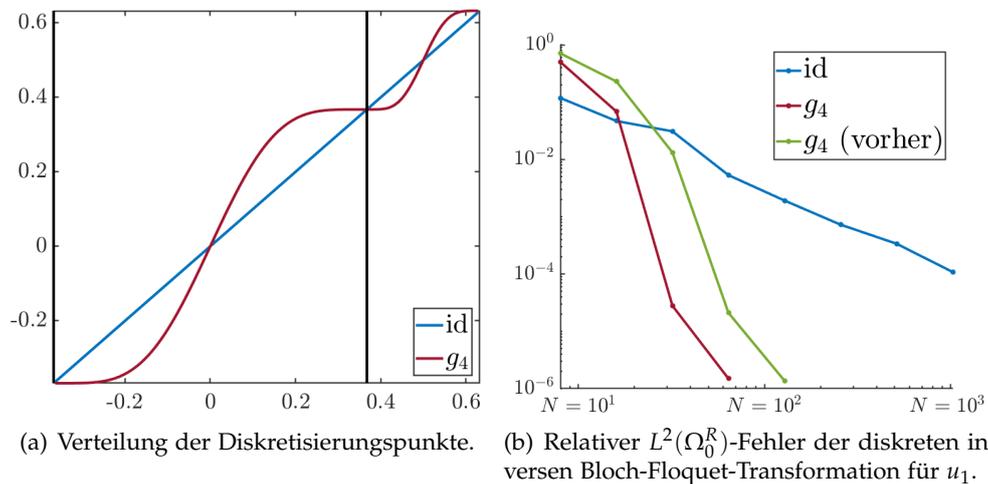


Abbildung 3.4.: Variablentransformation: Verbesserung der Konvergenzordnung beim Verschieben des Intervalls.

### 3.6.2. Variablentransformation für das dreidimensionale Problem

Im dreidimensionalen Fall können wir zumindest für Wellenzahlen  $k < \sqrt{0.5}$  eine Variablentransformation wie folgt definieren. Die Idee ist für einen Punkt  $t \in I$  eine nur von der Norm abhängige Skalierungsfunktion  $g$  als Variablentransformation zu verwenden, sodass  $\alpha = G(t) := tg^{(|t|)}/|t|$  gilt. Wenn wir die Gerade vom Nullpunkt bis zum Rand betrachten, die durch den Punkt  $t \in I \setminus \{0\}$  geht, dann schneidet diese einmal die singuläre Linie an dem Punkt  $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$  mit  $S := |\hat{\alpha}|$  und den Rand in einem Punkt mit Norm  $B$ . Deshalb wählen wir eine Funktion  $g: [0, B] \rightarrow [0, B]$ , für die  $g(s) = s$  sowie  $\frac{d^m}{ds} g(s) = 0$  für alle  $m \in \{1, \dots, p\}$  mit  $p \in \mathbb{N}$  und  $s \in \{0, S, B\}$  gilt. Die Dichte der

Variablentransformation ist dann gegeben durch

$$|\det DG(t)| = g'(|t|) \frac{g(|t|)}{|t|}.$$

Wir betrachten als Beispiel die beiden Variablentransformationen  $g_6$  und  $g_7$ , die durch

$$g_6(s) := \begin{cases} \phi_{0,S}^3(s)/\phi_{0,S}^3(S), & s \in [0, S], \\ \phi_{S,B}^6(s)/\phi_{S,B}^6(B), & s \in [S, B], \end{cases} \quad \text{und} \quad g_7(s) := \begin{cases} \phi_{0,S}^3(s)/\phi_{0,S}^3(S), & s \in [0, S], \\ \phi_{S,B}^3(s)/\phi_{S,B}^3(B), & s \in [S, B], \end{cases}$$

mit der Hilfsfunktion

$$\phi_{l,m}^6(t) := \int_l^t \exp\left(\frac{-1}{9} \frac{(s-l)^2}{(m-s)^2}\right) ds$$

definiert sind. Als Referenzlösung nehmen wir

$$u_4(x_1, x_2, x_3) = \left[ \frac{e^{ik(x_1^2 + (x_2+7)^2)}}{4\pi(x_1^2 + x_2^2 + (x_3+7)^2)} - \frac{e^{ik(x_1^2 + x_2^2 + (x_3+9)^2)}}{4\pi(x_1^2 + x_2^2 + (x_3+9)^2)} \right] \frac{x_3}{5},$$

für die eine analoge Darstellung der Bloch-Floquet-Transformierten der Form

$$\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2}(u_4)(\alpha, x) \approx \sum_{m \in \mathbb{Z}^2, |m| \leq 15} e^{-im \cdot \underline{x} + i\sqrt{k^2 - |\alpha+m|^2}(x_3+8)} \operatorname{sinc}\left(\sqrt{k^2 - |\alpha+m|^2}\right)$$

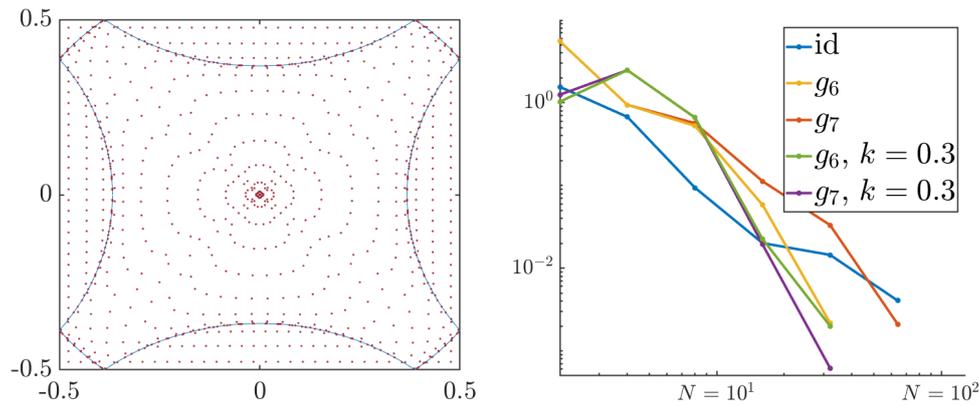
gegeben ist. In der Abbildung 3.5 ist sowohl die Verteilung der Variablentransformation von  $g_6$  zusammen mit den Singularitäten visualisiert, als auch die Konvergenzrate von der diskreten inversen Bloch-Floquet-Transformation mit  $g_6$  sowie mit  $g_7$  im Vergleich zu sehen. Auch in diesem Fall können wir eine Steigerung der Konvergenzordnung für  $g_6$  gegenüber der gleichverteilten Quadratur für  $N \geq 32$  beobachten.

### 3.7. Numerische Beispiele

In diesem Unterkapitel untersuchen wir das numerische Verfahren. Dazu nehmen wir mehrere Referenzlösungen und betrachten den Einfluss der Absorption, der Wellenzahl und verschiedener Störungen auf die Konvergenz.

#### 3.7.1. Beispiele für das zweidimensionale Problem

Wir wählen die Referenzlösungen  $u_1$ ,  $u_2$  sowie  $u_3$  aus (3.16), (3.17), (3.18) sowie die Wellenzahl  $k^2 = 0.4$ . Für das Gebiet wählen wir  $R = 5$  und nehmen nur



(a) Verteilung der Diskretisierungspunkte für  $g_6$  mit  $N = 64$  und  $k^2 = 0.4$  bei äquidistanter Verteilung der Punkte im Urbildraum. Die Punkte werden sowohl außen als auch innen deutlich näher zu den Singularitäten hingeschoben.

(b) Relativer  $L^2(\Omega_0^R)$ -Fehler der diskreten inversen Bloch-Floquet-Transformation (standardmäßig für  $k^2 = 0.4$ ).

Abbildung 3.5.: Vergleich der Variablentransformationen für das dreidimensionale Problem.

die Summanden mit Index  $j \in \mathbb{Z}$  der Rayleigh-Randbedingung in die Summe, für die  $|j| \leq 300$  erfüllt ist. Standardmäßig werden wir für alle Beispiele für ein später gewähltes  $\nu > 0$  den ungestörten Brechungsindex

$$n_p^2(x + 2\pi j) = \begin{cases} 2, & x \in ([-3/2, 3/2] \times [0, 9/2] \\ & \cup [-\pi, \pi] \times [0, 7/2]) \setminus [-1, 1] \times [1, 3], \\ 2 + \nu i, & x \in [-1, 1] \times [1, 3], \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle  $j \in \mathbb{Z}$  betrachten. Für die Störungen nehmen wir die folgenden drei Funktionen:

$$q_1(x) = \begin{cases} 5.5, & x \in [-1/2, 1] \times [1, 7/2] \cup [-2, 1] \times [1, 2], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$q_2(x) = \begin{cases} 5.5, & x \in [1/2, 1] \times [1, 2], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$q_3(x) = \begin{cases} 5.5, & x \in [-1/2, 1] \times [1, 7/2], \\ -5.5, & x \in [-2, 1] \times [1, 2], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Parameter sind in Abbildung 3.6 visualisiert. Da alle drei Referenzlösungen den Faktor  $x_2/5$  besitzen, erfüllen diese die obere Randbedingung nicht und

wir müssen einen Ausgleichsterm zur rechten Seite hinzuaddieren, der durch

$$r_i := \frac{\partial}{\partial x_2} u_i - T(u_i) \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{5\} \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad (3.19)$$

gegeben ist. Der Term  $r_1$  lässt sich weiter kürzen zu

$$r_1(x_1, 5) = \frac{i}{20} \left( H_0^{(1)}(k(x_1^2 + 144)) - H_0^{(1)}(k(x_1^2 + 196)) \right).$$

Nach der Fehlerbetrachtung der diskreten inversen Bloch-Floquet-Transformation in Abschnitt 3.6.1 wählen wir  $N = 2^7$  Diskretisierungspunkte für  $\bar{\Gamma}$  und  $g_4$  als Variablentransformation. Das Gebiet  $\Omega_0^R$  diskretisieren wir in  $2^{2 \cdot M}$  Quader, wobei  $M$  für die Anzahl der Verfeinerungen steht. Da die benutzte Finite-Elemente-Bibliothek *deal.II* (aus [Alz+18]) keine komplexen Zahlen unterstützt, betrachten wir stattdessen ein System aus zwei gekoppelten partiellen Differentialgleichungen für jedes  $\alpha_N^n$ . Dadurch erhalten wir im Falle von  $2^{2 \cdot 8} = 65\,536$  bereits  $2\tilde{M} = 132\,098$  Freiheitsgrade im Ort bzw. insgesamt  $N \cdot 2\tilde{M} = 16\,908\,544$  Freiheitsgrade. Die relative Diskrepanz für das Lösen des Gleichungssystems mit GMRES setzen wir üblicherweise auf  $10^{-10}$ .

### Erste Beispiele

Als Erstes betrachten wir die Konvergenzrate für die drei Referenzlösungen  $u_1, u_2, u_3$  und die drei Störungen  $q_1, q_2$  sowie  $q_3$ . Wir wählen in allen Fällen  $k^2 = 0.4$  und  $\nu = 1$ . Zusätzlich wählen wir einen weiteren Brechungsindex  $\tilde{n}_p^2$ , der lokal konstant die Werte 1 und 2 sowie  $2 + 1i$  annimmt. Dieser soll ein vereinfachtes Modell einer Nano-Gras-Struktur darstellen. Die Störung  $q_4$  ist so gewählt, dass  $\tilde{n}_p^2 + q_4$  ein paar Stäbchen fehlen, wie in der Abbildung 3.7 visualisiert. Die Konvergenzordnung liegt in allen Beispielen bei 2, wie in Abbildung 3.8 zu sehen ist. Die Methode funktioniert auch für die stückweise quadratischen Lagrange-Elemente und erreicht in diesem Fall die Konvergenzordnung von 3 im Ort. In der Abbildung 3.8 ist zudem die benötigte Zeit zum Lösen des Gleichungssystems in Abhängigkeit von der Zahl der gleichartigen Computer beim parallelisierten Rechnen dargestellt. Die Computer sind mit dem Prozessor Intel i7-4790 mit  $8 \times 3.6\text{GHz}$  Kernen und 32GB Arbeitsspeicher ausgestattet. Wir betrachten nur den  $L^2$ -Fehler auf  $\Omega_0^R$ . Wenn wir zum Vergleich den relativen  $L^2$ -Fehler auf  $[-20 \cdot 2\pi - \pi, \pi + 20 \cdot 2\pi] \times [0, 5]$  betrachten, dann fällt dieser, bei einem nicht zu kleinem  $N$ , genauso schnell.

### Auswirkungen der Wellenzahl

Als Nächstes ist in der Abbildung 3.9 visualisiert, wie sich die Wellenzahl auf den Fehlerabstieg und die Anzahl der äußeren GMRES Iterationen auswirkt.

Dazu haben wir  $u_1$  als Referenzlösung mit  $\nu = 1$  gewählt. Wie zu erwarten, gibt es keinen Einfluss auf die Konvergenzordnung, die weiterhin bei 2 liegt. Je größer jedoch die Wellenzahl ist, desto mehr weicht  $I_{\tilde{M}} + CA^{-1}B$  von der Identitätsmatrix ab und desto mehr Iterationen benötigt GMRES, um das Gleichungssystem zu lösen.

### Auswirkungen des Absorptionsbereichs

Nun wählen wir  $k^2 = 0.4$  sowie  $u_1$  als Referenzlösung und betrachten die Ergebnisse für verschiedene  $\nu$ . Zusätzlich wählen wir einen weiteren Brechungsindex mit einem kleineren Absorptionsbereich, der für alle  $j \in \mathbb{Z}$  durch

$$\tilde{n}_p^2(x + 2\pi j) = \begin{cases} 2, & x \in ([-3/2, 3/2] \times [0, 9/2] \\ & \cup [-\pi, \pi] \times [0, 7/2]) \setminus [-1, 1] \times [1, 3], \\ 2 + 1i, & x \in [-1/4, -1/4] \times [7/4, 9/4], \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert ist. Für eine reelle Wellenzahl und einen reellen Brechungsindex kann es Oberflächenwellen geben, die zu Uneindeutigkeit der Lösung führen. So können wir auch numerisch beobachten, dass sich die Matrix  $A_n$ , die aus der quasiperiodischen Sesquilinearform  $\alpha_N^n$  entsteht, für ein kleines  $\nu > 0$  und für manche  $n \in \{1, \dots, N^{d-1}\}$  einer singulären Matrix annähert. Der Fehler in der Lösung für entsprechende  $\alpha_N^n$  wird relativ groß, was sich jedoch nicht auf den Fehler der Gesamtlösung auswirkt, wie wir der Abbildung 3.10 entnehmen können.

### 3.7.2. Beispiele für das dreidimensionale Problem

Die Approximation in  $\mathbb{R}^3$  ist numerisch deutlich aufwendiger, sodass wir weniger numerische Experimente durchführen werden. Wir werden hier die zwei Referenzlösungen

$$u_4(x_1, x_2, x_3) = \left[ \frac{e^{ik(x_1^2 + (x_2+7)^2)}}{4\pi(x_1^2 + x_2^2 + (x_3+7)^2)} - \frac{e^{ik(x_1^2 + x_2^2 + (x_3+9)^2)}}{4\pi(x_1^2 + x_2^2 + (x_3+9)^2)} \right] \frac{x_3}{5}$$

und

$$u_5(x_1, x_2, x_3) = \exp\left(-\frac{1}{10}(x_1 - 1)^2 - \frac{1}{10}(x_2 - 2)^2 + \frac{1}{10}(x_3 - 5)^2\right) \frac{x_3}{5}$$

betrachten. Die Referenzlösung  $u_5$  ist bzgl.  $\alpha$  eine glatte Funktion, sodass wir ohne eine Variablentransformation und mit einer groben Diskretisierung des

Intervalls  $\bar{I} = [-1/2, 1/2]^2$  auskommen, um die Konvergenzordnung von 2 zu erreichen. Die Referenzlösung  $u_4$  erfüllt die Zerlegung aus dem Regularitätsresultat 3.10, sodass wir uns für diesen Fall unterschiedlich feine Gitter von  $\bar{I}$  anschauen und die Konvergenzrate ohne eine Variablentransformation im Vergleich zu der Konvergenzordnung mit der Variablentransformation  $g_6$  aus dem Abschnitt 3.6.2 vergleichen. Wir wählen also die Konstanten  $R = 5$  und  $k^2 = 0.4$  sowie die relative Diskrepanz zum Stoppen von GMRES bei  $10^{-10}$ . Die numerische rechte Seite  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2} f$  berechnen wir mit Hilfe der Approximationen der transformierten Funktionen, die gegeben sind durch

$$(\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2} u_4)(\alpha, x) \approx \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^2 \\ |m|_\infty \leq 10}} e^{-im \cdot \underline{x} + i\sqrt{k^2 - (\alpha+m)^2}(x_3+8)} \operatorname{sinc} \left( \sqrt{k^2 - |\alpha + m|^2} \right)$$

(siehe [LZ17a] zur Herleitung) und

$$(\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2} u_5)(\alpha, x) \approx \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}^2 \\ |j|_\infty \leq 10}} \exp \left( -\frac{1}{10}(x_1 - 1 + 2\pi j_1)^2 - \frac{1}{10}(x_2 - 2 + 2\pi j_2)^2 + \frac{1}{10}(x_3 - 5)^2 \right) \frac{x_3}{5} e^{2\pi i \alpha \cdot (j+x)}.$$

Auch in diesem Fall müssen wir eine korrigierende rechte Seite hinzuaddieren, da beide Funktionen die Randbedingung nicht erfüllen. Hierfür können wir analog zu dem zweidimensionalen Fall (3.19) vorgehen. Für den Brechungsindex und die Störung wählen wir für  $j \in \mathbb{Z}^2$  die Funktionen

$$n_p^2(x + 2\pi j) = \begin{cases} 2, & x \in ([-3/2, 3/2] \times [1, \pi] \times [0, 9/2] \\ & \cup [-\pi, \pi]^2 \times [0, 7/2]) \setminus [-1, 1]^2 \times [1, 3], \\ 2 + 1i, & x \in [-1, 1]^2 \times [1, 3], \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$q(x) = \begin{cases} 5.5, & x \in [-1/2, 1] \times [0, 1] \times [1, 7/2] \cup [-2, 1] \times [0, 1] \times [1, 2] \\ & \cup [-1/2, 1] \times [-5/2, 1] \times [1, 2], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Rayleigh-Randbedingung setzen wir alle Summanden mit Index  $j \in \mathbb{Z}^2$  auf Null, für die  $|j|_\infty > 10$  gilt. Beide Parameter sowie die Konvergenzrate sind in der Abbildung 3.11 zu finden. Wegen des schnellen Abstiegs der Lösung  $u_5$  in  $\underline{x}$ -Richtung bzw. der Glattheit der Lösung bzgl.  $\alpha$  erreichen wir die Konvergenzordnung von 2 bereits bei  $N = 8$ . Ohne eine Variablentransformation ist

die Wahl von  $N \geq 64$ , zumindest für die verwendete Verfeinerung des Gitters im Ort, vielversprechend. Bei der Approximation mit der Variablentransformation  $g_6$  sehen wir leicht bessere Ergebnisse. Für  $k < 0.5$  erreichen wir bereits für grobe Gitter von  $\bar{I}$  gute Ergebnisse.

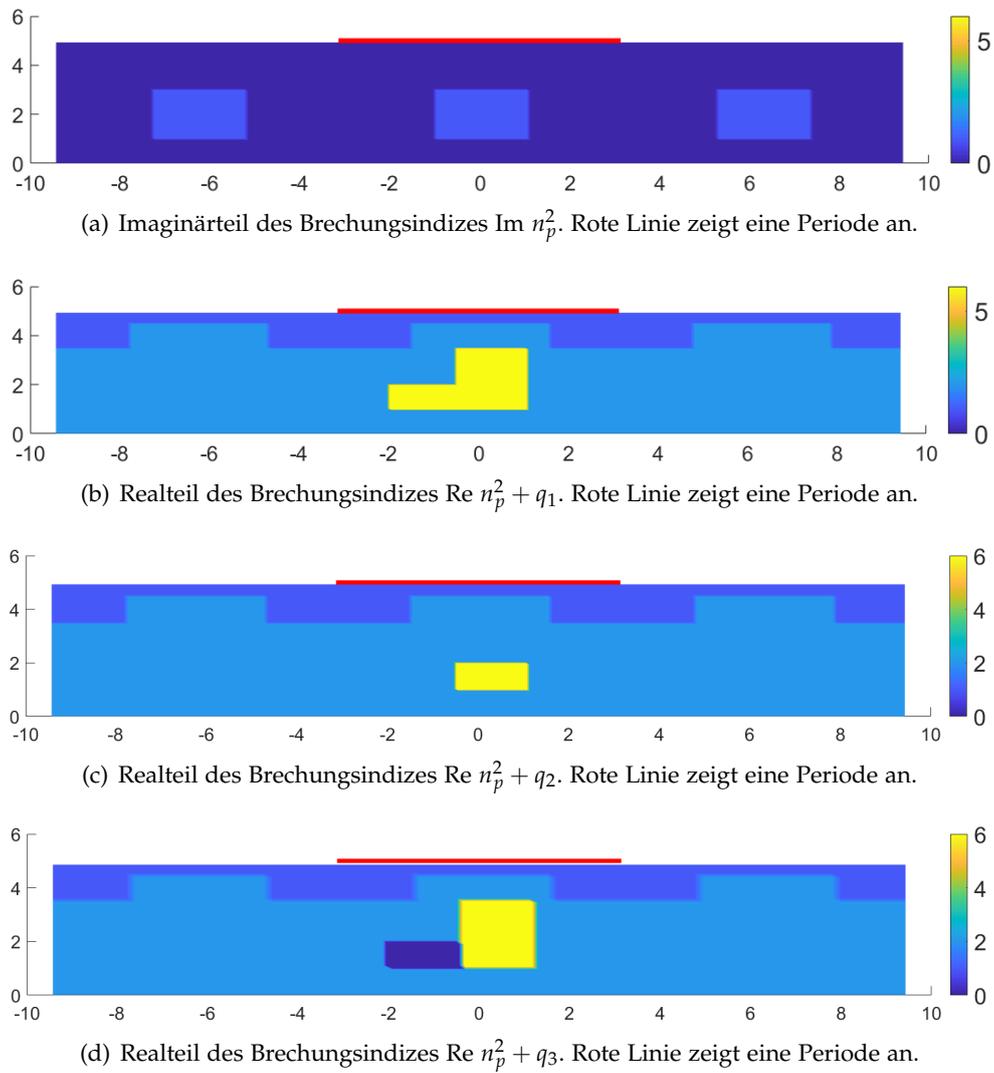


Abbildung 3.6.: Brechungsindex und verschiedene Störungen für die numerischen Beispiele.

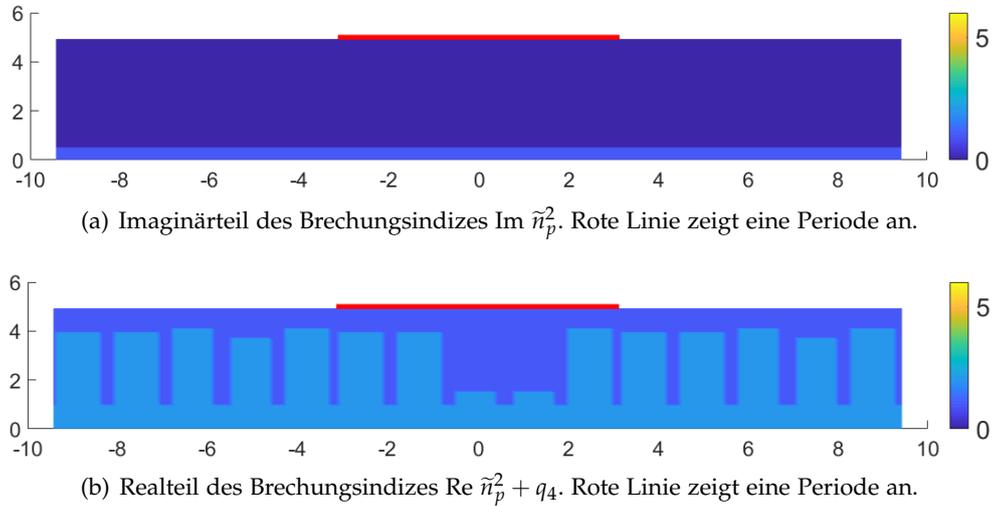


Abbildung 3.7.: Vereinfachtes Modell einer defekten Nano-Gras-Struktur für numerische Beispiele.

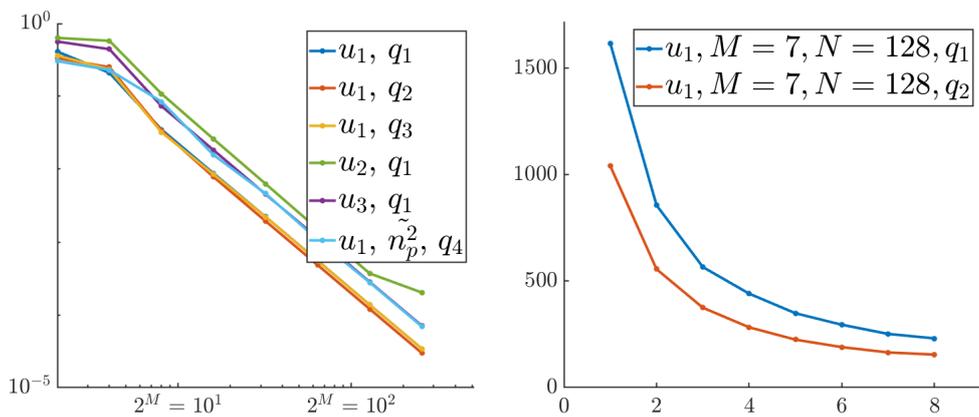


Abbildung 3.8.: Numerische Approximation der Referenzlösungen für verschiedene Störungen und die benötigte Zeit der Methode.

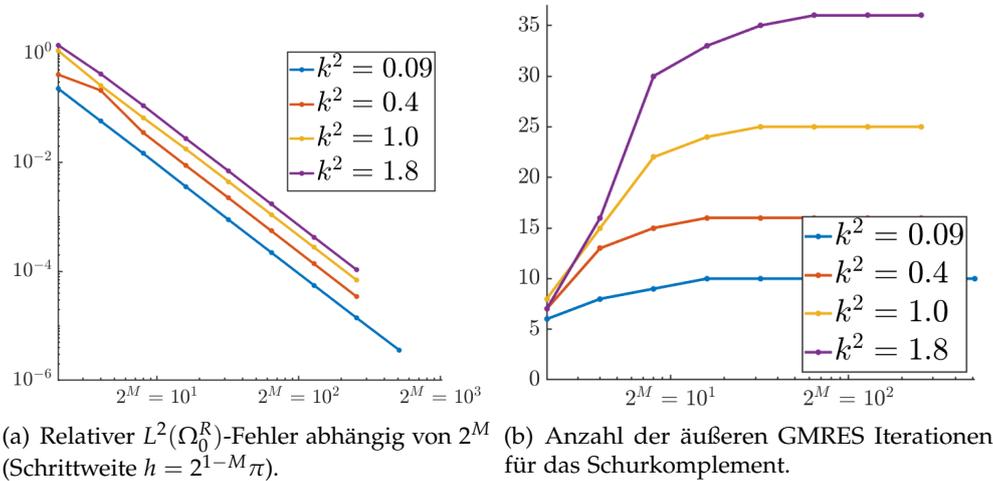


Abbildung 3.9.: Einfluss der Wellenzahl auf die Approximation der Lösung.

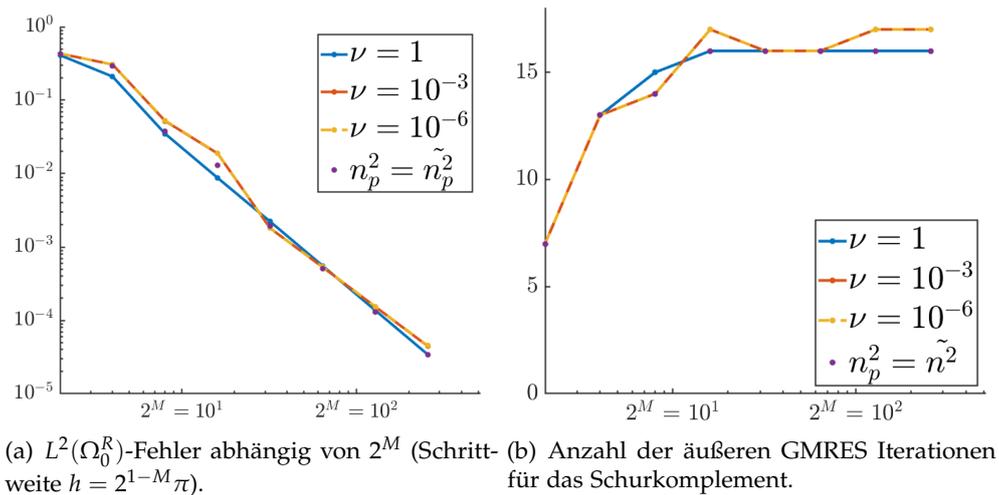


Abbildung 3.10.: Einfluss der Absorption auf die Approximation der Lösung.

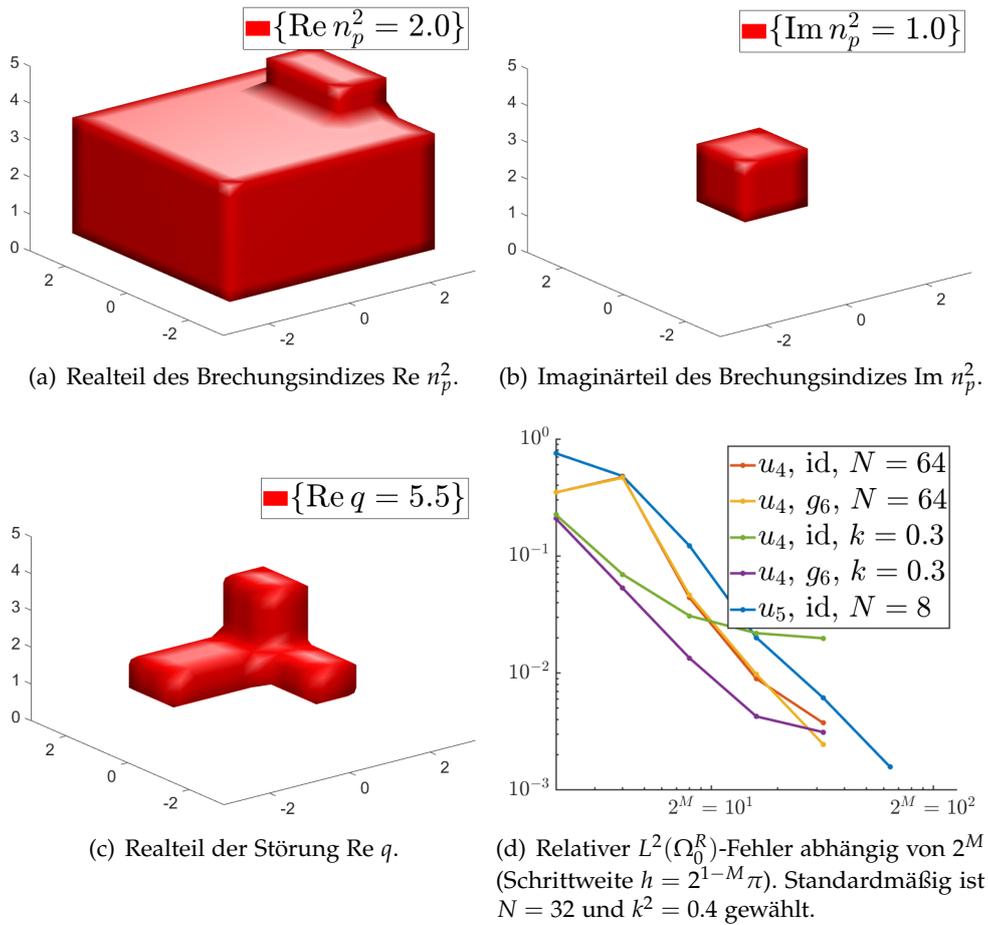


Abbildung 3.11.: Numerisches Beispiel für die Approximation im dreidimensionalen Raum.



## Elektromagnetische Streuung an lokal gestörten biperiodischen inhomogenen Medien

---

Nach der Untersuchung des skalarwertigen Problems wenden wir uns dem vollständigen vektorwertigen Problem für die Streuung von elektromagnetischen Wellen an einem unbeschränkten, biperiodischen Medium zu. Anstelle einer Lösung für die Helmholtz-Gleichung werden wir die Lösung zu den zeitharmonischen Maxwell-Gleichungen suchen, wobei das Medium in diesem Fall durch die biperiodischen Parameter Permittivität  $\varepsilon$  und Permeabilität  $\mu$  beschrieben ist. Wie zuvor nehmen wir zusätzlich eine lokale Störung der Permittivität an und dass das Streuobjekt sich in einem homogenen Medium befindet. Die Existenztheorie aus diesem Kapitel wurde in [Kon19a] zur Veröffentlichung eingereicht und die numerische Methode ist Teil des zur Veröffentlichung eingereichten Artikels [Kon19b].

Das vektorwertige Streuproblem kann beim Weglassen der Störung und bei der Betrachtung von quasiperiodischen einfallenden Wellen, analog zum skalaren Problem, auf eine Periode reduziert werden, wozu es bereits Arbeiten gibt. So wird z. B. in [Sch03; BD00; Dob94] der Fall einer konstanten Permeabilität und in [AB03] ein chirales periodisches Medium behandelt. In [LZ17c] wird ein erster Ansatz für ein unbeschränktes periodisches Medium mit nicht-periodischen einfallenden Wellen bei einer konstanten Permeabilität und ohne Störung in der Permittivität untersucht, wodurch sich die Lösung der Problemstellung in dem üblichen Sobolev-Raum  $H^1$  befindet und die Randbedingung keine Probleme verursacht. Wenn man das Problem für beliebige, also im Allgemeinen nicht-periodische, Parameter auf dem unbeschränkten Gebiet untersucht, so werden in der Regel die Bedingung  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3} \geq 0$  sowie zusätzlich weitere starke Einschränkungen an die Parameter gefordert (vgl. [HL11] und [LZZ16]). Eine Alternative ist die Annahme einer (nicht-physikalischen) komplexen Wellenzahl mit positivem Imaginärteil, wie z. B. in [LWZ11] untersucht, welche jedoch die Problemstellung deutlich vereinfacht. Für unseren Bloch-Floquet-Ansatz können wir beide Parameter  $\varepsilon$  und  $\mu$  ortsabhängig wählen,  $\varepsilon$  darf zusätzlich einen lokalen Defekt beinhalten, die Wellenzahl kann reell gewählt werden und die rechte Seite muss keine Periodizitätsbedingung erfüllen. Hierzu genügt uns die Annahme, dass  $\varepsilon, \mu \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ , abgesehen von

dem lokalen Defekt, periodisch in  $\underline{x}$  sind und dass die Menge  $\{\text{Im } \varepsilon > 0\}$  eine offene Kugel beinhaltet.

Der Lösungsraum des vektorwertigen Problems wird im Vergleich zum skalaren Problem weniger Regularität (bzgl.  $x$ ) besitzen, sodass wir eine andere Ausstrahlungsbedingung herleiten müssen. Diese wird eine Singularität im Frequenzbereich besitzen und erschwert dadurch die Analysis. Um die Existenz der Lösung zu zeigen, wenden wir zunächst den Ansatz aus dem letzten Kapitel auf das Problem an, um mit Hilfe der Bloch-Floquet-Transformation eine Familie von Problemen herzuleiten. Anschließend konstruieren wir eine sogenannte *Helmholtz-Zerlegung* für das quasiperiodische Problem, wodurch wir das Problem in zwei Teile zerlegen und einen Unterraum mit mehr Regularität für den Lösungsraum erhalten. In diesem Raum können wir den Differentialoperator in einen koerziven Teil und eine kompakte Störung aufteilen. Dies erlaubt uns die eindeutige Lösbarkeit der einzelnen quasiperiodischen Probleme zu zeigen. Die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel wird dann das Mittel der Wahl sein, um bei der Konstruktion der Gesamtlösung die Singularität in den Griff zu bekommen. Diese erlaubt uns zusätzlich, Regularitätsresultate der Lösung bzgl. der künstlichen Variable zu zeigen, um insbesondere die Konvergenzordnung der numerischen Methode zu verbessern. Zur besseren Lesbarkeit wird hier das Problem mit dem perfekt elektrischen Leiter am unteren Rand  $\Gamma^0$  betrachtet. Die Argumente lassen sich jedoch schnell auf den Fall übertragen, dass das Medium sich frei im Raum befindet, oder mit anderen Worten, dass sich oberhalb und unterhalb des Objektes ein homogenes Medium befindet.

Naturgemäß werden die Maxwell-Gleichungen in  $\mathbb{R}^3$  betrachtet. Das Medium soll biperiodisch in  $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  und beschränkt in  $x_3$ -Richtung sein. Die Periodizität des Streuobjektes charakterisieren wir durch die invertierbare Matrix  $\Lambda \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  und setzen  $\Lambda^* := 2\pi(\Lambda^T)^{-1}$ . Die Beschränktheit des Mediums in die  $x_3$ -Richtung bedeutet, dass wir ein  $R_0 > 0$  finden können, sodass das Streuobjekt in dem Streifen  $\Omega^{R_0}$  beinhaltet ist. Zur Vereinfachung der Darstellung wählen wir auch in diesem Fall  $\Lambda = 2\pi I_2$  und  $\Lambda^* = I_2$  mit der Einheitsmatrix  $I_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

## 4.1. Formulierung des Streuproblems

Das gestreute *elektrische Feld*  $E$  sowie das gestreute *magnetische Feld*  $H$  modellieren wir als Lösungen zu den Maxwell-Gleichungen in  $\mathbb{R}^3$ . Wir gehen von einem inhomogenen, isotropischen Material aus, d. h. wir nehmen an, dass die Permeabilität  $\mu$ , die Permittivität  $\varepsilon$  und die elektrische Leitfähigkeit

$\sigma$  skalare Funktionen aus  $L^\infty(\mathbb{R}_+^3, \mathbb{R})$  sind und zudem die Abschätzungen  $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$ ,  $\varepsilon(x) \geq \varepsilon_0 > 0$  und  $\sigma(x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}_+^3$  erfüllt sind. Durch die Annahme, dass das Medium auf einem perfekt elektrischen Leiter liegt, erhalten wir die Randbedingung  $E_T|_{\mathbb{R}^2 \times \{0\}} = 0$ .

Wir definieren  $H_{0,\text{loc}}(\text{curl}; \mathbb{R}_+^3)$  analog zu  $H_{0,\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^3)$  und suchen das elektrische Feld  $E$  sowie das magnetische Feld  $H$  als Funktionen aus  $H_{0,\text{loc}}(\text{curl}; \mathbb{R}_+^3)$ , die beide für alle  $R \geq R_0 > 0$  in  $H(\text{curl}; \Omega^R)$  liegen und die Gleichungen

$$\nabla \times E - i\omega\mu H = 0, \quad \nabla \times H + i(\omega\varepsilon + i\sigma)E = J \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}_+^3)^3, \quad (4.1a)$$

$$\text{div}(\mu H) = 0, \quad \text{div}\left(\varepsilon E + i\frac{\sigma}{\omega}E\right) = \frac{1}{i\omega} \text{div}(J) \quad \text{in } H^{-1}(\mathbb{R}_+^3), \quad (4.1b)$$

$$E_T|_{\mathbb{R}^2 \times \{0\}} = 0 \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^2), \quad (4.1c)$$

mit  $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\mu, \varepsilon, \sigma \in L^\infty(\mathbb{R}_+^3, \mathbb{R})$  und  $J \in L^2(\mathbb{R}_+^3)^3$  erfüllen. Da  $E$  in  $H(\text{curl}; \Omega^R)$  für alle  $R > 0$  liegt, ist die Spur  $E_T|_{\mathbb{R}^2 \times \{0\}}$  wohldefiniert.

Die Substitution des magnetischen Feldes  $H$  ergibt eine Gleichung zweiter Ordnung für das elektrische Feld  $E \in H(\text{curl}; \Omega^R)$  für alle  $R \geq R_0 > 0$  der Form

$$\nabla \times \left( \mu^{-1} \nabla \times E \right) - \omega^2 \varepsilon E = f := i\omega J \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}_+^3)^3, \quad (4.2a)$$

$$\text{div}(\varepsilon E) = -\frac{1}{\omega^2} \text{div} f = \frac{1}{i\omega} \text{div} J \quad \text{in } H^{-1}(\mathbb{R}_+^3), \quad (4.2b)$$

$$E_T|_{\mathbb{R}^2 \times \{0\}} = 0 \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^2). \quad (4.2c)$$

Falls wir eine Lösung  $E$  für die Gleichungen (4.2) gefunden haben, so lösen die Funktionen  $E$  und  $H := \frac{1}{i\omega\mu}(\nabla \times E)$  die ursprünglichen Maxwell-Gleichungen (4.1).

Für die Problemstellung und die Existenztheorie stellen wir folgende Voraussetzungen:

- Die Konstante  $R_0 > 0$  soll so gewählt werden, dass für ein kleines  $\delta > 0$  außerhalb von  $\Omega^{R_0-\delta}$  die Funktionen  $\mu$  und  $\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega}$  konstant sind mit  $\sigma = 0$ . Das bedeutet, dass  $\mu = \mu_+ > 0$  und  $\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega} = \varepsilon_+ > 0$  in  $\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{\Omega^{R_0-\delta}}$  gelten soll. Wir legen dann die Abkürzungen  $\varepsilon_r := (\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega})/\varepsilon_+$  und  $\mu_r := \frac{\mu}{\mu_+}$  sowie  $k^2 := \omega^2 \mu_+ \varepsilon_+$  fest.
- Die Permittivität  $\varepsilon_r$  sowie die Permeabilität  $\mu_r$  sollen  $2\pi$ -periodisch sein und wir bezeichnen mit  $\varepsilon_r^s := \varepsilon_r + q$  den gestörten Parameter mit der Störung  $q \in L^\infty(\mathbb{R}_+^3)$ , die außerhalb von  $\Omega_0^{R_0}$  der Nullfunktion entspricht.
- Für die rechte Seite fordern wir, dass der Träger von  $f$  in  $\Omega^{R_0-\delta}$  enthalten ist.

Die Bedingungen ermöglichen uns eine Ausstrahlungsbedingung festzulegen, denn die Gleichung zweiter Ordnung vereinfacht sich oberhalb des Objektes auf die homogene Helmholtz-Gleichung. Für ein genügend kleines  $\delta > 0$  sind die Parameter  $\mu_r$  und  $\varepsilon_r$  konstant 1 in  $\mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{\Omega^{R_0-\delta}}$ . Die rechte Seite  $f$  verschwindet in dieser Menge, sodass für die Divergenz von  $E$  die Gleichheit  $\operatorname{div} E = 0$  gilt und die Gleichung (4.2a) sich komponentenweise auf die Helmholtz-Gleichung  $\Delta E + k^2 E = 0$  reduziert. Für ein  $x \in \mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{\Omega^{R_0-\delta}}$  fordern wir also, dass sich das elektrische Feld für  $R \geq R_0$  als die ausstrahlende Lösung der homogenen Helmholtz-Gleichung der Form

$$E^R(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(E|_{\Gamma^R})(\xi) e^{i\xi \cdot \underline{x} + i\sqrt{k^2 - |\xi|^2}(x_3 - R)} d\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times (R, \infty)) \quad (4.3)$$

darstellen lässt. Wir bezeichnen mit  $TH^{1/2}(\Gamma^R)$  den Raum der Funktionen  $\phi_T = (\phi_1, \phi_2, 0)^\top \in H^{1/2}(\Gamma^R)^3$ . Die Wohldefiniertheit der Ausstrahlungsbedingung (4.3) folgt aus dem folgenden Regularitätsresultat.

**Satz 4.1**

Es sei abkürzend  $\Omega := \mathbb{R}^2 \times (R, R')$  mit  $R' > R \in \mathbb{R}$ . Wenn für eine Funktion  $u \in H(\operatorname{curl}; \Omega) \cap H(\operatorname{div}; \Omega)$  die Spur  $u_T$  in  $TH^{1/2}(\partial\Omega)$  liegt, so ist  $u$  ein Element aus  $H^1(\Omega)^3$  und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{H^1(\Omega)^3} \leq c \left( \|u\|_{H(\operatorname{curl}; \Omega)} + \|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)} + \|u_T\|_{TH^{1/2}(\partial\Omega)} \right).$$

*Beweis:* Für  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^3$  gilt  $\nabla \times \nabla \times \phi = \nabla \operatorname{div} \phi - \Delta \phi$  und das Anwenden der Greenschen Formel ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx &= \sum_{j=1}^3 \left( - \int_{\Omega} \Delta \phi_j \bar{\phi}_j dx + \left[ \int_{\mathbb{R}^2 \times \{R'\}} - \int_{\mathbb{R}^2 \times \{R\}} \right] \frac{\partial \phi_j}{\partial x_3} \bar{\phi}_j dS \right) \\ &= \int_{\Omega} (\nabla \times \nabla \times \phi) \cdot \bar{\phi} - (\nabla \operatorname{div} \phi) \cdot \bar{\phi} dx + \sum_{j=1}^3 \left[ \int_{\mathbb{R}^2 \times \{R'\}} - \int_{\mathbb{R}^2 \times \{R\}} \right] \frac{\partial \phi_j}{\partial x_3} \bar{\phi}_j dS. \end{aligned}$$

Aus der erneuten Anwendung der Greenschen Formel folgt dann

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx &= \int_{\Omega} (\nabla \times \phi) \cdot (\nabla \times \bar{\phi}) + \operatorname{div} \phi \operatorname{div} \bar{\phi} dx \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 \left[ \int_{\mathbb{R}^2 \times \{R'\}} - \int_{\mathbb{R}^2 \times \{R\}} \right] \frac{\partial}{\partial x_3} \phi_j \bar{\phi}_j dS \\ &\quad + \left[ \int_{\mathbb{R}^2 \times \{R'\}} - \int_{\mathbb{R}^2 \times \{R\}} \right] e_3 \times (\nabla \times \phi) \cdot \bar{\phi} - (\operatorname{div} \phi) \bar{\phi}_3 dS. \end{aligned}$$

Für den Randterm rechnen wir nach, dass auf  $\Gamma := \mathbb{R}^2 \times \{R'\}$ , und analog auf  $\mathbb{R}^2 \times \{R\}$ , die Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} e_3 \times (\nabla \times \phi) \cdot \bar{\phi} - \operatorname{div} \phi \bar{\phi}_3 + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_3} \phi_j \bar{\phi}_j \, dS \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_2} \phi_3 \bar{\phi}_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_3 \bar{\phi}_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_1 \bar{\phi}_3 - \frac{\partial}{\partial x_2} \phi_2 \bar{\phi}_3 \, dS \\ &= -2 \operatorname{Re} \int_{\Gamma} (\operatorname{div}_T \phi_T) \bar{\phi}_3 \, dS \end{aligned}$$

gilt. Da der Operator  $\operatorname{div}_T: H^{1/2}(\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$  stetig ist, folgt damit

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{H^1(\Omega)^3}^2 &\leq \|\phi\|_{H(\operatorname{curl}; \Omega)}^2 + \|\operatorname{div} \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\phi_T\|_{TH^{1/2}(\partial\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)^3} \\ &\leq \left( \|\phi\|_{H(\operatorname{curl}; \Omega)} + \|\operatorname{div} \phi\|_{L^2(\Omega)} + C \|\phi_T\|_{TH^{1/2}(\partial\Omega)} \right) \|\phi\|_{H^1(\Omega)^3} \end{aligned}$$

für alle  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^3$ . Wegen der Dichtheit von  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^3$  in dem abgeschlossenen Raum  $\{u \in H(\operatorname{curl}; \Omega) \cap H(\operatorname{div}; \Omega) : u_T \in TH^{1/2}(\partial\Omega)\}$  gilt die Abschätzung für alle  $u \in H(\operatorname{curl}; \Omega) \cap H(\operatorname{div}; \Omega)$  mit  $u_T \in TH^{1/2}(\partial\Omega)$ .  $\square$

Wir werden eine Lösung der Maxwell-Gleichungen suchen, deren Spur in  $TH^{1/2}(\mathbb{R}^2 \times \{R\})$ ,  $R \geq R_0 > 0$ , liegt und deren Lösung demnach lokal um den Rand  $\mathbb{R}^2 \times \{R\}$  eine  $H^1$ -Funktion sein wird. Daraus folgt insbesondere aus [CM05, Lemma 2.2], dass die obere Funktion  $E^R$  in  $H^1(\mathbb{R}^2 \times (R, R'))$  für alle  $R' > R \geq R_0$  liegt.

## 4.2. Reduktion auf ein variationelles Problem

Wir wollen das Streuproblem (4.2), (4.3) auf ein variationelles Problem überführen. Dafür wenden wir zunächst formell den Satz von Gauß auf dem Gebiet  $\Omega^R$  an, welcher uns die Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^R} \nabla \times \left( \mu_r^{-1} \nabla \times E \right) \cdot \bar{v} - k^2 \varepsilon_r^s E \cdot \bar{v} \, dx \\ &= \int_{\Omega^R} \mu_r^{-1} (\nabla \times E) \cdot (\nabla \times \bar{v}) - k^2 \varepsilon_r^s E \cdot \bar{v} \, dx + \int_{\Gamma^R} [e_3 \times (\nabla \times E) \cdot \bar{v}] \, dS \end{aligned}$$

liefert. Im Folgenden ersetzen wir die Randterme durch angemessene Randbedingungen und formulieren eine Austrahlungsbedingung, sodass eine Lösung zu dem variationellen Problem auch das Streuproblem (4.2), (4.3) löst. Da die Spur der dritten Komponente  $E_3|_{\Gamma^R}$  für Funktionen aus  $H(\operatorname{curl}; \Omega^R)$  nicht wohldefiniert ist, werden wir die Austrahlungsbedingung in eine alternative Form bringen, die ohne die Spur von  $E_3$  auskommt.

In der Nähe des Randes  $\Gamma^R$  für ein  $R \geq R_0$  ist nach dem Regularitätsresultat 4.1 die Lösung  $E$  für ein kleines  $\delta > 0$  aus  $H^1(\mathbb{R}^2 \times (R - 2\delta, R + 2\delta))$  und löst auf dieser Menge komponentenweise die homogene Helmholtz-Gleichung. Die Bloch-Floquet-Transformation ist für  $s = 1, 2$  ein Isomorphismus zwischen den Räumen  $H^s(\mathbb{R}^2 \times (R - \delta, R + \delta))$  und  $L^2(I; H_\alpha^s((-\pi, \pi)^2 \times (R - \delta, R + \delta)))$ . Aus den Standard-Regularitätsresultaten, wie z. B. [McL00, Theorem 4.18], folgt, dass  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2} E$  in  $L^2(I; H_\alpha^2((-\pi, \pi)^2 \times (R - \delta, R + \delta)))$  liegt. Somit ist die Lösung  $E$  ein Element aus  $H^2(\mathbb{R}^2 \times (R - \delta, R + \delta))$  und insbesondere erhalten wir für  $E$  auf dem Rand  $\Gamma^R$  die Gleichheit

$$e_3 \times (\nabla \times E) = \nabla_T E_3 - \frac{\partial E_T}{\partial x_3} \quad \text{in } H^{1/2}(\Gamma^R)^3.$$

Aus der Ausstrahlungsbedingung wissen wir, dass für den rechten Term der Lösung die Gleichheit  $\frac{\partial E_T}{\partial x_3}|_{\Gamma^R} = T(E_T|_{\Gamma^R})(\underline{x}, R)$  erfüllt ist, wobei wir mit  $T : H^{1/2}(\Gamma^R)^3 \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma^R)^3$  den Dirichet-Neumann-Operator aus Lemma 3.1 bezeichnen, der komponentenweise angewandt wird. Für den linken Term  $\nabla_T E_3$  nutzen wir aus, dass in einer Umgebung um den Rand die Divergenz der Lösung verschwindet, also

$$0 = \operatorname{div} E = \operatorname{div}_T E_T + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \quad \text{in } H^1(\mathbb{R}^2 \times (R - \delta, R + \delta))$$

erfüllt ist. Das Anwenden der Fourier-Transformation ergibt

$$i\sqrt{k^2 - |\xi|^2} \mathcal{F}(E_3|_{\Gamma^R}) + i\xi \cdot \mathcal{F}(E_T|_{\Gamma^R}) = 0 \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^2),$$

woraus die Gleichung

$$i\xi \mathcal{F}(E_3|_{\Gamma^R}) = -\frac{i\xi}{\sqrt{k^2 - |\xi|^2}} \left( \xi \cdot \mathcal{F}(E_T|_{\Gamma^R}) \right) \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^2)$$

folgt. Wir bezeichnen mit  $\widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R)$  den Raum

$$\widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R) := \left\{ u_T \in TH^{1/2}(\Gamma^R) : \left( \xi \mapsto \frac{\xi \cdot \mathcal{F}(u_T)(\xi)}{|k^2 - |\xi|^2|^{1/4}} \right) \in L^2(\mathbb{R}^2) \right\},$$

der für  $u_T \in \widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R)$  mit der Graphennorm

$$\begin{aligned} \|u_T\|_{\widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R)}^2 &:= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|k^2 - |\xi|^2|^{1/2}} |\xi \cdot \mathcal{F}(u_T)(\xi)|^2 \, d\xi \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} |1 + |\xi|^2|^{1/2} |\mathcal{F}(u_T)(\xi)|^2 \, d\xi \end{aligned}$$

und dem entsprechenden Skalarprodukt ausgestattet ist. Nach der Konstruktion des Raumes  $\widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R)$  können wir die Wohldefiniertheit des Operators  $N$  folgern, den wir im nächsten Lemma einführen.

**Lemma 4.2.** *Wir definieren für  $\phi_T \in \widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R) \cap L^1(\Gamma^R)^3$  den Operator  $N$  durch*

$$N(\phi_T)(\underline{x}) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{i\tilde{\xi}}{\sqrt{k^2 - |\tilde{\xi}|^2}} (\tilde{\xi} \cdot \mathcal{F}(\phi_T)(\tilde{\xi})) e^{i\tilde{\xi} \cdot \underline{x}} d\tilde{\xi}. \quad (4.4)$$

Dann ist die Erweiterung  $N: \widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R) \rightarrow \widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R)'$  linear und stetig. Zudem erfüllt der Operator für alle  $\phi_T \in \widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R)$  die Ungleichungen

$$-\operatorname{Re} \langle N\phi_T, \phi_T \rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad -\operatorname{Im} \langle N\phi_T, \phi_T \rangle \geq 0,$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R)' \times \widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R)}$  die duale Paarung bezeichnet.

*Beweis:* Für Elemente aus  $\widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R) \cap L^1(\Gamma^R)^3$  können wir den Operator  $N$  wie in (4.4) darstellen. Für  $\phi_T$  und  $\psi_T \in \widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R) \cap L^1(\Gamma^R)^3$  gilt nach dem Satz von Plancherel und der Cauchy-Schwartz-Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} \langle N\phi_T, \psi_T \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{-i}{\sqrt{|k^2 - \tilde{\xi}|^2}} (\tilde{\xi} \cdot \mathcal{F}(\phi_T)) \overline{(\tilde{\xi} \cdot \mathcal{F}(\psi_T))} d\tilde{\xi} \\ &\leq C \|\phi_T\|_{\widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R)} \|\psi_T\|_{\widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R)',} \end{aligned}$$

sodass der Operator  $N$  stetig auf der dichten Menge  $\widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R) \cap L^1(\Gamma^R)^3$  ist und eine stetige Erweiterung auf  $\widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R)$  besitzt. Um die Ungleichungen zu zeigen, wählen wir  $\psi_T = \phi_T \in \widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R)$  und erhalten aus dem Satz von Plancherel die Darstellung

$$\begin{aligned} -\langle N\phi_T, \phi_T \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{|\tilde{\xi}| > k} \frac{1}{\sqrt{|\tilde{\xi}|^2 - k^2}} |\tilde{\xi} \cdot \mathcal{F}(\phi_T)|^2 d\tilde{\xi} \\ &\quad + \frac{i}{(2\pi)^2} \int_{|\tilde{\xi}| \leq k} \frac{1}{\sqrt{k^2 - |\tilde{\xi}|^2}} |\tilde{\xi} \cdot \mathcal{F}(\phi_T)|^2 d\tilde{\xi}, \end{aligned}$$

woraus die Ungleichungen sofort erkennbar sind.  $\square$

Den Lösungsraum, in dem wir die Lösung suchen werden, wählen wir als

$$X := \left\{ u \in H(\operatorname{curl}; \Omega^R) : u_T|_{\Gamma^R} \in \widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R), u_T|_{\Gamma^0} = 0 \right\}$$

und stattdessen diesen mit der Graphennorm

$$\|u\|_X^2 := \|u\|_{H(\text{curl}; \Omega^R)}^2 + \|u_T\|_{\widetilde{TH}^{1/2}(\Gamma^R)}^2$$

aus. Damit lautet die gewünschte variationelle Formulierung:

**Problemstellung 2**

Suche eine Funktion  $E \in X$ , sodass

$$\begin{aligned} a_q(E, v) &:= \int_{\Omega^R} \mu_r^{-1} (\nabla \times E) \cdot (\nabla \times \bar{v}) - k^2 \varepsilon_r^s E \cdot \bar{v} \, dx \\ &\quad + \int_{\Gamma^R} N(E_T|_{\Gamma^R}) \cdot \bar{v}_T|_{\Gamma^R} - T(E_T|_{\Gamma^R}) \cdot \bar{v}_T|_{\Gamma^R} \, dS \\ &= \int_{\Omega^R} f \cdot \bar{v} \, dx \end{aligned}$$

für alle  $v \in X$  erfüllt ist.

Für die Existenztheorie nehmen wir folgende Regularitätsvoraussetzungen an die Parameter an.

**Annahme 2.** Die Menge  $\{\text{Im } \varepsilon_r > 0\}$  ist nicht leer und beinhaltet eine offene Kugel. Zudem sollen die Parameter  $\varepsilon_r$ ,  $q$  und  $\mu_r$  aus  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+^3)$  sein und die Schranken  $\text{Im } \varepsilon_r^s \geq 0$ ,  $\text{Im } \mu_r \geq 0$  sowie  $\text{Re } \varepsilon_r \geq \varepsilon_0 > 0$  und  $\text{Re } \mu_r \geq \mu_0 > 0$  erfüllen.

Die Stetigkeit der Sesquilinearform ist direkt ersichtlich, da wir die Räume absichtlich so konstruiert haben. Nun wollen wir in Lemma 4.5 nachweisen, dass eine Lösung des variationellen Problems 2 sich zu einer Lösung des Streuproblems (4.2) erweitern lässt. Dazu benötigen wir Hilfsresultate, die wir erst einmal zeigen werden.

**Lemma 4.3.** Eine Lösung  $E \in X$  zu dem variationellen Problem 2 ist eine distributionelle Lösung zu den Gleichungen (4.2) auf  $\Omega^R$  und die Gleichung (4.2a) gilt in  $L^2(\Omega^R)$ . Zudem ist die Identität

$$e_3 \times (\nabla \times E)|_{\Gamma^R} = N(E_T|_{\Gamma^R}) - T(E_T|_{\Gamma^R}) \tag{4.5}$$

in dem besseren Raum  $H^{-1/2}(\Gamma^R)^3$  erfüllt.

*Beweis:* Wir passen den Beweis aus [HL11, Korollar 3.2] für unsere Problemstellung an. Aus der variationellen Formulierung 2 folgt, dass die Lösung  $E$  eine distributionelle Lösung zu der Gleichung (4.2a) in  $\Omega^R$  ist. Da die rechte Seite

und der Term nullter Ordnung in  $L^2(\Omega^R)$  liegen, muss auch  $\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times E)$  aus  $L^2(\Omega^R)$  sein und die Gleichung gilt in diesem Raum. Aus der Definition des Funktionals  $\nu \times (\nabla \times E)|_{\Gamma^R}$  mit dem äußeren Einheitsnormalenvektor  $\nu = e_3$  folgern wir, dass

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma^R} e_3 \times (\nabla \times E)|_{\Gamma^R} \cdot \bar{v}_T|_{\Gamma^R} \, dS \\ & := \int_{\Omega^R} f \cdot \bar{v} \, dx - \int_{\Omega^R} \mu_r^{-1} (\nabla \times E) \cdot (\overline{\nabla \times v}) + k^2 \varepsilon_r^s E \cdot \bar{v} \, dx \quad (4.6) \\ & = \int_{\Gamma^R} N(E_T|_{\Gamma^R}) \cdot \bar{v}_T|_{\Gamma^R} - T(E_T|_{\Gamma^R}) \cdot \bar{v}_T|_{\Gamma^R} \, dS \end{aligned}$$

für alle  $v \in H^1(\Omega^R)^3 \cap X$  erfüllt ist. Der Parameter  $\varepsilon_r$  gleicht in Randnähe der Einsfunktion, sodass  $E \in H(\operatorname{div}; \mathbb{R}^2 \times (R - \delta, R))$  für ein  $\delta > 0$  gilt. Für die Lösung  $E$  ist die Spur in  $TH^{1/2}(\Gamma^R)$ , sodass aus dem Satz 4.1  $E \in H^1(\mathbb{R}^2 \times (R - \delta, R))^3$  folgt. Zudem reduziert sich in diesem Streifen die Gleichung komponentenweise auf die homogene Helmholtz-Gleichung, sodass die Normalenableitung von  $E$  an  $\Gamma^R$  wohldefiniert ist und in  $H^{-1/2}(\Gamma^R)^3$  liegt. Demnach gilt für  $E$  die Identität

$$e_3 \times (\nabla \times E) = \nabla_T E_3 - \frac{\partial E_T}{\partial x_3} \quad \text{in } H^{-1/2}(\Gamma^R)^3,$$

die keine Singularität besitzt. Wir wählen nun eine beliebige Testfunktion  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^3)$  und betrachten für  $\eta > 0$  die Funktionen  $\phi_i^\eta$ ,  $i = 1, 2, 3$ , die durch  $\phi_3^\eta := 0$ ,

$$\mathcal{F}(\phi_i^\eta)(\xi, x_3) := \chi_{\{|k - |\xi| \geq \eta\}} \mathcal{F}(\phi_i)(\xi, x_3)$$

für  $i = 1, 2$  definiert sind. Die Funktion  $\phi^\eta = (\phi_1^\eta, \phi_2^\eta, \phi_3^\eta)^\top$  liegt somit in  $H^1(\Omega^R)^3 \cap X$  und erfüllt die obere Gleichung. Wenn wir nun  $\phi^\eta$  in die Gleichung (4.6) einsetzen und  $\eta \rightarrow 0$  laufen lassen, folgt die Gleichung (4.5) in dem Sobolev-Raum  $H^{-1/2}(\Gamma^R)^3$ .  $\square$

Im letzten Beweis von Lemma 4.3 wurde insbesondere das Argument für das folgende Korollar gegeben.

**Folgerung 4.4.** Für eine Lösung  $E \in X$  des Problems 2 ist  $E_T|_{\Gamma^R}$  wohldefiniert und liegt in  $H^{1/2}(\Gamma^R)^3$ .

Damit können wir nun das anschließende Lemma beweisen, welches die Verbindung zwischen dem variationellen Problem und dem Streuproblem herstellt.

**Lemma 4.5.** Falls  $E \in X$  für ein  $R \geq R_0$  das variationelle Problem 2 löst, dann ist die Fortsetzung zu  $E'$  auf  $\mathbb{R}_+^3$  mit  $E' := E$  in  $\Omega^R$  und

$$E'_T(x) := \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(E_T)(\xi) e^{i\xi \cdot x + i\sqrt{k^2 - |\xi|^2}(x_3 - R)} d\xi \quad (4.7a)$$

$$E'_3(x) := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{-1}{\sqrt{k^2 - |\xi|^2}} (\xi \cdot \mathcal{F}(E_T)(\xi)) e^{i\xi \cdot x + i\sqrt{k^2 - |\xi|^2}(x_3 - R)} d\xi \quad (4.7b)$$

für  $x \in \mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{\Omega^R}$  eine Lösung des Streuproblems (4.2), (4.3) in  $\mathbb{R}_+^3$ . Zudem ist  $E'$  eine Lösung zu dem variationellen Problem 2 für alle  $R' \geq R$  und für ein genügend kleines  $\delta > 0$  gilt  $E' \in H^1(\Omega^{R'} \setminus \Omega^{R_0 - \delta})^3$  für alle  $R' \geq R_0$ .

*Beweis:* Der Beweis ist aus [HL11, Korollar 3.3]. Zunächst zeigen wir die Wohldefiniertheit der Ausstrahlungsbedingung (4.7). Wegen der Annahme, dass die Spur der Lösung aus  $TH^{1/2}(\Gamma^R)$  ist, folgt aus [CM05, Lemma 2.2], dass  $E'_T \in H^1(\mathbb{R}^2 \times (R, R'))^2$  für alle  $R' > R$  gilt. Wir definieren für die Indikatorfunktion  $\chi$

$$f_1(\xi) := \chi_{\{|\xi| \leq 2k\}} \frac{\xi \cdot \mathcal{F}(E_T)(\xi)}{\sqrt{k^2 - |\xi|^2}} \quad \text{sowie} \quad f_2(\xi) := \chi_{\{|\xi| > 2k\}} \frac{\xi \cdot \mathcal{F}(E_T)(\xi)}{\sqrt{k^2 - |\xi|^2}}$$

und betrachten

$$E_3^1 := \int_{\mathbb{R}^2} f_1(\xi) e^{i\xi \cdot x + i\sqrt{k^2 - |\xi|^2}(x_3 - R)} d\xi, \quad E_3^2 := \int_{\mathbb{R}^2} f_2(\xi) e^{i\xi \cdot x + i\sqrt{k^2 - |\xi|^2}(x_3 - R)} d\xi.$$

Da  $f_2$  keine Singularität beinhaltet, gilt  $(1 + |\xi|^2)^{1/4} f_2(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^2)$  und infolgedessen ist nach [CM05, Lemma 2.2] die Funktion  $E_3^2 \in H^1(\mathbb{R}^2 \times (R, R'))$ . Andererseits folgt aus der Cauchy-Schwartz-Ungleichung und aus der Tatsache, dass die Spur  $E_T$  in dem Raum  $\widehat{TH}^{1/2}(\Gamma^R)$  liegt, dass  $|\xi|^s f_1(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^2)$  für alle  $s > 0$  erfüllt und demnach  $E_3^2$  aus dem Raum  $C^\infty(\mathbb{R}^2 \times (R, R'))$  ist. In Lemma 4.4 haben wir gezeigt, dass  $N(E_T|_{\Gamma^R})$  in dem Raum  $H^{-1/2}(\Gamma^R)$  liegt und daraus folgt insbesondere, dass auch  $f_1$  aus diesem Raum kommt. Wegen des kompakten Trägers des Kerns  $f_1$  folgern wir somit  $E_3^1 \in H^{1/2}(\Gamma^R)$  und erhalten insgesamt  $E_3^1 \in H^1(\mathbb{R}^2 \times (R, R'))$ .

Durch die Anwendung der Fourier-Transformation und Lemma 4.3 rechnen wir nach, dass

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times E' - k^2 E' &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+^3 \setminus \overline{\Omega^R}, \\ e_3 \times E'|_{\Gamma^R} &= e_3 \times E|_{\Gamma^R} && \text{auf } \Gamma^R, \\ e_3 \times \nabla \times E'|_{\Gamma^R} &= e_3 \times \nabla \times E|_{\Gamma^R} && \text{auf } \Gamma^R \end{aligned}$$

erfüllt ist. Damit ist die Fortsetzung  $E'$  eine Funktion aus  $H(\text{curl}; \Omega^{R'})$  für alle

$R' \geq R$  und löst die Maxwell-Gleichungen. Die Regularität zeigen wir, indem wir eine Abschneidefunktion an die Lösung multiplizieren und den Satz 4.1 anwenden, um die Abschätzung der  $H^1$ -Norm auf den kleineren Streifen zu erhalten.  $\square$

Aus der  $H^1$ -Regularität der Lösung  $E \in X$  des variationellen Problems in der Umgebung des Randes  $\Gamma^R$  folgt insbesondere, dass die Spur der dritten Komponente  $E_3$  existiert und sich darstellen lässt durch

$$\mathcal{F}(E_3) = \frac{-1}{\sqrt{k^2 - |\xi|^2}} (\xi \cdot \mathcal{F}(E_T)(\xi)) \quad \text{in } H^{1/2}(\Gamma^R).$$

Damit erfüllt die variationelle Lösung die Ausstrahlungsbedingung (4.3). In diesem Abschnitt haben wir das Streuproblem auf ein variationelles Problem zurückgeführt. Der Operator  $(N - T)$ , den wir für die Randbedingung (4.5) hergeleitet haben, wird als *Calderon-Operator* bezeichnet. Dieser beschreibt die Relation zwischen dem elektrischen und magnetischen Feld, wenn man diese für ein  $R > 0$  von  $\mathbb{R}_+^3$  auf die Menge  $\mathbb{R}^2 \times \{R\}$  einschränkt. Wegen der Identität  $H = \frac{1}{i\omega\mu_+} \nabla \times E$  aus (4.1a) muss für die Spur auf  $\Gamma^R$  mit  $R > R_0$  die Gleichung

$$e_3 \times (\nabla \times E)|_{\Gamma^R} = i\omega\mu_+(e_3 \times H)|_{\Gamma^R}$$

erfüllt werden. Genau diese Beziehung zwischen dem magnetischen und elektrischen Feld charakterisiert der Calderon-Operator. Alternativ kann man den Operator als ein Analogon zu dem Dirichlet-Neumann-Operator des skalaren Problems sehen. Die Ausstrahlungsbedingung (4.7) ist für alle Punkte  $x \in \mathbb{R}_+^3 \setminus \Omega^R$  eine Funktion aus  $C^\infty$  und löst eindeutig das klassische Problem

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times E^R - k^2 E^R &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^2 \times (R, \infty) \\ E_T^R &= E_T && \text{auf } \Gamma^R \\ \frac{\partial}{\partial x_3} E_3^R &= -\frac{\partial}{\partial x_1} E_1|_{\Gamma^R} - \frac{\partial}{\partial x_2} E_2|_{\Gamma^R} && \text{auf } \Gamma^R \end{aligned}$$

$E_3^R$  erfüllt Sommerfeldsche Ausstrahlungsbed.

Die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung an die dritte Komponente wird aufgrund der Neumann-Randbedingung für die Eindeutigkeit benötigt. Die Funktion  $E_3^R$  erfüllt damit insbesondere die Ausstrahlungsbedingung (4.3). Für weitere Details sei auf die Dissertationsschrift [Rit09] verwiesen.

### 4.3. Existenztheorie für periodische Permittivitäten

Analog zu der Analyse der skalaren Gleichung betrachten wir zunächst den ungestörten Fall, dass beide Parameter  $\mu_r$  und  $\varepsilon_r$  periodisch in  $\underline{x}$  sind. Dazu

verwenden wir die Bloch-Floquet-Transformation sowie die Helmholtz-Zerlegung, um ein alternatives Problem herzuleiten. Für dieses Problem können wir die eindeutige Lösbarkeit zeigen und anschließend mit Hilfe der Sherman-Morrison-Woodbury-Formel die gesuchte Lösung zu konstruieren.

#### 4.3.1. Alternatives variationelles Problem auf einem beschränkten Gebiet

Die Bloch-Floquet-Transformation überführt das variationelle Problem auf eine Familie von quasiperiodischen variationellen Problemen in einem beschränkten Gebiet. Zunächst werden wir die Problemstellung der quasiperiodischen Probleme herleiten, die nicht auf ganz  $\bar{I}$  wohldefiniert sein werden. Deswegen setzen wir die Menge der Singularitäten  $\mathcal{A}$  wie in (3.5) als

$$\mathcal{A} := \{ \alpha \in \bar{I} : |\alpha + j| = k \text{ für ein } j \in \mathbb{Z} \}.$$

In diesem Fall betrachten wir das Streuproblem für Funktionen, die quasiperiodisch in  $\underline{x}$ -Richtung sind, sodass sich die Ausstrahlungsbedingung zu der Rayleigh-Ausstrahlungsbedingung ändert und sich damit auch die Randbedingung anpasst. Wir werden das Problem punktweise in  $\alpha \in \bar{I}$  betrachten, wofür wir abkürzend  $u_\alpha := u(\alpha, \cdot)$  für ein  $u \in L^2(I; L^2(\Omega_0^R))^3$  schreiben.

Wir definieren für  $\alpha \in \bar{I} \setminus \mathcal{A}$  den Raum  $\tilde{X}_\alpha$  als

$$\tilde{X}_\alpha := \left\{ E_\alpha \in H_\alpha(\text{curl}; \Omega_0^R) : E_{\alpha,T}|_{\Gamma_0^R} \in TH_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R), E_{\alpha,T}|_{\Gamma_0^0} = 0 \right\},$$

wobei  $H_\alpha(\text{curl}; \Omega_0^R)$  der Teilraum der  $L^2(\Omega_0^R)$ -Funktionen ist, die in den ersten zwei Komponenten  $\alpha$ -quasiperiodisch sind und der curl-Operator (den wir häufig mit  $\nabla \times$  abkürzen) nach  $L^2(\Omega_0^R)$  abbildet. Der Raum soll mit der Graphennorm ausgestattet sein und die Spur einer Funktion aus  $\tilde{X}_\alpha$  auf  $\Gamma_0^R$  kann als Fourier-Reihe dargestellt werden (siehe dazu Abschnitt 2.3). Da der transverse Teil einer Funktion nur auf dem Rand genutzt wird, werden wir im Folgenden für  $E_{\alpha,T}|_{\Gamma_0^R}$  vereinfacht  $E_{\alpha,T}$  schreiben, um die Notation simpler zu halten.

Analog zum kontinuierlichen Fall in Abschnitt 4.2 passen wir für die Wohldefiniertheit der Sesquilinearform in dem Raum  $H_\alpha(\text{curl}; \Omega_0^R)$  die dritte Komponente der Ausstrahlungsbedingung an, sodass wir die ersten beiden Komponenten der Lösung  $E_\alpha \in \tilde{X}_\alpha$  durch die Rayleigh-Ausstrahlungsbedingung und

$E_{\alpha,3}$  für  $x \in \mathbb{R}^2 \times (R, \infty)$  durch

$$E_{\alpha,3}^R(x, x_3) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{\beta_j} \left( \alpha_j \cdot \widehat{(E_{\alpha,T})}_j \right) e^{-i\alpha_j \cdot x + i\beta_j(x_3 - R)}$$

fortsetzen. Analog zu Lemma 4.2 weisen wir die Wohldefiniertheit von  $N_\alpha$  nach.

**Lemma 4.6.** *Der Operator  $N_\alpha: TH_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R) \rightarrow TH_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R)'$ , der für eine Funktion  $\phi_T \in TH_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R) \cap L^1(\Gamma_0^R)^2$  definiert ist als*

$$N_\alpha(\phi_T)(x) := -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \frac{i\alpha_j}{\sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2}} \left( \alpha_j \cdot \widehat{(\phi_T)}_j \right) e^{-i\alpha_j \cdot x},$$

ist für alle  $\alpha \in \bar{I} \setminus \mathcal{A}$  wohldefiniert, linear und stetig. Weiterhin gelten für alle  $\phi_T \in TH_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R)$  die Ungleichungen

$$-\operatorname{Re} \langle N_\alpha \phi_T, \phi_T \rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad -\operatorname{Im} \langle N_\alpha \phi_T, \phi_T \rangle \geq 0.$$

*Beweis:* Für ein festes  $\alpha$  mit  $|\alpha + j| \neq k$  für alle  $j \in \mathbb{Z}^2$  ist der Operator wohldefiniert und zudem offensichtlich linear und stetig. Die Ungleichungen rechnen wir direkt nach durch

$$-\langle N_\alpha \phi_T, \phi_T \rangle = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}^2 \\ |\alpha_j| > k}} \frac{1}{\sqrt{|\alpha_j|^2 - k^2}} \left| \alpha_j \cdot \widehat{(\phi_T)}_j \right|^2 + i \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}^2 \\ |\alpha_j| < k}} \frac{1}{\sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2}} \left| \alpha_j \cdot \widehat{(\phi_T)}_j \right|^2.$$

□

Wie im kontinuierlichen Fall wollen wir die Wohldefiniertheit der Randbedingung in den Lösungsraum für das variationelle Problem in der Integralform einbauen. Somit definieren wir den Lösungsraum  $\tilde{X} := L_w^2(I; \tilde{X}_\alpha)$  durch

$$L_w^2(I; \tilde{X}_\alpha) := \left\{ u \in L^2(I; \tilde{X}_\alpha) : \int_I \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \frac{|\alpha_j \cdot \widehat{(u_{\alpha,T})}_j|^2}{|k^2 - |\alpha_j|^2|^{1/2}} d\alpha < \infty \right\}$$

und versehen diesen mit der Graphennorm

$$\|u\|_{L_w^2(I; \tilde{X}_\alpha)}^2 := \int_I \|u(\alpha, \cdot)\|_{\tilde{X}_\alpha}^2 + \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \frac{|\alpha_j \cdot \widehat{(u_{\alpha,T})}_j|^2}{|k^2 - |\alpha_j|^2|^{1/2}} d\alpha$$

sowie dem entsprechenden Skalarprodukt. Eine Folgerung aus Proposition 2.8

und Korollar 2.14 ist, dass  $\tilde{X}$  das Bild von  $X$  unter  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2}$  darstellt. Dies halten wir an dieser Stelle als Lemma fest.

**Lemma 4.7.** *Es gilt die Identität  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2}X = L^2_{\mathbb{W}}(I; \tilde{X}_\alpha) = \tilde{X}$ .*

Wir formulieren nun das äquivalente Problem:

Für  $\tilde{f} \in L^2(I \times \Omega_0^{\mathbb{R}})$  suchen wir  $\tilde{E} \in L^2_{\mathbb{W}}(I; \tilde{X}_\alpha)$ , welches die Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_I \int_{\Omega_0^{\mathbb{R}}} \mu_r^{-1} (\nabla \times \tilde{E}_\alpha) \cdot (\nabla \times \bar{v}_\alpha) - k^2 \varepsilon_r \tilde{E}_\alpha \cdot \bar{v}_\alpha \, dx \, d\alpha \\ & + \int_I \int_{\Gamma_0^{\mathbb{R}}} N_\alpha(\tilde{E}_{\alpha,T}) \cdot \bar{v}_{\alpha,T} - T_\alpha(\tilde{E}_{\alpha,T}) \cdot \bar{v}_{\alpha,T} \, dS \, d\alpha \\ & = \int_I \int_{\Omega_0^{\mathbb{R}}} \tilde{f}_\alpha \cdot \bar{v}_\alpha \, dx \, d\alpha \end{aligned} \quad (4.8)$$

für alle  $v \in L^2_{\mathbb{W}}(I; \tilde{X}_\alpha)$  löst.

Die Sesquilinearform ist nach der Konstruktion des Raumes  $L^2_{\mathbb{W}}(I; \tilde{X}_\alpha)$  wohldefiniert. Das folgende Lemma zeigt die Äquivalenz der variationellen Probleme.

**Lemma 4.8.** *Die Funktion  $E \in X$  löst das variationelle Problem 2 im Streifen  $\Omega^{\mathbb{R}}$  genau dann, wenn  $\tilde{E} := (\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2}E) \in L^2_{\mathbb{W}}(I; \tilde{X}_\alpha)$  das alternative variationelle Problem (4.8) mit  $\tilde{f} := (\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2}f)$  löst.*

*Beweis:* Für den Term im Volumen und den Operator  $T$  kann der Beweis analog zu der Gleichung (3.3) gezeigt werden. Was zu zeigen bleibt, ist die Äquivalenz für  $N$ . Wir nutzen eine Abschneidefunktion  $\chi_{\{|\xi|-k|\geq\eta\}}$  für ein  $\eta > 0$  und betrachten  $\mathcal{F}^{-1} \left( \chi_{\{|\xi|-k|\geq\eta\}} \mathcal{F}(N(E_T)) \right)$ . Dann zeigen wir die Äquivalenz analog zu  $T$  in Lemma 3.4 und lassen anschließend  $\eta \rightarrow 0$  laufen.  $\square$

Nun wollen wir zunächst die Eindeutigkeit zeigen. Hierzu verwenden wir ein Resultat zur eindeutigen Fortsetzbarkeit für die Maxwell-Gleichungen, welches wir aus [Oka02] zitieren.

**Proposition 4.9.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  eine zusammenhängende, offene Menge und die Parameter  $\mu_r$  sowie  $\varepsilon_r$  aus  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$  gegeben. Wenn  $E$  die Maxwell-Gleichungen (4.2) mit rechter Seite  $f = 0$  löst und auf einer offenen Menge verschwindet, so verschwindet  $E$  in ganz  $U$ .*

*Beweis:* Dieses Resultat wurde in stärkerer Form in [Oka02, Theorem 2.3] gezeigt.  $\square$

Mit diesem Resultat der eindeutigen Fortsetzbarkeit können wir, analog zu dem skalaren Problem, die Eindeutigkeit einer Lösung zeigen. Das halten wir in dem folgenden Lemma fest.

**Lemma 4.10.** *Unter der Annahme 2 gibt es maximal eine Lösung für das Problem in der Integralform (4.8).*

*Beweis:* Es sei  $\tilde{E}$  eine Lösung des Problems (4.8) für  $\tilde{f} = 0$ , so gilt für alle  $v \in L^2_{\mathbb{W}}(I; \tilde{X}_\alpha)$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_I \int_{\Omega_0^R} \mu_r^{-1} (\nabla \times \tilde{E}_\alpha) \cdot (\nabla \times \bar{v}_\alpha) - k^2 \varepsilon_r \tilde{E}_\alpha \cdot \bar{v}_\alpha \, dx \, d\alpha \\ &\quad + \int_I \int_{\Gamma_0^R} N_\alpha(\tilde{E}_{\alpha,T}) \cdot \bar{v}_{\alpha,T} - T_\alpha(\tilde{E}_{\alpha,T}) \cdot \bar{v}_{\alpha,T} \, dS \, d\alpha. \end{aligned}$$

Demnach ist nach Lemma 4.6 die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \int_I \int_{\Omega_0^R} (\operatorname{Im} \mu_r^{-1}) |\nabla \times \tilde{E}_\alpha|^2 - k^2 (\operatorname{Im} \varepsilon_r) |\tilde{E}_\alpha|^2 \, dx \, d\alpha \\ &\quad + \operatorname{Im} \int_I \int_{\Gamma_0^R} (N_\alpha - T_\alpha) (\tilde{E}_{\alpha,T}) \cdot \tilde{E}_{\alpha,T} \, dS \, d\alpha \\ &\leq \int_I \int_{\Omega_0^R} -k^2 (\operatorname{Im} \varepsilon_r) |\tilde{E}_\alpha|^2 \, dx \, d\alpha \leq 0 \end{aligned}$$

erfüllt, woraus insbesondere  $\tilde{E}_\alpha = 0$  auf  $\{\operatorname{Im} \varepsilon_r > 0\}$  für fast alle  $\alpha \in I$  folgt. Die Eindeutigkeit erhalten wir infolgedessen aus der Proposition 4.9.  $\square$

Somit ist es hinreichend eine Lösung in dem Raum  $L^2_{\mathbb{W}}(I; \tilde{X}_\alpha)$  zu konstruieren, die dann automatisch eindeutig ist. Das variationelle Problem (4.8) steht unter einem Integral über  $\alpha \in I$ . In diesem Fall haben wir keine kompakte Einbettung des Lösungsraumes  $L^2_{\mathbb{W}}(I; \tilde{X}_\alpha)$  in  $L^2(I \times \Omega_0^R)$  vorliegen, um die Fredholm-Alternative anwenden zu können. Deswegen lösen wir das Problem punktweise in  $\alpha \in \bar{I}$ , wodurch wir durch die Helmholtz-Zerlegung die kompakte Einbettung erhalten. Anschließend konstruieren wir eine Lösung des Problems (4.8). Das variationelle Problem ist punktweise in  $\alpha \in \bar{I} \setminus \mathcal{A}$  definiert als: *Suche  $\tilde{E}_\alpha \in \tilde{X}_\alpha$ , sodass*

$$\begin{aligned} a_\alpha(\tilde{E}_\alpha, v_\alpha) &:= \int_{\Omega_0^R} \mu_r^{-1} (\nabla \times \tilde{E}_\alpha) \cdot (\nabla \times \bar{v}_\alpha) - k^2 \varepsilon_r \tilde{E}_\alpha \cdot \bar{v}_\alpha \, dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_0^R} N_\alpha(\tilde{E}_{\alpha,T}) \cdot \bar{v}_{\alpha,T} - T_\alpha(\tilde{E}_{\alpha,T}) \cdot \bar{v}_{\alpha,T} \, dS \quad (4.9) \\ &= f_\alpha(v_\alpha) \end{aligned}$$

für alle  $v_\alpha \in \tilde{X}_\alpha$  erfüllt ist.

### 4.3.2. Helmholtz-Zerlegung des Lösungsraumes

Wir wollen später die Fredholm-Alternative nutzen, um aus der Eindeutigkeit der Lösung des Problems die Existenz der Lösung zu folgern. Dazu werden wir

den quasiperiodischen Differentialoperator in einen koerziven Teil und eine kompakte Störung auftrennen. Um die Kompaktheit zu zeigen, benötigen wir mehr Regularität, die wir durch die Helmholtz-Zerlegung des Lösungsraumes erhalten. Wir werden im Folgenden zweimal die Helmholtz-Zerlegung auf den Raum  $X_\alpha$  anwenden, damit wir zusätzlich zur Regularität noch eine passende Randbedingung in den reduzierten Lösungsraum integrieren können.

Für die Zerlegung führen wir zwei Hilfsprobleme ein, deren Lösungsräume durch  $W := \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)$  bzw.  $W_0 := \{w \in W : w = 0 \text{ auf } \Gamma_0^R\}$  gegeben sind. Wir erinnern daran, dass wir mit  $\tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)$  den Raum der  $H_\alpha^1(\Omega_0^R)$ -Funktionen  $w$  bezeichnen, für die  $w|_{\Gamma_0^R} = 0$  erfüllt ist. Die Sesquilinearform  $b^{(\varepsilon_r)}$  soll für alle  $\phi, v \in \tilde{X}_\alpha$  definiert sein als

$$b^{(\varepsilon_r)}(\phi, v) := \int_{\Omega_0^R} k^2 \varepsilon_r \phi \cdot \bar{v} \, dx - \int_{\Gamma_0^R} (N_\alpha - T_\alpha)(\phi_T) \cdot \bar{v}_T \, dS.$$

Für Funktionen aus  $\tilde{X}_\alpha$  ist die Sesquilinearform wohldefiniert und stetig. Für  $w \in H_\alpha^1(\Omega_0^R)$  ist  $\nabla w$  in  $H_\alpha(\text{curl}; \Omega_0^R)$ , sodass aus dem Spursatz für  $H_\alpha(\text{curl}; \Omega_0^R)$  die Distribution  $(\nabla w)|_{\Gamma_0^R} \times e_3$  ein Element aus  $H_\alpha^{-1/2}(\Gamma_0^R)^3$  ist und die Identität  $(\nabla w)|_{\Gamma_0^R} \times e_3 = \nabla_T(w|_{\Gamma_0^R})$  gilt.

Für den ersten Teil suchen wir eine Lösung aus  $W_0$ , sodass die Randterme der Sesquilinearform  $b^{(\varepsilon_r)}(\phi, v)$  entfallen und wir das folgende Hilfsproblem betrachten.

**Lemma 4.11.** *Für ein  $F \in W_0'$  besitzt das Problem*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k^2 \varepsilon_r \nabla w) &= -F && \text{in } \Omega_0^R \\ w &= 0 && \text{auf } \Gamma_0^0 \cup \Gamma_0^R \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung  $w$  in  $W_0$ .

*Beweis:* Die variationelle Formulierung lautet: Suche ein  $w \in W_0$ , sodass

$$b^{(\varepsilon_r)}(\nabla w, \nabla v) = \int_{\Omega_0^R} F \cdot \bar{v} \, dx \quad \text{für alle } v \in W_0 \text{ erfüllt ist.}$$

Da die Spuren von  $W_0$ -Funktionen auf dem Rand verschwinden, folgern wir die Koerzivität des Differentialoperators aus der Abschätzung

$$\operatorname{Re} b^{(\varepsilon_r)}(\nabla w, \nabla w) = \operatorname{Re} \int_{\Omega_0^R} k^2 \varepsilon_r |\nabla w|^2 \, dx \geq k^2 \varepsilon_0 \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_0^R)}^2$$

zusammen mit der Poincaré-Ungleichung. Somit folgt aus dem Satz von Lax-Milgram A.4 die eindeutige Lösbarkeit des Problems.  $\square$

Für das zweite Hilfsproblem suchen wir eine Lösung aus  $W$  mit einer speziellen Randbedingung.

**Lemma 4.12.** Für ein  $\alpha \in \bar{I} \setminus \mathcal{A}$  und  $G \in H_\alpha^{-1/2}(\Gamma_0^R)$  besitzt das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k^2 \varepsilon_r \nabla w) &= 0 && \text{in } \Omega_0^R \\ \frac{\partial w}{\partial x_3} + k^{-2} \operatorname{div}_T(N_\alpha - T_\alpha)(\nabla_T w) &= k^{-2} G && \text{auf } \Gamma_0^R \\ w &= 0 && \text{auf } \Gamma_0^0 \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung  $w$  in  $W$ . Falls  $\varepsilon_r$  in  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$  und  $G$  im besseren Raum  $H_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R)$  liegen, so besitzt  $w$  mehr Regularität und ist ein Element aus  $H_\alpha^2(\Omega_0^R)$ .

*Beweis:* Da die Funktionen  $\alpha$ -quasiperiodisch am Rand sind, gilt für den  $j$ -ten Fourier-Koeffizienten  $(\widehat{\nabla_T w})_j = -i\alpha_j \widehat{w}_j$ . Für den Randterm erhalten wir

$$\begin{aligned} k^2 \operatorname{Re} \langle B_\alpha w, w \rangle &:= -\operatorname{Re} \int_{\Gamma_0^R} (N_\alpha - T_\alpha)(\nabla_T w) \cdot \nabla_T \bar{w} \, dS \\ &= \sum_{|\alpha_j| > k} \frac{1}{\sqrt{|\alpha_j|^2 - k^2}} \left( |\alpha_j|^4 |\widehat{w}_j|^2 + (k^2 - |\alpha_j|^2) |\alpha_j|^2 |\widehat{w}_j|^2 \right) \\ &= k^2 \sum_{|\alpha_j| > k} \frac{|\alpha_j|^2}{|k^2 - |\alpha_j|^2|^{1/2}} |\widehat{w}_j|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Demnach folgt die Invertierbarkeit des Differentialoperators analog zu Lemma 4.11.

Kommen wir zu dem zweiten Teil der Aussage bzgl. der Regularität der Lösung. Die Argumentation kann analog zu Abschnitt 2.3 aus [Gri85] geführt werden, welche wir hier skizzieren werden. Im Endeffekt genügt es für den Halbraum  $\Omega := (-\pi, \pi)^2 \times (-\infty, R)$  und für die Lösung  $v \in H_\alpha^1(\Omega)$  des variationellen Problems zu

$$-\Delta v + v = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4.11a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_3} + B_\alpha v = G \quad \text{auf } \Gamma_0^R \quad (4.11b)$$

die Abschätzung  $\|v\|_{H_\alpha^2(\Omega)} \leq C \left( \|v\|_{H_\alpha^1(\Omega)} + \|G\|_{H_\alpha^{1/2}(\Omega)} \right)$  zu zeigen. Um die Lösung dieses Problems zu konstruieren, können wir analog zu der Herleitung der Ausstrahlungsbedingung vorgehen und eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Fourier-Koeffizienten lösen. Somit erhalten wir die Darstellung

$$v = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \frac{\widehat{G}_j \sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2}}{\sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2} \sqrt{1 + |\alpha_j|^2} + i|\alpha_j|^2} e^{-i\alpha_j \cdot \underline{x} + \sqrt{1 + |\alpha_j|^2} (x_3 - R)} \in H_\alpha^2(\Omega),$$

wobei die  $H_\alpha^2(\Omega)$ -Norm wie in [CM05, Lemma 2.2] durch die  $H_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R)$ -Norm der rechten Seite  $G$  abgeschätzt werden kann. Mithilfe einer Faltung mit dem Lösungsoperator für das Problem  $-\Delta v + v = f$  in  $(-\pi, \pi)^2 \times \mathbb{R}$  erhalten wir die Abschätzung der  $H^2$ -Norm der Lösung mit einer zusätzlichen rechten Seite  $f \in L^2(\Omega)$  im Volumenterm von (4.11) (vgl. [Gri85, Lemma 2.3.2.4]).

Dann teilen wir für ein genügend kleines  $\delta > 0$  das Gebiet  $\Omega_0^R$  in  $\Omega_0^{R-\delta} \cup D$  mit  $D := \Omega_0^R \setminus \overline{\Omega_0^{R-2\delta}}$ . Aus Standard-Regularitätsresultaten folgt, dass die Lösung  $w$  auf  $\Omega_0^{R-\delta}$  in  $H^2$  liegt (siehe z. B. [McL00, Theorem 4.18]). Durch die Multiplikation einer Abschneidefunktion  $\chi \in C^\infty(-\infty, R)$  mit  $\chi(x_3) = 0$  für  $|x_3 - R| \geq 2\delta$  und  $\chi(x_3) = 1$  für  $|x_3 - R| \leq \delta$  und der Fortsetzung von  $\chi w$  mit Null von  $D$  auf  $\Omega$  erhalten wir die Gleichung  $-\Delta(\chi w) + \chi w = f$  der Form (4.11a) mit einer rechten Seite aus  $L^2(D)$  und  $G$  als Randbedingung. Daraus folgt die  $H^2$ -Regularität der Lösung  $w$  auf  $\Omega_0^R \setminus \overline{\Omega_0^{R-\delta}}$  und somit insgesamt auf ganz  $\Omega_0^R$ .  $\square$

Da der Parameter  $\varepsilon_r$  in Randnähe konstant  $\varepsilon_r = 1$  ist, können wir für eine Funktion  $u \in \tilde{X}_\alpha$ , die distributionell  $\operatorname{div}(\varepsilon_r u) = 0$  erfüllt, die Spur von  $u_3$  auf  $\Gamma_0^R$  definieren und diese liegt in  $H^{-1/2}(\Gamma_0^R)$ . Die vier Räume

$$\tilde{Y}_\alpha := \left\{ u \in \tilde{X}_\alpha : \operatorname{div}(\varepsilon_r u) = 0 \right\} \quad \text{und} \quad \tilde{Y}_\alpha^\perp := \left\{ u \in \tilde{X}_\alpha : u = \nabla w, w \in W_0 \right\}$$

sowie

$$Y_\alpha := \left\{ u \in \tilde{Y}_\alpha : k^2 u_{\alpha,3} = -\operatorname{div}_T [(N_\alpha - T_\alpha)u_{\alpha,T}] \in H^{-1/2}(\Gamma_0^R) \right\}$$

und

$$Y_\alpha^\perp := \left\{ u \in \tilde{Y}_\alpha : u = \nabla w, w \in W \right\}$$

sind deshalb wohldefiniert.

**Lemma 4.13.** *Die Teilräume  $\tilde{Y}_\alpha$  und  $\tilde{Y}_\alpha^\perp$  von  $\tilde{X}_\alpha$  sind abgeschlossen und der Raum  $\tilde{X}_\alpha$  lässt sich durch die Zerlegung  $\tilde{X}_\alpha = \tilde{Y}_\alpha \oplus \tilde{Y}_\alpha^\perp$  darstellen.*

*Beweis:* (i) Abgeschlossenheit von  $\tilde{Y}_\alpha^\perp$ : Es sei eine Cauchy-Folge  $\{\nabla \tilde{w}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $\tilde{Y}_\alpha^\perp$  gegeben. Für ein  $\nabla v \in \tilde{Y}_\alpha^\perp$  reduziert sich die  $\tilde{X}_\alpha$ -Norm auf  $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_0^R)}$ . Dementsprechend ist  $\{\tilde{w}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in dem abgeschlossenen Teilraum  $W_0$  und besitzt einen Grenzwert  $\tilde{w}$  in diesen Raum. Aus der Norm-Identität folgt dann wiederum, dass die Folge  $\{\nabla \tilde{w}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in dem Raum  $\tilde{X}_\alpha$  gegen  $\nabla \tilde{w}$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert.

(ii) Abgeschlossenheit von  $\tilde{Y}_\alpha$ : Wir zeigen, dass  $\tilde{Y}_\alpha$  der Kern des Operators  $\tilde{P} \in \mathcal{L}(\tilde{X}_\alpha, W_0')$ ,  $\tilde{P}: \tilde{u} \mapsto b^{(\varepsilon_r)}(\tilde{u}, \nabla \cdot)$ , ist, woraus die Abgeschlossenheit folgt.

Offensichtlich ist  $\tilde{Y}_\alpha$  Teilmenge von  $\mathcal{N}(\tilde{P})$ . Sei also  $\tilde{u} \in \mathcal{N}(\tilde{P})$ , dann ist für alle  $\phi \in C_0^\infty(\Omega_0^R)$  zum einen  $\nabla\phi \in X_\alpha$  und zum anderen

$$0 = b^{(\varepsilon_r)}(\tilde{u}, \nabla\phi) = \int_{\Omega_0^R} k^2 \varepsilon_r \tilde{u} \cdot \nabla\bar{\phi} \, dx$$

erfüllt. Damit gilt  $\operatorname{div}(\varepsilon_r \tilde{u}) = 0$  im distributionellem Sinne, woraus wir  $\tilde{u} \in \tilde{Y}_\alpha^\perp$  schließen.

(iii) Zerlegung von  $\tilde{X}_\alpha$ : Wir wählen  $E \in \tilde{X}_\alpha$ , dann existiert nach Lemma 4.11 die eindeutige Lösung  $\tilde{w} \in W_0$  des variationellen Problems

$$b^{(\varepsilon_r)}(\nabla\tilde{w}, \nabla v) = b^{(\varepsilon_r)}(E, \nabla v) \quad \text{für alle } v \in W_0.$$

Die Funktion  $\tilde{u} := E - \nabla\tilde{w} \in \tilde{X}_\alpha$  erfüllt somit  $\tilde{u}_T \in TH^{1/2}(\Gamma_0^R)$  und die Gleichung

$$0 = b^{(\varepsilon_r)}(\tilde{u}, \nabla v) = \int_{\Omega_0^R} k^2 \varepsilon_r \tilde{u} \cdot \nabla\bar{v} \, dx$$

für alle  $v \in W_0$ . Damit ist  $\tilde{u}$  ein Element aus  $\tilde{Y}_\alpha$ .

(iv) Eindeutigkeit der Zerlegung: Es sei  $\tilde{u} = \nabla\tilde{w} \in \tilde{Y}_\alpha \cap \tilde{Y}_\alpha^\perp$ . Wir wählen  $F = \operatorname{div}(\varepsilon_r \tilde{u}) = 0$ , sodass nach dem Lemma 4.11  $\tilde{w}$  die Nullfunktion sein muss und insbesondere  $\tilde{u} = 0$  gilt.  $\square$

Wenn wir  $\varepsilon_r \in W^{1,\infty}(\Omega_0^R)$  wählen, dann gilt für Funktionen  $\tilde{u}$  aus  $\tilde{Y}_\alpha$  die Ungleichung

$$\|\operatorname{div} \tilde{u}\|_{L^2(\Omega_0^R)} \leq \left\| \frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega_0^R)} \|\tilde{u}\|_{L^2(\Omega_0^R)} \leq \frac{\|\varepsilon_r\|_{W^{1,\infty}(\Omega_0^R)}}{\varepsilon_0} \|\tilde{u}\|_{L^2(\Omega_0^R)}, \quad (4.12)$$

sodass  $\tilde{Y}_\alpha$  nach Satz 4.1 ein Teilraum von  $\tilde{H}_\alpha^1(\Omega^R)^3$  ist. Zudem erhalten wir die Norm-Äquivalenz der  $H^1(\Omega_0^R)^3$ -Norm und der  $\tilde{X}_\alpha$ -Norm auf dem Raum  $\tilde{Y}_\alpha$ .

Als Nächstes zerlegen wir  $\tilde{Y}_\alpha$  noch einmal mit Funktionen aus  $W$ , um eine Randbedingung zu integrieren.

**Lemma 4.14.** *Es sei  $\varepsilon_r \in W^{1,\infty}(\Omega_0^R)$ . Die Teilräume  $Y_\alpha$  und  $Y_\alpha^\perp$  von  $\tilde{Y}_\alpha$  sind abgeschlossen und der Raum  $\tilde{Y}_\alpha$  lässt sich zerlegen in  $\tilde{Y}_\alpha = Y_\alpha \oplus Y_\alpha^\perp$ .*

*Beweis:* (i) Die Argumentation für die Abgeschlossenheit von  $Y_\alpha^\perp$  verläuft analog zu Lemma 4.13, nur, dass sich die  $\tilde{X}_\alpha$ -Norm einer Funktion  $\nabla v \in Y_\alpha^\perp$  auf

$$\|\nabla v\|_{\tilde{X}_\alpha}^2 = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_0^R)}^2 + \|\nabla_T v\|_{TH^{1/2}(\Gamma_0^R)}^2$$

reduziert und die Cauchy-Folge im Teilraum  $\{u \in W : \nabla_T u \in TH_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R)\}$  konvergiert.

(ii) Wir definieren den Operator  $P \in \mathcal{L}(\tilde{Y}_\alpha, W')$  als  $P: u \mapsto b^{(\varepsilon_r)}(u, \nabla \cdot)$  und zeigen  $Y_\alpha = \mathcal{N}(P)$ . Sei also  $u$  eine Funktion aus  $\mathcal{N}(P)$ , für die  $\operatorname{div}(\varepsilon_r u) = 0$  gilt und  $u_3 \in H^{1/2}(\Gamma_0^R)$  wohldefiniert ist. Wenn wir nun ein  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  wählen, das nicht auf dem Rand verschwindet, dann erhalten wir nach der Anwendung des Satzes von Gauß die Identität

$$0 = b^{(\varepsilon_r)}(u, \nabla \psi) = \int_{\Gamma_0^R} k^2 u_3 \bar{\psi} - (N_\alpha - T_\alpha) u_T \cdot \nabla_T \bar{\psi} \, dS.$$

Wegen der beliebigen Wahl von  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ , ist  $u$  ein Element aus  $Y_\alpha$ .

(iii) Zerlegung von  $\tilde{Y}_\alpha$ : Wir wählen  $\tilde{u} \in \tilde{Y}_\alpha$ , dann ist die rechte Seite  $G := k^2 \tilde{u}_3 + \operatorname{div}_T [(N_\alpha - T_\alpha) \tilde{u}_T] \in H_\alpha^{-1/2}(\Gamma_0^R)$ , denn für alle  $\phi \in H_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R)$  gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Gamma_0^R} (N_\alpha - T_\alpha) (\tilde{u}_T \phi) \cdot \nabla_T \bar{\phi} \, dS \right| \\ & \leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} (1 + |j|^2)^{-1/2} |(\alpha_j \cdot \tilde{u}_T) |\alpha_j|^2 \bar{\phi} + (k^2 - |\alpha_j|^2) (\alpha_j \cdot \tilde{u}_T) \bar{\phi}| \\ & \leq C \| \operatorname{div}_T \tilde{u}_T \|_{H_\alpha^{-3/2}(\Gamma_0^R)} \| \phi \|_{H_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R)} \leq C \| \tilde{u}_T \|_{TH_\alpha^{-1/2}(\Gamma_0^R)} \| \phi \|_{H_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R)}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.12 existiert also die eindeutige Lösung  $w \in W$  zu dem variationalen Problem

$$b^{(\varepsilon_r)}(\nabla w, \nabla v) = b^{(\varepsilon_r)}(\tilde{u}, \nabla v) \quad \text{für alle } v \in W.$$

Aus der Annahme  $\varepsilon_r \in W^{1,\infty}(\Omega^R)$  und der Abschätzung (4.12) folgt die Inklusion  $\tilde{Y}_\alpha \subseteq \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)^3$ . Somit ist die rechte Seite  $G$  aus  $H_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R)$  und aus Lemma 4.12 folgern wir  $w \in H_\alpha^2(\Omega_0^R)$ . Insbesondere gilt  $u := \tilde{u} - \nabla w \in Y_\alpha$ , denn  $u_T \in TH_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R)$  und für alle  $v \in W$  ist die Gleichung

$$0 = b^{(\varepsilon_r)}(u, \nabla v) = \int_{\Omega_0^R} k^2 \varepsilon_r u \cdot \nabla \bar{v} \, dx - \int_{\Gamma_0^R} (N_\alpha - T_\alpha) (u_T) \cdot \nabla_T \bar{v} \, dS$$

erfüllt.

(iv) Eindeutigkeit der Zerlegung folgt aus Lemma 4.12, wenn wir für  $u = \nabla w \in Y_\alpha \cap Y_\alpha^\perp$  die rechte Seite  $G = k^2 u_3 + \operatorname{div}_T (N_\alpha - T_\alpha) (u_T) = 0$  wählen.  $\square$

Nachdem wir die Zerlegung festgelegt haben, können wir jede Funktion aus  $\tilde{X}_\alpha$  durch die Summe von drei eindeutig definierten Funktionen aus  $Y_\alpha, Y_\alpha^\perp$  bzw.  $\tilde{Y}_\alpha^\perp$  darstellen. Wir verwenden die Zerlegung des Raumes, um

ein reduziertes variationelles Problem auf dem Teilraum  $Y_\alpha$  zu erhalten. Sei hierzu  $E = u_E + \nabla w_E + \nabla \tilde{w}_E \in \tilde{X}_\alpha$  die Lösung zu dem variationellen Problem und  $v = u_v + \nabla w_v + \nabla \tilde{w}_v \in \tilde{X}_\alpha$  mit  $u_E, u_v \in Y_\alpha$ ,  $\nabla w_E, \nabla w_v \in Y_\alpha^\perp$  und  $\nabla \tilde{w}_E, \nabla \tilde{w}_v \in \tilde{Y}_\alpha^\perp$ . Wegen der Zerlegung und nach den Lemmata 4.11 und 4.12 sind  $w_E \in W$  und  $\tilde{w}_E \in W_0$  die eindeutigen Lösungen zu

$$b^{(\varepsilon_r)}(\nabla w_E, \nabla w_v) = \int_{\Omega_0^R} f_\alpha \cdot \nabla w_v \, dx, \quad b^{(\varepsilon_r)}(\nabla \tilde{w}_E, \nabla \tilde{w}_v) = \int_{\Omega_0^R} f_\alpha \cdot \nabla \tilde{w}_v \, dx$$

für alle  $w_v \in W$  und  $\tilde{w}_v \in W_0$ . Dementsprechend reduziert sich das Problem auf:

Suche ein  $u_E \in Y_\alpha$ , sodass für die rechte Seite

$$\begin{aligned} g_\alpha(u_v) &:= \int_{\Omega_0^R} f_\alpha \cdot \bar{u}_v \, dx - a_\alpha(\nabla w_E, u_v) - a_\alpha(\nabla \tilde{w}_E, u_v) \\ &= \int_{\Omega_0^R} (f_\alpha + k^2 \varepsilon_r \nabla(w_E + \tilde{w}_E)) \cdot \bar{u}_v \, dx \\ &\quad - \int_{\Gamma_0^R} (N_\alpha - T_\alpha)(\nabla_T w_E) \cdot \bar{u}_v \, dS \end{aligned}$$

die Gleichung

$$a_\alpha(u_E, u_v) = g_\alpha(u_v) \quad \text{für alle } u_v \in Y_\alpha \text{ erfüllt ist.} \quad (4.13)$$

### 4.3.3. Eindeutige Lösung des quasiperiodischen Teilproblems

Nun betrachten wir das quasiperiodische variationelle Problem. Wir zeigen die eindeutige Existenz der Lösungen, die wir später für die Konstruktion der gesamten Lösung verwenden werden. Definiere hierzu für ein festes  $\alpha \in \bar{I} \setminus \mathcal{A}$  und für ein genügend großes  $\rho > 0$  die Sesquilinearform  $a_\alpha^\rho$  für alle  $u_\alpha$  und  $v_\alpha$  aus  $Y_\alpha$  durch

$$\begin{aligned} a_\alpha^\rho(u_\alpha, v_\alpha) &:= \int_{\Omega_0^R} \mu_r^{-1} (\nabla \times u_\alpha) \cdot (\nabla \times \bar{v}_\alpha) + \rho u_\alpha \cdot \bar{v}_\alpha \, dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_0^R} N_\alpha(u_{\alpha,T}) \cdot \bar{v}_{\alpha,T} - T_\alpha(u_{\alpha,T}) \cdot \bar{v}_{\alpha,T} \, dS \\ &\quad + C(k^2, \alpha) \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\alpha_j|^2)^{-1/2} \widehat{(u_{\alpha,T})}_j \cdot \overline{\widehat{(v_{\alpha,T})}_j} \end{aligned}$$

mit der Konstanten

$$C(k^2, \alpha) := \frac{k^2}{2\pi} \sup_{j \in \mathbb{Z}^2} \frac{(1 + |\alpha_j|^2)^{1/2}}{|k^2 - |\alpha_j|^2|^{1/2}}.$$

Mit anderen Worten können wir die Sesquilinearform  $a_\alpha$  in

$$\begin{aligned} a_\alpha(u_\alpha, v_\alpha) &= a_\alpha^0(u_\alpha, v_\alpha) - \int_{\Gamma_0^R} (\rho + k^2 \varepsilon_r) u_\alpha \cdot \bar{v}_\alpha \, dx \\ &\quad - C(k^2, \alpha) \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\alpha_j|^2)^{-1/2} \widehat{(u_{\alpha, T})}_j \cdot \overline{\widehat{(v_{\alpha, T})}_j} \end{aligned}$$

zerteilen. Wegen der Regularitätsannahme  $u_{\alpha, T} \in TH_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^R)$  für den Raum  $Y_\alpha$  ist der letzte Term eine kompakte Störung. Damit haben wir die Sesquilinearform  $a_\alpha$  in einen koerziven Operator und eine kompakte Störung aufgeteilt, was wir nun zeigen werden.

**Satz 4.15**

Für  $\varepsilon_r \in W^{1, \infty}(\Omega_0^R)$  und ein hinreichend großes  $\rho > 0$  ist die Sesquilinearform  $a_\alpha^0$  koerziv auf  $Y_\alpha$ .

*Beweis:* Für die Randbedingung gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2, |\alpha_j| > k} -(|\alpha_j|^2 - k^2)^{-1/2} \left| \alpha_j \cdot \widehat{(u_T)}_j \right|^2 + (|\alpha_j|^2 - k^2)^{1/2} \left| \widehat{(u_T)}_j \right|^2 \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2, |\alpha_j| > k} (|\alpha_j|^2 - k^2)^{-1/2} (-|\alpha_j|^2 + |\alpha_j|^2 - k^2) \left| \widehat{(u_T)}_j \right|^2 \\ &= \frac{-k^2}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2, |\alpha_j| > k} \frac{\left| \widehat{(u_T)}_j \right|^2}{(|\alpha_j|^2 - k^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

und infolgedessen

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma_0^R} [N_\alpha - T_\alpha] (u_{\alpha, T}) \cdot \bar{u}_{\alpha, T} \, dS \geq -C(k^2, \alpha) \|u_{\alpha, T}\|_{H_\alpha^{-1/2}(\Gamma_0^R)^3}^2.$$

Wir haben  $\varepsilon_r \in W^{1, \infty}(\Omega_0^R)$  vorausgesetzt, sodass aus der Abschätzung (4.12) die Ungleichung  $\|\operatorname{div} u_\alpha\|_{L^2(\Omega_0^R)}^2 - C_2 \|u_\alpha\|_{L^2(\Omega_0^R)^3}^2 \leq 0$  folgt. Somit erhalten wir für den Term im Volumen die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \int_{\Omega_0^R} \mu_r^{-1} (\nabla \times u_\alpha) \cdot (\nabla \times \bar{u}_\alpha) + \rho u_\alpha \cdot \bar{u}_\alpha \, dx \\ &\geq \|\mu_r\|_{L^\infty(\Omega_0^R)}^{-1} \|\nabla \times u_\alpha\|_{L^2(\Omega_0^R)^3}^2 + \rho \|u_\alpha\|_{L^2(\Omega_0^R)^3}^2 \\ &\geq C_1 \|\nabla \times u_\alpha\|_{L^2(\Omega_0^R)^3}^2 + C_1 \|\operatorname{div} u_\alpha\|_{L^2(\Omega_0^R)}^2 + (\rho - C_1 C_2) \|u_\alpha\|_{L^2(\Omega_0^R)^3}^2. \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung wie im Beweis von Satz 4.1 ergibt für  $v \in \tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)^3$ :

$$\int_{\Omega_0^R} |\nabla \times v|^2 + |\operatorname{div} v|^2 \, dx = \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega_0^R} |\nabla v_j|^2 + 2 \operatorname{Re} \int_{\Gamma_0^R} (\operatorname{div}_T v_T) \bar{v}_3 \, dS,$$

woraus für den Volumenterm insgesamt

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \int_{\Omega_0^R} \mu_r^{-1} (\nabla \times u_\alpha) \cdot (\nabla \times \bar{u}_\alpha) + \rho u_\alpha \cdot \bar{u}_\alpha \, dx \\ & \geq C_1 \|u_\alpha\|_{H^1(\Omega_0^R)^3}^2 + (\rho - C_2 C_1) \|u_\alpha\|_{L^2(\Omega_0^R)^3}^2 \\ & \quad + 2C_1 \operatorname{Re} \int_{\Gamma_0^R} (\operatorname{div}_T u_{\alpha,T}) \bar{u}_{\alpha,3} \, dS \end{aligned}$$

folgt. Aus der Randbedingung an den Raum  $Y_\alpha$  rechnen wir nach, dass

$$\begin{aligned} k^2 \widehat{(u_{\alpha,3})}_j &= -\widehat{(\operatorname{div}_T (N_\alpha - T_\alpha) (u_{\alpha,T}))}_j \\ &= i\alpha_j \cdot \left( \frac{-i\alpha_j}{\sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2}} \left( \alpha_j \cdot \widehat{(u_{\alpha,T})}_j \right) - i\sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2} \widehat{(u_{\alpha,T})}_j \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2}} \left( |\alpha_j|^2 \left( \alpha_j \cdot \widehat{(u_{\alpha,T})}_j \right) + (k^2 - |\alpha_j|^2) \left( \alpha_j \cdot \widehat{(u_{\alpha,T})}_j \right) \right) \\ &= k^2 \frac{-i\alpha_j \cdot \widehat{(u_{\alpha,T})}_j}{-i\sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2}} \end{aligned}$$

gilt. Dementsprechend ist der Randterm nicht negativ, denn

$$2C_1 \operatorname{Re} \int_{\Gamma_0^R} (\operatorname{div}_T u_{\alpha,T}) \bar{u}_{\alpha,3} \, dS = 2C_1 \sum_{j \in \mathbb{Z}^2, |\alpha_j| > k} \frac{1}{\sqrt{|\alpha_j|^2 - k^2}} \left| \alpha_j \cdot \widehat{(u_{\alpha,T})}_j \right|^2 \geq 0.$$

Insgesamt erhalten wir für die Sesquilinearform  $a_\alpha^0$  die Abschätzung

$$\operatorname{Re} a_\alpha^0(u_\alpha, u_\alpha) \geq C \|u_\alpha\|_{H^1(\Omega_0^R)^3}^2 + C(\rho) \|u_\alpha\|_{L^2(\Omega_0^R)^3}^2 \geq c \|u_\alpha\|_{\tilde{X}_\alpha}^2,$$

sodass die Sesquilinearform koerziv auf  $Y_\alpha$  ist.  $\square$

Um die Fredholm-Alternative zu nutzen, müssen wir noch die Eindeutigkeit zeigen.

**Lemma 4.16.** *Falls die Annahme 2 erfüllt ist, dann gibt es für alle  $\alpha \in \bar{I} \setminus \mathcal{A}$  eine eindeutige Lösung  $u_\alpha \in Y_\alpha$  zu der Gleichung*

$$a_\alpha(u_\alpha, v_\alpha) = g_\alpha(v_\alpha) \quad \text{für alle } v_\alpha \in Y_\alpha.$$

*Beweis:* Nach dem letzten Satz 4.15 und aufgrund der kompakten Einbettung von  $\tilde{H}_\alpha^1(\Omega_0^R)$  in  $L^2(\Omega_0^R)$  nach [McL00, Theorem 3.27] können wir den Differentialoperator in einen koerziven Teil und eine kompakte Störung aufteilen. Aus

dem Satz von Lax-Milgram A.4 folgern wir, dass die Fredholm-Alternative A.3 angewandt werden kann, wenn wir die Eindeutigkeit zeigen. Dies können wir analog zu Lemma 4.10 zeigen, denn es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_0^R} \left( \operatorname{Im} \mu_r^{-1} \right) |\nabla \times u_\alpha|^2 - k^2 (\operatorname{Im} \varepsilon_r) |u_\alpha|^2 \, dx \\ &\quad + \operatorname{Im} \int_{\Gamma_0^R} (N_\alpha - T_\alpha) (u_{\alpha,T}) \cdot \bar{u}_{\alpha,T} \, dS \\ &\leq \int_{\Omega_0^R} -k^2 (\operatorname{Im} \varepsilon_r) |u_\alpha|^2 \, dx \leq 0, \end{aligned}$$

woraus  $u_\alpha = 0$  auf  $\{\operatorname{Im} \varepsilon_r > 0\}$  folgt. Die Eindeutigkeit erhalten wir anschließend aus der eindeutigen Fortsetzbarkeit nach Proposition 4.9.  $\square$

#### 4.3.4. Konstruktion der Lösung

Damit haben wir bewiesen, dass es punktweise eine eindeutige Lösung in  $\tilde{X}_\alpha$  gibt. In diesem Abschnitt wollen wir das Hauptresultat der Existenz der eindeutigen Lösung für den ungestörten Fall beweisen.

##### Satz 4.17

Die Existenz von eindeutigen Lösungen  $u_\alpha$  in  $\tilde{X}_\alpha$  für alle  $\alpha \in \bar{I} \setminus \mathcal{A}$  für das  $\alpha$ -quasiperiodische Problem (4.9) impliziert die Existenz einer eindeutigen Lösung  $\tilde{u}(\alpha, \cdot) := u_\alpha$  aus  $L^2_{\mathbb{W}}(I; \tilde{X}_\alpha)$  des Problems in der Integralform (4.8). Für die Lösung  $\tilde{u} \in L^2_{\mathbb{W}}(I; \tilde{X}_\alpha)$  gilt zudem die Abschätzung

$$\|\tilde{u}\|_{L^2_{\mathbb{W}}(I; \tilde{X}_\alpha)} \leq c \|\tilde{f}\|_{L^2(I \times \Omega_0^R)}. \quad (4.14)$$

Für den Beweis zeigen wir, dass der Lösungsoperator, der bisher nur auf  $\bar{I} \setminus \mathcal{A}$  definiert, sich stetig auf den Abschluss  $\bar{I}$  fortsetzen lässt und infolgedessen gleichmäßig beschränkt ist. Die gleichmäßige Beschränktheit erlaubt uns dann die Abschätzung (4.14) zumindest in der  $L^2$ -Norm über  $I$  zu zeigen, womit bewiesen wäre, dass die zusammengesetzte Funktion  $\tilde{u}$  in  $L^2(I; \tilde{X}_\alpha)$  liegt. Anschließend muss noch gezeigt werden, dass  $\tilde{u}$  auch in dem gewichteten Raum  $L^2_{\mathbb{W}}(I; \tilde{X}_\alpha)$  liegt und die Abschätzung (4.14) entsprechend gilt. Zunächst halten wir fest, dass die Sesquilinearform  $a_\alpha$  stetig außerhalb der Singularitäten ist, was analog zu Lemma 3.9 gezeigt werden kann.

**Lemma 4.18.** *Es sei die Annahme 2 erfüllt. Dann ist der Lösungsoperator zu der Sesquilinearform  $a_\alpha$  stetig auf  $\bar{I} \setminus \mathcal{A}$ .*

Wir betrachten nun die Konvergenz des Lösungsoperators  $L_\alpha$ , wenn  $\alpha \rightarrow \hat{\alpha} \in \mathcal{A}$  läuft. Wir wählen also erst einmal ein festes  $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$  und betrachten die Menge

$$J_{\hat{\alpha}} := \{j \in \mathbb{Z}^2 : |\hat{\alpha} + j| = k\} \quad (4.15)$$

mit endlicher Kardinalität. Wir zerlegen den Randoperator  $N_\alpha$  in zwei Teile, indem wir die Singularitäten auslagern. Dafür definieren wir für  $\alpha \in \bar{I} \setminus \mathcal{A}$  und für  $u_\alpha \in \tilde{X}_\alpha$  und  $\underline{x} \in \Gamma_0^R$

$$\begin{aligned} N_\alpha(u_{\alpha,T})(\underline{x}) &= \left[ \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2 \setminus J_{\hat{\alpha}}} \frac{-i\alpha_j}{\sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2}} \left( \alpha_j \cdot \widehat{(u_{\alpha,T})_j} \right) e^{-i\alpha_j \cdot \underline{x}} \right] \\ &\quad + \left[ \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in J_{\hat{\alpha}}} \frac{-i\alpha_j}{\sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2}} \left( \alpha_j \cdot \widehat{(u_{\alpha,T})_j} \right) e^{-i\alpha_j \cdot \underline{x}} \right] \\ &=: \tilde{N}_\alpha(u_{\alpha,T})(\underline{x}) + \hat{N}_\alpha(u_{\alpha,T})(\underline{x}), \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{N}_\alpha(u_{\alpha,T})$  für alle  $\alpha$  aus einer Umgebung  $U(\hat{\alpha}) \cap I$  von  $\hat{\alpha}$  wohldefiniert ist. Durch

$$l_{\alpha_j} : H_\alpha(\text{curl}; \Omega_0^R) \rightarrow \mathbb{C}, \quad u_\alpha \mapsto (\alpha + j) \cdot \widehat{(u_{\alpha,T})_j},$$

wird ein lineares und stetiges Funktional definiert und wir können  $\hat{N}_\alpha(u_{\alpha,T})$  umschreiben als

$$\int_{\Gamma_0^R} \hat{N}_\alpha(u_{\alpha,T}) \bar{v}_{\alpha,T} \, dS = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in J_{\hat{\alpha}}} \frac{-i}{\sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2}} l_{\alpha_j}(u_\alpha) \overline{l_{\alpha_j}(v_\alpha)}.$$

Wir formulieren eine Sesquilinearform  $s_\alpha$ , die nur die Terme von  $a_\alpha$  ohne die Singularitäten beinhaltet und die für  $u_\alpha, v_\alpha \in \tilde{X}_\alpha$  durch

$$\begin{aligned} s_\alpha(u_\alpha, v_\alpha) &:= \int_{\Omega_0^R} \mu_r^{-1} (\nabla \times u_\alpha) \cdot (\nabla \times \bar{v}_\alpha) - k^2 \varepsilon_r u_\alpha \cdot \bar{v}_\alpha \, dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_0^R} \tilde{N}_\alpha(u_{\alpha,T}) \cdot \bar{v}_{\alpha,T} - T_\alpha(u_{\alpha,T}) \cdot \bar{v}_{\alpha,T} \, dS \end{aligned}$$

definiert ist, sodass das Problem (4.9) geschrieben werden kann als

$$a_\alpha(u_\alpha, v_\alpha) = s_\alpha(u_\alpha, v_\alpha) - \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in J_{\hat{\alpha}}} \frac{i}{\sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2}} l_{\alpha_j}(u_\alpha) \overline{l_{\alpha_j}(v_\alpha)} = f_\alpha(v_\alpha).$$

Durch den Satz von Riesz lässt sich die Gleichung in eine Operatorgleichung der Form

$$S_\alpha u_\alpha - \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in J_{\hat{\alpha}}} \frac{i}{\sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2}} (u_\alpha, z_{\alpha_j}) z_{\alpha_j} = y_\alpha \quad (4.16)$$

mit  $s_\alpha(u_\alpha, v_\alpha) = (S_\alpha u_\alpha, v_\alpha)_{H(\text{curl}; \Omega_0^R)}$ ,  $l_{\alpha_j}(v_\alpha) = (v_\alpha, z_{\alpha_j})_{H(\text{curl}; \Omega_0^R)}$  und der rechten Seite  $f_\alpha(v_\alpha) = (y_\alpha, v_\alpha)_{H(\text{curl}; \Omega_0^R)}$  für alle  $v_\alpha \in H_\alpha(\text{curl}; \Omega_0^R)$  umformulieren.

**Lemma 4.19.** *Unter der Annahme 2 ist der Operator  $S_\alpha$  stetig invertierbar und die Abbildung  $\alpha \mapsto S_\alpha^{-1}$  ist gleichmäßig stetig in einer Umgebung um  $\hat{\alpha}$ .*

*Beweis:* Die stetige Invertierbarkeit des Operators  $S_\alpha$  lässt sich analog zu dem quasiperiodischen Problem aus Abschnitt 4.3.2 zeigen und die gleichmäßige Stetigkeit kann analog zu Lemma 3.9 gezeigt werden.  $\square$

Um die Notation im Folgenden zu vereinfachen, sollen die  $|J_{\hat{\alpha}}|$  Elemente  $\{z_{\alpha_j}\}_{j \in J_{\hat{\alpha}}}$  als  $\{z_m\}_{m=1, \dots, |J_{\hat{\alpha}}|}$  unnummeriert werden und die dazugehörigen  $\alpha_j$  als  $\alpha^m$  bezeichnet werden. Wir definieren den Operator  $Z_\alpha^*: \tilde{X}_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^{|J_{\hat{\alpha}}|}$  und dessen adjungierten Operator  $Z_\alpha: \mathbb{C}^{|J_{\hat{\alpha}}|} \rightarrow \tilde{X}_\alpha$  durch

$$Z_\alpha^*: v \mapsto \{(v, z_m)e_m\}_{m=1, \dots, |J_{\hat{\alpha}}|} \quad \text{und} \quad Z_\alpha: x \mapsto \sum_{m=1}^{|J_{\hat{\alpha}}|} (x, e_m) z_m.$$

Da jedes  $z_m$ ,  $m = 1, \dots, |J_{\hat{\alpha}}|$ , für ein anderes  $j \in J_{\hat{\alpha}}$  steht, ist die Menge  $\{z_m\}_{m=1, \dots, |J_{\hat{\alpha}}|}$  linear unabhängig, woraus insbesondere  $\mathcal{N}(Z_\alpha) = \mathcal{R}(Z_\alpha^*)^\perp = \{0\}$  folgt. Wir definieren weiterhin die Diagonalmatrix

$$D_\alpha: \mathbb{C}^{|J_{\hat{\alpha}}|} \rightarrow \mathbb{C}^{|J_{\hat{\alpha}}|}, \quad e_m \mapsto \frac{-i}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2 - |\alpha^m|^2}} e_m \quad \text{für alle } m = 1, \dots, |J_{\hat{\alpha}}|,$$

dann lässt sich die Operator-Gleichung (4.16) schreiben als

$$(S_\alpha + Z_\alpha D_\alpha Z_\alpha^*) u_\alpha = y_\alpha.$$

**Lemma 4.20.** *Unter der Annahme 2 ist der Operator  $Z_\alpha^* S_\alpha^{-1} Z_\alpha: \mathbb{C}^{|J_{\hat{\alpha}}|} \rightarrow \mathbb{C}^{|J_{\hat{\alpha}}|}$  stetig invertierbar in einer Umgebung um  $\hat{\alpha}$ .*

*Beweis:* Wegen den Voraussetzungen an die Parameter  $\varepsilon_r$  und  $\mu_r$  ist  $S_\alpha$  stetig invertierbar. Da wir auf dem endlichdimensionalen Raum  $\mathbb{C}^{|J_{\hat{\alpha}}|}$  sind, folgt die Invertierbarkeit aus der Injektivität.

Angenommen der Operator ist nicht injektiv, dann wählen wir ein  $v$  aus dem Kern  $\mathcal{N}(Z_\alpha^* S_\alpha^{-1} Z_\alpha) \setminus \{0\}$ . Da der Kern von  $Z_\alpha$  trivial ist, gilt  $w := S_\alpha^{-1} Z_\alpha v \neq 0$ . Andererseits erfüllt  $w$  die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \left( Z_\alpha^* S_\alpha^{-1} Z_\alpha v, v \right)_{\mathbb{C}^{|J_{\hat{\alpha}}|}} = \left( S_\alpha^{-1} Z_\alpha v, Z_\alpha v \right)_{\mathbb{C}^{|J_{\hat{\alpha}}|}} = (w, S_\alpha w)_{\mathbb{C}^{|J_{\hat{\alpha}}|}} \\ &= \overline{(S_\alpha w, w)}_{\mathbb{C}^{|J_{\hat{\alpha}}|}} = \overline{s_\alpha(w, w)} \end{aligned}$$

und analog zu dem Beweis der Lemma 4.16 können wir zeigen, dass  $w = 0$  gelten muss. Dadurch entsteht ein Widerspruch und der Operator muss bijektiv sein.  $\square$

**Satz 4.21**

Es sei die Annahme 2 erfüllt. Dann ist in einer Umgebung  $U(\hat{\alpha}) \subseteq I \setminus \mathcal{A}$  um  $\hat{\alpha}$  die Gleichung

$$(S_\alpha + Z_\alpha D_\alpha Z_\alpha^*) u_\alpha = y_\alpha \quad (4.17)$$

eindeutig lösbar und der Lösungsoperator lässt sich in dieser Umgebung schreiben als

$$S_\alpha^{-1} - S_\alpha^{-1} Z_\alpha \left( D_\alpha^{-1} + Z_\alpha^* S_\alpha^{-1} Z_\alpha \right)^{-1} Z_\alpha^* S_\alpha^{-1}. \quad (4.18)$$

*Beweis:* Die Invertierbarkeit von (4.17) haben wir in Lemma 4.16 bewiesen. Für ein  $\alpha \in \bar{I} \setminus \mathcal{A}$ , das genügend nah an  $\hat{\alpha}$  ist, ist die invertierbare Matrix  $D_\alpha^{-1}$  nah genug an der Nullmatrix, sodass aus Lemma 4.20 und der Neumannschen Reihe A.1 die Invertierbarkeit von  $D_\alpha^{-1} + Z_\alpha^* S_\alpha^{-1} Z_\alpha$  folgt. Demnach werden alle Bedingungen der Sherman-Morrison-Woodbury-Formel aus Satz 2.17 erfüllt und wir können die Inverse von  $S_\alpha + Z_\alpha D_\alpha Z_\alpha^*$  wie in (4.18) darstellen.  $\square$

Nun können wir den Satz 4.17 beweisen.

*Beweis von Satz 4.17:* Für jede Wellenzahl  $k > 0$  verlaufen die Singularitäten aus  $\mathcal{A}$  auf endlich vielen Teilstücken eines Kreises durch  $\bar{I}$ . Somit gibt es für alle  $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$  eine Folge von  $\{\alpha_j\}_{j=1}^\infty \subseteq \bar{I} \setminus \mathcal{A}$ , die gegen  $\hat{\alpha}$  konvergiert. Es sei  $U(\hat{\alpha})$  eine kleine Umgebung um  $\hat{\alpha}$ . Die Operatoren  $S_\alpha^{-1}$ ,  $Z_\alpha$ ,  $D_\alpha^{-1}$  und  $Z_\alpha^*$  sind stetig (fortsetzbar) auf  $U(\hat{\alpha})$ . Nach der Neumannschen Reihe A.1 ist dementsprechend auch  $(D_\alpha^{-1} + Z_\alpha^* S_\alpha^{-1} Z_\alpha)^{-1}$  stetig auf  $U(\hat{\alpha})$ . Die Darstellung der Sesquilinearform  $a_\alpha$  aus (4.18) konvergiert für  $\alpha \rightarrow \hat{\alpha}$  gegen

$$S_\alpha^{-1} - S_\alpha^{-1} Z_\alpha \left( D_\alpha^{-1} + Z_\alpha^* S_\alpha^{-1} Z_\alpha \right)^{-1} Z_\alpha^* S_\alpha^{-1} \rightarrow S_{\hat{\alpha}}^{-1} - S_{\hat{\alpha}}^{-1} Z_{\hat{\alpha}} \left( Z_{\hat{\alpha}}^* S_{\hat{\alpha}}^{-1} Z_{\hat{\alpha}} \right)^{-1} Z_{\hat{\alpha}}^* S_{\hat{\alpha}}^{-1}$$

bzgl. der Operatornorm auf  $\mathcal{L}(\tilde{X}_\alpha)$ , denn nach Lemma 4.20 ist der Grenzwert wohldefiniert.

Damit ist die Abbildung  $\alpha \mapsto L_\alpha$ , wobei  $L_\alpha$  der Lösungsoperator des quasiperiodischen Problems (4.9) ist, stetig fortsetzbar und infolgedessen sogar gleichmäßig stetig auf  $\bar{I}$ . Daraus folgt, dass es eine von  $\alpha$  unabhängige Konstante  $C > 0$  gibt, sodass  $\sup_{\alpha \in \bar{I}} \|L_\alpha\| < C$  gilt. Deshalb ist die zusammengesetzte

Funktion  $\tilde{u}(\alpha, \cdot) := u_\alpha$  ein Element aus  $L^2(I; \tilde{X}_\alpha)$  und löst das Problem (4.8). Zu zeigen bleibt, dass  $\tilde{u} \in L^2_{\text{w}}(I; \tilde{X}_\alpha)$  ist und die Abschätzung (4.14) gilt.

Da für  $\alpha \in \bar{I} \setminus \mathcal{A}$  die Summe  $\langle \hat{N}_\alpha(u_{\alpha,T}), u_{\alpha,T} \rangle$  nur aus Summanden mit negativem Realteil und verschwindendem Imaginärteil oder negativem Imaginärteil und verschwindendem Realteil besteht, können wir diese abschätzen durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j \in J_{\tilde{\alpha}}} |k^2 - |\alpha_j|^2|^{-1/2} |l_{\alpha_j}(u_\alpha)|^2 &\leq \left| \sum_{j \in J_{\tilde{\alpha}}} \frac{i}{\sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2}} l_{\alpha_j}(u_\alpha) \overline{l_{\alpha_j}(u_\alpha)} \right| \\ &\leq 2\pi |a_\alpha(u_\alpha, u_\alpha)| + \left| 2\pi a_\alpha(u_\alpha, u_\alpha) + \sum_{j \in J_{\tilde{\alpha}}} \frac{i}{\sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2}} l_{\alpha_j}(u_\alpha) \overline{l_{\alpha_j}(u_\alpha)} \right| \\ &\leq 2\pi \|f_\alpha\|_{L^2(\Omega_0^R)} \|u_\alpha\|_{L^2(\Omega_0^R)} + 2\pi |s_\alpha(u_\alpha, u_\alpha)| \\ &\leq C \left( \|f_\alpha\|_{L^2(\Omega_0^R)}^2 + |s_\alpha(u_\alpha, u_\alpha)| \right). \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit der Sesquilinearform  $s_\alpha$  können wir den restlichen Teil weiter abschätzen durch

$$|s_\alpha(u_\alpha, u_\alpha)| \leq C \left( C_{\text{Rand}} + k^2 \|\varepsilon_r\|_{L^\infty(\Omega_0^R)} + \|\mu\|_{L^\infty(\Omega_0^R)}^{-1} \right) \|u_\alpha\|_{\tilde{X}_\alpha}^2 \leq C \|f_\alpha\|_{L^2(\Omega_0^R)}^2.$$

Somit erhalten wir die gewünschte Abschätzung

$$\int_I \sum_{j \in J_{\tilde{\alpha}}} |k^2 - |\alpha_j|^2|^{-1/2} |l_{\alpha_j}(u_\alpha)|^2 d\alpha < \infty,$$

sodass  $\tilde{u} \in L^2_{\text{w}}(I; \tilde{X}_\alpha)$  gilt und die Lösung die Stetigkeitsabschätzung (4.14) erfüllt.  $\square$

#### 4.4. Existenztheorie für eine lokal gestörte Permittivität

In diesem Abschnitt betrachten wir das Streuproblem mit einem lokal gestörten Parameter  $\varepsilon_r$ . Wir bezeichnen mit  $\varepsilon_r^s$  die gestörte Permittivität und nehmen ohne Einschränkungen an, dass der Träger  $\text{supp}(q)$  der Störung  $q := \varepsilon_r^s - \varepsilon_r$  in  $\Omega_0^R$  enthalten ist. Zudem soll der Imaginärteil des gestörten Parameters nicht kleiner sein als Null, also  $\text{Im } \varepsilon_r^s \geq 0$  gelten, wie unter der Annahme 2 vorausgesetzt.

Definiere die zwei Räume  $Y$  und  $Y^\perp$  durch

$$Y := \{u \in X : \text{div}(\varepsilon_r u) = 0\} = \mathcal{J}_{\mathbb{R}^2}^{-1} \left( L^2_{\text{w}}(I; \tilde{Y}_\alpha) \right)$$

und

$$Y^\perp := \{u \in X : u = \nabla w, w \in W_0\} = \mathcal{J}_{\mathbb{R}^2}^{-1} \left( L_w^2(I; \tilde{Y}_\alpha^\perp) \right).$$

Da die Bloch-Floquet-Transformation und partielle Differenzierbarkeit vertauschbar ist, gilt dementsprechend die Zerlegung  $X = Y \oplus Y^\perp$ .

**Lemma 4.22.** *Die Teilräume  $Y$  und  $Y^\perp$  von  $X$  sind abgeschlossen und der Raum  $X$  lässt sich zerlegen in  $X = Y \oplus Y^\perp$ .*

Somit können wir jede Funktion aus  $X$  durch die Summe zweier eindeutig definierter Funktionen aus  $Y$  und aus  $Y^\perp$  darstellen. Es sei  $w \in H_0^1(\Omega^R)$  die eindeutige Lösung zu

$$\int_{\Omega^R} k^2 \varepsilon_r \nabla w \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega^R} f \cdot \nabla \phi \, dx \quad \text{für alle } \phi \in H_0^1(\Omega^R),$$

die nach der Poincaré-Ungleichung und nach dem Lemma von Lax-Milgram existiert. Dann lässt sich das Problem reduzieren auf:

Suche ein  $u \in Y$ , sodass

$$a_q(u, v) = \int_{\Omega^R} f \cdot \bar{v} \, dx - a_q(\nabla w, v) =: g(v) \quad \text{für alle } v \in Y \text{ erfüllt ist.} \quad (4.19)$$

#### Satz 4.23

Falls Annahme 2 erfüllt ist, dann existiert eine eindeutige Lösung  $E \in X$  für das variationelle Problem 2.

*Beweis:* Wie wir gerade gesehen haben, müssen wir nur noch zeigen, dass das Problem (4.19) durch eine eindeutige Funktion  $u \in Y$  gelöst wird. Wegen der Regularitätsvoraussetzung an  $\varepsilon_r$  gilt nach dem Satz 4.1 die Einbettung  $Y \subseteq H^1(\Omega^R)^3$ . Damit ist nach [McL00, Theorem 3.27] die Sesquilinearform  $l: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$l(u, v) := \int_{\Omega^R} -k^2 q u \cdot \bar{v} \, dx,$$

eine kompakte Störung des Differentialoperators, denn  $u \in H^1(\Omega^R)^3$  und  $q$  besitzt den Träger in  $\Omega_0^R$ . Wir müssen noch die Eindeutigkeit zeigen, um die Fredholm-Alternative nutzen zu können. Es sei dazu  $u$  eine Lösung für die rechte Seite  $f = 0$ . Wegen der Bedingung  $\text{Im } \varepsilon_r^s \geq 0$  und dem Lemma 4.2 können wir die Sesquilinearform durch  $0 \leq \int_{\Omega^R} -(\text{Im } \varepsilon_r^s) |u|^2 \, dx \leq 0$  abschätzen. Aufgrund der Annahme, dass  $\text{Im } \varepsilon_r > 0$  auf einer offenen Teilmenge von  $\Omega^R \setminus \Omega_0^R$  gilt, verschwindet  $u$  auf dieser Teilmenge. Die Eindeutigkeit folgt nun aus der eindeutigen Fortsetzbarkeit nach Proposition 4.9.  $\square$

## 4.5. Regularität der Lösungen bzgl. der Quasiperiodizität

In diesem Abschnitt betrachten wir die Regularität der Lösungen des Problems 2 bzgl. der künstlichen Variablen  $\alpha$  der Bloch-Floquet-transformierten Lösung. Dies können wir z. B., analog zu dem skalaren Problem in Abschnitt 3.6, für eine bessere Approximation der diskreten inversen Bloch-Floquet-Transformation verwenden. Zunächst betrachten wir die Regularität für das ungestörte Problem und folgern daraus die Regularität im gestörten Fall. Wir bezeichnen weiterhin  $\mathcal{A}$  als die Menge aller  $\alpha \in \bar{I}$ , für die es ein  $j \in \mathbb{Z}^2$  mit  $|\alpha + j| = k$  gibt, und definieren  $J_{\hat{\alpha}}$  für ein  $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$  wie in (4.15).

### Satz 4.24

Es sei die rechte Seite  $f_\alpha \in L^2(\Omega_0^{\mathbb{R}})$  analytisch in  $\alpha \in \bar{I}$ . Dann ist die Lösung  $E_\alpha \in \tilde{X}_\alpha$  zu dem (ungestörten) quasiperiodischen variationellen Problem (4.9) stetig in  $\alpha \in \mathbb{R}^2$  und analytisch in  $\alpha \in \bar{I} \setminus \mathcal{A}$ . Für ein  $\alpha \in \bar{I} \setminus \mathcal{A}$ , das nah an einem  $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$  liegt, gibt es Funktionen  $E_\alpha^1$  und  $E_{\alpha_j}^2 \in \tilde{X}_\alpha$ ,  $j \in J_{\hat{\alpha}}$ , die analytisch von  $\alpha$  abhängen, sodass  $E_\alpha$  dargestellt werden kann als

$$E_\alpha = E_\alpha^1 + \sum_{j \in J_{\hat{\alpha}}} \sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2} E_{\alpha_j}^2. \quad (4.20)$$

*Beweis:* Für  $\alpha \in \bar{I} \setminus \mathcal{A}$  ist der Differentialoperator analytisch bzgl.  $\alpha$ , sodass auch die Lösung analytisch ist. Wir müssen also nur zeigen, wie sich die Lösung in der Nähe einer Singularität verhält. Wenn  $\alpha$  nah genug an  $\hat{\alpha}$  liegt, dann lässt sich nach dem Satz 4.21 die Inverse des transformierten Differentialoperators darstellen als

$$S_\alpha^{-1} - S_\alpha^{-1} Z_\alpha \left( D_\alpha^{-1} + Z_\alpha^* S_\alpha^{-1} Z_\alpha \right)^{-1} Z_\alpha^* S_\alpha^{-1}.$$

Die Operatoren  $Z_\alpha$  und  $Z_\alpha^*$  sind analytisch in  $\alpha \in \bar{I}$  und analog zum Lemma 3.9 können wir die Analytizität von  $S_\alpha^{-1}$  zeigen. Damit ist ebenso der lineare Operator  $G_\alpha := (Z_\alpha^* S_\alpha^{-1} Z_\alpha)^{-1}$  nach Lemma 4.20 wohldefiniert und nach dem Satz über die Neumannsche Reihe A.1 analytisch. Wenn die Norm der Matrix  $D_\alpha^{-1}$  klein ist, die mit halber Ordnung gegen Null läuft für  $\alpha \rightarrow \hat{\alpha}$ , dann lässt sich der Satz über die Neumannsche Reihe A.1 auf  $(D_\alpha^{-1} + Z_\alpha^* S_\alpha^{-1} Z_\alpha)^{-1}$  anwenden, sodass sich der Operator für analytisch von  $\alpha$  abhängigen Operatoren  $U_\alpha^m$ ,

$m = 0, \dots, |J_{\hat{\alpha}}|$ , und für ein Vektor  $v \in \mathbb{C}^{|J_{\hat{\alpha}}|}$  darstellen lässt als

$$\begin{aligned} \left( D_{\alpha}^{-1} + Z_{\alpha}^* S_{\alpha}^{-1} Z_{\alpha} \right)^{-1} v &= \left( G_{\alpha} D_{\alpha}^{-1} + I_{|J_{\hat{\alpha}}|} \right)^{-1} G_{\alpha} v = - \sum_{l=0}^{\infty} \left( G_{\alpha} D_{\alpha}^{-1} \right)^l G_{\alpha} v \\ &=: U_{\alpha}^0 v + \sum_{m=1}^{|J_{\hat{\alpha}}|} \sqrt{k^2 - |\alpha^m|^2} U_{\alpha}^m v. \end{aligned}$$

Demnach lässt sich auch  $E_{\alpha} = S_{\alpha}^{-1} f_{\alpha} - S_{\alpha}^{-1} Z_{\alpha} \left( D_{\alpha}^{-1} + Z_{\alpha}^* S_{\alpha}^{-1} Z_{\alpha} \right)^{-1} Z_{\alpha}^* S_{\alpha}^{-1} f_{\alpha}$  in die behauptete Form zerlegen.  $\square$

Nun betrachten wir das Streuproblem für eine Störung  $q \in W^{1,\infty}(\Omega_0^R)$ , die nicht verschwindet. In diesem Fall lässt sich weiterhin ein analoges Resultat zeigen.

**Satz 4.25**

Es sei  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2} E \in L_{\mathbb{W}}^2(I; \tilde{X}_{\alpha})$  die Bloch-Floquet-Transformierte der Lösung  $E \in X$  zu dem lokal gestörten variationellen Problem 2 mit einer rechten Seite  $f$  aus  $L^2(\Omega^R)$ , für die  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2} f$  analytisch in  $\alpha \in \bar{I}$  ist. Dann ist  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2} E$  stetig in  $\alpha \in \mathbb{R}^2$  und analytisch in  $\alpha \in \bar{I} \setminus \mathcal{A}$ . Für ein  $\alpha \in \bar{I} \setminus \mathcal{A}$ , das nah an einem  $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$  liegt, gibt es Funktionen  $E_{\alpha}^1$  und  $E_{\alpha_j}^2 \in \tilde{X}_{\alpha}$ ,  $j \in J_{\hat{\alpha}}$ , die analytisch von  $\alpha$  abhängen, sodass  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2} E$  dargestellt werden kann als

$$\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2} E = E_{\alpha}^1 + \sum_{j \in J_{\hat{\alpha}}} \sqrt{k^2 - |\alpha_j|^2} E_{\alpha_j}^2. \quad (4.21)$$

*Beweis:* Der Operator  $K_q: \tilde{X} = \mathcal{J}_{\mathbb{R}^2} X \rightarrow L^2(I \times \Omega_0^R)$ ,  $\tilde{u} \mapsto q \mathcal{J}_{\mathbb{R}^2}^{-1} \tilde{u}$ , bildet Funktionen aus  $\tilde{X}$  auf Funktionen ab, die konstant in  $\alpha$  und somit insbesondere analytisch bzgl.  $\alpha$  sind. Es sei  $A$  der Riesz-Operator des Bloch-Floquet-Transformierten invertierbaren Differentialoperators,  $\tilde{K}_q \in \mathcal{L}(\tilde{X})$  der Riesz-Operator zu  $K_q$  und  $\tilde{f}$  die Riesz-Darstellung von  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2} f$ . Dann erfüllt die Lösung  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2} E$  zu dem lokal gestörten Problem aus  $\tilde{X} = L_{\mathbb{W}}^2(I; H_{\alpha}(\text{curl}; \Omega_0^R))$  die Gleichung

$$\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2} E = A^{-1} \tilde{f} - A^{-1} \tilde{K}_q E \quad \text{in } \tilde{X}.$$

Nach Satz 4.24 bildet  $A^{-1}$  analytische Funktionen bzgl.  $\alpha$  auf Funktionen der gewünschten Form (4.21) ab. Da sowohl  $\tilde{f}$  als auch  $\tilde{K}_q w$  für alle  $w \in \tilde{X}$  analytisch bzgl.  $\alpha$  sind, muss dementsprechend auch  $\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2} E$  die gewünschte Form annehmen.  $\square$

**Bemerkung 4.26.** Es genügt eine rechte Seite, die sich analog zu (4.20) zerlegen lässt, um die Zerlegung für das gestreute Feld zu erhalten.

## 4.6. Bloch-Floquet-Transformation-basierte numerische Methode

Als Nächstes wollen wir die numerische Methode aus Abschnitt 3.5 auf das vektorwertige Problem erweitern, deren Lösungen die Maxwell-Gleichungen erfüllen. Auch in diesem Fall wenden wir die Bloch-Floquet-Transformation an und stellen die quasiperiodischen Funktionen durch periodische dar. Damit erhalten wir die alternative Formulierung:

Suche ein  $w \in L^2_{\tilde{w}}(I; \tilde{X}_0)$ , sodass

$$\begin{aligned}
 & \int_I \int_{\Omega_0^R} \mu_r^{-1} [(\nabla - i\alpha) \times w_\alpha] \cdot [(\nabla - i\alpha) \times \bar{v}_\alpha] - k^2 \varepsilon_r w_\alpha \cdot \bar{v}_\alpha \, dx \, d\alpha \\
 & + \int_I \int_{\Gamma_0^R} N_\alpha(w_{\alpha,T}) \cdot \bar{v}_{\alpha,T} - T_\alpha(w_{\alpha,T}) \cdot \bar{v}_{\alpha,T} \, dS \, d\alpha \\
 & + \int_I \int_{\Omega_0^R} -k^2 e^{i\alpha \cdot x} q(\mathcal{J}_{\mathbb{R}^2}^{-1} w) \cdot \bar{v}_\alpha \, dx \, d\alpha \\
 & =: \int_I \tilde{a}_\alpha(w_\alpha, v_\alpha) \, d\alpha + \tilde{b}(w, v) \\
 & = \int_I f_\alpha(v_\alpha) \, d\alpha
 \end{aligned}$$

für alle  $v \in L^2_{\tilde{w}}(I; \tilde{X}_0)$  erfüllt ist.

Das Intervall  $\bar{I}$  diskretisieren wir, analog zu dem skalaren Problem, durch äquidistante Punkte  $\alpha_N^n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N^2$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , die durch

$$\alpha_N^n := \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2N} + \frac{\lfloor (n-1)/N \rfloor}{N}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2N} + \frac{(n-1) \bmod N}{N} \right)$$

definiert sind. Für jeden Diskretisierungspunkt bezeichnen wir mit  $\psi_N^n$  ein Element aus der Knotenbasis  $\{\psi_N^n\}_{n=1}^{N^2}$  der lokal konstanten Funktionen, wobei jede die Bedingung  $\psi_N^n(I_N^m) = \delta_m(n)$  für  $I_N^m := \alpha_N^m + [-1/2N, 1/2N]^2$  erfüllt. Der Lösungsraum der quasiperiodischen Probleme  $\tilde{X}_0$  ist nun ein Teilraum von  $H(\text{curl}; \Omega_0^R)$ , der durch die Nédélec-Elemente statt der Lagrange-Elemente konform approximiert wird. Für die Numerik werden wir den Finite-Elemente-Raum aus den Nédélec-Elementen erster Ordnung aufspannen, die nur aus Kantenelementen bestehen, da wir die diskrete inverse Bloch-Floquet-Transformation nur für Kantenelemente mit ausreichender Konvergenzrate implementiert haben. Für die anderen Elemente, genauer die Flächen- und Volumenelemente, müssten wir die Anzahl der Verfeinerungen erhöhen. Dies geht jedoch schnell über die Ressourcengrenzen der zur Verfügung stehenden Rechner hinaus.

Wir beschreiben in Kürze, wie die Kantenelemente auf dem Referenzquader

$\widehat{C} = [0, 1]^3$  definiert sind. Es sei  $\mathcal{Q}_{a,b,c}$  der Raum der Polynome auf  $\widehat{C}$  mit der maximalen Ordnung  $a$  in  $\widehat{x}_1$ ,  $b$  in  $\widehat{x}_2$  und  $c$  in  $\widehat{x}_3$  für  $\widehat{x} \in \widehat{C}$ . Wir definieren den Raum

$$\mathbb{P} := \{p = (p_1, p_2, p_3) : p_1 \in \mathcal{Q}_{0,1,1}, p_2 \in \mathcal{Q}_{1,0,1}, p_3 \in \mathcal{Q}_{1,1,0}\},$$

der die Dimension  $\dim \mathbb{P} = 12$  hat.

**Definition 4.27.** Es sei  $\widehat{C}$  der Referenzquader und  $\widehat{t}$  der Tangentialvektor einer Kante von  $\widehat{C}$ . Dann besteht die Menge der Freiheitsgrade (erster Ordnung) auf  $\mathbb{P}$  aus den linearen Funktionalen  $\widehat{\phi}$ , die für eine Kante  $\widehat{e}$  durch

$$\widehat{\phi}(\widehat{u}) := \int_{\widehat{e}} (\widehat{t} \cdot \widehat{u}) \, dS$$

beschrieben sind.

Damit können wir, nach der Festlegung der Orientierung unserer Tangentialvektoren, die 12 Elemente  $\{\widehat{\psi}_n\}_{n=1}^{12} \subseteq \mathbb{P}$  für  $\widehat{C}$  angeben durch

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_1 &:= (1 - \widehat{x}_2)(1 - \widehat{x}_3) e_1, & \widehat{\psi}_2 &:= \widehat{x}_1 (1 - \widehat{x}_3) e_2, \\ \widehat{\psi}_3 &:= -\widehat{x}_2 (1 - \widehat{x}_3) e_1, & \widehat{\psi}_4 &:= -(1 - \widehat{x}_1)(1 - \widehat{x}_3) e_2, \\ \widehat{\psi}_5 &:= \widehat{x}_1 (1 - \widehat{x}_2) e_3, & \widehat{\psi}_6 &:= \widehat{x}_1 \widehat{x}_3 e_2, \\ \widehat{\psi}_7 &:= -\widehat{x}_1 \widehat{x}_3 e_3, & \widehat{\psi}_8 &:= (1 - \widehat{x}_2) \widehat{x}_3 e_1, \\ \widehat{\psi}_9 &:= (1 - \widehat{x}_1) \widehat{x}_3 e_2, & \widehat{\psi}_{10} &:= -\widehat{x}_2 \widehat{x}_3 e_1, \\ \widehat{\psi}_{11} &:= (1 - \widehat{x}_1)(1 - \widehat{x}_2) e_3, & \widehat{\psi}_{12} &:= -(1 - \widehat{x}_1) \widehat{x}_2 e_3. \end{aligned}$$

Jede diskrete Funktion wird als lineare Kombination dieser Kantenelemente (für jeden Quader) approximiert. Wie wir sofort erkennen, nimmt ein Kantenelement nur auf einer Kante den Wert 1 und den Wert 0 auf den restlichen Kanten an. Es sei nun  $\mathcal{T}$  eine Triangulierung von  $\overline{\Omega}_0^R = [-\pi, \pi]^2 \times [0, R]$ , die aus  $8^M$  Quadern besteht, sodass  $\overline{\Omega}_0^R = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \overline{T}$  erfüllt ist und die natürliche Zahl  $M \in \mathbb{N}$  für die Anzahl der Verfeinerungen steht. Bezeichne mit  $\widetilde{M}$  die Anzahl der Kantenelemente für  $\mathcal{T}$ , ohne die Elemente, für die wir die homogene Dirichlet-Randbedingung stellen. Wir bezeichnen dann mit  $\{\phi_{\widetilde{M}}^m\}_{m=1}^{\widetilde{M}}$  die Menge aller Kantenelemente. Die inverse Bloch-Floquet-Transformation approximieren wir durch die Multiplikation des Faktors  $e^{-i\alpha_N^n \cdot x^m}$ , wobei  $x^m$  der Mittelpunkt der Kante ist, auf der das  $m$ -te Kantenelement der Einsfunktion gleicht. Definiere dann den Finite-Elemente-Raum  $V_{N, \widetilde{M}}^{\text{Maxwell}}$  als

$$V_{N, \widetilde{M}}^{\text{Maxwell}} := \left\{ \widetilde{v}(\alpha, x) = \sum_{n=1}^{N^2} \sum_{m=1}^{\widetilde{M}} v^{n,m} \psi_N^n(\alpha) \phi_{\widetilde{M}}^m(x), v^{n,m} \in \mathbb{C} \right\}. \quad (4.22)$$

Wir setzen  $\mathcal{J}v := e^{i\alpha \cdot x} \mathcal{J}_{\mathbb{R}^2} v$  für  $v \in L^2(I \times \Omega_0^{\mathbb{R}})$  und suchen dann die Finite-Elemente-Funktion  $\tilde{w} \in V_{N, \tilde{M}}^{\text{Maxwell}}$ , die die Gleichung

$$\int_I \tilde{a}_\alpha (\tilde{w}(\alpha, \cdot), \tilde{v}(\alpha, \cdot)) \, d\alpha + \tilde{b}(\tilde{w}, \tilde{v}) = \int_I \int_{\Omega_0^{\mathbb{R}}} (\mathcal{J}f) \cdot \tilde{v} \, dx \, d\alpha$$

für alle  $\tilde{v} \in V_{N, \tilde{M}}^{\text{Maxwell}}$  erfüllt. Analog zum skalaren Problem approximieren wir die Sesquilinearformen durch  $\int_{I_N^n} \tilde{a}_\alpha (\psi_N^n \phi_{\tilde{M}}^l, \psi_N^n \phi_{\tilde{M}}^m) \, d\alpha \approx \frac{1}{N^2} \tilde{a}_{\alpha_N^n} (\phi_{\tilde{M}}^l, \phi_{\tilde{M}}^m)$  sowie

$$\begin{aligned} \tilde{b}(\tilde{w}, \psi_N^n \phi_{\tilde{M}}^m) &\approx b_N^n(\tilde{w}, \psi_N^n \phi_{\tilde{M}}^m) \\ &:= -k^2 \int_{\Omega_0^{\mathbb{R}}} e^{i\alpha_N^n \cdot x} q(\mathcal{J}^{-1} \tilde{w}) \cdot \phi_{\tilde{M}}^m \, dx \\ &\approx \frac{1}{N^2} \sum_{l=1}^{\tilde{M}} u_{\tilde{M}}^l b_N^n(\phi_{\tilde{M}}^l, \phi_{\tilde{M}}^m) \end{aligned}$$

und suchen für die diskreten rechten Seiten  $F_{m,n}$ , die für alle  $m = 1, \dots, \tilde{M}$  und alle  $n = 1, \dots, N^2$  durch

$$F_{m,n} := N^2 \int_{I_N^n} \int_{\Omega_0^{\mathbb{R}}} \mathcal{J}f(\alpha, \cdot) \cdot \phi_{\tilde{M}}^m \, dx \, d\alpha$$

definiert sind, die diskrete Lösung

$$W = (w^{1,1}, \dots, w^{1,\tilde{M}}, w^{2,1}, \dots, w^{N^2,\tilde{M}}, u_{\tilde{M}}^1, \dots, u_{\tilde{M}}^{\tilde{M}}) \in \mathbb{C}^{(N^2+1) \times \tilde{M}},$$

die für  $m = 1, \dots, \tilde{M}$  und  $n = 1, \dots, N^2$  das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\tilde{M}} \tilde{w}^{n,l} \tilde{a}_{\alpha_N^n}(\phi_{\tilde{M}}^l, \phi_{\tilde{M}}^m) + \sum_{l=1}^{\tilde{M}} u_{\tilde{M}}^l b_N^n(\phi_{\tilde{M}}^l, \phi_{\tilde{M}}^m) &= F_{m,n}, \\ u_{\tilde{M}}^m - \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N^2} e^{-i\alpha_N^n \cdot x^m} \tilde{w}^{n,m} &= 0 \end{aligned}$$

löst.

Die Konvergenztheorie für die diskrete inverse Bloch-Floquet-Transformation überträgt sich von dem skalaren Problem auf diese Problemstellung. Was noch fehlt, ist die Konvergenztheorie für die Finite-Elemente-Methode der quasiperiodischen Probleme mit den Maxwell-Gleichungen. Darauf gehen wir an dieser Stelle jedoch nicht ein und verweisen auf die Artikel [Bao97] und [Bao95], in denen die Konvergenz für die Maxwell-Gleichungen zweiter Ordnung für das magnetische Feld und die Konvergenz der Methode für die Helmholtz-Gleichung untersucht wird. Aus der Konvergenztheorie für andere

Problemstellungen, lässt sich für reguläre Lösungen  $E(\alpha, \cdot)$  aus  $H^1(\Omega_0^R)^3$  mit  $(\nabla \times E)(\alpha, \cdot) \in H^1(\Omega_0^R)^3$  eine Konvergenzordnung von 1 in der  $L^2(\Omega_0^R)$ -Norm sowie in der  $H(\text{curl}; \Omega_0^R)$ -Norm erwarten (vgl. [Mon03, Theorem 6.6]). Wir werden nur die Konvergenzordnung in der  $L^2(\Omega_0^R)$ -Norm analysieren, die in den numerischen Beispielen sogar schneller absteigt.

Wir lösen das lineare Gleichungssystem, analog zum skalaren Problem, indem wir das Schurkomplement lösen. Für die Matrix  $A$  nehmen wir diesmal jedoch die Identitätsmatrix als Vorkonditionierer. Die unvollständige LU-Zerlegung hat sich nämlich schnell einer singulären Matrix angenähert, wenn man den Randoperator  $N_\alpha$  in die Differentialgleichung einfließen lässt. Dadurch hatte die Startschätzung eine sehr große Norm und war weit von der Lösung entfernt. Bei  $M = 4$  und  $\alpha = (0.375, 0.125)$  hatte die Startschätzung sogar eine Norm von numerisch unendlich bei doppelter Genauigkeit (NaN, not-a-number) und GMRES brach ab.

## 4.7. Numerische Beispiele

Kommen wir zu den Beispielen für die numerische Methode des vektorwertigen Problems. Hierfür betrachten wir die Funktion  $u_4$  aus Abschnitt 3.6.2,

$$u_4(x_1, x_2, x_3) = \exp\left(-\frac{1}{10}(x_1 - 1)^2 - \frac{1}{10}(x_2 - 2)^2 + \frac{1}{10}(x_3 - 5)^2\right) \frac{x_3}{5},$$

und definieren

$$E^1 := \begin{pmatrix} u_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad E^2 := \begin{pmatrix} \partial u_4 / \partial x_3 - u_4 / x_3 \\ u_4 \\ -\partial u_4 / \partial x_1 \end{pmatrix}.$$

Beide Funktionen erfüllen die homogene Randbedingung auf  $\Gamma^0$  und sind ausreichend schnell abfallend in  $\underline{x}$ , sodass wir mit einer groben Diskretisierung von  $\bar{\Gamma}$  auskommen. Weiterhin betrachten wir die Referenzlösung

$$E^3(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[ \frac{e^{ik(x_1^2 + (x_2 + 7)^2)}}{4\pi(x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 7)^2)} - \frac{e^{ik(x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 9)^2)}}{4\pi(x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 9)^2)} \right] \frac{x_3}{5}.$$

Für die relative Permittivität wählen wir

$$\varepsilon_r(x + 2\pi j) = \begin{cases} 2, & x \in ([-3/2, 3/2] \times [1, \pi] \times [0, 9/2] \\ & \cup [-\pi, \pi]^2 \times [0, 7/2]) \setminus [-1, 1]^2 \times [1, 3], \\ 2 + 1i, & x \in [-1, 1]^2 \times [1, 3], \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit  $j \in \mathbb{Z}^2$  und als Störung wählen wir

$$q(x) = \begin{cases} 5.5, & x \in [-1/2, 1] \times [0, 1] \times [1, 7/2] \cup [-2, 1] \times [0, 1] \times [1, 2] \\ & \cup [-1/2, 1] \times [-5/2, 1] \times [1, 2], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beide Parameter sind in der Abbildung 3.11 visualisiert und weniger regulär als in der Theorie vorausgesetzt. Als Wellenzahl wählen wir  $k^2 = 0.4$  und für die Permeabilität betrachten wir einmal die konstante Funktion  $\mu_0^{-1} := 1$  sowie

$$\mu_1^{-1}(x) := \begin{cases} \frac{1}{8} \sin(x_1) \sin(x_2) (\cos(\frac{\pi}{3}x_3) + 1) + 1, & x \in [-\pi, \pi]^2 \times [0, 3], \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Gebiet soll weiterhin durch  $R = 5$  begrenzt werden. Wir verwenden GMRES mit einer relativen Diskrepanz von  $10^{-10}$  und für die Fourier-Reihendarstellung der Randbedingung setzen wir alle Summanden mit Index  $j \in \mathbb{Z}^2$  auf Null, für die  $|j|_\infty > 10$  gilt. Die rechten Seiten berechnen wir analog zu Abschnitt 3.7.2, indem wir die Bloch-Floquet-Transformation komponentenweise auf die Referenzlösungen anwenden. Die Referenzlösungen erfüllen nicht die gewünschte Randbedingung auf  $\Gamma_0^R$ , sodass wir auch in diesem Fall diese Abweichung zur rechten Seite hinzuaddieren.

Die Ergebnisse der Approximation sind in der Abbildung 4.1 dargestellt. Für  $E^1$  und  $E^2$  erreichen wir für  $\mu_r = \mu_0$  eine Konvergenzordnung von 1.49 bzw. 1.16 in der  $L^2(\Omega_0^R)$ -Norm und für  $E^3$  eine Konvergenzordnung von 1.73. Wenn wir  $\mu = \mu_1$  wählen, so steigt die Konvergenzordnung bei  $E^2$  sogar auf 1.29. Wir haben für die Beispiele die Identität als Variablentransformation verwendet, die bei diesem groben Gitter im Ort bereits ausreichend gut ist.

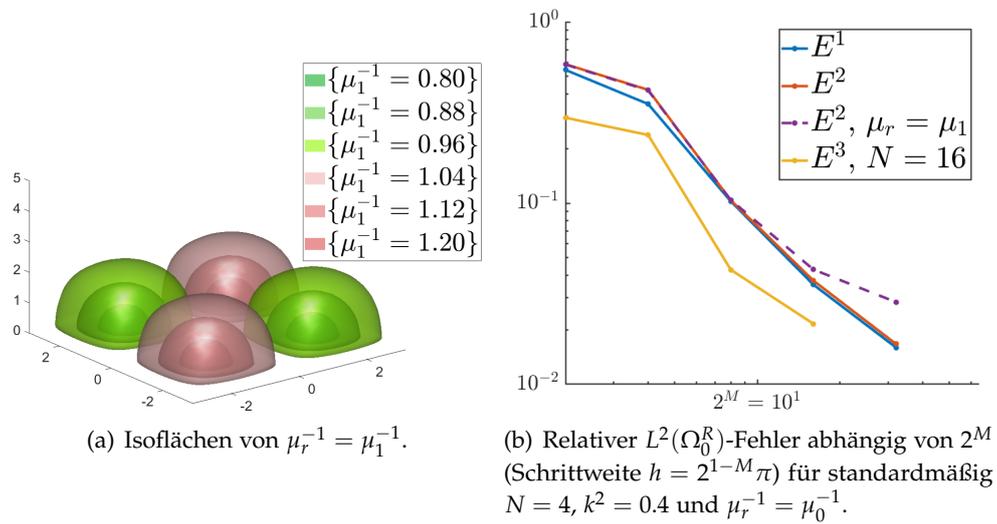


Abbildung 4.1.: Numerische Beispiele für das vektorwertige Streuproblem.



## Rekonstruktion der Störung

---

In diesem Kapitel betrachten wir das Inverse Problem der Rekonstruktion der Störung. Hierfür werden wir drei Messoperatoren für das skalare Streuproblem definieren, wobei der erste Operator die Störung auf die ganze Welle in  $\Omega_0^R$  abbildet, der zweite Operator die Welle nur als Randmessung auf  $\Gamma_0^R$  als Messdaten hernimmt und der dritte Messoperator die Störung auf das Fernfeld abbildet. Das Ziel ist, bei Kenntnis des periodischen ungestörten Brechungsindizes und der rechten Seiten sowohl den Träger als auch den Wert der Störung zu approximieren. Wir analysieren die entstehenden Inversen Probleme auf Eindeutigkeit der Rekonstruktion, wofür wir sogenannte *complex geometrical optics* verwenden, um aus Messungen der gestreuten Welle am Rand die Eindeutigkeit der Störung zu zeigen, sowie auf Schlecht-Gestelltheit. Dann wenden wir das inexakte Newton-Verfahren CG-REGINN auf die Messoperatoren an, um numerische Beispiele für die Qualität der Rekonstruktion zu geben und die Konvergenz der Methode bei abfallendem Rauschlevel zu untersuchen. Iterative Verfahren für nicht-lineare Probleme sind typischerweise ableitungsbasiert (vgl. [CK13, Kapitel 5]). Deshalb werden wir die Fréchet-Ableitung der Messoperatoren sowie deren adjungierten Operator analytisch berechnen.

Das Kapitel ist hierbei wie folgt unterteilt: Wir werden zunächst das Inverse Problem für die Rekonstruktion der Störung im Brechungsindizes des skalaren Streuproblems betrachten. Im zweiten Abschnitt werden wir das Newton-Verfahren auf das vektorwertige Streuproblem anwenden, um die Störung in der Permittivität zu rekonstruieren. Das erste Unterkapitel wurde als Teil von [KL19] veröffentlicht und das zweite Unterkapitel als Teil von [Kon19b] zur Veröffentlichung eingereicht.

### 5.1. Newton-Verfahren für das skalare Streuproblem

Für die Fréchet-Differenzierbarkeit benötigen wir eine offene Menge als Definitionsbereich der Messoperatoren. Diese werden wir als Erstes definieren. Für jedes  $q_0 \in L^\infty(\Omega_0^R)$  mit  $\text{Im } q_0 \geq 0$  ist das Streuproblem eindeutig lösbar. Für  $d \in \{2, 3\}$  ist nach [Eva98, Section 5.7] der Raum  $\tilde{H}^1(\Omega_0^R)$  stetig eingebettet in  $L^4(\Omega_0^R)$ . Damit erhalten wir für ein hinreichend kleines  $\delta(q_0) > 0$  und

ein  $q \in L^2(\Omega_0^{R_0})$  mit  $\|q - q_0\|_{L^2(\Omega_0^{R_0})} < \delta(q_0)$  sowie für jede Funktion  $u$  und  $v \in \tilde{H}^1(\Omega^R)$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |a_q(u, v)| &\leq |a_{q_0}(u, v)| + k^2 \|q - q_0\|_{L^2(\Omega_0^R)} \|u\|_{L^4(\Omega_0^R)} \|v\|_{L^4(\Omega_0^R)} \\ &\leq (C_{q_0} + C\delta(q_0)) \|u\|_{H^1(\Omega^R)} \|v\|_{H^1(\Omega^R)}. \end{aligned}$$

Daher ist für ein kleines  $\delta(q_0)$  die Sesquilinearform  $a_q$  eine kleine Störung von  $a_{q_0}$ , weshalb der Satz über die Neumannsche Reihe A.1 die Invertierbarkeit des Differentialoperators  $a_q$  garantiert. Wir definieren die Menge  $Q$  als Definitionsbereich der Messoperatoren durch

$$Q := \bigcup_{\substack{q_0 \in L^\infty(\Omega_0^R) \\ \text{Im } q_0 \geq 0}} B_{\delta(q_0)}(q_0) \subseteq L^2(\Omega_0^{R_0}),$$

wobei  $B_{\delta(q_0)}(q_0) \subseteq L^2(\Omega_0^R)$  ein offener Ball in  $L^2(\Omega_0^R)$  um die Störung  $q_0$  aus  $L^\infty(\Omega_0^R)$  ist. Wie wir gerade gesehen haben, ist die Sesquilinearform und der Lösungsoperator für jedes  $q \in Q$  wohldefiniert. Wir beschreiben nun die Messoperatoren, für die wir das Newton-Verfahren anwenden wollen. Der erste Messoperator soll die gesamte gestreute Welle auf der Menge  $\Omega_0^R$  als Daten liefern.

**Definition 5.1.** Der Operator  $\Lambda_{q_0}: L^2(\Omega_0^{R_0}) \rightarrow L^2(\Omega_0^R)$  bildet eine rechte Seite  $f \in L^2(\Omega_0^{R_0})$  auf die auf  $\Omega_0^R$  eingeschränkte Lösung  $u_{q_0} \in \tilde{H}^1(\Omega^R)$  des Problems 1 mit der Sesquilinearform  $a_{q_0}$  ab. Wir definieren den Messoperator

$$\Lambda: Q \subseteq L^2(\Omega_0^{R_0}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^2(\Omega_0^R)), \quad q \mapsto \Lambda_q,$$

der eine Störung  $q \in Q$  auf den Operator  $\Lambda_q$  abbildet.

Für den zweiten Messoperator betrachten wir nur die Daten auf dem oberen Rand  $\Gamma_0^R$  der Menge  $\Omega_0^R$ .

**Definition 5.2.** Es sei  $\tilde{\Lambda}_{q_0}: L^2(\Omega_0^{R_0}) \rightarrow \tilde{H}^1(\Omega_0^R)$  wie der Operator  $\Lambda_{q_0}$  von oben definiert, nur mit  $\tilde{H}^1(\Omega^R)$  als Bildraum, und  $\gamma_{\Gamma_0^R}: \tilde{H}^1(\Omega^R) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_0^R)$  der Spuoperator. Wir definieren den Messoperator  $\mathcal{S}$  durch

$$\mathcal{S}: Q \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^2(\Gamma_0^R)), \quad q \mapsto \gamma_{\Gamma_0^R} \circ \tilde{\Lambda}_q,$$

der die gestreute Welle nur auf einer Periode des oberen Randes misst.

Als dritten Messoperator betrachten wir  $\mathcal{T}$ , der für eine Störung  $q \in Q$  die rechten Seiten aus  $L^2(\Omega_0^{R_0})$  auf das Fernfeld der gestreuten Welle abbildet.

Warum wir das Bild des Operators als Fernfeld bezeichnen, werden wir im nächsten Kapitel 6 näher betrachten. Den Operator können wir auch ohne weitere Charakterisierung eines Fernfeldes hinschreiben.

**Definition 5.3.** Es seien erneut der Operator  $\tilde{\Lambda}_{q_0} : L^2(\Omega^{R_0}) \rightarrow \tilde{H}^1(\Omega^R)$  wie oben definiert und der Spuroperator  $\gamma_{\Gamma^R} : \tilde{H}^1(\Omega^R) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma^R)$  gegeben. Weiterhin sei mit  $\mathcal{F}$  die Fourier-Transformation bezeichnet und der Hilfsoperator  $M : H^{1/2}(\Gamma^R) \rightarrow L^2(\overline{B_k(0)})$  durch

$$\phi \mapsto i\sqrt{k^2 - |\cdot|^2} \mathcal{F}\phi|_{\overline{B_k(0)}}$$

definiert, wobei  $\overline{B_k(0)} \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$  die abgeschlossene Kugel um 0 mit dem Radius  $k$  ist. Wir definieren den Messoperator  $\mathcal{T}$  durch

$$\mathcal{T} : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{L}\left(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^2(\overline{B_k(0)})\right), \quad q \mapsto M \circ \gamma_{\Gamma^R} \circ \tilde{\Lambda}_q.$$

### 5.1.1. Injektivität der Messoperatoren

Wir wollen die Eindeutigkeit der Rekonstruktion bzw. die Injektivität der Messoperatoren zeigen. Für den ersten Messoperator  $\Lambda$  können wir die Injektivität relativ einfach nachweisen.

**Lemma 5.4.** *Es seien  $q_1$  und  $q_2$  zwei Störungen aus  $\mathcal{Q}$ , deren Träger in  $\Omega_0^R$  beinhaltet ist. Falls die Gleichung  $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$  erfüllt ist, so gilt  $q_1 = q_2$ .*

*Beweis:* Sei die rechte Seite  $f \in L^2(\Omega_0^{R_0})$  zunächst fest und betrachte die zwei Lösungen  $u_1$  und  $u_2$  zu dem variationellen Problem 1 mit den Sesquilinearformen  $a_{q_1}$  bzw.  $a_{q_2}$ . Auf dem Gebiet  $\Omega_0^R$  stimmen beide Lösungen überein, da  $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$  gilt. Somit löst  $w := u_1 - u_2 \in \tilde{H}^1(\Omega^R)$  das variationelle Problem

$$\int_{\Omega^R} \nabla w \cdot \nabla \bar{v} - k^2 n_p^2 w \bar{v} - k^2 q_1 w \bar{v} \, dx - \int_{\Gamma^R} T w \bar{v} \, dS = \int_{\Omega^R} -k^2 (q_1 - q_2) u_2 \bar{v} \, dx,$$

und verschwindet insbesondere auf  $\Omega_0^R \setminus \text{supp}(q_1 - q_2) \neq \emptyset$ . Die Anwendung des Satzes über die eindeutige Fortsetzbarkeit 3.6 impliziert, dass  $u_1 = u_2$  auf  $\Omega^R \setminus \Omega_0^R$ , und infolgedessen auf ganz  $\Omega^R$ , gilt. Demnach ist für alle  $v \in \tilde{H}^1(\Omega^R)$  die Gleichung

$$\int_{\Omega^R} (q_1 - q_2) u_2 \bar{v} \, dx = 0,$$

erfüllt und es folgt aus dem Fundamentallema der variationellen Rechnung  $(q_1 - q_2)u_2 = 0$  fast überall. Da wir eine beliebige Funktion  $u_2 \in C_0^\infty(\Omega_0^{R_0})$  wählen können, folgt daraus  $q_1 = q_2$  in  $\mathbb{R}^d$ .  $\square$

Für den Rand-Messoperator  $\mathcal{S}$  müssen wir mehr Voraussetzungen annehmen, um Injektivität zu zeigen. Wir bezeichnen weiterhin mit  $C_p^2(\overline{\Omega_0^R})$  den Raum der zweifach differenzierbaren  $2\pi$ -periodischen Funktionen.

**Satz 5.5**

Betrachte für  $d = 3$  zwei Störungen  $q_1$  und  $q_2 \in Q \cap C^2(\mathbb{R}_+^3)$  mit kompaktem Träger in  $\Omega_0^{R_0}$  und nehme an, dass  $n_p^2 \in C_p^2(\overline{\Omega_0^R})$  erfüllt ist. Wir bezeichnen für  $q \in Q$  den Lösungsoperator für das Problem 1 als  $\tilde{\Lambda}_q: L^2(\Omega_0^{R_0}) \rightarrow \tilde{H}^1(\Omega^R)$  und definieren  $\tilde{\mathcal{S}}: Q \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega^{R_0}), L^2(\Gamma^R))$ ,  $q \mapsto \gamma_{\Gamma^R} \circ \tilde{\Lambda}_q$ , wobei  $\gamma_{\Gamma^R}$  der Spuroperator nach  $\Gamma^R$  ist. Dann gilt die Implikation:

$$\text{Wenn } \tilde{\mathcal{S}}(q_1) = \gamma_{\Gamma^R} \circ \tilde{\Lambda}_{q_1} = \gamma_{\Gamma^R} \circ \tilde{\Lambda}_{q_2} = \tilde{\mathcal{S}}(q_2), \text{ dann } q_1 = q_2.$$

Für den Beweis benötigen wir das folgende Resultat über die sogenannten *complex geometrical optics*, das wir aus [ILW16, Proposition 3.2] (siehe auch [SU87]) angepasst zitieren.

**Proposition 5.6.** *Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand  $\partial G$ ,  $\xi \in \mathbb{C}^3$  mit  $\xi \cdot \xi = \operatorname{Re}(\xi)^2 - \operatorname{Im}(\xi)^2 + 2i \operatorname{Im}(\xi) \operatorname{Re}(\xi) = 0$  und  $\rho \in H^2(G)$ . Dann existieren Konstanten  $C_0$  und  $C_1$  abhängig von  $G$ , sodass für  $|\xi| > C_0 \|\rho\|_{H^2(G)}$  eine Funktion  $u$  der Form*

$$u(x) = e^{\xi \cdot x} (1 + \psi_{\xi, \rho}(x)) \quad (5.1)$$

*existiert, die die partielle Differentialgleichung  $\Delta u + \rho u = 0$  in  $G$  und die Bedingungen  $\psi_{\xi, \rho} \in H^2(G)$  und  $\|\psi_{\xi, \rho}\|_{H^2(G)} \leq \frac{C_1}{|\xi|} \|\rho\|_{H^2(G)}$  erfüllt.*

*Beweis von Satz 5.5:* Es sei zunächst  $f \in L^2(\Omega_0^{R_0})$  fest gewählt. Die Operatoren  $\tilde{\mathcal{S}}(q_1)$  und  $\tilde{\mathcal{S}}(q_2)$  bilden die rechte Seite  $f$  auf die Spuren der Lösungen  $u_1$  und  $u_2$  des Problems 1 mit  $n^2 = n_p^2 + q_1$  bzw.  $n^2 = n_p^2 + q_2$  ab. Die Spuren stimmen auf  $\Gamma^R$ , und natürlich auch auf  $\Gamma^0$ , überein, sodass die Funktion  $w := u_1 - u_2$  die partielle Differentialgleichung

$$\Delta w + k^2(n_p^2 + q_1)w = k^2(q_2 - q_1)u_2 \quad \text{in } \Omega^R, \quad w = 0 \quad \text{auf } \Gamma^0 \cup \Gamma^R,$$

löst. Da die obere Spur die Fortsetzung durch die Ausstrahlungsbedingung der beiden Funktion  $u_1$  und  $u_2$  eindeutig vorgibt, muss  $w$  auf einer offenen Teilmenge von  $\Omega^{R'}$  mit  $R' > R \geq R_0 > 0$  verschwinden. Aus dem Satz über die eindeutige Fortsetzbarkeit 3.6 folgt dann, dass  $w$  auf der größten zusammenhängenden Teilmenge  $D^c \subseteq \{q_1 = q_2\} \subseteq \mathbb{R}^3$  verschwindet, die insbesondere die Ränder  $\Gamma^R \cup \Gamma^0$  beinhaltet. Daraus folgern wir  $u_1 = u_2$  auf

$D^c$ . Als Nächstes wählen wir zwei beliebige rechte Seiten  $f$  und  $g \in L^2(\Omega_0^{R_0})$ , die ihren Träger in  $\overline{D^c}$  besitzen und definieren die Funktion

$$\rho \in C^\infty([0, 1]; C_p^2(\Omega_0^{R_0})), \quad \rho(t, x) := n_p^2(x) + t q_2(x) + (1-t) q_1(x).$$

Wir bezeichnen die zwei Lösungen des Problems 1 mit  $n^2 = \rho(t, \cdot)$  als  $u_{\rho(t, \cdot)}^f$  bzw.  $v_{\rho(t, \cdot)}^g$ . Durch direktes Nachrechnen oder alternativ aus [CM05, Lemma 3.2] folgt die Gleichung  $\int_{\Gamma^R} T(\phi)\psi \, dS = \int_{\Gamma^R} T(\psi)\phi \, dS$ , sodass

$$\begin{aligned} B_{\rho(t, \cdot)}(f, g) &:= \int_{\Omega^R} f v_{\rho(t, \cdot)}^g + g u_{\rho(t, \cdot)}^f \, dx \\ &= 2 \int_{\Omega^R} \nabla u_{\rho(t, \cdot)}^f \cdot \nabla v_{\rho(t, \cdot)}^g - k^2 \rho u_{\rho(t, \cdot)}^f v_{\rho(t, \cdot)}^g \, dx - 2 \int_{\Gamma^R} T u_{\rho(t, \cdot)}^f v_{\rho(t, \cdot)}^g \, dS \end{aligned}$$

gilt. Wie wir weiter oben gezeigt haben, erfüllen die Funktionen  $u_{\rho(0, \cdot)}^f = u_{\rho(1, \cdot)}^f$  und  $v_{\rho(0, \cdot)}^g = v_{\rho(1, \cdot)}^g$  auf  $D^c$ . Die beiden rechten Seiten  $f$  und  $g$  haben wir so gewählt, dass beide auf  $D$ , dem Komplement von  $\overline{D^c}$ , der Nullfunktion gleichen, sodass wir die Identität

$$\left[ B_{\rho(1, \cdot)} - B_{\rho(0, \cdot)} \right] (f, g) = \int_{\Omega^R} f \left( v_{\rho(1, \cdot)}^g - v_{\rho(0, \cdot)}^g \right) + g \left( u_{\rho(1, \cdot)}^f - u_{\rho(0, \cdot)}^f \right) \, dx = 0$$

erhalten. Wir kürzen die beiden Lösungen durch  $u := u_{\rho(t, \cdot)}^f$  und  $v := v_{\rho(t, \cdot)}^g$  sowie ihre Ableitungen bzgl.  $t$  durch  $u' := \frac{\partial}{\partial t} u$  und  $v' := \frac{\partial}{\partial t} v$  ab, sodass die obere Gleichung impliziert, dass

$$0 = B_{\rho(1, \cdot)}(f, g) - B_{\rho(0, \cdot)}(f, g) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} B_{\rho(t, \cdot)}(f, g) \, dt$$

und damit

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \int_{\Omega^R} \nabla u' \cdot \nabla v + \nabla u \cdot \nabla v' - k^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho \right) u v - k^2 \rho u' v - k^2 \rho u v' \, dx \\ &\quad - \int_{\Gamma^R} T u' v + T v' u \, dS \, dt \end{aligned}$$

erfüllt ist. Durch das Differenzieren des variationellen Problems 1 für  $n^2 = \rho$  bzgl.  $t$  sehen wir, dass  $u'$  und  $v'$  Lösungen des Problems

$$\begin{aligned} \Delta w' + k^2 \rho w' &= -k^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho \right) w && \text{in } \Omega^R \\ \frac{\partial}{\partial x_3} w' &= T(w') && \text{auf } \Gamma^R \\ w' &= 0 && \text{auf } \Gamma^0 \end{aligned}$$

sind. Da die Ableitung von  $\rho$  bzgl.  $t$  durch  $\frac{\partial}{\partial t}\rho = (q_2 - q_1)$  gegeben ist, erhalten wir

$$\int_{\Omega^R} (q_2 - q_1) \int_0^1 u_{\rho(t,\cdot)}^f v_{\rho(t,\cdot)}^g dt dx = 0 \quad (5.2)$$

für alle  $f$  und  $g \in L^2(\Omega_0^{R_0})$  mit  $f|_D = g|_D = 0$ .

Die Annahme, dass wir im dreidimensionalen Raum sind, erlaubt uns zwei Vektoren  $\zeta^i \in \mathbb{C}^3$ ,  $i = 1, 2$ , zu wählen, sodass die Normen  $|\zeta^i|^2$ ,  $i = 1, 2$ , groß sind und beide sich für paarweise orthogonale Vektoren  $l$ ,  $m$  und  $p$  zerlegen lassen durch

$$\zeta^1 = i(m + p) + l \quad \text{und} \quad \zeta^2 = i(m - p) - l$$

mit  $|l|^2 = |m|^2 + |p|^2$ . Wir wählen nun ein Lipschitz-Gebiet  $\tilde{D} \supseteq D$  als Obermenge von  $D$ , dann folgt aus Proposition 5.6 die Existenz von zwei Funktionen  $u$  und  $v$  aus  $H^2(\tilde{D})$  der Form (5.1). Durch das Multiplizieren einer Abschneidefunktion  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  an die Funktionen  $u$  und  $v$ , die die Bedingungen  $\chi|_D = 1$  und  $\chi|_{\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{D}} = 0$  erfüllt, sehen wir, dass  $\chi u$  und  $\chi v$  Lösungen des Problems 1 mit entsprechenden rechten Seiten  $f$  und  $g$  sind, die ihren Träger in  $\tilde{D} \setminus D$  besitzen. Das Einsetzen der Funktionen in (5.2) ergibt

$$\int_{\Omega^R} (q_2 - q_1) e^{2im \cdot x} \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|p|}\right) \right) dx = 0.$$

Nun können wir  $|p|$  gegen unendlich laufen lassen und folgern daraus, dass die Fourier-Transformierte der Funktion  $(q_1 - q_2) \in L^1(\mathbb{R}^3)$  der Nullfunktion gleicht, womit die Gleichheit  $q_1 = q_2$  überall in  $\mathbb{R}^3$  gezeigt ist.  $\square$

Analog zeigen wir die Injektivität des Fernfeldoperators  $\mathcal{T}$ .

### Satz 5.7

Betrachte für  $d = 3$  zwei Störungen  $q_1$  und  $q_2 \in Q \cap C^2(\mathbb{R}_+^3)$  mit kompaktem Träger in  $\Omega_0^{R_0}$  und nehme an, dass  $n_p^2$  aus  $C_p^2(\overline{\Omega_0^R})$  ist. Wir definieren  $\tilde{\Lambda}_{q_1}$ ,  $\tilde{\Lambda}_{q_2}$  wie in Satz 5.5 und für ein beliebig kleines  $\eta > 0$  definieren wir weiterhin den Operator  $\tilde{M}: H^{1/2}(\Gamma^R) \rightarrow L^2(\overline{B_{k+\eta}(0)})$  durch

$$\phi \mapsto i\sqrt{k^2 - |\cdot|^2} \mathcal{F}\phi|_{\overline{B_{k+\eta}(0)}}.$$

Dann gilt für  $\tilde{\mathcal{T}}: Q \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^2(\overline{B_{k+\eta}(0)}))$ ,  $q \mapsto \tilde{M} \circ \gamma_{\Gamma^R} \circ \tilde{\Lambda}_q$ , die Implikation:

$$\text{Wenn } \tilde{\mathcal{T}}(q_1) = \tilde{M} \circ \gamma_{\Gamma^R} \circ \tilde{\Lambda}_{q_1} = \tilde{M} \circ \gamma_{\Gamma^R} \circ \tilde{\Lambda}_{q_2} = \tilde{\mathcal{T}}(q_2), \text{ dann } q_1 = q_2.$$

*Beweis:* Da die rechten Seiten einen kompakten Träger haben, sind nach dem Regularitätsresultat 3.11 die Bloch-Floquet-Transformierten der Lösungen außerhalb von  $|\alpha| = k$  analytisch. Anhand der Folgerung 2.14 sehen wir, dass auch die Fourier-Transformierten der Spuren der Lösungen außerhalb von  $|\xi| = k$  analytisch sind. Wenn diese also auf  $\overline{B_{k+\eta}(0)}$  übereinstimmen, stimmen sie, wegen der Analytizität, auch auf ganz  $\Gamma^R$  überein. Somit können wir analog zu dem Beweis von Satz 5.5 argumentieren.  $\square$

### 5.1.2. Fréchet-Differenzierbarkeit und Schlecht-Gestellttheit

Wir betrachten nun die Differenzierbarkeit und die Schlecht-Gestellttheit der Messoperatoren.

**Lemma 5.8.** *Es sei  $q \in Q$  fest und  $u_f$  die Lösung zu dem variationellen Problem 1 für eine rechte Seite  $f \in L^2(\Omega_0^{R_0})$ . Definiere für ein  $h \in L^2(\Omega_0^{R_0})$  den Operator  $W_h: L^2(\Omega_0^{R_0}) \rightarrow L^2(\Omega_0^R)$ ,  $f \mapsto w_{h,f}|_{\Omega_0^R}$ , der eine Funktion  $f$  auf die Lösung  $w_{h,f}$  des Problems 1 mit der rechten Seite  $k^2 h u_f$  abbildet. Die Funktion  $w_{h,f}$  löst also das Problem*

$$a_q(w_{h,f}, v) = \int_{\Omega_0^R} k^2 h u_f \bar{v} \, dx$$

für alle  $v \in \tilde{H}^1(\Omega^R)$ . Dann ist die Ableitung von  $\Lambda$  an der Stelle  $q$  gegeben durch

$$\Lambda'(q) \in \mathcal{L}\left(L^2(\Omega_0^R), \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^2(\Omega_0^R))\right), \quad h \mapsto W_h.$$

*Beweis:* Wegen der stetigen Einbettung von  $H^1(\Omega_0^R)$  nach  $L^4(\Omega_0^R)$  ist für  $h \in L^2(\Omega_0^R)$  und  $v \in \tilde{H}^1(\Omega_0^R)$  das Funktional  $k^2 h v \in \tilde{H}^1(\Omega_0^R)'$  wohldefiniert. Durch die Anwendung des Darstellungssatzes von Riesz erhalten wir eine äquivalente Operator-Gleichung zu dem variationellen Problem 1 der Form

$$(B_q u, v)_{\tilde{H}^1(\Omega^R)} = (g, v)_{\tilde{H}^1(\Omega^R)} \quad \text{für alle } u, v \in \tilde{H}^1(\Omega^R),$$

wobei  $B_q \in \mathcal{L}(\tilde{H}^1(\Omega^R))$  die Riesz-Darstellung des Differentialoperators von Problem 1 und  $g$  die Riesz-Darstellung der rechten Seite  $f$  ist. Wir können schnell nachrechnen, dass die Sesquilinearform Fréchet-differenzierbar nach der Störung  $q$  ist. Demnach ist auch der Operator  $q \mapsto B_q$  Fréchet-differenzierbar mit der Ableitung  $q \mapsto B'_q \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), \mathcal{L}(\tilde{H}^1(\Omega^R)))$ . Da der Operator  $B_q$  invertierbar für alle  $q \in Q$  ist, folgt aus einer Folgerung des Satzes über die Neumannsche Reihe A.2, dass auch  $q \mapsto \Lambda_q = B_q^{-1}|_{\Omega_0^R}$  Fréchet-differenzierbar ist und die Linearisierung geschrieben werden kann als  $\Lambda'(q)[h] = -\Lambda_q B'_q h \Lambda_q$ , was die behauptete Form ist.  $\square$

Die Differenzierbarkeit von  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{T}$  ist eine direkte Folgerung aus dem obigen Satz.

**Folgerung 5.9.** *Der Messoperator  $\mathcal{S}$  ist Fréchet-differenzierbar in  $q \in Q$ . Die Ableitung ist gegeben durch  $\mathcal{S}'(q) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^2(\Gamma_0^R)))$ , die eine Funktion  $h \in L^2(\Omega_0^{R_0})$  auf den Operator  $\gamma_{\Gamma_0^R} \circ \tilde{W}_h: L^2(\Omega_0^{R_0}) \rightarrow L^2(\Gamma_0^R)$  abbildet, wobei  $\tilde{W}_h: L^2(\Omega_0^{R_0}) \rightarrow \tilde{H}^1(\Omega^R)$  analog zu  $W_h$ , nur mit dem Bildraum  $\tilde{H}^1(\Omega^R)$ , definiert ist.*

**Folgerung 5.10.** *Der Messoperator  $\mathcal{T}$  ist Fréchet-differenzierbar in  $q \in Q$ . Die Ableitung ist gegeben durch  $\mathcal{T}'(q) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^2(\overline{B_k(0)})))$ , die eine Funktion  $h \in L^2(\Omega_0^{R_0})$  auf den Operator  $M \circ \gamma_{\Gamma^R} \circ \tilde{W}_h: L^2(\Omega_0^{R_0}) \rightarrow L^2(\Gamma_0^R)$  abbildet, wenn  $\tilde{W}_h$  wie in der Folgerung 5.9 definiert ist.*

Den Rest dieses Abschnitts weisen wir nach, dass der Messoperator  $\Lambda$  und seine Fréchet-Ableitung  $\Lambda'(q)$  für  $q \in Q$  lokal schlecht-gestellt sind. Hierfür werden wir die sogenannte *Nichtlinearitätsbedingung* für den Operator mit angepasstem Bildraum zeigen und die Schlecht-Gestelltheit für den gewünschten Bildraum folgern. Die Schlecht-Gestelltheit von  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{T}$  sowie deren Fréchet-Ableitungen kann analog gezeigt werden, was wir anschließend skizzieren werden. Lokale Schlecht-Gestelltheit ist dabei wie folgt definiert (siehe [Sch+12, Definition 3.15]).

**Definition 5.11.** Es sei mit  $B_r(x^*) \subseteq X$  für einen Banachraum  $X$  die Kugel um ein Element  $x^* \in X$  mit Radius  $r > 0$  bezeichnet. Ein allgemeiner (nicht-linearer) Operator  $\Phi: \mathcal{D}(\Phi) \subseteq X \rightarrow Y$  zwischen den Banachräumen  $X$  und  $Y$  wird als *lokal schlecht-gestellt* in  $x^* \in \mathcal{D}(\Phi)$  bezeichnet, wenn es für alle  $r > 0$  eine Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_r(x^*) \cap \mathcal{D}(\Phi)$  gibt, sodass  $\|\Phi(x_n) - \Phi(x^*)\|_Y \rightarrow 0$ , jedoch  $\|x_n - x^*\|_X \not\rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt.

Um die Schlecht-Gestelltheit zu beweisen, werden wir zunächst zeigen, dass  $\Lambda: Q \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^4(\Omega_0^R))$  lokal schlecht-gestellt ist. Dies impliziert, dass auch  $\Lambda: Q \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^2(\Omega_0^R))$  lokal schlecht-gestellt sein muss. Dafür betrachten wir zuerst für ein  $q_0 \in Q$  die Schlecht-Gestelltheit der Ableitung  $\Lambda'(q_0): L^2(\Omega_0^{R_0}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^4(\Omega_0^R))$  und schließen dann auf die Schlecht-Gestelltheit von  $\Lambda$ , indem wir zeigen, dass  $\Lambda$  die Nichtlinearitätsbedingung in dem Bildraum  $\mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^4(\Omega_0^R))$  erfüllt.

**Lemma 5.12.** *Der Operator  $\Lambda'(q): L^2(\Omega_0^{R_0}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^4(\Omega_0^R))$  ist ein kompakter Operator für alle  $q \in Q$ . Insbesondere ist die linearisierte Operator-Gleichung lokal schlecht-gestellt in  $\mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^4(\Omega_0^R))$ .*

*Beweis:* Es sei  $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq L^2(\Omega_0^{R_0})$  eine schwach konvergente Folge, d. h. für alle Funktionale  $\psi \in L^2(\Omega_0^{R_0})'$  gilt  $\psi(h_j) \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$ . Damit konvergieren die rechten Seiten  $k^2 h_j \Lambda_q f$  schwach in  $H^{-1}(\Omega^R)$  für alle  $f \in L^2(\Omega_0^{R_0})$  gegen Null. Der Sobolev-Raum  $H_0^1(\Omega_0^R)$  ist nach [Eva98, Section 5.7] kompakt eingebettet in  $L^4(\Omega_0^R)$ , sodass für alle  $f \in L^2(\Omega_0^{R_0})$  die Folge der Lösungen  $\{W_{h_j} f\}$  in  $L^4(\Omega_0^R)$  für  $j \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert. Aus dem Satz von Banach-Steinhaus folgt dementsprechend, dass die Folge der Operatoren  $\{W_{h_j}\}$  gegen Null konvergiert und der Operator  $\Lambda'(q)$  kompakt ist.  $\square$

**Satz 5.13**

Der Operator  $\Lambda: Q \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^4(\Omega_0^R))$ ,  $q \mapsto \Lambda_q$ , ist lokal schlechtgestellt.

*Beweis:* Wir zeigen, dass der Operator  $\Lambda$  mit  $\mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^4(\Omega_0^R))$  als Bildraum die Nichtlinearitätsbedingung erfüllt. Die Bedingung bedeutet, dass für ein  $q_0 \in Q$  Konstanten  $0 \leq \omega < 1$  und  $r > 0$  existieren, sodass

$$\begin{aligned} & \|\Lambda(q) - \Lambda(q^*) - \Lambda'(q^*)[q - q^*]\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^4(\Omega_0^R))} \\ & \leq \omega \|\Lambda(q) - \Lambda(q^*)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^4(\Omega_0^R))} \end{aligned}$$

für alle  $q, q^* \in B_r(q_0) \cap Q$  erfüllt ist. Mit der Anwendung der Dreiecksungleichung erhalten wir die Relation

$$1 - \omega \leq \frac{\|\Lambda'(q^*)[q - q^*]\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^4(\Omega_0^R))}}{\|\Lambda(q) - \Lambda(q^*)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^4(\Omega_0^R))}} \leq 1 + \omega$$

für  $q \neq q^*$ . Dies wiederum impliziert, zusammen mit [GL17, Theorem 4.5], dass die lokale Schlecht-Gestelltheit von  $\Lambda$  aus der lokalen Schlecht-Gestelltheit der Fréchet-Ableitung  $\Lambda'(q)$  folgt, welche wir in Lemma 5.12 bereits gezeigt haben.

Es sei die rechte Seite  $f \in L^2(\Omega_0^{R_0})$  fest und wähle die Funktionen  $u_q \in \tilde{H}^1(\Omega^R)$  und  $u_{q^*} \in \tilde{H}^1(\Omega^R)$  als die Lösungen zu der Problemstellung 1 für  $a_q$  bzw.  $a_{q^*}$ . Weiterhin sei  $w_h \in \tilde{H}^1(\Omega^R)$  die Lösung zu dem Problem 1 für  $a_{q^*}$  mit der rechten Seite  $k^2 h u_{q^*}$  für  $h := (q - q^*)$ . Wenn wir  $w := u_q - u_{q^*} - w_h \in \tilde{H}^1(\Omega^R)$  definieren, dann gilt

$$\|\Lambda_q f - \Lambda_{q^*} f - W_h f\|_{L^4(\Omega_0^R)} \leq C \|w\|_{\tilde{H}^1(\Omega_0^R)}.$$

Die Funktion  $w$  löst das variationelle Problem

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^R} \nabla w \cdot \nabla \bar{v} - k^2(n_p^2 + q^*) w \bar{v} \, dx - \int_{\Gamma^R} T(w) \bar{v} \, dS \\ & = \int_{\Omega_0^R} k^2 h(u_q - u_{q^*}) \bar{v} \, dx \end{aligned}$$

für alle  $v \in \tilde{H}^1(\Omega^R)$ , sodass die Abschätzung

$$\|w\|_{H^1(\Omega_0^R)} \leq Ck^2 \|h\|_{L^2(\Omega_0^{R_0})} \|\Lambda_q f - \Lambda_{q^*} f\|_{L^4(\Omega_0^R)}$$

gilt. Wenn wir beide Störungen  $q$  und  $q^*$  mit kleinem Abstand zueinander, also  $\|h\|_{L^2(\Omega_0^{R_0})}$  klein genug, wählen und  $\omega := Ck^2 \|h\|_{L^2(\Omega_0^{R_0})} < 1$  setzen, dann folgt die Nichtlinearitätsbedingung nach Anwendung des Supremums auf beiden Seiten durch

$$\|\Lambda_q - \Lambda_{q^*} - W_h\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^4(\Omega_0^R))} \leq \omega \|\Lambda_q - \Lambda_{q^*}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^4(\Omega_0^R))}.$$

Demnach ist der Operator  $\Lambda: Q \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^4(\Omega_0^R))$  lokal schlecht-gestellt und infolgedessen ist auch  $\Lambda: Q \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^2(\Omega_0^R))$  schlecht-gestellt.  $\square$

Die Schlecht-Gestelltheit der Operatoren  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{T}$  kann analog gezeigt werden. Dies fassen wir in einer Folgerung zu zusammen.

**Folgerung 5.14.** *Die beiden Messoperatoren  $\mathcal{S}: Q \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^2(\Gamma_0^R))$  und  $\mathcal{T}: Q \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^2(B_k(0)))$  sind lokal schlecht-gestellt.*

*Beweis:* Wir skizzieren den Beweis für  $\mathcal{S}$ , denn für  $\mathcal{T}$  ist dieser nämlich analog zu führen. Für ein  $q \in Q$  und  $h \in L^2(\Omega_0^{R_0})$  ist  $L^2(\Omega_0^{R_0})$  der Definitionsbereich des Operators  $\Lambda_q$  und seiner Fréchet-Ableitung  $W_h$ , sodass beide Operatoren nach  $H^2(\Omega_0^R)$  abbilden, was aus Standard-Regularitätsresultaten wie [McL00, Theorem 4.18] folgt. Somit können wir analog zu dem Beweis von Lemma 5.12 zeigen, dass die Fréchet-Ableitung  $\Lambda'q$  ein kompakter Operator nach  $\mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), H^1(\Omega_0^R))$  ist und analog zu dem Beweis von Satz 5.13 können wir zeigen, dass die Nichtlinearitätsbedingung mit  $\mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), H^1(\Omega_0^R))$  als Bildraum erfüllt ist.

Zusammenfassend ist damit der Operator  $\tilde{\Lambda}: Q \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), H^1(\Omega_0^R))$  lokal schlecht-gestellt und deshalb auch  $\mathcal{S}$ , da  $\mathcal{S}q = \gamma_{\Gamma_0^R} \circ \tilde{\Lambda}q$  mit dem Spuoperator  $\gamma_{\Gamma_0^R}$  auf  $\Gamma_0^R$  gilt.  $\square$

### 5.1.3. Regularisierungsmethode

Für das Lösen des schlecht-gestellten Problems werden wir die Regularisierungsmethode CG-REGINN anwenden. Da dies ein Verfahren für Hilberträume ist und wir bisher nur einen Banachraum als Bildraum der Messoperatoren gegeben haben, passen wir zunächst die Messoperatoren etwas an.

Sei dafür der Raum  $L^2(\Omega_0^{R_0})$  durch  $2N_f$  lokal konstante Knotenfunktionen  $\{f_{R,m}, f_{I,m}\}_{m=1}^{N_f}$  diskretisiert, die entweder der Nullfunktion entsprechen oder der Einsfunktion im Fall von  $f_{R,m}$  bzw. der 1i-Funktion im Fall von  $f_{I,m}$ . Für alle Funktionen des Realteils  $\{f_{R,m}\}_{m=1}^{N_f}$  sowie des Imaginärteils  $\{f_{I,m}\}_{m=1}^{N_f}$  soll das Innere des Trägers paarweise disjunkt sein und es sollen die Gleichungen  $\sum_{m=1}^{N_f} f_{R,m} = 1$  sowie  $\sum_{m=1}^{N_f} f_{I,m} = 1i$  gelten.

Wir definieren den modifizierten Operator  $\tilde{\Lambda}: Q \rightarrow L^2(\Omega_0^R)^{2N_f}$  abgeleitet von  $\Lambda: Q \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0}), L^2(\Omega_0^R))$ , der eine Störung  $q \in Q$  auf die  $2N_f$  Lösungen des variationellen Problems 1 mit entsprechenden Knotenfunktionen als rechte Seite abbildet. Analog definieren wir  $\tilde{\mathcal{S}}: Q \rightarrow L^2(\Gamma_0^R)^{2N_f}$  und  $\tilde{\mathcal{T}}: Q \rightarrow L^2(B_k(0))^{2N_f}$  als modifizierte Operatoren zu  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{T}$ . Da nun alle Operatoren zwischen Hilberträumen abbilden, können wir die Regularisierungsmethode CG-REGINN anwenden. Wir beschränken uns damit auf eine endliche Anzahl der rechten Seiten, sodass sich die Schlecht-Gestelltheit auch auf diese Operatoren überträgt.

Nehmen wir nun an, dass für  $q^+ \in Q \subseteq L^2(\Omega_0^{R_0})$

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}q^+ &= \mathbf{u}^+ && \in \tilde{H}^1(\Omega_0^R)^{2N_f} \subseteq L^2(\Omega_0^R)^{2N_f}, \\ \tilde{\mathcal{S}}q^+ &= \mathbf{u}^+|_{\Gamma_0^R} && \in H^{1/2}(\Gamma_0^R)^{2N_f} \subseteq L^2(\Gamma_0^R)^{2N_f}, \\ \tilde{\mathcal{T}}q^+ &= \mathbf{w}^+ := i\sqrt{k^2 - |\cdot|^2} \mathcal{F}(\mathbf{u}^+|_{\Gamma^R})|_{\overline{B_k(0)}} && \in L^2(\overline{B_k(0)})^{2N_f}, \end{aligned}$$

gilt. Im Allgemeinen beinhalten die Daten jedoch Messfehler, die z. B. aus Messungenauigkeiten und Modellfehler entstehen. Wir haben also anstelle der exakten Messdaten  $\mathbf{u}^+$  eine verrauschte Version  $\mathbf{u}^\varepsilon$  bzw.  $\mathbf{w}^\varepsilon$  für den Operator  $\tilde{\mathcal{T}}$  aus dem entsprechenden  $L^2$ -Oberraum mit dem a priori bekannten relativen Rauschlevel  $\varepsilon \in (0, 1)$  gegeben. Mit anderen Worten nehmen wir die Abschätzung  $\|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^+\|_{L^2} \leq \varepsilon \|\mathbf{u}^+\|_{L^2} \approx \varepsilon \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2}$  an. Das Ziel ist mit den gegebenen verrauschten Daten  $\mathbf{u}^\varepsilon$  die Störung  $q^+$  möglichst gut zu approximieren. Problematisch dabei ist, dass aufgrund der Schlecht-Gestelltheit der Operatoren die Messfehler eine komplett unbrauchbare Rekonstruktion erzeugen können, wenn wir keine Regularisierung verwenden. Deshalb wenden wir die Regularisierungsmethode CG-REGINN (“REGularization based on INexact Newton iteration”), die in [Rie05] vorgeschlagen wurde, auf unsere Inversen Probleme

an. Wir fassen zunächst die Regularisierungsmethode zusammen.

Anstelle die Rekonstruktionsmethode für alle drei Messoperatoren herzuleiten, werden wir hier nur den Operator  $\tilde{\Lambda}$  betrachten. Das Verfahren erzeugt eine Folge  $\{q_m\}_{m \in \mathbb{N}_0} \subseteq Q$  von Approximationen von  $q^+$ , angefangen mit der Startschätzung  $q_0 \in Q$ , die z. B. als  $q_0 = 0$  gewählt werden kann. Wenn wir  $q^+ = q_m + s_m^+$  für ein  $m \in \mathbb{N}_0$  schreiben, dann ist die beste Aktualisierung  $s_m^+$  die Lösung des linearisierten Problems

$$\tilde{\Lambda}'(q_m)[s_m^+] = \mathbf{u}^+ - \tilde{\Lambda}(q_m) - E(q^+, q_m) =: b_m^+,$$

wobei  $E(q^+, q_m)$  der Linearisierungsfehler ist. Üblicherweise ist der Linearisierungsfehler nicht bekannt, sodass wir nur die verrauschte Version  $b_m^\varepsilon := \mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\Lambda}(q_m)$  von  $b_m^+$  kennen, für deren Rauschlevel die Fehlerabschätzung  $\|b_m^\varepsilon - b_m^+\| \leq \varepsilon \|\mathbf{u}^\varepsilon\| + \mathcal{O}(\|q^+ - q_m\|)$  gilt. Wie wir zuvor in Abschnitt 5.1.2 gezeigt haben, ist auch das linearisierte Problem schlecht-gestellt, sodass wir aus der Abschätzung insbesondere folgern, dass wir auch für das linearisierte Problem eine Regularisierungsmethode anwenden müssen.

Die Methode CG-REGINN nutzt die iterative Methode *conjugate gradients* (CG) als Regularisierungsmethode für das Lösen des linearisierten Problems. Die innere Schleife mit CG wird hierbei vorzeitig gestoppt, wenn das Residuum kleiner wird als das Residuum der äußeren Schleife gewichtet mit einer Toleranz, die in jeden äußeren Schritt angepasst wird. CG erzeugt in seiner inneren Schleife eine weitere Folge  $\{s_{m,i}\}_{i \in \mathbb{N}_0}$  von Approximationen von  $s_m^+$  und wird beendet, wenn die Bedingung  $\|\tilde{\Lambda}'(q_m)[s_{m,i}] - b_m^\varepsilon\| < \mu_m \|b_m^\varepsilon\|$  für eine Toleranz  $\mu_m \in (0, 1)$  das erste Mal erfüllt ist. Den entsprechenden Stoppindex nennen wir im Folgenden  $i_m$ . Dann wenden wir das sogenannte *backtracking* an, um  $\tilde{s}_{m,i_m} := \beta \tilde{s}_{m,i_m} + (1 - \beta) \tilde{s}_{m,i_m - 1}$  zu erhalten, wobei  $\beta \in [0, 1]$  so gewählt ist, dass  $\|\tilde{\Lambda}'(q_m)[\tilde{s}_{m,i}] - b_m^\varepsilon\| = \mu_m \|b_m^\varepsilon\|$  erfüllt ist. Die Aktualisierung definieren wir dann als  $s_m := \tilde{s}_{m,i_m}$  und setzen  $q_{m+1} = q_m + s_m$ . Diese Schritte werden solange wiederholt, bis in der äußeren Schleife das Diskrepanzprinzip für ein  $\tau > 1$  erfüllt ist, also bis zum ersten Index  $m \in \mathbb{N}$  für den die Abschätzung  $\|\tilde{\Lambda}(q_{m+1}) - \mathbf{u}^\varepsilon\| \leq \tau \varepsilon$  gilt.

Für das iterative Verfahren wird der adjungierte Operator der Linearisierung genutzt, den wir im folgenden Satz explizit angeben.

**Satz 5.15**

Der adjungierte Operator  $(\tilde{\Lambda}'(q))^* : L^2(\Omega_0^R)^{2N_f} \rightarrow L^2(\Omega_0^{R_0})$  der Fréchet-Ableitung  $\tilde{\Lambda}'$  von  $\tilde{\Lambda}$  in  $q \in Q$  lässt sich dadurch charakterisieren, dass dieser eine Funktion  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega_0^R)^{2N_f}$  auf  $k^2 \overline{\mathbf{u}_q} \cdot \mathbf{z}|_{\Omega_0^{R_0}} \in L^2(\Omega_0^{R_0})$  abbildet, wobei  $\mathbf{u}_q \in \tilde{H}^1(\Omega^R)^{2N_f}$  der Vektor der  $2N_f$  Lösungen des Problems 1 für die  $2N_f$  rechten Seiten ist und  $\mathbf{z} \in \tilde{H}^1(\Omega^R)^{2N_f}$  für alle  $i = 1, \dots, 2N_f$  und für alle  $w \in \tilde{H}^1(\Omega^R)$  das variationelle Problem

$$a_q(w, \mathbf{z}_i) = (w, \mathbf{v}_i)_{L^2(\Omega_0^R)}$$

löst.

*Beweis:* Es sei  $q \in Q$  fest und  $\mathbf{w}_h := \tilde{\Lambda}'(q)h$  für ein  $h \in L^2(\Omega_0^{R_0})$ , dann löst  $\mathbf{w}_h$  für alle  $i = 1, \dots, 2N_f$  die Gleichung  $a_q((\mathbf{w}_h)_i, v) = \int_{\Omega^R} k^2 h(\mathbf{u}_q)_i \bar{v} \, dx$  für alle  $v \in \tilde{H}^1(\Omega^R)$ . Damit können wir die Behauptung direkt nachrechnen durch

$$\begin{aligned} (\tilde{\Lambda}'(q)h, \mathbf{v})_{L^2(\Omega_0^R)^{2N_f}} &= (\mathbf{w}_h, \mathbf{v})_{L^2(\Omega_0^R)^{2N_f}} = \sum_{i=1}^{2N_f} a_q((\mathbf{w}_h)_i, \mathbf{z}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{2N_f} (k^2 h(\mathbf{u}_q)_i, \mathbf{z}_i)_{L^2(\Omega_0^{R_0})} = (h, k^2 \overline{\mathbf{u}_q} \cdot \mathbf{z})_{L^2(\Omega_0^{R_0})} \\ &= (h, (\tilde{\Lambda}'(q))^* \mathbf{v})_{L^2(\Omega_0^{R_0})}. \end{aligned}$$

□

Die Toleranzen wählen wir nach der Empfehlung aus [Rie05] als  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_{\text{start}} = 0.55$ ,  $\gamma = 0.9$ ,  $\mu_{\text{max}} = 0.99$  und

$$\mu_m = \mu_{\text{max}} \max \left\{ \tau \varepsilon \|\mathbf{u}^\varepsilon\| / \|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\Lambda}(q_m)\|, \tilde{\mu}_m \right\},$$

wobei

$$\tilde{\mu}_m := \begin{cases} 1 - \frac{i_{m-2}}{i_{m-1}}(1 - \mu_{m-1}), & i_{m-1} > i_{m-2}, \\ \gamma \mu_{m-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

In den ersten Iterationen ist das Residuum noch relativ groß, sodass es sich einerseits nicht lohnt das linearisierte Gleichungssystem zu genau zu lösen, und andererseits die Lösung der gestörten linearisierte Gleichung in den ersten REGINN-Iterationen zu weit in die falsche Richtung laufen könnte. Es kann also sinnvoll sein zusätzlich die Iterationen-Anzahl der inneren Schleife zu begrenzen. Wir geben ein Beispiel für eine solche Begrenzung. Bezeichne hierzu mit  $i_m$  die Anzahl der CG Iterationen, die die innere Schleife durchlaufen

hat. Definiere  $i_2^{\max} := i_1^{\max} := 1$ , und  $i_m^{\max} := i_{m-1} + i_{m-2}$ . Für die Anzahl der Iterationen soll also für alle  $m \in \mathbb{N}$  die Schranke  $i_m \leq i_m^{\max}$  gelten und im schlimmsten Fall entspricht diese der Fibonacci-Folge. In unserem Fall hat die Begrenzung der CG Iterationen zu mehr Auswertungen des Vorwärtsoperators über die gesamte Rekonstruktion geführt, weshalb wir keine Begrenzung für die numerischen Beispiele genutzt haben.

#### 5.1.4. Diskretisierung des Inversen Problems

Wir wollen nun darauf eingehen, wie wir die Fréchet-Ableitung und ihre Adjungierte diskretisieren. Der Algorithmus zur Approximation der Lösung des Streuproblems aus Kapitel 3 liefert eine diskrete Approximation  $\mathbf{u}_{\text{approx}}$  der gestreuten Welle  $\mathbf{u}^+$ , aus der wir die verrauschten Messdaten generieren. Die Abbildungen, die  $\mathbf{u}^+$  auf  $\tilde{\Lambda}q^+$ ,  $\tilde{\mathcal{S}}q^+$  und  $\tilde{\mathcal{T}}q^+$  abbilden, sind lineare und beschränkte Operatoren, sodass es zum Verständnis ausreicht, nur die Fréchet-Ableitung von  $\mathbf{u}^+$  bzgl.  $q^+$  zu betrachten. Wir knüpfen an die Notation aus Abschnitt 3.5 an und spannen den diskreten Raum

$$\mathcal{P}_{\tilde{M}} := \left\{ \tilde{v}(x) = \sum_{m=1}^{\tilde{M}} v^m \phi_{\tilde{M}}^m(x), v^m \in \mathbb{C} \right\} \quad (5.3)$$

mit den Lagrange-Elementen  $\{\phi_{\tilde{M}}^m\}_{m=1}^{\tilde{M}}$  auf und approximieren die Störung als ein Element  $q_{\text{approx}}$  aus diesem Raum. Damit sind sowohl  $\mathbf{u}_{\text{approx}}|_{\Omega_0^R}$  als auch  $q_{\text{approx}}$  aus  $\mathcal{P}_{\tilde{M}}$ . Wenn wir zusätzlich die Funktion  $x \mapsto e^{i\alpha_j \cdot x}$  in den Raum  $\mathcal{P}_{\tilde{M}}$  interpolieren, erhalten wir für  $h = \sum_{m=1}^{\tilde{M}} h^m \phi_{\tilde{M}}^m(x) \in \mathcal{P}_{\tilde{M}}$ ,  $\mathbf{u}_{q,l} = \sum_{m=1}^{\tilde{M}} \mathbf{u}_{q,l}^m \phi_{\tilde{M}}^m(x) \in \mathcal{P}_{\tilde{M}}$ ,  $q \in \mathcal{P}_{\tilde{M}}$  und für  $l = 1, \dots, 2N_f$  die approximierte rechte Seite der Form

$$\sum_{j=1}^{N^{d-1}} \sum_{m=1}^{\tilde{M}} k^2 h^m e^{i\alpha_j \cdot x^m} \mathbf{u}_{q,l}^m \phi_{\tilde{M}}^m(x) \psi_N^j(\alpha).$$

Mit den Lösungen zu diesen rechten Seiten erhalten wir bereits die Approximation der Fréchet-Ableitung an der Stelle  $q \in \mathcal{P}_{\tilde{M}}$  und Richtung  $h \in \mathcal{P}_{\tilde{M}}$ .

Um die Adjungierte der Fréchet-Ableitung zu berechnen, muss das adjungierte variationelle Problem gelöst werden. Das diskretisierte adjungierte Problem ist, wenn man analog zu der Diskretisierung von  $D := (A + BC)$  vorgeht, durch den Differentialoperator  $D^* := (A^* + \tilde{B}C)$  beschrieben, wobei für alle  $l \in \{1, \dots, N^{d-1}\}$ ,  $j \in \{1, \dots, \tilde{M}\}$  und den Einheitsvektor  $e_{l,j} := e_{(l-1)N^{d-1}+j+1}$  die Matrix  $\tilde{B}C$  gegeben ist durch

$$\tilde{B}C e_{l,j} = \left( e^{-i\alpha_N^l \cdot x^j} \frac{-k^2}{N^{d-1}} \int_{\Omega_0^R} e^{i\alpha_N^l \cdot x} \bar{q}(x) \phi_{\tilde{M}}^j(x) \phi_{\tilde{M}}^m(x) dx \right)_{n,m}.$$

Die Adjungierte des diskreten Differentialoperators ist andererseits durch  $D^\top := (A^* + C^*B^*)$  beschrieben, wobei

$$C^*B^*e_{l,j} = \left( e^{i\alpha_N^n \cdot \mathbf{x}^m} \frac{-k^2}{N^{d-1}} \int_{\Omega_0^R} e^{-i\alpha_N^l \cdot \mathbf{x}} \bar{q}(x) \phi_{\tilde{M}}^j(x) \phi_{\tilde{M}}^m(x) dx \right)_{n,m}$$

gilt. Wie wir schnell erkennen können, wird der Abstand zwischen  $D^*$  und  $D^\top$  mit einem feineren Gitter in  $x$  geringer. Dies wird auch in den numerischen Experimenten für das zweidimensionale Problem bestätigt, die in der Tabelle 5.1 aufgeführt sind. Auch der Fehler von  $((D^*)^{-1}\phi, \psi)_{L^2(\Omega^R)}$  zu  $(\phi, D^{-1}\psi)_{L^2(\Omega^R)}$  nimmt für feinere Gitter relativ schnell ab, ganz im Gegensatz zu den Lösungen der beiden adjungierten Probleme, die sich nur langsam nähern.

| Anzahl der Zellen      | 256                  | 1 024                | 4 096                | 16 384               |
|------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Differentialoperator   | $3.06 \cdot 10^{-3}$ | $7.16 \cdot 10^{-4}$ | $1.77 \cdot 10^{-4}$ | $4.38 \cdot 10^{-5}$ |
| Lösungsoperator        | $1.64 \cdot 10^{-1}$ | $2.08 \cdot 10^{-1}$ | $1.80 \cdot 10^{-1}$ | $1.24 \cdot 10^{-1}$ |
| SP für $(D^*)^{-1}$    | $9.89 \cdot 10^{-2}$ | $2.85 \cdot 10^{-2}$ | $4.24 \cdot 10^{-3}$ | $1.50 \cdot 10^{-3}$ |
| SP für $(D^\top)^{-1}$ | $1.49 \cdot 10^{-8}$ | $6.53 \cdot 10^{-9}$ | $1.66 \cdot 10^{-8}$ | $3.00 \cdot 10^{-8}$ |

Tabelle 5.1.: Von oben nach unten: Durchschnittlicher relativer Fehler zwischen  $D^\top$  und  $D^*$  für 100 zufällige Vektoren mit  $N = 64$ . Durchschnittlicher relativer Fehler zwischen  $D^{-\top}$  und  $(D^*)^{-1}$  für 5 zufällige Vektoren und der relative Fehler der Skalarprodukte  $((D^*)^{-1}\phi, \psi)_{L^2(\Omega^R)}$  sowie  $((D^\top)^{-1}\phi, \psi)_{L^2(\Omega^R)}$  zu  $(\phi, D^{-1}\psi)_{L^2(\Omega^R)}$ .

In dem Artikel [EH18] wurde der Einfluss einer Abweichung zur transponierten Matrix auf die Ergebnisse bei der Least Squares Methode untersucht. Die Schlussfolgerung ist, dass bei einem Fehler in der adjungierten Matrix die Konvergenz langsamer ausfallen kann und der Fehler der Approximierten des Parameters größer ist. Wir nehmen dieses Ergebnis zum Anlass, die Matrix  $D^\top = A^* + C^*B^*$  für die Approximation des adjungierten Problems zu verwenden, um ein stabiles Lösen des linearisierten Problems zu sichern.

Es sei  $\mathbf{M}_0 \in \mathbb{C}^{\tilde{M} \times \tilde{M}}$  die Massematrix aus den  $L^2(\Omega_0^R)$ -Skalarprodukten der Elemente des Parameterraumes  $\mathcal{P}_{\tilde{M}}$  aus (5.3),  $\mathbf{M}_1 \in \mathbb{C}^{(N^{d-1}\tilde{M}) \times (N^{d-1}\tilde{M})}$  die Massematrix aus den  $L^2(I \times \Omega_0^R)$ -Skalarprodukten des Finite-Elemente-Raumes  $V_{N,\tilde{M}}$  und  $\mathbf{N}$  in diesem Fall ebenfalls die Massematrix  $\mathbf{M}_1$ . Wir bezeichnen die diskrete Inverse der Differentialoperator-Matrix mit  $\mathbf{L} \in \mathbb{C}^{(N^{d-1}\tilde{M}) \times (N^{d-1}\tilde{M})}$ , das Multiplizieren mit  $(\exp(i\alpha_N^n \cdot \mathbf{x}^m))_{n,m}$  als die Matrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{(N^{d-1}\tilde{M}) \times \tilde{M}}$  und das Multiplizieren mit  $(\mathbf{u}_{q,l}^m)_m$  als  $\mathbf{U}_l \in \mathbb{C}^{\tilde{M} \times \tilde{M}}$  für  $l = 1, \dots, 2N_f$ . Es sei  $h = \sum_{m=1}^{\tilde{M}} h^m \phi_{\tilde{M}}^m(x) \in \mathcal{P}_{\tilde{M}}$  und  $\mathbf{h} = (h^1, \dots, h^{\tilde{M}})^\top$ . Dann kann die Fréchet-

Ableitung  $\mathbf{w}_{q,h,l}$ ,  $l = 1, \dots, 2N_f$ , dargestellt werden durch  $\mathbf{w}_{q,h,l} = \mathbf{K}_l \mathbf{h} := \mathbf{L} \circ \mathbf{N} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{U}_l \mathbf{h}$ . Für die Matrix der Adjungierten der diskreten Fréchet-Ableitung erhalten wir demnach die Darstellung

$$\mathbf{K}^* = \sum_{l=1}^{2N_f} \mathbf{M}_0^{-1} \circ \mathbf{U}_l^* \circ \mathbf{B}^* \circ \mathbf{N}^* \circ \mathbf{L}^* \circ \mathbf{M}_1. \quad (5.4)$$

### 5.1.5. Numerische Beispiele

Nach der theoretischen Betrachtung des Inversen Problems wollen wir nun ein paar numerische Beispiele für die Rekonstruktion geben. Für die zweidimensionalen Beispiele wählen wir die obere Schranke als  $R_0 = 4.5$  und zerlegen das Gebiet  $\Omega_0^{R_0}$  in  $N_f = 16$  gleichgroße Rechtecke. Den Raum  $L^2(\Omega_0^{R_0})$  nähern wir damit durch 32 lokal konstante Funktionen  $\{f_{R,m}, f_{I,m}\}_{m=1}^{16}$  an, die auf jedem Rechteck entweder den Werten 0 oder den Wert 1 im Fall von  $f_{R,m}$ , oder den Wert 1i im anderen Fall, annehmen, sodass  $\sum_{m=1}^{16} f_{R,m} = 1$  und  $\sum_{m=1}^{16} f_{I,m} = 1i$  gilt. Die ersten vier rechten Seiten sind in der Abbildung 5.1 dargestellt. Zuerst rekonstruieren wir die Störung des Brechungsindex aus

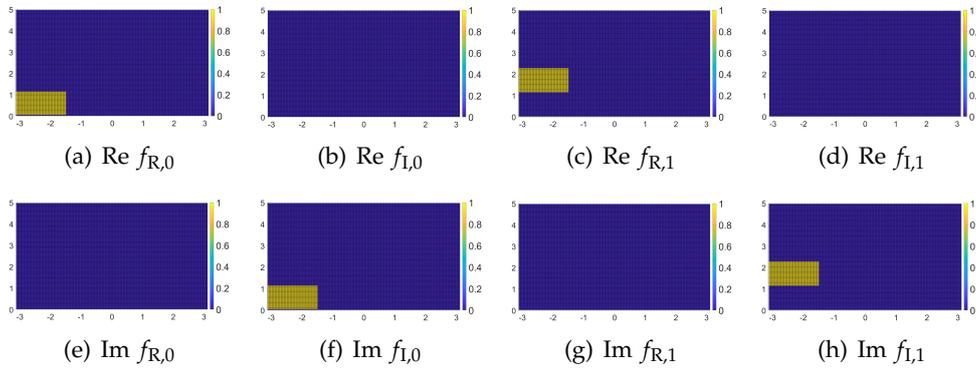


Abbildung 5.1.: Die ersten vier rechten Seiten für das Newton-Verfahren.

der Abbildung 3.6 mit  $k^2 = 0.4$ . Um die Messdaten zu generieren, verwenden wir den Algorithmus aus Unterkapitel 3.5 und verfeinern das Gebiet so, dass wir  $2^{2M} = 16\,384$  Zellen für  $\Omega_0^R$  und  $N = 2^7$  Teilintervalle von  $\bar{I}$  erhalten. Die Summanden der Fourier-Reihe der Randbedingung setzen wir für alle  $j \in \mathbb{Z}$  mit  $|j| > 600$  auf Null. Nach der Berechnung der diskreten Lösungen  $\mathbf{u}_l = \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}^{-1} w_l$ ,  $w_l \in V_{128,16641}$ ,  $l = 1, \dots, 2N_f$ , interpolieren wir diese auf ein größeres Gitter mit 4096 Zellen für  $\Omega_0^R$  und benennen diese Funktionen als  $\tilde{\mathbf{u}}_l = \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{d-1}}^{-1} \tilde{w}_l$ ,  $\tilde{w}_l \in V_{64,4225}$ . Dadurch erzeugen wir ein erstes unbekannt hohes Rauschen in den Messdaten, um die Stabilität zu testen. Für die Inversion des Operators  $\tilde{\Lambda}$  betrachten wir  $\mathbf{u} = (\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_{2N_f}) \in \mathcal{P}_{4225}^{2N_f}$  mit einem additiven

Rauschen von 5%, das gleichverteilt um Null ist, sodass unsere Messdaten  $\mathbf{u}^\varepsilon$  gegeben sind durch  $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u} + \mathbf{c} \in L^2(\Omega_0^R)^{2N_f}$ , wobei  $\mathbf{c} \in \mathcal{P}_{4225}^{2N_f}$  auf die Norm  $\|\mathbf{c}\|_{L^2(\Omega_0^R)^{2N_f}} = 0.05 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_0^R)^{2N_f}}$  skaliert wurde. Für den Operator  $\tilde{\mathcal{S}}$  nehmen nur die Werte  $\mathbf{u}|_{\Gamma_0^R}$  mit  $R = 5$ , welche wir mit der roten Linie in der Abbildung 3.6 markiert haben, und fügen auch diesmal ein Rauschen von 5% hinzu, sodass die Messdaten gegeben sind durch  $\mathbf{v}^\varepsilon = (\mathbf{u} + \mathbf{c})|_{\Gamma_0^R}$ , wobei  $\mathbf{c} \in \mathcal{P}_{4225}^{2N_f}$  auf  $\|\mathbf{c}|_{\Gamma_0^R}\|_{L^2(\Gamma_0^R)^{2N_f}} = 0.05 \|\mathbf{u}|_{\Gamma_0^R}\|_{L^2(\Gamma_0^R)^{2N_f}}$  skaliert ist. Der Vorwärtsoperator ist mit  $2^{2M} = 4096$  Zellen für  $\Omega_0^R$ ,  $N = 2^6$  und einer Schranke von 300 für die Randbedingung diskretisiert. Die Störung  $q^+$  nähern wir durch eine Funktion  $q_{\text{approx}}$  aus dem Finite-Elemente-Raum  $\mathcal{P}_{4225}$  an, der durch die Lagrange-Elemente  $\{\phi_{4225}^m\}_{m=1}^{4225}$  aufgespannt ist, und stoppen die äußere Iteration von REGINN nach dem Diskrepanzprinzip, wenn die relative Diskrepanz kleiner als  $1.2 \cdot 0.05$  beträgt.

In der Abbildung 5.2 sind die Ergebnisse der Rekonstruktion zu sehen, die einen relativen Rekonstruktionsfehler von 38.01% in der  $L^2(\Omega_0^R)$ -Norm im Fall von  $\tilde{\Lambda}$  und einen relativen Fehler von 57.14% im Fall von  $\tilde{\mathcal{S}}$  haben. Die Ergebnisse für  $\tilde{\Lambda}$  sind natürlich deutlich besser, da mehr Messdaten zur Rekonstruktion genutzt werden können. Wir konnten auch feststellen, dass die Größe und der Wert des Bereichs  $\{\text{Im } n_p^2 > 0\}$ , in dem das Material absorbierend wirkt, Einfluss auf die Qualität und Geschwindigkeit der Rekonstruktion hat. So ist das Ergebnis bei einem größeren Bereich mit einem eher großen Wert deutlich besser und in weniger Schritten erreicht.

Im Folgenden betrachten wir noch ein weiteres Beispiel im zweidimensionalen Raum, mit welchem wir ein vereinfachtes Modell einer Nano-Gras-Struktur simulieren. Das Objekt wird durch den Brechungsindex  $n^2$  beschrieben, der den Wert 2 innerhalb des Objektes und den Wert 1 im umgebenden Medium annimmt. In dem Bereich, wo das Material absorbierend wirkt, nimmt der Brechungsindex den Wert  $2 + 1i$  an. In den Abbildungen 5.3 und 5.4 ist die Problemstellung visualisiert.

Diesmal nehmen wir ein etwas gröberes Netz für die Diskretisierung des Gebietes mit  $2^{2M} = 1024$  Zellen für  $\Omega_0^R$ ,  $N = 2^6$  Teilintervalle von  $\bar{\Gamma}$  und eine Schranke von 300 für die Fourier-Reihe der Randbedingung. Die 32 rechten Seiten haben wir genauso wie im vorherigen Beispiel mit  $R_0 = 4.5$  gewählt und durch  $k^2 = 3$  soll die Wellenzahl beschrieben sein. Für dieses Beispiel untersuchen wir zusätzlich, ob der  $L^2(\Omega_0^R)$ -Fehler der Rekonstruktion gegen Null konvergiert, wenn man das Rauschen beliebig klein werden lässt, also für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Wir berechnen fünf Rekonstruktionen, eine für  $\tilde{\Lambda}$ , zwei für  $\tilde{\mathcal{S}}$  mit den Messbereichen bei  $R = 5$  und bei  $R = 10$  sowie für den Messoperator  $\tilde{\mathcal{T}}$ . Zusätzlich wählen wir den Operator  $\tilde{\Lambda}^1: Q \rightarrow L^2(\Omega_0^R)$ ,  $q \mapsto \tilde{w}_1$ , der nur  $f_{R,0}$  als

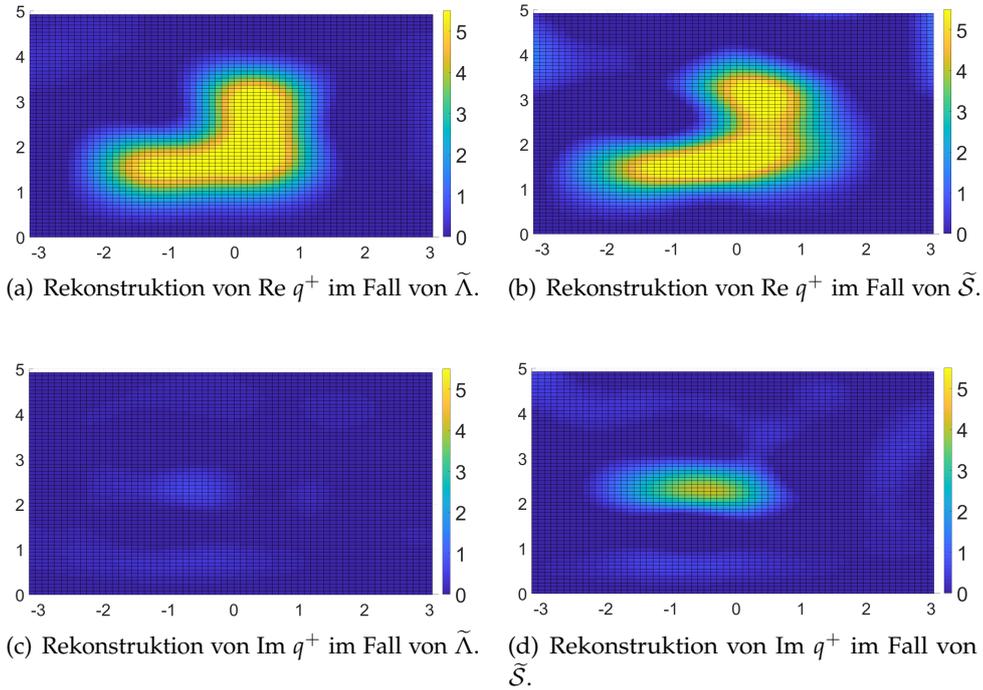
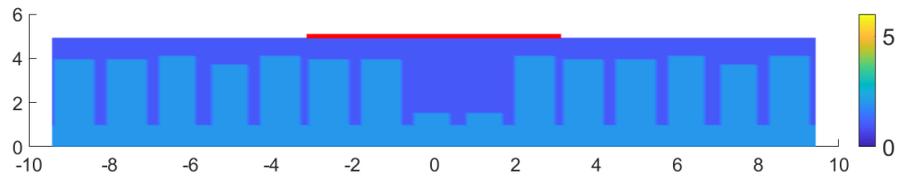


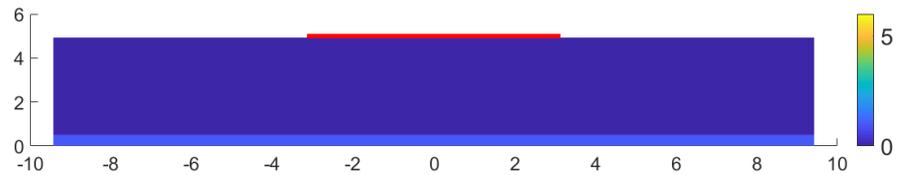
Abbildung 5.2.: Rekonstruktion mit den Messoperatoren  $\tilde{\Lambda}$  und  $\tilde{S}$  ( $d = 2$ ).

einzig rechte Seite verwendet. Um den Messabstand für  $\tilde{S}$  zu unterscheiden, bezeichnen wir mit  $\tilde{S}_5$  den Fall mit  $R = 5$  und mit  $\tilde{S}_{10}$  den anderen Fall. In der Abbildung 5.5 haben wir die Abhängigkeit des Rekonstruktionsfehlers gegenüber dem Rauschen in einer logarithmischen Skala in beide Richtungen visualisiert. Weiterhin sind in der Abbildung 5.5 die Ergebnisse für einen Rauschlevel von 1.1% für die Messoperatoren  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{S}_5$  und  $\tilde{S}_{10}$  dargestellt. Zum Stoppen der äußeren REGINN-Schleife wählen wir weiterhin  $\tau = 1.2$  (siehe Abschnitt 5.1.3 zur Erklärung des Parameters  $\tau$ ). Der Rekonstruktionsfehler schrumpft in diesem Beispiel mit einer Rate von  $\mathcal{O}(\varepsilon^{0.3})$  für Rauschlevel  $\varepsilon \in [5 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-2}]$  im Fall von  $\tilde{\Lambda}$  und  $\tilde{\Lambda}_1$ , und mit einer Rate von  $\mathcal{O}(\varepsilon^{0.1})$  für  $\varepsilon \in [1.1 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-2}]$  im Fall von  $\tilde{S}_5$ ,  $\tilde{S}_{10}$  und  $\tilde{T}$ .

Um auch ein Beispiel für eine Rekonstruktion im dreidimensionalen Raum zu geben, diskretisieren wir  $\Omega_0^R$  in  $2^{3M} = 4096$  Zellen und  $\bar{I}$  in  $N = 2^{2 \cdot 4}$  Quadrate. Die Abschneidebedingung für die Fourier-Reihe der Randbedingung wählen wir als  $|j|_\infty > 30$ ,  $j \in \mathbb{Z}^2$ , und betrachten das Inverse Problem für  $\tilde{\Lambda}$ . Für die rechten Seiten teilen wir das Gebiet  $\Omega_0^R$  in  $N_f = 8$  Quader. Auf die Messdaten addieren wir 5% um Null gleichverteiltes additives Rauschen auf die gleiche Weise, wie zuvor beschrieben, hinzu. Die Wellenzahl soll für dieses Beispiel  $k^2 = 0.4$  erfüllen und  $\tau$  ist als  $\tau = 1.2$  gewählt. Die Ergebnisse mit einem relativen Rekonstruktionsfehler von 51.38% sind in der Abbildung 5.6 zu sehen.

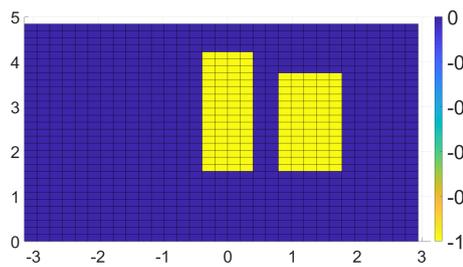


(a) Realteil des gestörten Brechungsindex  $\text{Re } n_p^2 + q^+$ . Die rote Linie markiert den Messbereich im Fall von  $\tilde{S}_5$ .

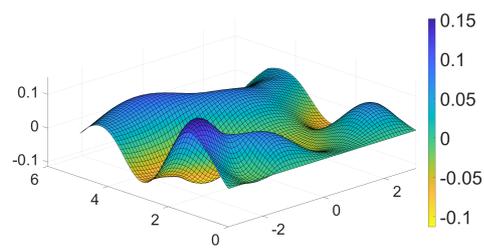


(b) Imaginärteil des Brechungsindex  $\text{Im } n_p^2 + q^+$ . Die rote Linie markiert den Messbereich im Fall von  $\tilde{S}_5$ .

Abbildung 5.3.: Drei Perioden der Nano-Gras-Struktur für die Rekonstruktion.



(a) Realteil der exakten Störung  $\text{Re } q^+$ .



(b) Die erzeugte gestreute Welle von  $f_{R,0}$ .

Abbildung 5.4.: Die Störung und die gestreute Welle des Nano-Gras-Beispiels.

## 5.2. Inexaktes Newton-Verfahren für das vektorwertige Streuproblem

Wir haben in Abschnitt 5.1 das Inverse Problem für die skalare Problemstellung analysiert und ein Newton-Verfahren für die Rekonstruktion der Störung genutzt. Dies wollen wir nun auf das vektorwertige Problem übertragen. Wegen des hohen Rechenaufwands für die Approximation der Lösung der Maxwell-Gleichungen beschränken wir uns auf den Messoperator, der die ganze Welle auf einer Periode misst. Wir zeigen auch in diesem Fall die Eindeutigkeit der Rekonstruktion und die Schlecht-Gestelltheit des Inversen Problems sowie ein Beispiel für die Qualität der Rekonstruktion.

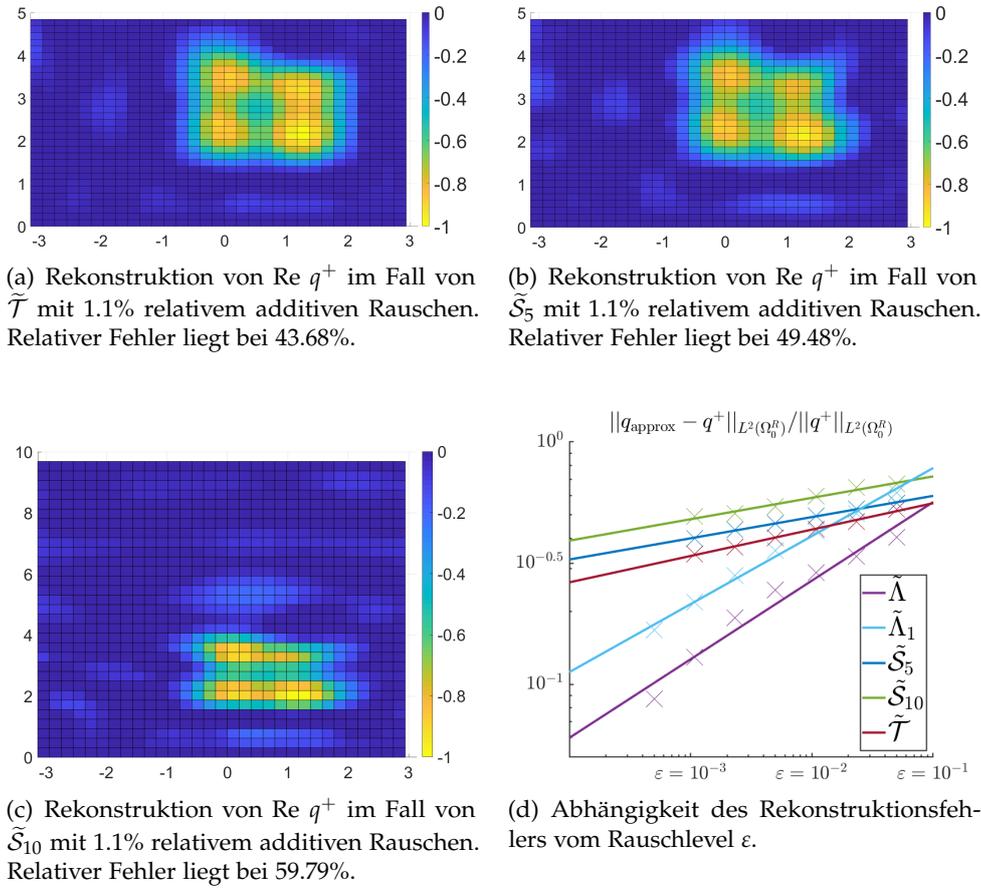


Abbildung 5.5.: Ergebnisse für das Nano-Gras-Beispiel.

### 5.2.1. Definition und Eigenschaften des Messoperators

Für feste, gegebene  $\mu_r, \varepsilon_r \in W^{1,\infty}(\Omega_0^R)$  suchen wir also den Kontrast  $q^+ := \varepsilon_r^s - \varepsilon_r \in W^{1,\infty}(\Omega^{R_0})$  zwischen der bekannten periodischen Permittivität  $\varepsilon_r$  und einer lokal gestörten Permittivität  $\varepsilon_r^s$  bei Kenntnis der Messdaten  $\Lambda_{q^+}: f \mapsto E|_{\Omega_0^R}$ . Der Operator  $\Lambda_q$  für eine Störung  $q \in \mathcal{D}(\Lambda)$  soll rechte Seiten aus  $L^2(\Omega_0^R)^3$  auf Lösungen des variationellen Problems 2 aus  $X$  abbilden, die auf die Periode  $\Omega_0^R$  eingeschränkt werden. Den Raum der auf  $\Omega_0^R$  eingeschränkten Funktionen aus  $X$  bezeichnen wir im Folgenden als  $X(\Omega_0^R)$ . Somit suchen wir ein  $q^+$ , sodass der Vorwärtoperator  $\Lambda$ , der Störungen  $q$  auf den Lösungsoperator  $\Lambda_q$  abbildet, die Gleichung

$$\Lambda q = \Lambda_{q^+} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0})^3, X(\Omega_0^R))$$

erfüllt. Die Bedingungen an die Koeffizienten  $\varepsilon_r^s$  und  $\varepsilon_r$  vom Anfang des Abschnitts 4.4 sollen weiterhin erfüllt sein, damit wir einen wohldefinierten

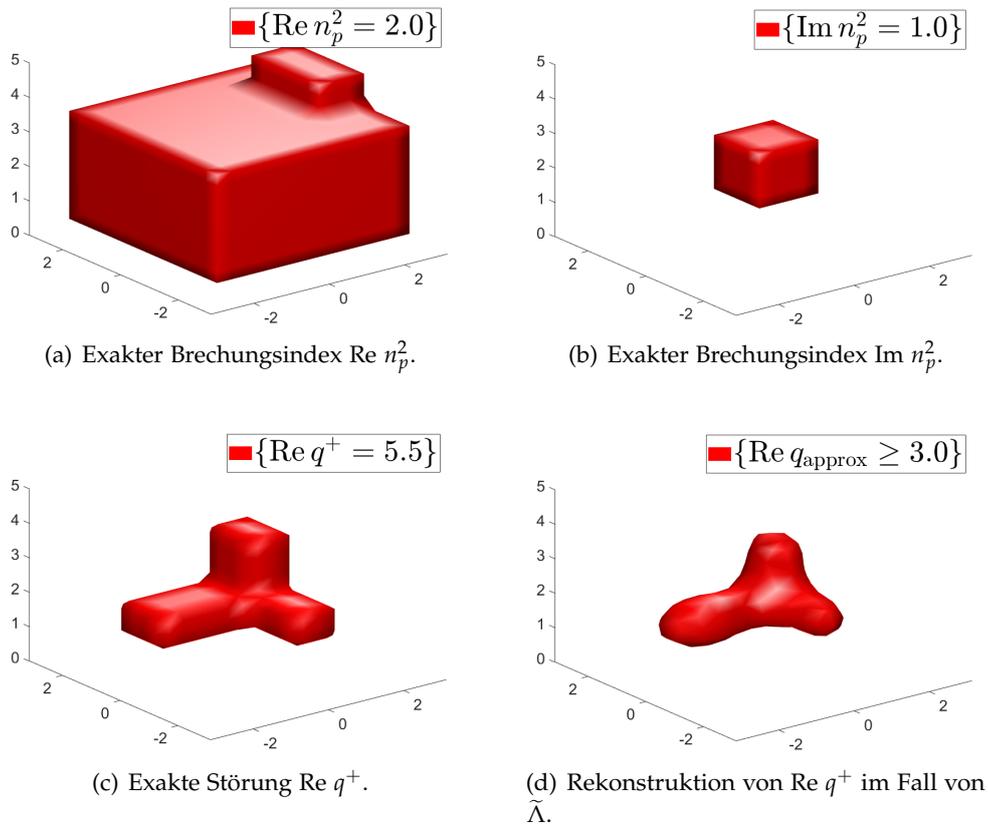


Abbildung 5.6.: Beispiel für die Rekonstruktion im dreidimensionalen Raum.

Vorwärtsoperator erhalten. Wir betrachten die Menge

$$Q' := \left\{ q \in W^{1,\infty}(\Omega^{R_0}) : \text{Im}(q) \geq 0 \right\}.$$

Für alle Störungen  $q \in Q'$  besitzt das direkte Problem 2 eine eindeutige Lösung. Es sei mit  $A_q \in \mathcal{L}(X)$  der nach dem Satz von Riesz existierende Operator bezeichnet, der für alle  $u, v \in X$  und für alle  $q \in W^{1,\infty}(\Omega^{R_0})$  die Gleichung  $(A_q u, v)_X = a_q(u, v)$  erfüllt. Die Menge  $Q'$  wird nun zu einer Menge  $Q \supseteq Q'$  erweitert, die eine offene Teilmenge in  $L^\infty(\Omega^{R_0})$  sein wird. Dazu wird die Stetigkeit des Operators  $q \mapsto A_q$  benötigt, welche direkt nachgerechnet werden kann.

**Lemma 5.16.** *Der Operator  $q \mapsto A_q$  ist Lipschitz-stetig von  $L^\infty(\Omega_0^{R_0})$  nach  $\mathcal{L}(X)$ .*

Die Anwendung der Neumannschen Reihe A.1 ergibt dann die Wohldefiniertheit von  $\Lambda$  auf einer offenen Obermenge von  $Q'$ .

**Folgerung 5.17.** *Für ein  $q' \in Q'$  gibt es ein  $\delta = \delta(q') > 0$  und eine offene Umgebung  $B(q', \delta(q'))$  in  $L^\infty(\Omega_0^{R_0})$ , sodass für alle  $q \in B(q', \delta(q'))$  das variationelle*

Problem 2 eindeutig lösbar ist.

Mit anderen Worten können wir die offene Menge  $Q \subseteq L^\infty(\Omega_0^{R_0})$ ,

$$Q := \bigcup_{q' \in Q'} B(q', \delta(q')) \subseteq L^\infty(\Omega_0^{R_0})$$

mit  $\delta(q')$ -Kugeln  $B(q', \delta(q'))$  bzgl. der  $L^\infty(\Omega_0^R)$ -Norm, definieren, für deren Elemente  $q \in Q$  das Problem  $a_q(E, v) = F(v)$  eindeutig lösbar ist. Anschließend können wir den Operator  $\Lambda$  auf  $Q$  als Definitionsbereich erweitern.

**Definition 5.18.** Der Operator  $\Lambda_{q_0}: L^2(\Omega_0^{R_0})^3 \rightarrow L^2(\Omega_0^R)^3$  bildet eine rechte Seite  $f \in L^2(\Omega_0^{R_0})^3$  auf die auf  $\Omega_0^R$  eingeschränkte Lösung  $E_{q_0} \in X$  des vektorwertigen Problems 2 für  $a_{q_0}$  ab. Wir definieren den Messoperator

$$\Lambda: Q \subseteq L^\infty(\Omega_0^R) \rightarrow \mathcal{L}\left(L^2(\Omega_0^{R_0})^3, L^2(\Omega_0^R)^3\right), \quad q \mapsto \Lambda_q,$$

der eine Störung  $q \in Q$  auf den Operator  $\Lambda_q$  abbildet.

Analog zu Lemma 5.4 können wir auch in diesem Fall die Eindeutigkeit zeigen.

**Lemma 5.19.** Es seien  $q_1$  und  $q_2 \in Q$  zwei Störungen mit dem Träger in  $\Omega_0^{R_0}$ . Wenn  $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$  erfüllt ist, dann gilt  $q_1 = q_2$ .

Auch die Fréchet-Differenzierbarkeit kann analog zu Lemma 5.8 für das vektorwertige Problem gezeigt werden.

**Lemma 5.20.** Es sei  $q \in Q$  fest und  $E_f$  die Lösung des variationellen Problems 2 für eine rechte Seite  $f \in L^2(\Omega_0^{R_0})^3$ . Definiere für  $h \in L^\infty(\Omega_0^{R_0})$  den Operator  $W_h: L^2(\Omega_0^{R_0})^3 \rightarrow L^2(\Omega_0^R)^3$ ,  $f \mapsto w_{h,f}|_{\Omega_0^R}$ , der eine Funktion  $f$  auf die Lösung  $w_{h,f}$  des Problems 2 mit der rechten Seite  $k^2 h u_f$  abbildet, d. h. die Funktion  $w_{h,f}$  löst das Problem

$$a_q(w_{h,f}, v) = \int_{\Omega_0^R} k^2 h E_f \cdot \bar{v} \, dx$$

für alle  $v \in X$ . Dann ist die Ableitung von  $\Lambda$  an der Stelle  $q$  gegeben durch

$$\Lambda'(q) \in \mathcal{L}\left(L^\infty(\Omega_0^R), \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0})^3, L^2(\Omega_0^R)^3)\right), \quad h \mapsto W_h.$$

Um auch in diesem Fall die Schlecht-Gestelltheit aus der Nichtlinearitätsbedingung zu folgern, müssen wir zuerst zeigen, dass die Fréchet-Ableitung lokal schlecht-gestellt ist. Dies folgt aus der Helmholtz-Zerlegung des Lösungsraumes  $X = Y \oplus Y^\perp$ , die wir in Unterkapitel 4.4 betrachtet haben. Wegen

der Regularitätsvoraussetzung an  $\varepsilon_r$  gilt nach dem Satz 4.1 die Inklusion  $Y \subseteq H^1(\Omega^R)^3$ , sodass die Einschränkung von  $Y$  auf  $\Omega_0^R$  nach [McL00, Theorem 3.27] kompakt in  $L^2(\Omega_0^R)^3$  eingebettet ist. Demnach können wir eine nicht-konvergente Folge  $\{q_i\}_{i=1}^\infty$  in  $L^\infty(\Omega_0^R)$  finden, für die die Folge  $\{\Lambda_{q_i}\}_{i=1}^\infty$  konvergent in  $\mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0})^3, L^2(\Omega_0^R)^3)$  ist.

**Lemma 5.21.** *Der Operator  $\Lambda'(q): L^\infty(\Omega_0^{R_0}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0})^3, L^2(\Omega_0^R)^3)$ , der  $h$  aus  $L^\infty(\Omega_0^{R_0})$  auf  $W_h$  abbildet, ist lokal schlecht-gestellt.*

Daraus folgern wir schließlich die Schlecht-Gestelltheit von  $\Lambda$ .

### Satz 5.22

Der Operator  $\Lambda: Q \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega_0^{R_0})^3, L^2(\Omega_0^R)^3)$ ,  $q \mapsto \Lambda_q$ , ist lokal schlecht-gestellt.

*Beweis:* Es sei die rechte Seite  $f \in L^2(\Omega_0^{R_0})^3$  fest und seien die Funktionen  $E_q \in X$  sowie  $E_{q^*} \in X$  als die Lösungen zu der Problemstellung 2 für  $\varepsilon_r^s = \varepsilon_r + q$  bzw.  $\varepsilon_r^s = \varepsilon_r + q^*$  gewählt. Weiterhin sei  $w_h \in X$  die Lösung zu dem Problem 2 für  $\varepsilon_r^s = \varepsilon_r + q^*$  und der rechten Seite  $k^2(q - q^*)E_{q^*}$ . Wir erhalten für  $h := q - q^*$  und  $w := E_q - E_{q^*} - w_h$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|w\|_{X(\Omega_0^R)} &\leq Ck^2 \|h\|_{L^\infty(\Omega_0^{R_0})} \|E_q - E_{q^*}\|_{L^2(\Omega_0^R)^3} \\ &= Ck^2 \|h\|_{L^\infty(\Omega_0^{R_0})} \|\Lambda_q f - \Lambda_{q^*} f\|_{L^2(\Omega_0^R)^3}. \end{aligned}$$

Wenn wir also  $\|h\|_{L^\infty(\Omega_0^{R_0})}$  klein genug wählen, dann folgt die Nichtlinearitätsbedingung mit  $\omega := Ck^2 \|h\|_{L^\infty(\Omega_0^{R_0})} < 1$  nach Anwendung des Supremums auf beiden Seiten.  $\square$

### 5.2.2. Regularisierungsmethode

Wir wenden, analog zu dem skalaren Problem, die Regularisierungsmethode CG-REGINN aus den Unterkapiteln 5.1.3 und 5.1.4 auf das vektorwertige Inverse Problem an. Da der Lösungsraum in diesem Fall aus vektorwertigen Funktionen besteht, diskretisieren wir den Raum der rechten Seiten  $L^2(\Omega_0^R)^3$  durch  $6N_f$ ,  $N_f \in \mathbb{N}$ , lokal konstante Basisfunktionen und betrachten den Vorwärtsoperator  $\tilde{\Lambda}: Q \rightarrow L^2(\Omega_0^R)^{3 \times 6N_f}$ , der die Störung auf die  $6N_f$  Lösungen abbildet.

**Satz 5.23**

Der adjungierte Operator  $(\tilde{\Lambda}'(q))^* : L^2(\Omega_0^R)^{3 \times 6N_f} \rightarrow L^\infty(\Omega_0^R)'$  der Fréchet-Ableitung  $\tilde{\Lambda}'$  von  $\tilde{\Lambda}$  in  $q \in Q$  lässt sich dadurch charakterisieren, dass dieser eine Funktion  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega_0^R)^{3 \times 6N_f}$  auf  $k^2 \overline{\mathbf{E}_q} \cdot \mathbf{z}|_{\Omega_0^{R_0}} \in L^1(\Omega_0^{R_0})$  abbildet, wobei  $\mathbf{E}_q \in X^{6N_f}$  der Vektor der  $6N_f$  Lösungen des Problems 2 für die  $6N_f$  rechten Seiten ist und  $\mathbf{z} \in X^{6N_f}$  für alle  $i = 1, \dots, 6N_f$  das variationelle Problem

$$a_q(\phi, \mathbf{z}_i) = (\phi, \mathbf{v}_i)_{L^2(\Omega_0^R)^3}$$

für alle  $\phi \in X$  löst.

*Beweis:* Es sei  $q \in Q$  fest und  $\mathbf{w}_h := (\tilde{\Lambda}'(q))h$  für ein  $h \in L^\infty(\Omega_0^{R_0})$ , dann lösen  $(\mathbf{w}_h)_i$  für alle  $i = 1, \dots, 6N_f$  die Gleichung  $a_q((\mathbf{w}_h)_i, v) = \int_{\Omega^R} k^2 h(\mathbf{E}_q)_i \cdot \bar{v} \, dx$  für alle  $v \in X$ . Demnach erhalten wir

$$\begin{aligned} \left( (\tilde{\Lambda}'(q))h, \mathbf{v} \right)_{L^2(\Omega_0^R)^{3 \times 6N_f}} &= \sum_{i=1}^{6N_f} a_q((\mathbf{w}_h)_i, \mathbf{z}_i) = \sum_{i=1}^{6N_f} (k^2(\mathbf{E}_q)_i h, \mathbf{z}_i)_{L^2(\Omega_0^{R_0})^3} \\ &= \left\langle h, (\tilde{\Lambda}'(q))^* \mathbf{v} \right\rangle_{\langle L^\infty(\Omega_0^{R_0}), L^\infty(\Omega_0^{R_0})' \rangle}. \end{aligned}$$

□

Für das vektorwertige Problem haben wir  $Q$  nicht als Teilmenge von  $L^2(\Omega_0^R)$  konstruiert, sondern als eine offene Menge des Banachraumes  $L^\infty(\Omega_0^R)$ . Das vorgeschlagene Newton-Verfahren CG-REGINN setzt für die Konvergenztheorie jedoch Hilberträume als Definitions- und Bildbereich voraus. Wir werden also die approximierten Störung in einer offenen Menge aus  $L^2(\Omega_0^R) \supseteq Q$  suchen, für die ggf. der Lösungsoperator nicht existiert. Diese Lücke werden wir an dieser Stelle vernachlässigen und trotzdem das Verfahren auf das Inverse Problem anwenden.

### 5.2.3. Diskretisierung und numerische Beispiele

Die Diskretisierung der Fréchet-Ableitung und der Adjungierten kann im Prinzip analog zum skalaren Fall erfolgen. Wir approximieren die Störung weiterhin als eine Funktion aus dem Finite-Elemente-Raum der stetigen und stückweise linearen Basisfunktionen  $\mathcal{P}_{\tilde{M}'}$ , der in (5.3) definiert wurde. Die Approximation der Bloch-Floquet-Transformierten der Lösung der Maxwell-Gleichungen ist in diesem Fall jedoch aus dem Finite-Elemente-Raum  $V_{N, \tilde{M}}^{\text{Maxwell}}$ , der durch die Nédélec-Elemente im Ort aufgespannt ist und in (4.22) definiert

wurde. Somit ist die Einschränkung der Lösung  $\Omega_0^R$  aus dem Raum

$$V := \left\{ \tilde{v}(\alpha, x) = \sum_{m=1}^{\tilde{M}} v^m \phi_{\tilde{M}}^m(x), v^m \in \mathbb{C} \right\},$$

der mit den Nédélec-Elementen  $\{\phi_{\tilde{M}}^m\}_{m=0}^{\tilde{M}}$  aufgespannt ist. Die transponierte Matrix der Fréchet-Ableitung lässt sich dann analog zu dem skalaren Problem darstellen als  $\mathbf{K}^* = \sum_{l=1}^{6N_f} \mathbf{M}_0^{-1} \circ \mathbf{U}_l^* \circ \mathbf{B}^* \circ \mathbf{N}^* \circ \mathbf{L}^* \circ \mathbf{M}_1$  (vgl. Gleichung (5.4)), wobei  $\mathbf{M}_1$  nun aus den  $L^2(I \times \Omega_0^R)$ -Skalarprodukten der Elemente aus  $V_{N,\tilde{M}}^{\text{Maxwell}}$  und  $\mathbf{N}$  die Massematrix der  $L^2(I \times \Omega_0^R)$ -Skalarprodukte zwischen den aus Nédélec-Finite-Elemente-Raum  $V_{N,\tilde{M}}^{\text{Maxwell}}$  aus (4.22) und den Finite-Elemente-Raum der Lagrange-Elemente  $V_{N,\tilde{M}'}$  aus (3.9) besteht.

Zum Schluss geben wir numerische Beispiele für die Rekonstruktionsqualität. Wir wählen hierfür die obere Schranke  $R_0 = 4.5$  und zerlegen das Gebiet  $\Omega_0^{R_0}$  in  $N_f = 8$  gleichgroße Quader. Den Raum  $L^2(\Omega_0^{R_0})$  nähern wir damit durch  $6N_f = 48$  lokal konstante Funktionen  $\{f_{j,R,m}, f_{j,L,m} : j = 1, 2, 3\}_{m=1}^8$  an, die auf jedem Rechteck entweder den Wert 0 oder den Wert 1 in der Komponente  $j$  im Fall von  $f_{j,R,m}$  oder alternativ den Wert 1i im anderen Fall, annehmen, sodass  $\sum_{m=1}^8 f_{j,R,m} = e_j$  und  $\sum_{m=1}^{16} f_{j,L,m} = 1ie_j$  für  $j = 1, 2, 3$  gilt. Wir diskretisieren  $\Omega_0^R$  in 512 Zellen und  $\bar{I}$  in  $2^{2 \cdot 4}$  Quadrate. Die Schranke für die Randbedingung wählen wir als  $|j|_\infty \leq 10$ ,  $j \in \mathbb{Z}^2$ . Die Daten generieren wir, analog zum skalaren Fall in Abschnitt 5.1.4, mit gleichverteiltem additiven Rauschen um Null, das auf 5% skaliert ist. Für das Diskrepanzprinzip wählen wir  $\tau = 1.5$  (vgl. Abschnitt 5.1.3). Die Ergebnisse sind in der Abbildung 5.7 zu sehen mit einem Rekonstruktionsfehler von 55.5%.

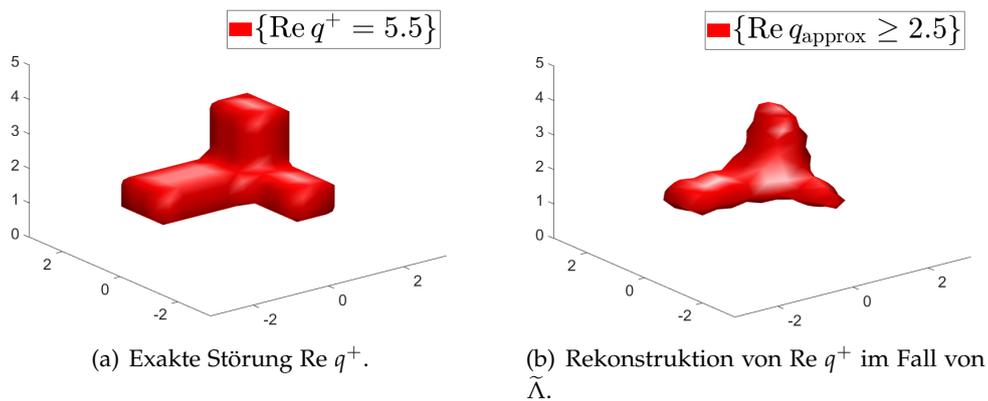


Abbildung 5.7.: Beispiel der Rekonstruktion für das vektorwertige Problem.



## Faktorisierungsmethode für das skalare Streuproblem

---

In diesem Kapitel wird das Ziel sein, nur den Träger der Störung zu rekonstruieren, um im Gegenzug ein schnelleres Verfahren durch Einsparungen von Auswertungen des direkten Problems zu erhalten. Hierzu werden wir die *Faktorisierungsmethode* (FM) für unsere Problemstellung herleiten. Die Faktorisierungsmethode ist ein bildgebendes Verfahren, das durch Andreas Kirsch eingeführt wurde (vgl. [KG08]), und gibt eine theoretische Legitimation für eine numerische Methode für das Inverse Problem der Rekonstruktion der Form der Störung. Man setzt die Kenntnis des Fernfeldes der gestreuten Wellen, die durch ebene Wellen aus jeder Richtung erzeugt werden, voraus. Im Vergleich zu Newton-artigen Verfahren benötigt diese Methode viel weniger Auswertungen des Vorwärtsoperators, was natürlich vorteilhaft ist. Der Nachteil der Methode ist, dass man die Störung nur lokalisiert ohne den Wert der Abweichung zu approximieren. Dieses Kapitel wurde als Artikel [HK20] veröffentlicht.

Bildgebende Verfahren zur Identifikation eines periodischen Mediums wurden in vielen Arbeiten behandelt, siehe z. B. [LN13; Ngu12; AK03; AG05; San10; EH11; YZZ12; HLZ13], um ein paar Referenzen zu nennen. Die Identifizierung von Störungen in einem periodischen Wellenleiter wurde z. B. in [SZ13; BF14] analysiert. Auch wurden in [HN17b; CHN18] differenzierbare bildgebende Verfahren zur Rekonstruktion von Defekten eines unbekannt periodischen Hintergrundmediums betrachtet, für die der Defekt periodisch sein muss.

Für unsere Problemstellung betrachten wir ebene Wellen aus jeder Richtung als das einfallende Feld und definieren das Fernfeld der gestreuten Welle auf einer Oberfläche in endlicher Entfernung. Wir verwenden die Existenztheorie aus Kapitel 3, um die wohldefinierte Definition einer gestreuten Welle, die durch eine ebene Welle erzeugt wird, zu erhalten und hierdurch das Fernfeld der gestreuten Welle zu definieren. Diese hat eine analoge Darstellung zum Streuproblem für beschränkte Hindernisse im freien Raum und wir zeigen, dass sich das Fernfeld durch skalierte Fourier-Koeffizienten der gestreuten Welle in endlichem Abstand zu dem periodischen Hintergrundmedium darstellen lässt. Für das Inverse Problem definieren wir dann die Menge der einfallenden Wellen, die beliebig nah zur Menge der ausbreitenden ebenen Wellen liegt,

und betrachten die erzeugten Fernfelddaten als Messdaten in Form eines Fernfeldoperators. Wir zeigen für die Problemstellung die theoretische Grundlage der Faktorisierungsmethode zur Rekonstruktion des Trägers aus dem so definierten Fernfeldoperator. Unsere Analyse schließt jedoch nicht den Grenzfall ein, dass wir nur die sich ausbreitenden ebene Wellen als einfallendes Feld hernehmen können. Nichtsdestotrotz werden wir für die numerischen Beispiele nur die ausbreitenden Wellen als einfallendes Feld verwenden, um näher an dem physikalischen Modell zu bleiben.

Durch die Absorptionsbedingung des periodischen Mediums für die Wohldefiniertheit der Lösung müssen wir zur Konstruktion der Faktorisierungsmethode nicht-physikalische einfallende Wellen definieren. In dem numerischen Teil werden wir dann darauf eingehen, wie der nicht-physikalische Fernfeldoperator aus den Daten des physikalischen Fernfeldoperators erzeugt werden kann. Zum Schluss geben wir numerische Beispiele für die Faktorisierungsmethode und fügen zum Vergleich die Ergebnisse der *Linear Sampling Method* (LSM) hinzu.

Für dieses Kapitel werden wir die Annahme fallen lassen, dass das Objekt auf einem perfekt elektrischen Leiter aufliegt, um bessere numerische Ergebnisse präsentieren zu können. Mit anderen Worten werden wir hier das Streuproblem im ganzen  $\mathbb{R}^2$ , also ohne die homogene Dirichlet-Randbedingung für den unteren Rand, betrachten. Stattdessen fordern wir nach oben und nach unten hin das Erfüllen der angular spectrum representation aus (3.1) als Ausstrahlungsbedingung für die Lösungen. Um die Notation kompakter zu halten, definieren wir das Streifengebiet  $\Omega^R$  um in  $\Omega^R := \mathbb{R} \times (-R, R)$  und setzen analog  $\Omega_0^R := [-\pi, \pi] \times (-R, R)$ .

Für die theoretische Legitimation der Faktorisierungsmethode wählen wir ein beliebig kleines  $\eta > 0$ . In den numerischen Beispielen werden wir stattdessen den Grenzwert  $\eta = 0$  wählen. Der Grenzfall ist zwar nicht durch die Theorie gedeckt, liegt jedoch näher an der physikalischen Beschreibung des Problems. Für ein  $\alpha \in [-(k^2 + k^2\eta^2)^{1/2}, (k^2 + k^2\eta^2)^{1/2}]$  betrachten wir die  $\alpha$ -quasiperiodischen ebenen Wellen der Form  $u^{\text{inc}}(x) = e^{-i\alpha x \pm i\sqrt{k^2 - \alpha^2}x_2}$  als einfallende Felder. Die Funktionen können wir alternativ als  $u^{\text{inc}}(x, \mathbf{d}) = e^{-i\mathbf{d} \cdot x}$  für ein  $\mathbf{d} \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$  darstellen, sodass  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 1$  und  $|\text{Im } \mathbf{d}_2| \leq \eta$  gilt. Somit können wir die Menge aller Richtungen als

$$S := \{\mathbf{d} \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} : \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 1, |\text{Im } \mathbf{d}_2| \leq \eta\}$$

definieren, und  $\alpha$  als eine Funktion in  $\mathbf{d}$  betrachten, die definiert ist durch

$$\alpha: S \rightarrow \left[ -\sqrt{k^2 + k^2\eta^2}, \sqrt{k^2 + k^2\eta^2} \right], \quad \alpha(\mathbf{d}) := k\mathbf{d}_1. \quad (6.1)$$

Da wir nun zwischen oberer und unterer Randbedingung unterscheiden müssen, notieren wir den Dirichlet-Neumann-Operator mit  $T^{\pm R}$ . Das folgende Lemma ist eine Erweiterung von Lemma 3.1.

**Lemma 6.1.** *Der lineare und stetige Operator  $T^{\pm R}: H^{1/2}(\Gamma^{\pm R}) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma^{\pm R})$  ist für ein  $\phi \in H^{1/2}(\Gamma^{\pm R}) \cap L^1(\Gamma^{\pm R})$  gegeben durch*

$$T^{\pm R}(\phi)(\underline{x}, \pm R) := \frac{\pm i}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{k^2 - |\xi|^2} \mathcal{F}(\phi)(\xi) e^{i\underline{x} \cdot \xi} d\xi, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^2.$$

und erfüllt für alle  $\phi \in H^{1/2}(\Gamma^{\pm R})$  die Ungleichungen

$$\mp \operatorname{Re} \langle T^{\pm R} \phi, \phi \rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad \pm \operatorname{Im} \langle T^{\pm R} \phi, \phi \rangle \geq 0.$$

Analog definieren wir für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  den quasiperiodischen Dirichlet-Neumann-Operator  $T_\alpha^{\pm R}: H_\alpha^{1/2}(\Gamma_0^{\pm R}) \rightarrow H_\alpha^{-1/2}(\Gamma_0^{\pm R})$ .

## 6.1. Quasiperiodisches Streuproblem

Unter der Annahme, dass wir keine Störung im periodischen Brechungsindex haben und eine quasiperiodische einfallende Welle annehmen, können wir aus der Eindeutigkeit der Lösung schließen, dass die gestreute Welle quasiperiodisch sein muss. Deswegen ist es hinreichend das Problem auf einer Periode  $\Omega_0^R$  zu betrachten. Für ein  $\mathbf{d} \in S$  und die einfallende Welle  $u^{\text{inc}}(\cdot, \mathbf{d})$  suchen wir demnach das gestreute Feld  $\tilde{u}_{\text{qp}}^s \in H_\alpha^1(\Omega_0^R)$ , das das variationelle Problem zu

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u}_{\text{qp}}^s(\cdot, \mathbf{d}) + k^2 n_p^2 \tilde{u}_{\text{qp}}^s(\cdot, \mathbf{d}) &= -k^2 (n_p^2 - 1) u^{\text{inc}}(\cdot, \mathbf{d}) && \text{in } \Omega_0^R \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \tilde{u}_{\text{qp}}^s(\cdot, \mathbf{d}) &= T_\alpha^{\pm R} \tilde{u}_{\text{qp}}^s(\cdot, \mathbf{d}) && \text{auf } \Gamma_0^{\pm R} \end{aligned}$$

löst. Die eindeutige Existenz der Lösung kann analog zu Lemma 3.7 gezeigt werden, wenn wir Absorption auf einem offenen Ball annehmen. Damit können wir das quasiperiodische Gesamtfeld  $\tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d}) := \tilde{u}_{\text{qp}}^s(\cdot, \mathbf{d}) + u^{\text{inc}}(\cdot, \mathbf{d})$  definieren, das die Gleichung

$$\Delta \tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d}) + k^2 n_p^2 \tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d}) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

löst.

## 6.2. Gestörtes unbeschränktes Streuproblem

Nachdem wir das Gesamtfeld des quasiperiodischen Problems kennen, betrachten wir den Fall eines gestörten Brechungsindex  $n^2 := n_p^2 + q \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$  mit einer Störung  $q \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$  für die  $D := \text{supp}(q) \subseteq \Omega_0^{R_0}$  gilt. Das Streuproblem ist dann dadurch beschrieben, dass das Gesamtfeld  $u^t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  die homogene Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u^t + k^2 n^2 u^t = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \quad (6.2)$$

löst. Für das Gesamtfeld nehmen wir an, dass sich dieses für ein  $\mathbf{d} \in S$  in das gestreute Feld  $u^s$  und das Gesamtfeld des quasiperiodischen Streuproblems  $\tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d})$  als einfallende Welle zerlegen lässt. Demnach verschiebt sich die Aufgabe auf das Finden des unbekanntes gestreuten Feldes  $u^s \in H^1(\Omega^R)$  für ein  $R > R_0$ , das die Lösung der Gleichung

$$\Delta u^s + k^2 n^2 u^s = -k^2 q \tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d}) \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \quad (6.3)$$

ist. Wie zuvor soll die gestreute Welle die angular spectrum representation aus (3.1) als Ausstrahlungsbedingung in  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega^R}$  erfüllen. Unter der Annahme 1 an den Brechungsindex hat das obere Problem eine Lösung nach Satz 3.2 und das Gesamtfeld  $u^t = u^s + \tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d})$  würde das Streuproblem (6.2) lösen. Für die Faktorisierungsmethode werden wir stattdessen die komplex konjugierte Funktion  $\overline{\tilde{u}_{\text{qp}}}$  statt  $\tilde{u}_{\text{qp}}$  für die rechte Seite in (6.3) verwenden. Deswegen betrachten wir das folgende Problem für eine allgemeine Quelle  $f \in L^2(\Omega_0^R)$ , die wir außerhalb von  $\Omega_0^R$  durch Null fortsetzen.

### Problemstellung 3

Wir suchen für ein  $R > R_0$  eine Funktion  $u^s \in H^1(\Omega^R)$  als Lösung des variationellen Problems zu

$$\begin{aligned} \Delta u^s + k^2 n^2 u^s &= -f && \text{in } \Omega^R, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} u^s &= T^{\pm R} u^s && \text{auf } \Gamma^{\pm R}. \end{aligned}$$

## 6.3. Fernfeld einer gestreuten Welle

Als Nächstes definieren wir das Fernfeld der Lösung des Problems 3 mit Hilfe der horizontalen Bloch-Floquet-Transformation  $\mathcal{J}_R$ .

**Definition 6.2.** Es sei  $u^s \in H^1(\Omega^R)$  die Lösung des Problems 3 für eine rechte Seite  $f \in L^2(\Omega_0^R)$ . Wir betrachten  $\beta(\mathbf{d}') := k\mathbf{d}'_1$  als eine Funktion abhängig von  $\mathbf{d}' \in S$  analog zu  $\alpha$  in (6.1) und setzen die Notation

$$\tilde{u}^s(\underline{x}, \pm R, \mathbf{d}') := \tilde{u}^s(\beta(\mathbf{d}'), \underline{x}, \pm R) := \mathcal{J}_R u^s(\beta(\mathbf{d}'), \underline{x}, \pm R).$$

Das Fernfeld  $u^\infty: S \rightarrow \mathbb{C}$  von  $u^s$  definieren wir als

$$\begin{aligned} u^\infty(\mathbf{d}') &:= \int_{\Gamma_0^R} \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial x_2}(\cdot, -\mathbf{d}') u^{\text{inc}}(\cdot, \mathbf{d}') - \tilde{u}^s(\cdot, -\mathbf{d}') \frac{\partial u^{\text{inc}}(\cdot, \mathbf{d}')}{\partial x_2} \, dS \\ &\quad - \int_{\Gamma_0^{-R}} \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial x_2}(\cdot, -\mathbf{d}') u^{\text{inc}}(\cdot, \mathbf{d}') - \tilde{u}^s(\cdot, -\mathbf{d}') \frac{\partial u^{\text{inc}}(\cdot, \mathbf{d}')}{\partial x_2} \, dS. \end{aligned}$$

Das folgende Lemma gibt eine erste Charakterisierung des Fernfeldes.

**Lemma 6.3.** Für das Fernfeld  $u^\infty$  einer Lösung  $u^s \in H^1(\Omega^R)$  des Problems 3 für eine rechte Seite  $f \in L^2(\Omega_0^R)$  gilt die Charakterisierung

$$\begin{aligned} u^\infty(\mathbf{d}') &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi(2M+1)}^{\pi(2M+1)} \frac{\partial u^s}{\partial x_2} u^{\text{inc}}(\cdot, R, \mathbf{d}') - u^s \frac{\partial u^{\text{inc}}(\cdot, R, \mathbf{d}')}{\partial x_2} \, dx_1 \\ &\quad - \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi(2M+1)}^{\pi(2M+1)} \frac{\partial u^s}{\partial x_2} u^{\text{inc}}(\cdot, -R, \mathbf{d}') - u^s \frac{\partial u^{\text{inc}}(\cdot, -R, \mathbf{d}')}{\partial x_2} \, dx_1 \end{aligned}$$

für alle  $\mathbf{d}' \in S$ .

*Beweis:* Es sei  $\mathbf{d}' \in S$  fest und setze  $\beta = \beta(\mathbf{d}')$ . Dann erhalten wir aus der Definition der Inversen der Bloch-Floquet-Transformation die Identität:

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi(2M+1)}^{\pi(2M+1)} \frac{\partial u^s}{\partial x_2} u^{\text{inc}}(\cdot, R, \mathbf{d}') - u^s \frac{\partial u^{\text{inc}}(\cdot, R, \mathbf{d}')}{\partial x_2} \, d\underline{x} \\ &= \int_I \sum_{m=-M}^M e^{-i2\pi m \cdot (\beta + \alpha)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial x_2}(\alpha, \cdot, R) u^{\text{inc}}(\cdot, R, \mathbf{d}') \\ &\quad - \tilde{u}^s(\alpha, \cdot, R) \frac{\partial u^{\text{inc}}(\cdot, R, \mathbf{d}')}{\partial x_2} \, dS \, d\alpha. \end{aligned}$$

Die glatte und periodische Funktion  $\delta_{-\beta, M}(\alpha) := \sum_{m=-M}^M e^{-i2\pi m \cdot (\beta + \alpha)}$  ist die abgeschnittene Fourier-Reihe der 1-periodischen Delta-Distribution, da der  $j$ -te Fourier-Koeffizient durch  $\hat{\delta}_{-\beta, j} = e^{-i2\pi j \cdot \beta}$  gegeben ist. Die Summe konvergiert bzgl.  $H_p^{-s}(I)$  für ein  $s > 1/2$  gegen  $\delta_{-\beta}$  (siehe [SV02, Kapitel 5]). Die Bloch-Floquet-Transformierte der rechten Seite ist analytisch in  $\beta$ , sodass nach dem Regularitätsresultat 3.11 das gestreute Feld stetig in  $\beta \in I$  und die Punktauswertung wohldefiniert ist. Somit erhalten wir für  $\beta = \beta(\mathbf{d}')$  die behauptete

Charakterisierung durch

$$\begin{aligned}
& \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi(2M+1)}^{\pi(2M+1)} \frac{\partial u^s}{\partial x_2} u^{\text{inc}}(\cdot, R, \mathbf{d}') - u^s \frac{\partial u^{\text{inc}}(\cdot, R, \mathbf{d}')}{\partial x_2} \, d\mathbf{x} \\
& - \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi(2M+1)}^{\pi(2M+1)} \frac{\partial u^s}{\partial x_2} u^{\text{inc}}(\cdot, -R, \mathbf{d}') - u^s \frac{\partial u^{\text{inc}}(\cdot, -R, \mathbf{d}')}{\partial x_2} \, d\mathbf{x} \\
& = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial x_2}(-\beta, \cdot, R) u^{\text{inc}}(\cdot, R, \mathbf{d}') - \tilde{u}^s(-\beta, \cdot, R) \frac{\partial u^{\text{inc}}(\cdot, R, \mathbf{d}')}{\partial x_2} \, d\mathbf{x} \\
& - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial x_2}(-\beta, \cdot, -R) u^{\text{inc}}(\cdot, -R, \mathbf{d}') - \tilde{u}^s(-\beta, \cdot, -R) \frac{\partial u^{\text{inc}}(\cdot, -R, \mathbf{d}')}{\partial x_2} \, d\mathbf{x} \\
& = u^\infty(\mathbf{d}').
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 6.4.** Wenn wir mit  $\mathcal{F}(u^s)$  die Fourier-Transformierte der Spur auf  $\Gamma^R \cup \Gamma^{-R}$  einer Lösung  $u^s \in H^1(\Omega^R)$  des Problems 3 bezeichnen, so können wir mit der Identität  $(\widehat{\mathcal{J}_R u^s}|_{\Gamma^R})_0(-\beta(\mathbf{d}'), \pm R) = \mathcal{F}(u^s)(-\beta(\mathbf{d}'), \pm R)$  für den nullten Fourier-Koeffizienten aus der Folgerung 2.14 nachrechnen, dass das Fernfeld gegeben ist durch

$$u^\infty(\mathbf{d}') = \begin{cases} 2\sqrt{2\pi i} \sqrt{k^2 - |\beta(\mathbf{d}')|^2} \mathcal{F}(u^s)(-\beta(\mathbf{d}'), R) e^{-ik\mathbf{d}'_2 R}, & \mathbf{d}'_2 > 0, \\ 2\sqrt{2\pi i} \sqrt{k^2 - |\beta(\mathbf{d}')|^2} \mathcal{F}(u^s)(-\beta(\mathbf{d}'), -R) e^{ik\mathbf{d}'_2 R}, & \mathbf{d}'_2 \leq 0. \end{cases}$$

Daraus folgt insbesondere, dass das Fernfeld genau dann die Nullfunktion ist, wenn die Fourier-Transformierte  $\mathcal{F}(u^s)$  der Spur der gestreuten Welle auf  $\Gamma_0^{\pm R}$  in dem Intervall  $[-(k^2 + k^2\eta^2)^{1/2}, (k^2 + k^2\eta^2)^{1/2}] \setminus \{-k, k\}$  verschwindet.

**Lemma 6.5.** Es sei  $u^s \in H^1(\Omega^R)$  die Lösung des Problems 3 für eine rechte Seite  $f \in L^2(\Omega_0^R)$ , die nur in  $\overline{D}$  ihren Träger hat. Wenn das Fernfeld von  $u^s$  verschwindet und das Komplement von  $\overline{D}$  zusammenhängend ist, dann verschwindet  $u^s$  im Komplement von  $\overline{D}$ .

*Beweis:* Wenn das Fernfeld der Lösung  $u^s$  verschwindet, dann verschwinden auch die Fourier-Transformierten der Spuren  $\mathcal{F}(u^s|_{\Gamma^{\pm R}})$  auf der Menge  $[-(k^2 + k^2\eta^2)^{1/2}, (k^2 + k^2\eta^2)^{1/2}] \setminus \{-k, k\}$ . Da die rechte Seite einen kompakten Träger in  $\Omega_0^R$  besitzt, ist die Bloch-Floquet-Transformierte gegeben durch  $f = \mathcal{J}_R f$ , wodurch diese unabhängig von der künstlichen Komponente  $\beta$  ist. Insbesondere ist die rechte Seite  $\mathcal{J}_R f$  analytisch bzgl.  $\beta \in \mathbb{R}$  und es folgt aus dem Regularitätsresultat 3.11, dass  $\mathcal{J}_R u^s$  analytisch in  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-k, k\}$  ist. Demnach muss auch die Fourier-Transformierte der Spur  $\mathcal{F}(u^s|_{\Gamma^{\pm R}})$  eine analytische Funktion für  $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{-k, k\}$  sein und wegen der Analytizität auf

ganz  $\mathbb{R}$  verschwinden. Da nun die Lösung eindeutig durch die Ausstrahlungsbedingung erweitert werden kann und diese linear von der Spur abhängt, verschwindet die gestreute Welle auf einer offenen Menge für ein  $R' > R$ . Die rechte Seite besitzt ihren Träger in  $\bar{D}$ , womit aus dem Satz über die eindeutige Fortsetzbarkeit 3.6 folgt, dass die gestreute Welle überall außerhalb von  $\bar{D}$  verschwindet.  $\square$

## 6.4. Herleitung der Faktorisierungsmethode

Für eine ebene Welle  $u^{\text{inc}}(\cdot, \mathbf{d})$ , die von  $\mathbf{d} \in S$  abhängt, schreiben wir die gestreute Welle als  $u^s(\cdot, \mathbf{d})$  und das quasiperiodische Gesamtfeld als  $\tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d})$ . Analog schreiben wir  $\tilde{u}^s(\cdot, \mathbf{d}, \mathbf{d}')$  für die Bloch-Floquet-Transformierte der gestreuten Welle und  $u^\infty(\mathbf{d}, \mathbf{d}')$  für das Fernfeld in  $\mathbf{d}' \in S$ . Bevor wir den *Herglotz-Operator*  $H_{\text{qp}}$  definieren, müssen wir klären, wie das Integral über  $S$  im Folgenden gemeint ist. Wir betrachten die beiden Mengen

$$S^\pm := \left\{ \left( \mathbf{d}_1, \pm \sqrt{1 - \mathbf{d}_1^2} \right) : \mathbf{d}_1 \in \left[ -\sqrt{1 + \eta^2}, \sqrt{1 + \eta^2} \right] \right\}.$$

Eine Funktion  $\phi: S \rightarrow \mathbb{C}$  soll die beiden von  $\mathbf{d}_1$  abhängigen Funktion

$$\phi^\pm: \left[ -\sqrt{1 + \eta^2}, \sqrt{1 + \eta^2} \right] \rightarrow \mathbb{C}$$

bezeichnen und das Integral von  $\phi \in L^2(S)$  über  $S$  soll als

$$\int_S \phi(\mathbf{d}) \, dS(\mathbf{d}) := \int_{[-\sqrt{1+\eta^2}, \sqrt{1+\eta^2}]} \phi^+(\mathbf{d}_1) + \phi^-(\mathbf{d}_1) \, d(\mathbf{d}_1)$$

definiert sein. Jetzt können wir den *Fernfeld-Operator*  $F: L^2(S) \rightarrow L^2(S)$  und den *Herglotz-Operator*  $H_{\text{qp}}: L^2(S) \rightarrow L^2(D)$  definieren als

$$Fg(\mathbf{d}') := \int_S u^\infty(\mathbf{d}, \mathbf{d}') g(\mathbf{d}) \, dS(\mathbf{d}) \quad \text{und} \quad H_{\text{qp}}g := \int_S \overline{\tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d})} g(\mathbf{d}) \, dS(\mathbf{d}),$$

wobei  $u^\infty(\mathbf{d}, \cdot)$  das Fernfeld der gestreuten Welle  $u^s(\cdot, \mathbf{d})$  des Problems 3 mit der rechten Seite  $f = k^2 q \overline{\tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d})}$  ist. Durch direktes Nachrechnen erhalten wir den adjungierten Operator  $H_{\text{qp}}^*: L^2(D) \rightarrow L^2(S)$  bzgl. des  $L^2(D)$ -Skalarproduktes, der gegeben ist durch

$$H_{\text{qp}}^* v(\mathbf{d}') = \int_D v(x) \tilde{u}_{\text{qp}}(x, \mathbf{d}') \, dx.$$

Durch die Änderung der einfallenden Welle als rechte Seite  $f = k^2 q \overline{\tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d})}$ ,

$\mathbf{d} \in S$ , haben wir das Verhalten des Streuproblems verändert. Wir sind nun in der Lage die gewünschte symmetrische Faktorisierung des Fernfeld-Operators herzuleiten, wie wir im folgenden Satz zeigen werden. Das entstehende Problem ist, dass das Streuproblem nicht der physikalischen Beschreibung entspricht, solange der Imaginärteil des Brechungsindizes nicht verschwindet. Deswegen werden wir im numerischen Teil darauf eingehen, wie wir den oben definierten theoretischen Fernfeld-Operator durch den physikalischen approximieren können, der durch die rechten Seiten  $f = k^2 q \tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d})$  beschrieben ist. Zusätzlich zu der Annahme 1 benötigen wir für die Zerlegung des Fernfeldoperators die folgende Annahme an die Störung.

**Annahme 3.** Es sei die Annahme 1 erfüllt und zusätzlich soll das Komplement  $D^c := \mathbb{R}^2 \setminus D$  zusammenhängend sein und  $\text{Re } q \geq c > 0$  auf  $D$  gelten.

**Satz 6.6**

Es sei die Annahme 3 erfüllt. Der Fernfeld-Operator  $F$  kann in  $F = H_{\text{qp}}^* \mathcal{T} H_{\text{qp}}$  mit dem invertierbaren und beschränkten Operator

$$\mathcal{T}: L^2(D) \rightarrow L^2(D), \quad \mathcal{T}v := -k^2 q(v + v^s),$$

zerlegt werden, wobei  $v^s$  die Lösung des Streuproblems 3 für die rechte Seite  $f = k^2 qv$  bezeichnet.

*Beweis:* (a) Es gilt für  $\beta = \beta(\mathbf{d}')$  und für  $\phi \in H_{-\beta}^{1/2}(-\pi, \pi)$ ,  $\psi \in H_{\beta}^{1/2}(-\pi, \pi)$  die Identität

$$\int_I \int_{[-\pi, \pi]} T_{-\beta}^{\pm R}(\phi) \psi \, d\mathbf{x} \, d\beta = \int_I \int_{[-\pi, \pi]} T_{\beta}^{\pm R}(\psi) \phi \, d\mathbf{x} \, d\beta,$$

woraus wir die Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_0^{\pm R}} \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial x_2}(\cdot, \mathbf{d}, -\mathbf{d}') \tilde{u}_{\text{qp}}^s(\cdot, \mathbf{d}') - \tilde{u}^s(\cdot, \mathbf{d}, -\mathbf{d}') \frac{\partial \tilde{u}_{\text{qp}}^s}{\partial x_2}(\cdot, \mathbf{d}') \, dS \\ &= \int_{\Gamma_0^{\pm R}} T_{-\beta(\mathbf{d}')}^{\pm R}(\tilde{u}^s(\cdot, \mathbf{d}, -\mathbf{d}')) \tilde{u}_{\text{qp}}^s(\cdot, \mathbf{d}') - \tilde{u}^s(\cdot, \mathbf{d}, -\mathbf{d}') T_{\beta(\mathbf{d}')}^{\pm R}(\tilde{u}_{\text{qp}}^s(\cdot, \mathbf{d}')) \, dS \\ &= \int_{\Gamma_0^{\pm R}} T_{-\beta(\mathbf{d}')}^{\pm R}(\tilde{u}^s(\cdot, \mathbf{d}, -\mathbf{d}')) \tilde{u}_{\text{qp}}^s(\cdot, \mathbf{d}') - T_{-\beta(\mathbf{d}')}^{\pm R}(\tilde{u}^s(\cdot, \mathbf{d}, -\mathbf{d}')) \tilde{u}_{\text{qp}}^s(\cdot, \mathbf{d}') \, dS \\ &= 0 \end{aligned}$$

folgern. Damit können wir diesen Term zum Fernfeld hinzuaddieren und erhalten

$$u^\infty(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = \left[ \int_{\Gamma_0^R} - \int_{\Gamma_0^{-R}} \right] \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial x_2}(\cdot, \mathbf{d}, -\mathbf{d}') \tilde{u}_{\text{qp}}^s(\cdot, \mathbf{d}') - \tilde{u}^s(\cdot, \mathbf{d}, -\mathbf{d}') \frac{\partial \tilde{u}_{\text{qp}}^s}{\partial x_2}(\cdot, \mathbf{d}') \, dS.$$

Da der Integrand eine periodische Funktion bzgl.  $x_1$  ist, können wir die Greensche Formel anwenden, sodass

$$\begin{aligned} u^\infty(\mathbf{d}, \mathbf{d}') &= \int_{\Omega_0^R} \Delta \tilde{u}^s(\cdot, \mathbf{d}, -\mathbf{d}') \tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d}') - \tilde{u}^s(\cdot, \mathbf{d}, -\mathbf{d}') \Delta \tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d}') \, dx \\ &= \int_{\Omega_0^R} \left( (-k^2 q u^s - k^2 q \overline{\tilde{u}_{\text{qp}}}) (\cdot, \mathbf{d}) - k^2 n_p^2 \tilde{u}^s(\cdot, \mathbf{d}, -\mathbf{d}') \right) \tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d}') \\ &\quad + k^2 n_p^2 \tilde{u}^s(\cdot, \mathbf{d}, -\mathbf{d}') \tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d}') \, dx \\ &= \int_{\Omega_0^R} -k^2 q (\overline{\tilde{u}_{\text{qp}}} + u^s) (\cdot, \mathbf{d}) \tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d}') \, dx \end{aligned}$$

gilt. Wenn wir nun eine Funktion  $g \in L^2(S)$  mit dem Fernfeld multiplizieren und über  $S$  integrieren, erhalten wir die behauptete Zerlegung durch

$$\begin{aligned} Fg(\mathbf{d}') &= \int_S u^\infty(\mathbf{d}, \mathbf{d}') g(\mathbf{d}) \, dS(\mathbf{d}) \\ &= \int_{\Omega_0^R} -k^2 q \int_S \left( \overline{\tilde{u}_{\text{qp}}}(\cdot, \mathbf{d}) - u^s(\cdot, \mathbf{d}) \right) g(\mathbf{d}) \, dS(\mathbf{d}) \tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d}') \, dx \\ &= \int_{\Omega_0^R} -k^2 q (U^{\text{inc}} + U^s) \tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d}') \, dx = H_{\text{qp}}^*(TU^{\text{inc}}), \end{aligned}$$

wobei  $U^s(x)$  das gestreute Feld  $\int_S u^s(x, \mathbf{d}) g(\mathbf{d}) \, dS(\mathbf{d})$  und  $U^{\text{inc}} = H_{\text{qp}}(g)$  ist.

(b) Wir haben in der Annahme 3 vorausgesetzt, dass  $\text{Re } q \geq c > 0$  auf  $D$  erfüllt ist. Wenn wir mit  $L: L^2(D) \rightarrow L^2(D)$  den Lösungsoperator bezeichnen, der eine rechte Seite  $f \in L^2(D)$  auf die auf  $D$  eingeschränkte Lösung des Problems 3, abbildet, dann erhalten wir

$$\frac{-1}{k^2 q} \mathcal{T}v = v + k^2 L(qv) \quad \text{in } L^2(D).$$

Dadurch wird also ein Fredholm-Operator mit Index Null beschrieben, sodass wir nach Satz A.3 nur noch die Injektivität zeigen müssen. Es sei  $v \in L^2(D)$ , das die Gleichung  $\mathcal{T}v = 0$  in  $D$  erfüllt. Daraus folgt, dass  $k^2 q v^s = -k^2 q v$  in  $D$  gilt, und  $v^s$

$$\Delta v^s + k^2 (n_p^2 + q) v^s = k^2 q v^s \quad \text{in } \Omega^R$$

erfüllt. Da das Streuproblem für  $q = 0$  eine eindeutige Lösung hat, was durch Satz 3.2 garantiert wird, muss  $v^s$  die Nullfunktion auf  $\Omega^R$  sein und es gilt demnach  $v = v^s = 0$  in  $D$ .  $\square$

Der nächste Satz wird uns ein erstes theoretisches Kriterium für die Lokalisierung des Trägers geben, wofür wir das Fernfeld der Fundamentallösung des ungestörten Problems 3 benötigen. Es sei  $z \in (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$  fest und  $\Phi_{z,p}$  die

periodische Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung

$$\left[ \Delta + k^2 n_p^2 \right] \Phi_{z,p} = -\delta_z \quad \text{in } \Omega_0^R, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi_{z,p} = T_0^{\pm R} \Phi_{z,p} \quad \text{auf } \Gamma_0^{\pm R}.$$

Wir wählen für ein  $\delta > 0$  eine Abschneidefunktion  $\chi^+ \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , für die  $\chi^+(x) = 0$  für  $|x - z| > \delta$  und  $\chi^+(x) = 1$  für  $|x - z| < \delta/2$  gelten soll, und betrachten die Lösung  $\tilde{\Phi}_z$  des Problems 3 mit  $q = 0$  und der rechten Seite

$$-f = \Delta \tilde{\Phi}_z + k^2 n_p^2 \tilde{\Phi}_z = -\Delta \chi^+ \Phi_{z,p} - 2\nabla \chi^+ \cdot \nabla \Phi_{z,p} \in L^2(\Omega_0^R).$$

Dann können wir die Fundamentallösung des Problems 3 durch  $\Phi_z := \chi^+ \Phi_{z,p} + \tilde{\Phi}_z$  definieren und bezeichnen mit  $\phi_z^\infty \in L^2(S)$  das Fernfeld.

**Lemma 6.7.** *Wir nehmen an, dass das Komplement von  $\bar{D}$  zusammenhängend ist und es sei für ein  $z \in \Omega_0^R$  das Fernfeld  $\phi_z^\infty$  der Fundamentallösung  $\Phi_z$  der Helmholtz-Gleichung  $\Delta w + k^2 n_p^2 w = -\delta_z$  im Gebiet  $\Omega^R$  gegeben. Dann gilt  $z \in D$  genau dann, wenn das Fernfeld  $\phi_z^\infty$  in dem Bildraum  $\mathcal{R}(H_{qp}^*)$  liegt.*

*Beweis:* Es sei  $z \in D$  fest, dann existiert eine offene Menge  $B_\varepsilon(z)$  mit einem Radius  $\varepsilon > 0$ , sodass der Abschluss  $\overline{B_\varepsilon(z)}$  in  $D$  liegt. Wir wählen eine Abschneidefunktion  $\chi^-$ , die die Eigenschaften  $\chi^-(x) = 1$  für  $|x - z| \geq \varepsilon$  und  $\chi^-(x) = 0$  für  $|x - z| \leq \varepsilon/2$  besitzt und betrachten  $w := \chi^- \Phi_z \in H^1(\Omega^R)$ . Da die Funktion  $\Delta w + k^2 n_p^2 w \in L^2(\Omega^R)$  ihren Träger in  $D$  besitzt, gilt

$$H_{qp}^*(\psi)(\mathbf{d}') = \int_{\Omega^R} (\Delta w + k^2 n_p^2 w) \tilde{u}_{qp}(x, \mathbf{d}') \, dx,$$

sodass aus der Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi(2M+1)}^{\pi(2M+1)} \frac{\partial w}{\partial x_2}(\cdot, \pm R) \tilde{u}_{qp}(\cdot, \pm R, \mathbf{d}') - w(\cdot, \pm R) \frac{\partial \tilde{u}_{qp}}{\partial x_2}(\cdot, \pm R, \mathbf{d}') \, d\underline{x} \\ &= \int_{-\pi(2M+1)}^{\pi(2M+1)} \frac{\partial \Phi_z}{\partial x_2}(\cdot, \pm R) u^{\text{inc}}(\cdot, \pm R, \mathbf{d}') - \Phi_z(\cdot, \pm R) \frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial x_2}(\cdot, \pm R, \mathbf{d}') \, d\underline{x}, \end{aligned}$$

aus der Greenschen Formel und aus Lemma 6.3 die Identität

$$\begin{aligned} & H_{qp}^*(\psi)(\mathbf{d}') \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi(2M+1)}^{\pi(2M+1)} \frac{\partial \Phi_z}{\partial x_2}(\cdot, R) u^{\text{inc}}(\cdot, R, \mathbf{d}') - \Phi_z(\cdot, R) \frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial x_2}(\cdot, R, \mathbf{d}') \, d\underline{x} \\ &\quad - \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi(2M+1)}^{\pi(2M+1)} \frac{\partial \Phi_z}{\partial x_2}(\cdot, -R) u^{\text{inc}}(\cdot, -R, \mathbf{d}') - \Phi_z(\cdot, -R) \frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial x_2}(\cdot, -R, \mathbf{d}') \, d\underline{x} \\ &= \phi_z^\infty(\mathbf{d}') \end{aligned}$$

folgt. Insbesondere ist das Fernfeld  $\phi_z^\infty$  von  $\Phi_z$  im Bildbereich von  $H_{\text{qp}}^*$ .

Nehme andererseits an, dass  $\phi_z^\infty \in \mathcal{R}(H_{\text{qp}}^*)$  und  $z \notin D$  gilt. Dann gibt es ein  $\psi \in L^2(D)$  mit  $H_{\text{qp}}^* \psi = \phi_z^\infty$ . Wir bezeichnen mit  $w^s$  die Lösung des Problems 3 für die rechte Seite  $f = -\psi$ . Dann können wir, wie oben, nachrechnen, dass das Fernfeld von  $w^s$  genau  $\phi_z^\infty$  entspricht. Aus Lemma 6.5 folgern wir, dass  $w^s$  der Fundamentallösung  $\Phi_z$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus (\overline{D} \cup \{z\})$  gleicht. Die Analytizität der Lösung widerspricht damit, dass  $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$  ist. Wenn  $z \in \overline{D} \setminus D$ , dann ergibt das Ganze ebenso einen Widerspruch, denn  $\Phi_z \notin H^{1/2}(\partial D)$  für  $z \in \partial D$ .  $\square$

Wir haben somit gezeigt, dass ein Punkt  $z \in \Omega_0^R$  genau dann in  $D$  liegt, wenn das Fernfeld  $\phi_z^\infty$  ein Element des Bildbereichs von  $H_{\text{qp}}^*$  ist. Der nächste Schritt ist, den Bildbereich zu charakterisieren, sodass wir nur noch den Operator  $F$  in der Äquivalenz benötigen. Hierfür werden wir das Resultat aus [KG08, Theorem 2.15] in der Version von [BH13, Theorem 3.2] anwenden, das wir nun als Proposition zitieren. Für die Definition von  $A^{1/2}$  für einen linearen Operator  $A$  sei auf die Theorie der Inversen Probleme, wie z. B. in [Rie03] zu finden, verwiesen.

**Proposition 6.8.** *Es sei  $H \subset U \subset H^*$  ein Gelfand-Tripel mit einem Hilbertraum  $U$  und einem reflexiven Banachraum  $H$ , sodass die Einbettungen dicht sind. Weiterhin sei  $Y$  ein zweiter Hilbertraum und  $\mathcal{G}: Y \rightarrow Y$ ,  $\mathcal{H}: Y \rightarrow H$  sowie  $\mathcal{T}: H \rightarrow H^*$  lineare und beschränkte Operatoren, sodass  $\mathcal{G} = \mathcal{H}^* \mathcal{T} \mathcal{H}$  gilt. Nehmen wir zudem an, dass  $\mathcal{H}^*$  ein kompakter Operator mit dichtem Bild ist, dass sich  $(\text{Re } \mathcal{T}) := (\mathcal{T} + \mathcal{T}^*)/2$  zerlegen lässt in  $(\text{Re } \mathcal{T}) = C + K$  mit einem kompakten Operator  $K$  und einem selbstadjungierten und koerziven Operator  $C: H \rightarrow H^*$ , d. h. es gibt ein  $c > 0$  mit*

$$(\phi, C\phi)_H \geq c \|\phi\|_H^2 \quad \text{für alle } \phi \in H,$$

und dass  $(\text{Im } \mathcal{T}) := (\mathcal{T} - \mathcal{T}^*)/(2i)$  strikt positiv auf  $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{H})}$  ist.

Dann ist der Operator  $\mathcal{G}_\# := |(\text{Re } \mathcal{T})| + (\text{Im } \mathcal{T})$  strikt positiv und die Bildräume von  $\mathcal{H}^*: H^* \rightarrow Y$  und  $\mathcal{G}_\#^{1/2}: Y \rightarrow Y$  sind identisch.

#### Satz 6.9

Der Operator  $H_{\text{qp}}: L^2(S) \rightarrow L^2(D)$  ist kompakt und injektiv. Wenn das Komplement von  $D$  zusammenhängend ist, dann ist der Abschluss des Bildraumes charakterisiert durch

$$\overline{\mathcal{R}(H_{\text{qp}})} = H_{\text{inc}}(D) := \left\{ v \in L^2(D) : \Delta v + k^2 \overline{n_p^2} v = 0 \quad \text{in } D \right\}.$$

*Beweis:* Das Gesamtfeld des quasiperiodischen Problems ist stetig in  $\mathbf{d}_1$  und analytisch außerhalb von  $\mathbf{d}_1 = \pm 1$ , was aus Satz 3.10 folgt. Da das quasiperiodische Gesamtfeld der Kern des Integraloperators  $H_{\text{qp}}$  ist, muss dieser kompakt sein.

Für die Injektivität sei  $\tilde{I} := [-1, 1]$  und der Operator  $H: L^2(D) \rightarrow L^2(S)$ ,  $Hg := \overline{(H_{\text{qp}}\tilde{g})}$ , definiert. Damit ist der Operator  $H_{\text{qp}}$  genau dann injektiv, wenn  $H$  injektiv ist, sodass wir stattdessen die Injektivität von  $H$  zeigen. Die Funktion  $Hg \in L^2(D)$  ist die Restriktion von

$$v_g(x) := \int_S \tilde{u}_{\text{qp}}(x, \mathbf{d}) g(\mathbf{d}) dS(\mathbf{d}), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

auf  $D$ , die die homogene Helmholtz-Gleichung  $\Delta v_g + k^2 n_p^2 v_g = 0$  in  $\mathbb{R}^2$  löst. Zunächst wollen wir die Bloch-Floquet-Transformierte einer allgemeinen Funktion  $v_g$  berechnen, und nehmen anschließend erst an, dass  $g$  aus dem Kern ist. Wir wählen hierfür eine Funktion  $\tilde{g}^\pm \in C_0^\infty(\tilde{I})$ , die durch Null auf  $\mathbb{R}$  erweitert ist. Da alle Ableitungen der Funktion  $\tilde{g}^\pm$  in  $\mathbf{d}_1 = \pm 1$  verschwinden und das quasiperiodische Gesamtfeld außerhalb von  $\mathbf{d}_1 = \pm 1$  analytisch ist, muss für  $\mathbf{d}_2(\mathbf{d}_1) := (1 - \mathbf{d}_1^2)^{1/2}$  die Inklusion

$$u_g^\pm(x, \cdot) := \tilde{u}_{\text{qp}}(x, \cdot, \pm \mathbf{d}_2(\cdot)) \tilde{g}^\pm(\cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2 \quad (6.4)$$

gelten. Weiterhin ist  $\tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d}) \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)$  für alle  $\mathbf{d} \in S$ , woraus wir aus dem Sobolevschen Einbettungssatz [McL00, Theorem 3.26] schließen, dass  $\tilde{u}_{\text{qp}}$  stetig in  $x$  ist. Daraus erhalten wir für  $\alpha_0 \in I$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-M}^M \int_{\tilde{I}} \tilde{u}_{\text{qp}}(x_1 + 2\pi j, x_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2(\mathbf{d}_1)) \tilde{g}^\pm(\mathbf{d}_1) e^{2\pi i \alpha_0 j} d(\mathbf{d}_1) \\ &= \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=-M}^M \tilde{u}_{\text{qp}}(x, \tilde{\mathbf{d}}_1/k, \pm \mathbf{d}_2(\tilde{\mathbf{d}}_1/k)) \tilde{g}^\pm(\tilde{\mathbf{d}}_1/k) e^{2\pi i (\alpha_0 - \tilde{\mathbf{d}}_1) j} d(\tilde{\mathbf{d}}_1). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Die glatte und periodische Funktion  $(\tilde{\mathbf{d}}_1 \mapsto \sum_{j=-M}^M e^{2\pi i (\alpha_0 - \tilde{\mathbf{d}}_1) j})$  konvergiert im distributionellem Sinne (d. h. in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ) gegen die periodische Delta-Distribution  $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_{\alpha_0 + m}$  gleichmäßig bzgl.  $\alpha_0 \in I$  (siehe [SV02, Kapitel 5]). Deshalb ist für jedes  $\alpha_0 \in I$  und  $x \in \Omega_0^R$  der Grenzwert durch die endliche Summe

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{j=-M}^M k v_{\tilde{g}}(x_1 + 2\pi j, x_2) e^{2\pi i \alpha_0 j} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_{\text{qp}}\left(x, \frac{\alpha_0 + m}{k}, \mathbf{d}_2\left(\frac{\alpha_0 + m}{k}\right)\right) \tilde{g}^+\left(\frac{\alpha_0 + m}{k}\right) \\ & \quad + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_{\text{qp}}\left(x, \frac{\alpha_0 + m}{k}, -\mathbf{d}_2\left(\frac{\alpha_0 + m}{k}\right)\right) \tilde{g}^-\left(\frac{\alpha_0 + m}{k}\right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

gegeben. Aus [SV02, Kapitel 5] folgt zudem die Konvergenz bzgl. der Norm in  $L^2(I \times \Omega_0^R)$ .

Nun wollen wir die Formel auf alle  $g \in L^2(\tilde{I})$  erweitern. Es sei hierzu für  $u_g^\pm$  aus (6.4) die Funktion  $u_p^\pm(x, k\mathbf{d}_1) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_g^\pm(x, \mathbf{d}_1 + j)$  definiert. Für die  $L^2(\Omega^R)$ -Norm gilt analog zu (6.5), dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^R} k^2 |v_g|^2 dx &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\Omega_0^R} \left| \int_{-1/2}^{1/2} u_p^+(x, \tilde{\mathbf{d}}_1) e^{-2\pi i \tilde{\mathbf{d}}_1 m} d(\tilde{\mathbf{d}}_1) \right|^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega_0^R} \left| \int_{-1/2}^{1/2} u_p^-(x, \tilde{\mathbf{d}}_1) e^{-2\pi i \tilde{\mathbf{d}}_1 m} d(\tilde{\mathbf{d}}_1) \right|^2 dx \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\Omega_0^R} \left| \widehat{(u_p^+)}_{-m}(x) \right|^2 + \left| \widehat{(u_p^-)}_{-m}(x) \right|^2 dx, \end{aligned}$$

wobei  $\widehat{(u_p^\pm)}_m(x)$  der  $m$ -te Fourier-Koeffizient bzgl.  $\mathbf{d}_1$  ist. Die Fourier-Koeffizienten sind beschränkt durch

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\Omega_0^R} \left| \widehat{(u_p^\pm)}_m(x) \right|^2 dx \leq \|u_g^\pm\|_{L^2(\tilde{I} \times \Omega_0^R)}^2 < \infty,$$

sodass die Funktion  $v_g$  in  $L^2(\Omega^R)$  liegt und damit auch  $\mathcal{J}_R v_g \in L^2(I \times \Omega_0^R)$ . Wegen der Dichtheit von  $C_0^\infty(\tilde{I})$  in  $L^2(\tilde{I})$  können wir eine Folge  $\{g_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  mit  $\|g^\pm - \tilde{g}_N^\pm\|_{L^2(\tilde{I})} \rightarrow 0$  für  $N \rightarrow \infty$  wählen, sodass für  $M, N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{J}_R v_g(\alpha, x) - \sum_{j=-M}^M v_g(x_1 + 2\pi j, x_2) e^{2\pi i \alpha j} \right\|_{L^2(I \times \Omega_0^R)} \rightarrow 0, \\ &\left\| \sum_{j=-M}^M (v_g(x_1 + 2\pi j, x_2) - v_{\tilde{g}_N}(x_1 + 2\pi j, x_2)) e^{2\pi i \alpha j} \right\|_{L^2(I \times \Omega_0^R)} \rightarrow 0, \\ &\left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_{\text{qp}} \left( x, \frac{\alpha + m}{k}, \pm \mathbf{d}_2 \left( \frac{\alpha + m}{k} \right) \right) (g^\pm(\alpha + m/k) - \tilde{g}_N^\pm(\alpha + m/k)) \right\|_{L^2(I \times \Omega_0^R)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Demnach gilt die Gleichung (6.6) für alle  $g \in L^2(S)$  mit  $\text{supp } g^\pm \subseteq \tilde{I}$ .

Es sei  $g \in L^2(S)$  nun eine Funktion aus dem Kern, die  $Hg = 0 \in L^2(D)$  erfüllt. Die entsprechende Herglotz-Funktion  $v_g$  löst die homogene Helmholtz-Gleichung und verschwindet auf  $D$ , sodass aus dem Satz über die eindeutige Fortsetzbarkeit 3.6  $v_g = 0$  in  $\mathbb{R}^2$  folgt. Das periodische gestreute Feld ist beschränkt durch  $\|\tilde{u}_{\text{qp}}^s(\cdot, \mathbf{d})\|_{H^1(\Omega_0^{R'})} \leq CR' \|\tilde{u}_{\text{qp}}^s(\cdot, \mathbf{d})\|_{H^1(\Omega_0^{R_0})}$  für alle  $R' > R_0$  und das einfallende Feld  $u^{\text{inc}}$  wächst exponentiell in Richtung  $\mp x_2$  für  $|\mathbf{d}_1| > 1$  auf  $S^\pm$ . Daraus folgt insbesondere, dass  $\text{supp } g^\pm \subseteq \tilde{I}$  sein muss. Somit können wir die Formel (6.6) auf  $g$  und anschließend den Randoperator  $(T_{\alpha_0}^{\pm R} - \partial/\partial x_2)$

für ein  $\alpha_0 \in I$  auf die Spur des Gesamtfeldes anwenden. Für das gestreute Feld  $\tilde{u}_{\text{qp}}^s = \tilde{u}_{\text{qp}} - u^{\text{inc}}$  gilt  $(T_{\alpha_0}^{\pm R} - \partial/\partial x_2) \tilde{u}_{\text{qp}}^s(\cdot, \mathbf{d}) = 0$ . Da die Funktionen  $\{e^{-i(\alpha_0+m)x_1}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  linear unabhängig in  $L^2([-\pi, \pi])$  sind, erhalten wir aus

$$0 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \pm 2i \sqrt{k^2 - (\alpha_0 + m)^2} g^{\pm} \left( \frac{\alpha_0 + m}{k} \right) e^{-i(\alpha_0+m)x_1 - i\sqrt{k^2 - (\alpha_0+m)^2} R}$$

für alle  $x \in \Gamma_0^{\pm R}$ , dass  $g^{\pm} = 0$  in  $\tilde{I}$  und infolgedessen auch  $g = 0$  in  $S$  gilt.

Für die Charakterisierung des Bildraumes von  $H_{\text{qp}}$  ist zunächst einmal schnell ersichtlich, dass die Inklusion  $\overline{\mathcal{R}(H_{\text{qp}})} \subseteq H_{\text{inc}}(D)$  gilt. Um die andere Inklusion zu zeigen, ist es hinreichend die Injektivität von  $H_{\text{qp}}^*$  auf  $H_{\text{inc}}(D)$  zu zeigen. Es sei hierzu  $\phi \in H_{\text{inc}}(D)$  eine Funktion mit  $H_{\text{qp}}^* \phi = 0$ . Wir betrachten das gestreute Feld  $w \in H^1(\Omega^R)$  als Lösung des Problems 3 mit  $\Delta w + k^2 n_p^2 w = \phi$ . Die Anwendung der Greenschen Formel ergibt damit für alle  $\mathbf{d}' \in S$

$$\begin{aligned} w^\infty(\mathbf{d}') &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi(2M+1)}^{\pi(2M+1)} \frac{\partial w}{\partial x_2} u^{\text{inc}}(\cdot, R, \mathbf{d}') - w \frac{\partial u^{\text{inc}}(\cdot, R, \mathbf{d}')}{\partial x_2} dx \\ &\quad - \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi(2M+1)}^{\pi(2M+1)} \frac{\partial w}{\partial x_2} u^{\text{inc}}(\cdot, -R, \mathbf{d}') - w \frac{\partial u^{\text{inc}}(\cdot, 0, \mathbf{d}')}{\partial x_2} dx \\ &= H_{\text{qp}}^* \phi(\mathbf{d}') = 0. \end{aligned}$$

Aus Lemma 6.5 folgt nun, dass  $w$  in dem Komplement  $D^c$  verschwindet und insbesondere  $w \in H_0^1(D)$  ist. Da  $\phi$  ein Element aus  $H_{\text{inc}}(D)$  ist, erhalten wir

$$\|\phi\|_{L^2(D)}^2 = \int_D [\Delta w + k^2 n_p^2 w] \bar{\phi} dx = 0$$

und damit ist  $H_{\text{qp}}$  injektiv auf  $H_{\text{inc}}(D)$ . □

Die Dichtheit von  $H_{\text{qp}}^*$  ist eine direkte Folgerung aus der Injektivität von  $H_{\text{qp}}$ .

**Folgerung 6.10.** *Der Operator  $H_{\text{qp}}^* : L^2(D) \rightarrow L^2(S)$  ist kompakt mit dichtem Bild.*

Für gegebene Funktionen  $n^2$ ,  $n_p^2$  und  $q$  definieren wir das homogene *interior transmission problem* als das Finden einer Lösung  $(w^s, v) \in L^2(D)^2$ , die die Bedingungen  $w^s \in H^2(D)$  und

$$\Delta w^s + k^2 n^2 w^s = -k^2 q v \quad \text{in } D \quad (6.7a)$$

$$\Delta v + k^2 \overline{n_p^2} v = 0 \quad \text{in } D \quad (6.7b)$$

$$w^s = 0 \quad \text{auf } \partial D \quad (6.7c)$$

$$\frac{\partial w^s}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial D \quad (6.7d)$$

erfüllt. Für die Faktorisierungsmethode werden wir annehmen, dass es nur die triviale Lösung zu diesem Problem gibt. Wir weisen nun die Voraussetzung für den Operator  $\mathcal{T}$  nach.

**Lemma 6.11.** *Es sei die Annahme 3 erfüllt. Zudem soll es keine nicht-triviale Lösung zu (6.7) geben. Dann ist der Operator  $(\operatorname{Im} \mathcal{T})$  strikt positiv auf  $\overline{\mathcal{R}(H_{\text{qp}})}$  und der Operator  $(\operatorname{Re} \mathcal{T})$  kann zerlegt werden in  $(\operatorname{Re} \mathcal{T}) = C + K$  mit einem selbstadjungierten und koerziven Operator  $C$  und einem kompakten Operator  $K$ .*

*Beweis:* Für alle  $v \in L^2(D)$  bezeichnen wir mit  $v^s$  die Lösung des Problems 3 für die rechte Seite  $k^2 q v$ . Wir definieren den koerziven und selbstadjungierten Operator  $C: L^2(D) \rightarrow L^2(D)$  durch  $Cv := -k^2(\operatorname{Re} q)v$ . Für den restlichen Teil  $K := (\operatorname{Re} \mathcal{T}) - C: L^2(D) \rightarrow L^2(D)$  erhalten wir für  $w, v \in L^2(D)$  die Gleichung

$$\begin{aligned} (w, Kv)_{L^2(D)} &= \frac{1}{2} (w, \mathcal{T}v)_{L^2(D)} + \frac{1}{2} (\mathcal{T}w, v)_{L^2(D)} - (w, Cv)_{L^2(D)} \\ &= -k^2 \int_D \frac{1}{2} \bar{q} w (\bar{v} + \bar{v}^s) + \frac{1}{2} q (w + w^s) \bar{v} - (\operatorname{Re} q) w \bar{v} \, dx \\ &= \frac{-k^2}{2} \int_D \bar{q} w \bar{v}^s + q w^s \bar{v} \, dx. \end{aligned}$$

Da beide Funktionen  $w^s$  und  $v^s$  aus  $H^1(D)$  sind, folgt aus dem Einbettungssatz [McL00, Theorem 3.27] die Kompaktheit von  $K$ .

Es bleibt die Positivität von  $(\operatorname{Im} \mathcal{T})$  zu zeigen. Wir rechnen zunächst nach, dass  $(v, (\operatorname{Im} \mathcal{T})v)_{L^2(D)} = -\operatorname{Im} (\mathcal{T}v, v)_{L^2(D)}$  gilt. Deswegen werden wir den Term  $-\operatorname{Im} (\mathcal{T}v, v)_{L^2(D)}$  statt  $(v, (\operatorname{Im} \mathcal{T})v)_{L^2(D)}$  abschätzen. Weiterhin können wir das Skalarprodukt  $(\mathcal{T}v, v)_{L^2(D)}$  schreiben als

$$(\mathcal{T}v, v)_{L^2(D)} = \int_D -k^2 q (v + v^s) \bar{v} \, dx \quad \text{für alle } v \in L^2(D).$$

Wegen der Identität  $(v + v^s) \bar{v} = |v + v^s|^2 - (v + v^s) \bar{v}^s$  und Lemma 3.3 erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_{\Omega^R} k^2 q v \bar{v}^s \, dx &= \operatorname{Im} \left( \int_{\Omega^R} |\nabla v^s|^2 - k^2 n_p^2 |v^s|^2 - k^2 q |v^s|^2 \, dx \right. \\ &\quad \left. - \left[ \int_{\Gamma^R} - \int_{\Gamma^{-R}} \right] T^{\pm R}(v^s) \bar{v}^s \, dS \right) \\ &\leq \int_{\Omega^R} -k^2 (\operatorname{Im} n_p^2 + q) |v^s|^2 \, dx \leq \int_{\Omega^R} -k^2 (\operatorname{Im} q) |v^s|^2 \, dx \end{aligned}$$

und folgern daraus

$$-\operatorname{Im}(\mathcal{T}v, v)_{L^2(D)} \geq k^2 \int_D (\operatorname{Im} q) |v + v^s|^2 dx \geq 0 \quad \text{für alle } v \in L^2(D). \quad (6.8)$$

Somit ist  $(\operatorname{Im} \mathcal{T})$  ein semi-positiver Operator. Wir wollen nun die strikte Positivität zeigen und wählen ein  $v \in \overline{\mathcal{R}(H_{\text{qp}})}$ , das die Gleichung  $\operatorname{Im}(\mathcal{T}v, v)_{L^2(D)} = 0$  erfüllt. Die Rechnung (6.8) impliziert, dass  $v^s$  auf  $\{\operatorname{Im} n_p^2 > 0\}$  verschwindet. Nach dem Satz über die eindeutige Fortsetzbarkeit 3.6 verschwindet  $v^s$  deshalb auf der zusammenhängenden Menge  $D^c$ , die  $\{\operatorname{Im} n_p^2 > 0\} \setminus \overline{D}$  beinhaltet. Aus der Annahme, dass es keine nicht-triviale Lösung für das Problem (6.7) gibt, folgern wir, dass  $v^s$  überall verschwinden muss und infolgedessen ist  $v$ , wie behauptet, die Nullfunktion.  $\square$

Die letzten beiden Lemmas 6.11 und 6.7 sowie die Folgerung 6.10 weisen damit alle Voraussetzungen nach, um die Proposition 6.8 anwenden zu können. Wir erhalten demnach die folgende Charakterisierung des Trägers.

#### Satz 6.12

Es sollen die Voraussetzungen aus Lemma 6.11 gelten, dann ist der Operator  $F_{\#} := |(\operatorname{Re} F)| + (\operatorname{Im} F): L^2(S) \rightarrow L^2(S)$  strikt positiv. Wenn wir mit  $\{\lambda_j, \psi_j\}_{j=1}^{\infty}$  das Eigensystem von  $F_{\#}$  bezeichnen, dann erhalten wir die Charakterisierung des Trägers  $D$  durch

$$z \in D \Leftrightarrow \phi_z^{\infty} \in \mathcal{R}(F_{\#}^{1/2}) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|(\phi_z^{\infty}, \psi_j)_{L^2(S)}|^2}{\lambda_j} < \infty. \quad (6.9)$$

## 6.5. Numerische Beispiele für den theoretischen Fernfeld-Operator

In diesem Abschnitt werden wir numerische Beispiele präsentieren, um die theoretischen Resultate zu überprüfen. Hierfür betrachten wir statt eines kleinen  $\eta > 0$  nur den Grenzfall  $\eta = 0$  und diskretisieren das Intervall  $[-1, 1]$  in  $N_d$  äquidistante Punkte  $\{\mathbf{d}_1^j\}_{j=1}^{N_d}$  mit

$$\mathbf{d}_1^j := -1 + \frac{1}{N_d} + \frac{2}{N_d}(j-1) \quad \text{für } j = 1, \dots, N_d.$$

Wir legen die diskreten Richtungen als  $\mathbf{d}^{j\pm} := (\mathbf{d}_1^j, \mathbf{d}_2^{j\pm})$  fest mit einer von  $\mathbf{d}_1^j$  abhängigen zweiten Komponente, die gegeben ist durch  $\mathbf{d}_2^{j\pm} := \pm \sqrt{1 - |\mathbf{d}_1^j|^2}$ .

Für die Erzeugung der Daten nehmen wir ebene Wellen  $u^{\text{inc}}(\cdot, \mathbf{d}^{j,\pm})$  als rechte Seiten und berechnen das quasiperiodische gestreute Feld mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode. Die approximierten Gesamtfelder des quasiperiodischen Problems nehmen wir anschließend her, um das gestreute Feld des gestörten Problems durch die numerische Methode aus Unterkapitel 4.6 anzunähern. Analog approximieren wir die Fundamentallösung durch den Algorithmus in Unterkapitel 4.6, indem wir  $q = 0$  und  $f = \delta_z$  setzen. Anschließend können wir die Fernfelder der gestreuten Felder mit der Formel aus Bemerkung 6.4 für die selbe Verteilung der Punkte  $\{\mathbf{d}_1^j\}_{j=1}^{N_d}$  berechnen.

Es seien  $\tilde{F}_j^\pm \in \mathbb{C}^{2N_d}$ ,  $j = 1, \dots, N_d$ , die Vektoren der Werte des Fernfeldes für die einfallenden Wellen  $u^{\text{inc}}(\cdot, \mathbf{d}^{j,\pm})$  ausgewertet an den Punkten  $\mathbf{d}^{j,\pm}$ . Wir definieren den diskreten Fernfeld-Operator  $\tilde{F}$  als

$$\tilde{F} = \left( \tilde{F}_1^+, \dots, \tilde{F}_{N_d}^+, \tilde{F}_1^-, \dots, \tilde{F}_{N_d}^- \right) \in \mathbb{C}^{(2N_d) \times (2N_d)}.$$

Wenn wir mit  $\{(\tilde{\lambda}_j, \tilde{\psi}_j)\}_{j=1}^{2N_d}$  das diskrete Eigensystem des Operators  $\tilde{F}_\# := |(\text{Re } \tilde{F})| + (\text{Im } \tilde{F})$  und  $\{\tilde{\phi}_z^\infty\}_{z \in \Omega_0^R}$  als die diskreten Fernfelder der Fundamentallösung bezeichnen, dann berechnen wir für die Lokalisierung des Trägers die Summe

$$M_z := \sum_{j=1}^{N_d} \frac{|(\tilde{\phi}_z^\infty, \tilde{\psi}_j)_{L^2(S)}|^2}{\tilde{\lambda}_j}$$

für ein  $z \in \Omega_0^R$ , wodurch wir eine diskrete Version der Gleichung (6.9) erhalten. Aus diesen Werten können wir für Punkte  $z \in [-\pi, \pi] \times [0, 5]$  den reziproken Wert  $1/M_z$  visualisieren. Für die Beispiele geben wir die Resultate mit einem verrauschten und einem unverrauschten Fernfeld-Operator an. Für das Rauschen generieren wir gleichverteilte Zufallszahlen um Null, die wir auf 1% runterskalieren, d. h. wir wenden den Algorithmus auf die Daten  $\tilde{F}^\varepsilon = \tilde{F} + c$  für ein  $c \in \mathbb{C}^{(2N_d) \times (2N_d)}$  an, das  $\|c\|_2 = 0.01\|\tilde{F}\|_2$  erfüllt, wobei  $\|\cdot\|_2$  der größte Singulärwert ist. Zur Erzeugung der Daten setzen wir eine Abschneideschranke für den Dirichlet-Neumann-Operator der Randbedingung auf  $|j| > 300$ , diskretisieren  $\Omega_0^R$  in  $2^{2 \cdot 6}$  rechteckige Zellen und das Intervall  $\bar{I}$  in  $2^7$  Teilintervalle. Die relative Toleranz von GMRES ist auf  $10^{-10}$  gesetzt und wir verwenden die Variablentransformation  $g_4$  aus Unterkapitel 3.7.1 für die diskrete inverse Bloch-Floquet-Transformation. Wir betrachten  $2N_d = 128$  einfallende Richtungen als ebene Wellen und  $2N_d = 128$  ausgehende Richtungen für das Fernfeld. Für die rechten Seiten nehmen wir  $25^2 = 625$  Punkte  $\{z_j\}_{j=1}^{625}$  in  $\Omega_0^R$ , die in jede Richtung äquidistant sind.

### Beispiel 1

Für das erste Beispiel betrachten wir ein vereinfachtes Modell von Nano-Gras-

Strukturen und simulieren einen Produktionsfehler, bei dem ein paar Stäbchen fehlen. In der Abbildung 6.1 sind die Parameter und die Resultate in  $[-3\pi, 3\pi] \times [0, 5]$  für verschiedene Wellenzahlen visualisiert. Der Brechungsindex nimmt den Wert 2 innerhalb des Objektes, den Wert 1 außerhalb des Objektes und den Wert  $2 + 1i$  innerhalb des absorbierenden Materials an.

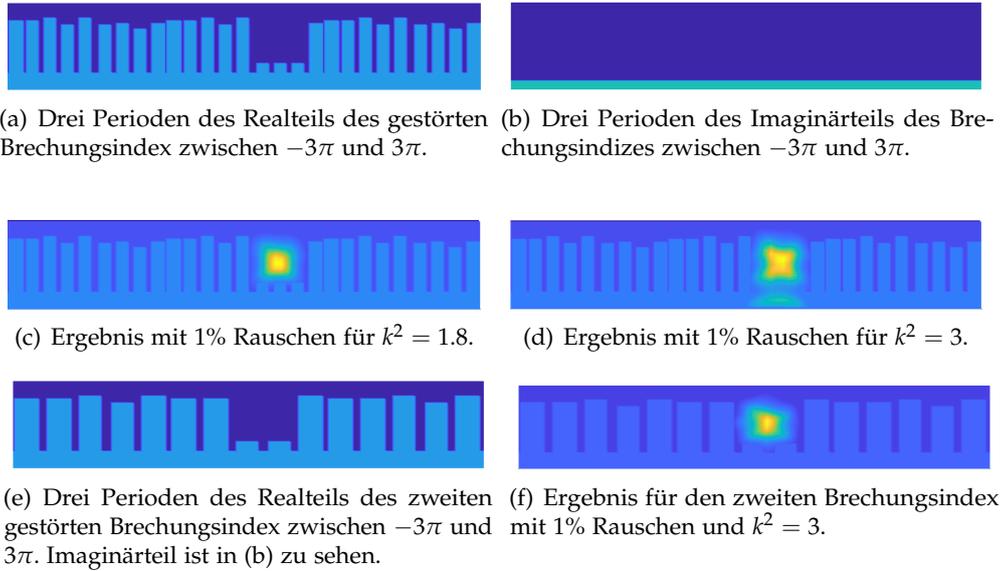


Abbildung 6.1.: Die Parameter und das Ergebnis für das erste Beispiel der Faktorisierungsmethode.

In den nächsten Beispielen werden wir den Einfluss verschiedener Wellenzahlen und der Absorption auf die Qualität der Rekonstruktion überprüfen. Dafür betrachten wir für alle  $j \in \mathbb{Z}$  den folgenden ungestörten Brechungsindex

$$n_p^2(x + 2\pi j) = \begin{cases} 2, & x \in ([-3/2, 3/2] \times [0, 9/2] \\ & \cup [-\pi, \pi] \times [0, 7/2]) \setminus [-1, 1] \times [1, 3], \\ 2 + \nu i, & x \in [-1, 1] \times [1, 3], \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit einem  $\nu > 0$ , welches wir später wählen, und die Störung wählen wir als

$$q_1(x) = \begin{cases} 5.5, & x \in [-1/2, 1] \times [1, 7/2] \cup [-2, 1] \times [1, 2], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

(vgl. Abbildung 6.2).

### Beispiel 2

Für das zweite Beispiel betrachten wir den Einfluss des Bereichs der Absorpti-

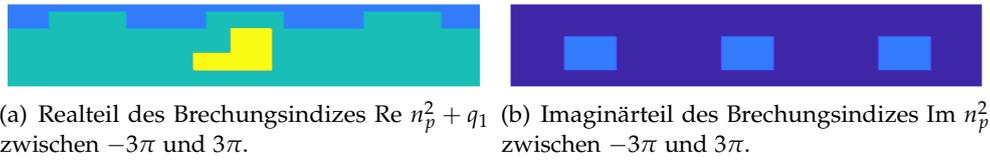


Abbildung 6.2.: Die Hauptparameter für die numerischen Experimente für die Faktorisierungsmethode.

on. Wir berechnen zwei Beispiele, für die wir ein relativ kleines  $\nu = 10^{-3}$  und alternativ  $\nu = 10^{-6}$  mit  $k^2 = 0.4$  und  $q = q_1$  wählen. Die Ergebnisse mit sowie ohne Rauschen sind in [Abbildung 6.3](#) dargestellt.

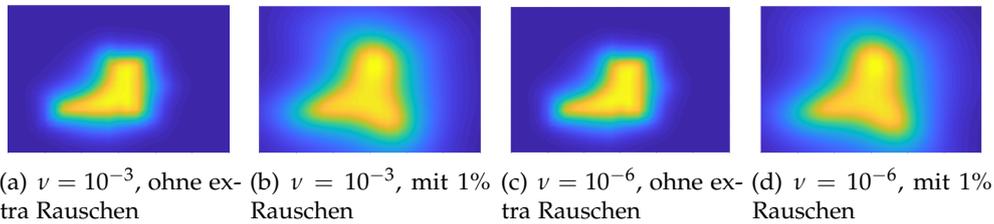


Abbildung 6.3.: Ergebnisse für Beispiel 2 mit  $k^2 = 0.4$ ,  $q = q_1$ ,  $\nu = 10^{-3}$  sowie  $\nu = 10^{-6}$ .

### Beispiel 3

Für das dritte Beispiel testen wir eine größere Wellenzahl  $k^2 = 1.8$  mit  $\nu = 1$  und  $\nu = 10^{-3}$ . Die Ergebnisse sind in [Abbildung 6.4](#) für  $\Omega_0^R = [-\pi, \pi] \times [0, 5]$  visualisiert.

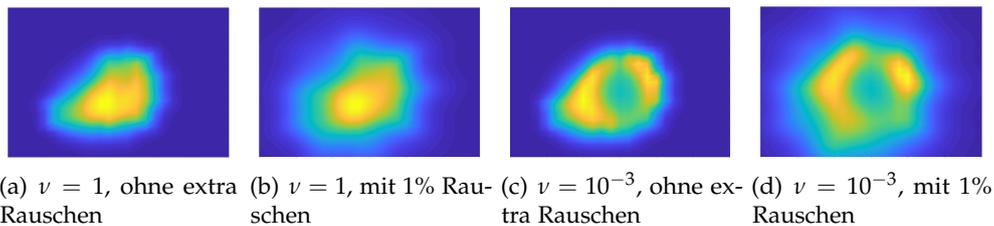


Abbildung 6.4.: Ergebnisse für Beispiel 3 mit  $k^2 = 1.8$ ,  $\nu = 1$  und  $\nu = 10^{-3}$ .

### Beispiel 4

Dieses Beispiel zeigt die Ergebnisse der Rekonstruktion für eine kleine Wellenzahl  $k^2 = 0.09$  mit  $\nu = 10^{-3}$  sowie eine große Wellenzahl  $k^2 = 3$  mit  $\nu = 1$ . Die Ergebnisse für  $\Omega_0^R = [-\pi, \pi] \times [0, 5]$  mit und ohne Rauschen sind in der [Abbildung 6.5](#) zu finden.

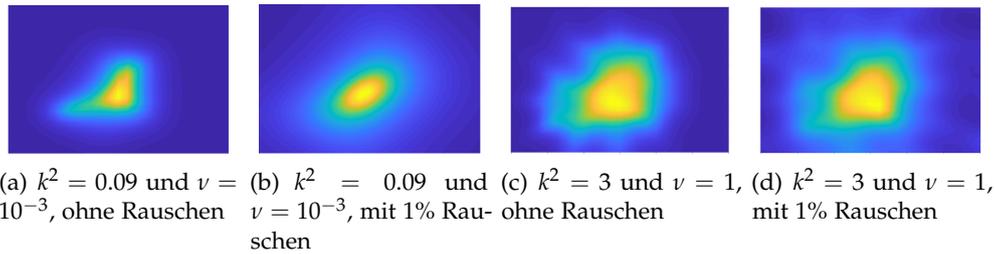


Abbildung 6.5.: Ergebnisse für Beispiel 4 mit  $k^2 = 0.09$ ,  $\nu = 10^{-3}$  und mit  $k^2 = 3$ ,  $\nu = 1$ .

Als Fazit stellen wir fest, dass das binäre Kriterium zur Rekonstruktion der Störung, das durch Satz 6.12 die theoretische Grundlage hat, numerisch bestätigt werden kann. Die Qualität der Rekonstruktion scheint nicht so stark von dem Wert  $\nu$  des Imaginärteils des Brechungsindex abzuhängen, wie wir in Abbildung 6.3 feststellen. Dies unterscheidet sich von dem Newton-Verfahren, welches wir im letzten Unterkapitel 5.1 angewandt haben, bei dem ein kleinerer  $\nu$ -Wert mehr Auswertungen für die Rekonstruktion zur Folge hat. Nichtsdestotrotz ist die Qualität der Rekonstruktion von der adäquaten Wahl der Wellenzahl für die Größe der Störung gebunden. Wenn die Wellenzahl zu groß ist, sinkt die Qualität der Rekonstruktion und ein kleiner  $\nu$ -Wert hat einen negativen Einfluss darauf, wie für den Fall  $k^2 = 1.8$  in Abbildung 6.4 zu erkennen ist. Für kleinere Objekte gibt eine größere Wellenzahl bessere Ergebnisse (vgl. Abbildung 6.1).

Zum Schluss geben wir noch einmal ein Beispiel, wie gut die Faktorisierungsmethode bei der Problemstellung mit der homogenen Dirichlet-Randbedingung am unteren Rand funktioniert. Die Methode kann für diesen Fall analog hergeleitet werden. Wir haben dann jedoch nur halb so viele Daten im Vergleich zu dem Problem im freien Raum zur Verfügung, denn wir betrachten nur die einfallende Wellen von oben und messen das Fernfeld ebenfalls nur am oberen Rand. Aufgrund dessen erkennen wir in der Abbildung 6.6, dass die Rekonstruktion des Trägers zum unteren Rand schlechter wird.

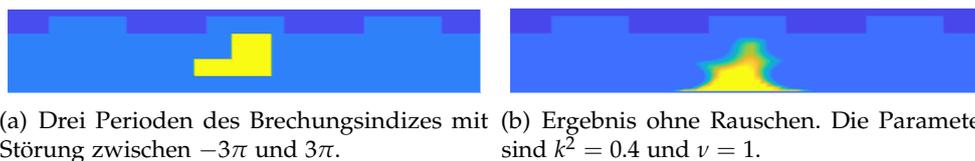


Abbildung 6.6.: Ergebnisse für die Problemstellung mit der homogenen Dirichlet-Randbedingung auf  $\Gamma^{-R}$ .

## 6.6. Numerische Beispiele für physikalische Daten

Bisher haben wir den nicht-physikalischen diskreten Fernfeld-Operator  $\tilde{F}$  für die numerischen Beispiele genutzt, der durch die Lösungen des Problems 3 für die rechten Seiten  $f = k^2 q \overline{\tilde{u}_{\text{qp}}}(\cdot, \mathbf{d})$  generiert wurde. In diesem Abschnitt wollen wir den nicht-physikalischen diskreten Fernfeld-Operator durch  $\tilde{F}_{\text{approx}}^\varepsilon$  aus den verrauschten Daten des physikalischen diskreten Fernfeld-Operators  $\tilde{F}_p^\varepsilon$  approximieren. Dieser wurde aus den Lösungen des Problems 3 mit rechten Seiten  $f = k^2 q \tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d})$  hergeleitet. Für  $D \cap \{\text{Im } n_p^2 > 0\} = \emptyset$  können wir analog zu Satz 6.9 zeigen, dass der Abschluss des Bildes des erweiterten Operators  $H_{\text{qp}}: L^2(S) \rightarrow L^2(\tilde{\Omega})$  mit  $\tilde{\Omega} := \Omega_0^R \setminus \{\text{Im } n_p^2 > 0\}$  durch  $H_{\text{inc}}(\tilde{\Omega})$  charakterisiert ist. Mit der selben Argumentation zeigen wir zudem, dass  $H_{\text{inc}}(\tilde{\Omega})$  der Abschluss des Bildes von  $H_{\text{qp}}^\top: L^2(S) \rightarrow L^2(\tilde{\Omega})$ ,

$$H_{\text{qp}}^\top g := \int_S \tilde{u}_{\text{qp}}(\cdot, \mathbf{d}) g(\mathbf{d}) dS(\mathbf{d}),$$

ist, indem wir die Identifikation  $H_{\text{qp}}^\top g = \overline{H_{\text{qp}} g}$  verwenden. Da der physikalische Fernfeld-Operator  $F_p$  die Zerlegung  $F_p = H_{\text{qp}}^* T H_{\text{qp}}^\top$  und der theoretische Fernfeld-Operator die Zerlegung  $F = H_{\text{qp}}^* T H_{\text{qp}}$  besitzt, ist die Idee, Vektoren  $\{\tilde{g}_i^\delta\}_{i=1}^{2N_d}$  als Lösungen zu dem linearen Gleichungssystem

$$\tilde{H}_{\text{qp}} \tilde{g}_i^\delta \approx \tilde{H}_{\text{qp}}^\top e_i$$

zu approximieren, wobei wir den Parameter  $\delta > 0$  mit der Tikhonov-Regularisierung wählen und  $e_i \in \mathbb{R}^{2N_d}$ ,  $i = 1, \dots, 2N_d$ , die kanonischen Vektoren sind. Den diskreten nicht-physikalischen Fernfeld-Operator  $\tilde{F}$  nähern wir so Zeile für Zeile aus den Daten von  $\tilde{F}_p^\varepsilon$  durch  $\{\tilde{g}_i^\delta\}_{i=1}^{2N_d}$  an, denn

$$\tilde{F} e_i \approx \tilde{F}_p^\varepsilon \tilde{g}_i^\delta =: \tilde{F}_{\text{approx}}^\varepsilon e_i.$$

Für die Diskretisierung des Herglotz-Operators wählen wir ein Netz aus  $100 \cdot 95$  von in jeweils Richtung äquidistant verteilten Punkten, die die Menge  $[-\pi, \pi] \times [1/2, 5]$  abdecken. Wir verwenden das  $L$ -Kurvenkriterium, um aus dem Verhältnis von  $\|(\tilde{H}_{\text{qp}} \tilde{g}_i^\delta)_{i=1}^{2N_d} - \tilde{H}_{\text{qp}}^\top\|_2 / \|\tilde{H}_{\text{qp}}^\top\|_2$  zu  $\|(\tilde{g}_i^\delta)_{i=1}^{2N_d}\|_2$  eine Schätzung von 3% für den Rauschlevel zu erhalten und nehmen eine abfallende Folge von  $\delta \rightarrow 0$  bis

$$\|(\tilde{H}_{\text{qp}} \tilde{g}_i^\delta)_{i=1}^{2N_d} - \tilde{H}_{\text{qp}}^\top\|_2 \leq 0.03 \|\tilde{H}_{\text{qp}}^\top\|_2$$

zum ersten Mal erfüllt wird. Zum Vergleich haben wir auch die sogenannte *Linear Sampling Method* (LSM) angewandt. Für LSM approximieren wir

die Gleichung  $\tilde{F}_p^\varepsilon g_z \approx \tilde{\phi}_z^\infty$ , indem wir ein Tikhonov-Funktional mithilfe des Diskrepanzprinzips minimalisieren, d. h. wir berechnen ein  $\delta_z > 0$ , sodass  $\|\tilde{F}_p^\varepsilon g_z^\delta - \tilde{\phi}_z^\infty\|^2 = 0.01 \|\tilde{F}_p^\varepsilon\|^2 \|g_z^\delta\|^2$  gilt. Anschließend visualisieren wir die Abbildung  $z \mapsto 1/\|g_z^\delta\|$ . Für eine genauere Beschreibung und die theoretische Grundlage der Methode sei auf [CCH16, Kapitel 2] verwiesen.

In der Abbildung 6.7 demonstrieren wir die Ergebnisse für den approximierten theoretischen Fernfeld-Operator im Vergleich zu den Resultaten für den theoretischen Fernfeld-Operator und der LSM. Für jedes Beispiel wählen wir  $k^2 = 3$  und fügen ein additives Rauschen von 1% für  $\tilde{F}$  und  $\tilde{F}_p$  hinzu. Das Residuum zwischen dem theoretischen diskreten Fernfeld-Operator  $\tilde{F}$  und dem approximierten theoretischen Operator  $\tilde{F}_{\text{approx}}^\varepsilon$  liegt bei 33%, nichtsdestotrotz können wir damit die Störung lokalisieren. Zum Vergleich haben wir zusätzlich die Faktorisierungsmethode direkt auf den physikalischen Fernfeld-Operator angewandt.

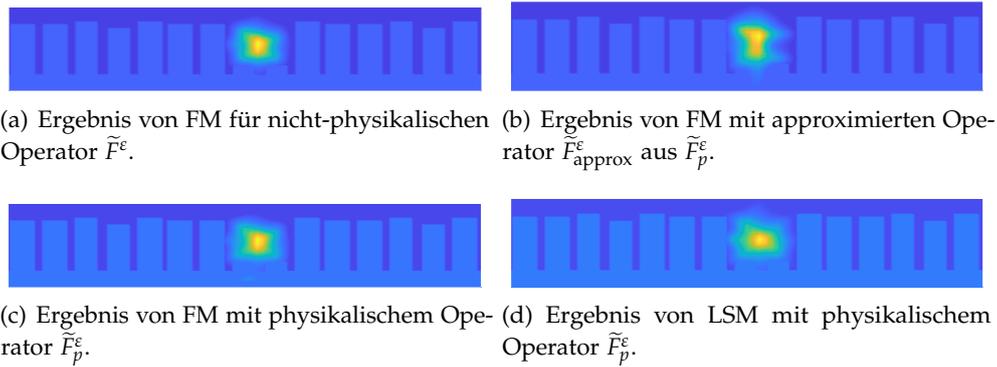


Abbildung 6.7.: Ergebnisse für FM und LSM mit  $k^2 = 3$  und 1% relativen additiven Rauschen.

Obwohl wir für die Anwendung der Faktorisierungsmethode auf den ver-rauschten physikalischen Fernfeld-Operator keine Legitimation haben, sind die Ergebnisse in (a) und (c) aus Abbildung 6.7 vergleichbar und in gewisser Weise besser als (b). Für das andere Nano-Gras-Beispiel aus der Abbildung 6.1 konnten wir eine ähnliche Qualität der Resultate feststellen, wie in Abbildung 6.8 zu sehen.

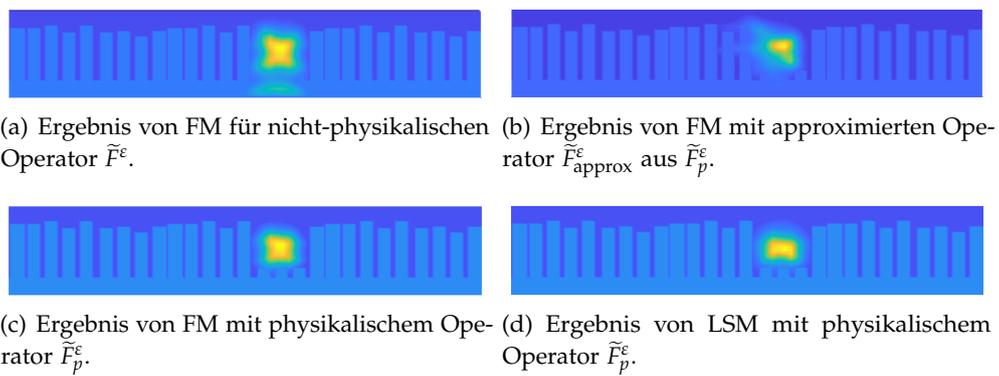


Abbildung 6.8.: Ergebnisse für FM und LSM mit  $k^2 = 3$  und 1% relativen additiven Rauschen.



# Anhang

---

**Satz A.1.** Es sei  $X$  ein normierter Raum und  $T \in \mathcal{L}(X)$ . Konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$  in  $\mathcal{L}(X)$ , so ist  $(I - T)$  invertierbar mit

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Die Voraussetzungen sind insbesondere dann erfüllt, wenn  $X$  ein Banachraum ist und  $\|T\| < 1$  gilt. In diesem Fall erhalten wir zudem die Abschätzung

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq (1 - \|T\|)^{-1}.$$

*Beweis:* Es sei auf [Wer05, Satz II.1.11] verwiesen. □

**Folgerung A.2.** Es sei  $X$  ein normierter Raum,  $Y$  ein Banachraum,  $U \subseteq X$  eine offene Menge und  $T: U \rightarrow \mathcal{L}(Y)$  ein Fréchet-differenzierbarer Operator. Zudem sei  $T(r)$  für alle  $r \in U$  bijektiv und  $[T(r)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y)$ . Dann ist der Operator  $S: r \mapsto [T(r)]^{-1}$  Fréchet-differenzierbar für alle  $r \in U$  und die Ableitung für  $h \in X$  gegeben durch

$$S'(r)[h] = -[T(r)]^{-1}T'(r)[h][T(r)]^{-1}.$$

*Beweis:* Kürze im Folgenden  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(Y)}$  mit  $\|\cdot\|$  ab. Da der Operator  $T$  Fréchet-differenzierbar auf  $U$  ist, gilt für ein  $r \in U$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_X} \|T(r+h) - T(r) - T'(r)[h]\| = 0.$$

Daraus folgt die lokale Lipschitz-Stetigkeit von  $T$  auf  $U$ , denn

$$\begin{aligned} \|T(r+h) - T(r)\| &\leq \frac{1}{\|h\|_X} \|T(r+h) - T(r) - T'(r)[h]\| \|h\|_X \\ &\quad + \|T'(r)\|_{\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y))} \|h\|_X. \end{aligned}$$

Für ein genügend kleines  $h$  wird die Konvergenzbedingung aus Satz A.1 erfüllt, woraus die Abschätzung  $\|T(r+h)^{-1} - T(r)^{-1}\| \leq C(r)\|h\|_X$  folgt. Aus der

Fréchet-Differenzierbarkeit von  $T$  folgt weiter

$$\begin{aligned} & T(r) \left( T(r+h)^{-1} - T(r)^{-1} + T(r)^{-1}T'(r)[h]T(r)^{-1} \right) T(r) \\ &= T(r)T(r+h)^{-1}T(r) - T(r) + T'(r)[h] \\ &= (T(r+h) - T(r)) T(r+h)^{-1} (T(r+h) - T(r)) \\ &\quad - T(r+h) + T(r) + T'(r)[h] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \|T(r+h)^{-1} - T(r)^{-1} + T(r)^{-1}T'(r)[h]T(r)^{-1}\| \\ &\leq \|T(r)^{-1}\|^2 \left( \|T(r+h) - T(r)\|^2 \|T(r+h)^{-1}\| \right. \\ &\quad \left. + \|T(r+h) - T(r) - T'(r)[h]\| \right) \\ &\leq \|T(r)^{-1}\|^2 \left( C(r) \|h\|_X^2 \left( C(r) \|h\|_X + \|T(r)^{-1}\| \right) \right. \\ &\quad \left. + \|T(r+h) - T(r) - T'(r)[h]\| \right). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_X} \|T(r+h)^{-1} - T(r)^{-1} + T(r)^{-1}T'(r)[h]T(r)^{-1}\| = 0.$$

□

**Satz A.3.** Es sei  $X$  ein Banachraum,  $I: X \rightarrow X$  die Identität und  $K: X \rightarrow X$  ein kompakter linearer Operator. Dann ist entweder die Gleichung  $(I - K)f = g$  eindeutig lösbar oder die homogene Gleichung  $(I - K)f = 0$  hat nicht-triviale Lösungen.

*Beweis:* Es sei auf [Wer05, Aufgabe III.6.16] verwiesen.

□

**Satz A.4.** Es sei  $H$  ein Hilbertraum,  $F \in H^*$  und  $b: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  eine Sesquilinearform, die stetig ist, d.h. es gibt ein  $C_1 > 0$ , sodass

$$|b(u, v)| \leq C_1 \|u\|_H \|v\|_H \quad \text{für alle } u, v \in H$$

erfüllt ist, und die koerziv ist, d.h. es gibt ein  $\phi \in \mathbb{R}$  und ein  $C_2 > 0$ , sodass

$$\operatorname{Re}(e^{-i\phi} b(u, v)) \geq C_2 \|u\|_H^2 \quad \text{für alle } u \in H$$

gilt. Dann hat das Problem:

Suche ein  $u \in H$ , sodass  $b(u, v) = F(v)$  für alle  $v \in H$  erfüllt ist

eine eindeutige Lösung  $u \in H$ .

*Beweis:* Es sei auf [Rit09, Lemma 1.3.1] verwiesen.

□



## Literaturverzeichnis

---

- [AB03] H. Ammari und G. Bao. „Maxwell’s equations in periodic chiral structures“. In: *Mathematische Nachrichten* 251.1 (2003), S. 3–18.
- [AG05] T. Arens und N. I. Grinberg. „A complete factorization method for scattering by periodic structures“. In: *Computing* 75 (2005), S. 111–132.
- [AK03] T. Arens und A. Kirsch. „The factorization method in inverse scattering from periodic structures“. In: *Inverse Problems* 19 (2003), S. 1195–1211.
- [Alz+18] G. Alzetta, D. Arndt, W. Bangerth, V. Boddu, B. Brands, D. Davydov, R. Gassmoeller, T. Heister, L. Heltai, K. Kormann, M. Kronbichler, M. Maier, J.-P. Pelteret, B. Turcksin und D. Wells. „The deal . II Library, Version 9.0“. In: *Journal of Numerical Mathematics* (2018).
- [AN92] T. Abboud und J.-C. Nédélec. „Electromagnetic waves in an inhomogeneous medium“. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 164.1 (1992), S. 40–58.
- [Bao94] G. Bao. „A uniqueness theorem for an inverse problem in periodic diffractive optics“. In: *Inverse Problems* 10.2 (1994), S. 335.
- [Bao95] G. Bao. „Finite Element Approximation of Time Harmonic Waves in Periodic Structures“. In: *SIAM J. Numerical Analysis* 32.4 (1995), S. 1155–1169.
- [Bao97] G. Bao. „Variational Approximation of Maxwell’s Equations in Biperiodic Structures“. In: *SIAM J. Applied Mathematics* 57.2 (1997), S. 364–381.
- [BD00] G. Bao und D. C. Dobson. „On the scattering by a biperiodic structure“. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 128 (2000), S. 2715–2723.
- [BDC95] G. Bao, D. C. Dobson und J. A. Cox. „Mathematical studies in rigorous grating theory“. In: *J. Opt. Soc. Am. A* 12.5 (1995), S. 1029–1042.
- [Bei+14] L. Beilina, T. T. Nguyen, M. V. Klibanov und J. B. Malmberg. „Reconstruction of shapes and refractive indices from backscattering experimental data using the adaptivity“. In: *Inverse Problems* 30.10 (2014), S. 105007.

- [Bei+15] L. Beilina, T. T. Nguyen, M. V. Klibanov und J. B. Malmberg. „Globally convergent and adaptive finite element methods in imaging of buried objects from experimental backscattering radar measurements“. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 289 (2015), S. 371–391.
- [BF14] L. Bourgeois und S. Fliss. „On the identification of defects in a periodic waveguide from far field data“. In: *Inverse Problems* 30.9 (2014), S. 095004.
- [BH13] Y. Boukari und H. Haddar. „The factorization method applied to cracks with impedance boundary conditions“. In: *Inverse Problems & Imaging* 7 (2013), S. 1123–1138.
- [BS94] A.-S. Bonnet-Bendhia und F. Starling. „Guided waves by electromagnetic gratings and non-uniqueness examples for the diffraction problem“. In: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 17 (1994), S. 305–338.
- [CCH16] F. Cakoni, D. Colton und H. Haddar. *Inverse Scattering Theory and Transmission Eigenvalues*. Bd. 88. CBMS Series. SIAM publications, 2016.
- [CE10] S. N. Chandler-Wilde und J. Elschner. „Variational approach in weighted Sobolev spaces to scattering by unbounded rough surfaces“. In: *SIAM J. Mathematical Analysis* 42 (2010), S. 2554–2580.
- [CHN18] F. Cakoni, H. Haddar und T.-P. Nguyen. „New interior transmission problem applied to a single Floquet–Bloch mode imaging of local perturbations in periodic media“. In: *Inverse Problems* 35.1 (2018), S. 015009.
- [CK13] D. L. Colton und R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*. 3. Aufl. Springer, 2013.
- [CM05] S. N. Chandler-Wilde und P. Monk. „Existence, uniqueness, and variational methods for scattering by unbounded rough surfaces“. In: *SIAM J. Mathematical Analysis* 37 (2005), S. 598–618.
- [DF92] D. Dobson und A. Friedman. „The time-harmonic maxwell equations in a doubly periodic structure“. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 166.2 (1992), S. 507–528.
- [Dob94] D. C. Dobson. „A variational method for electromagnetic diffraction in biperiodic structures“. In: *Math. Model. Numerical Analysis* 28 (1994), S. 419–439.

- [EH11] J. Elschner und G. Hu. „Inverse scattering of elastic waves by periodic structures: uniqueness under the third or fourth kind boundary conditions“. In: *Methods and Applications of Analysis* 18.2 (2011), S. 215–244.
- [EH18] T. Elfving und P. Hansen. „Unmatched Projector/Backprojector Pairs: Perturbation and Convergence Analysis“. In: *SIAM J. Scientific Computing* 40.1 (2018), A573–A591.
- [ESZ09] M. Ehrhardt, J. Sun und C. Zheng. „Evaluation of scattering operators for semi-infinite periodic arrays“. In: *Communications in Mathematical Sciences* 7.2 (2009), S. 347–364.
- [Eva98] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, 1998.
- [FJ16] S. Fliss und P. Joly. „Solutions of the Time-Harmonic Wave Equation in Periodic Waveguides: Asymptotic Behaviour and Radiation Condition“. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 219.1 (2016), S. 349–386.
- [GL17] T. Gerken und A. Lechleiter. „Reconstruction of a time-dependent potential from wave measurements“. In: *Inverse Problems* 33.9 (2017), S. 094001.
- [Gri85] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Non-Smooth Domains*. London: Pitman, 1985.
- [Hag89] William W. Hager. „Updating the Inverse of a Matrix“. In: *SIAM Review* 31.2 (1989), S. 221–239.
- [HK20] H. Haddar und A. Konschin. „Factorization method for imaging a local perturbation in inhomogeneous periodic layers from far field measurements“. In: *Inverse Problems and Imaging* 14 (2020), S. 133.
- [HL11] H. Haddar und A. Lechleiter. „Electromagnetic wave scattering from rough penetrable layers“. In: *SIAM J. Mathematical Analysis* (43 2011), S. 2418–2443.
- [HLZ13] G. Hu, Y. Lu und B. Zhang. „The factorization method for inverse elastic scattering from periodic structures“. In: *Inverse Problems* 29.11 (2013), S. 115005.
- [HN17a] H. Haddar und T. P. Nguyen. „A volume integral method for solving scattering problems from locally perturbed infinite periodic layers“. In: *Appl. Anal.* 96.1 (2017), S. 130–158.

- [HN17b] H. Haddar und T.-P. Nguyen. „Sampling methods for reconstructing the geometry of a local perturbation in unknown periodic layers“. In: *Computers and Mathematics with Applications* 74.11 (2017), S. 2831–2855.
- [Hu+15] G. Hu, X. Liu, F.-L. Qu und B. Zhang. „Variational Approach to Scattering by Unbounded Rough Surfaces with Neumann and Generalized Impedance Boundary Conditions“. In: *Communications in mathematical sciences* 13 (2015), S. 511–537.
- [ILW16] V. Isakov, R. Lai und J. Wang. „Increasing Stability for the Conductivity and Attenuation Coefficients“. In: *SIAM J. Mathematical Analysis* 48.1 (2016), S. 569–594.
- [JLF06] P. Joly, J.-R. Li und S. Fliss. „Exact boundary conditions for periodic waveguides containing a local perturbation“. In: *Commun. Comput. Phys.* 1 (2006), S. 945–973.
- [KG08] A. Kirsch und N. I. Grinberg. *The Factorization Method for Inverse Problems*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 36. Oxford University Press, 2008.
- [Kir93] A. Kirsch. „Diffraction by periodic structures“. In: *Proc. Lapland Conf. on Inverse Problems*. Hrsg. von L. Pävarinta und E. Somersalo. Springer, 1993, S. 87–102.
- [Kir94] A. Kirsch. „Uniqueness theorems in inverse scattering theory for periodic structures“. In: *Inverse Problems* 10 (1994), S. 145–152.
- [KL19] A. Kirsch und A. Lechleiter. „Reconstruction of a local perturbation in inhomogeneous periodic layers from partial near field measurements“. In: *Inverse Problems* 35.11 (2019), S. 114006.
- [Kon19a] A. Kirsch. „Electromagnetic wave scattering from locally perturbed periodic inhomogeneous layers“. In: *submitted* (2019).
- [Kon19b] A. Kirsch. „Numerical scheme for electromagnetic scattering on perturbed periodic inhomogeneous media and reconstruction of the perturbation“. In: *submitted* (2019).
- [Kre89] R. Kress. *Linear Integral Equations*. Berlin: Springer, 1989.
- [Lec16] A. Lechleiter. „The Floquet-Bloch Transform and Scattering from Locally Perturbed Periodic Surfaces“. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 446 (2016), S. 605–627.
- [LN13] A. Lechleiter und D.-L. Nguyen. „Factorization Method for Electromagnetic Inverse Scattering from Biperiodic Structures“. In: *SIAM J. Imaging Sciences* 6.2 (2013), S. 1111–1139.

- [LR10] A. Lechleiter und S. Ritterbusch. „A variational method for wave scattering from penetrable rough layers“. In: *IMA J. Appl. Math.* 75 (2010), S. 366–391.
- [LWZ11] P. Li, H. Wu und W. Zheng. „Electromagnetic scattering by unbounded rough surfaces“. In: *SIAM J. Mathematical Analysis* 43.3 (2011), S. 1205–1231.
- [LZ17a] A. Lechleiter und R. Zhang. „A Convergent Numerical Scheme for Scattering of Aperiodic Waves from Periodic Surfaces Based on the Floquet–Bloch Transform“. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 55.2 (2017), S. 713–736.
- [LZ17b] A. Lechleiter und R. Zhang. „A Floquet–Bloch Transform Based Numerical Method for Scattering from Locally Perturbed Periodic Surfaces“. In: *SIAM J. Scientific Computing* 39.5 (2017).
- [LZ17c] A. Lechleiter und R. Zhang. „Non-periodic acoustic and electromagnetic scattering from periodic structures in 3D“. In: *Computers & Mathematics with Applications* 74.11 (2017). Proceedings of the International Conference on Computational Mathematics and Inverse Problems, On occasion of the 60th birthday of Prof. Peter Monk, S. 2723–2738.
- [LZZ16] P. Li, G. Zheng und W. Zheng. „Maxwell’s Equations in an Unbounded Structure“. In: *Math. Meth. Appl. Sci.* 40 (2016), S. 573–588.
- [McL00] W. McLean. *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Operators*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000.
- [Mei+00] A. Meier, T. Arens, S. N. Chandler-Wilde und A. Kirsch. „A Nyström method for a class of integral equations on the real line with applications to scattering by diffraction gratings and rough surfaces“. In: *J. Int. Equ. Appl.* 12 (2000), S. 281–321.
- [Mon03] P. Monk. *Finite Element Methods for Maxwell’s Equations*. Oxford: Oxford University Press, 2003.
- [Mül54] C. Müller. „On the behavior of the solutions of the differential equation Laplace  $U = F(x,u)$  in the neighborhood of a point“. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 7.3 (1954), S. 505–515.
- [Néd01] J.-C. Nédélec. *Acoustic and Electromagnetic Equations*. New York: Springer, 2001.

- [Ngu12] D.-L. Nguyen. „Spectral Methods for Direct and Inverse Scattering from Periodic Structures“. Diss. 2012, 1 vol. (152 p.)
- [Oka02] T. Okaji. „Strong unique continuation property for the time harmonic Maxwell equations“. In: *J. Math. Soc. Japan* 54 (2002), S. 89–122.
- [Pat10] S. Patzelt. „Simulation und experimentelle Erprobung parametrisch-optischer Rauheitsmessprozesse auf der Basis von kohärentem Streulicht und Speckle-Korrelationsverfahren“. Diss. Aachen, 2010.
- [Rie03] A. Rieder. *Keine Probleme mit Inversen Problemen: Eine Einführung in ihre stabile Lösung*. Vieweg+Teubner Verlag, 2003.
- [Rie05] A. Rieder. „Inexact Newton Regularization Using Conjugate Gradients as Inner Iteration“. In: *SIAM J. Numerical Analysis* 43.2 (2005), S. 604–622.
- [Rit09] S. Ritterbusch. „Coercivity and the Calderon Operator on an Unbounded Domain“. Diss. Universität Karlsruhe (TH), 2009.
- [Saa03] Yousef Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. 2. Society for Industrial und Applied Mathematics, 2003.
- [San10] K. Sandfort. „The factorization method for inverse scattering from periodic inhomogeneous media“. Diss. Karlsruher Institut für Technologie, 2010.
- [Sch+12] T. Schuster, B. Kaltenbacher, B. Hofmann und K. Kazimierski. *Regularization Methods in Banach Spaces*. Berlin, Boston: De Gruyter, 2012.
- [Sch03] G. Schmidt. „On the diffraction by Biperiodic Anisotropic Structures“. In: *Appl. Anal.* 82 (2003), S. 75–92.
- [SU87] J. Sylvester und G. Uhlmann. „A Global Uniqueness Theorem for an Inverse Boundary Value Problem“. In: *Annals of Mathematics* 125.1 (1987), S. 153–169.
- [SV02] J. Saranen und G. Vainikko. *Periodic Integral and Pseudodifferential Equations*. Berlin: Springer, 2002.
- [SZ13] J. Sun und C. Zheng. „Reconstruction of obstacles embedded in periodic waveguides“. In: *Contemporary Mathematics* 586 (2013), S. 341–351.
- [Wer05] D. Werner. *Funktionalanalysis*. 5. Aufl. Berlin: Springer, 2005.
- [Yos80] K. Yosida. *Functional Analysis*. 6. Aufl. Berlin: Springer, 1980.

- 
- [YZZ12] J. Yang, B. Zhang und R. Zhang. „A sampling method for the inverse transmission problem for periodic media“. In: *Inverse Problems* 28 (2012), 17pp.
- [Zha18] R. Zhang. „A High Order Numerical Method for Scattering from Locally Perturbed Periodic Surfaces“. In: *SIAM J. Scientific Computing* 40.4 (2018), A2286–A2314.
- [Zim+12] M. Zimmermann, A. Tausendfreund, S. Patzelt, G. Goch, S. Kieß, M. Z. Shaikh, M. Gregoire und S. Simon. „In-process measuring procedure for sub-100nm structures“. In: *Journal of Laser Applications* 24.4 (2012).