BULLETIN OF GULISTAN STATE UNIVERSITY

Volume 2019 | Issue 2 Article 2

6-29-2019

ABOUT THE PROBLEM DIVIDING ANGLE ON THREE EQUAL PARTS AND PROPERTIES OF TRISECTRIS

S.Zh. Zhuramuratov
1-school, Xovos, Syrdarya

D.A. Ayupova
1-school, Xovos, Syrdarya

UDK 51(091)

BURCHAKNI UCHTA TENG BOʻLAKKA BOʻLISH MASALASI VA TRISEKTRISA HAQIDA

J.S.Joʻramuratov, D.A.Ayupova
Xovos tumani 1-sonli umumiy oʻrta ta'lim maktabi, 120711, Sirdaryo viloyati
E-mail: juramuratovjs@mail.ru

Abstract

ABOUT THE PROBLEM DIVIDING ANGLE ON THREE EQUAL PARTS AND PROPERTIES OF TRISECTRIS

S.Zh.Zhuramuratov, D.A.Ayupova

This work contains the history and solutions of the famous problems of antiquity, which played an important role in the development of mathematics. The presentation is accompanied by interesting information about the development and methods of mathematics. The work is focused on a beginning mathematician-student of the first year and a student of the upper secondary school.

Keywords: regular angles, doubling of a cube, quadrature of a circle, angle trisection, trisectrix, Archimedes, Descartes, Etienne Pascal, Giovanni Chev, Morley theorem.

Аннотация

BURCHAKNI UCHTA TENG BOʻLAKKA BOʻLISH MASALASI VA TRISEKTRISA HAQIDA

J.S.Joʻramuratov, D.A.Ayupova

Ushbu ishda matematika fani rivojlanishida muhim oʻrin egallagan mashhur klassik masalalardan birining tarixi va yechilish usulidan biri aks etgan. Shuningdek, matematik metodlar va ularning rivojlanishi haqida qiziqarli ma'lumotlar keltirilgan. Ushbu ish matematikani oʻrganishni boshlovchilarga-birinchi kurs talabalariga va oʻrta maktabning yuqori sinf oʻquvchilariga moʻljallangan.

Tayanch soʻzlar: muntazam $n-$burchak, kubni ikkilantirish, doirani kvadratga aylantirish, burchakni uchta teng boʻlakka boʻlish, trisektrisa, Arximed, Dekart, Eten Paskal, Cheva Jovanni, Morli teoremasi.

Аннотация

О ЗАДАЧЕ ДЕЛЕНИЯ УГЛА НА ТРИ РАВНЫЕ ЧАСТИ И СВОЙСТВА ТРИСЕКТРИСА

С.Ж. Журамуратов, Д.А.Аюпова

В этой работе говорится о решении знаменитых задач древности, сыгравших важную роль в становлении математики. Изложение сопровождается интересными сведениями о развитии и методах математики. Работа ориентируется на начинающего математика-студента первых курсов и ученика старших классов средней школы.

Ключевые слова: правильные $n-$угольник, удвоение куба, квадратура круга, трисекция угла, трисектриса, Архимед, Декарт, Этьен Паскал, Джованни Чева, теорема Морли.

Matematikada shunday masalalar borki, ularninig yechimi unchalik katta ahamiyatga ega emas. Biroq bu masalalarni yechish jarayonida boshqa koʻplab muammolar hal etilgan. Fermaning buyuk teoremasi, kubni ikkilantirish, doirani kvadratga aylantirish va shunga oʻxshash boshqa masalalarni shular qatoriga kiradi.

Ushbu maqolada shu kabi masalalardan biri haqida soʻz boradi.

Masala: Berilgan ixtiyoriy burchakni faqat sirkul va chizgʻich yordamida teng uch boʻlakka boʻlish mumkinmi?

Tabiiy savol tugʻilishi mumkin: nega faqat sirkul va chizgʻich yordamida? Yuqorida qayd etilganidek, agar faqat sirkul va chizgʻichdan foydalanib bu kabi masalalar hal etilsa, shu bilan birga koʻplab boshqa katta ahamiyatga ega boʻlgan masalalar oʻz yechimini topadi.

Bundan tashqari, bu masalaning kelib chiqishini quyidagicha ham asoslash mumkin: berilgan kesmani teng uch boʻlakka boʻlish kerak boʻlsa (kesmani n boʻlakka boʻlish masalasi ham), sirkul va chizgʻich yordamida osonlikcha hal etish mumkin. Xuddi shu kabi aylananing ajratilgan yoyini teng uch boʻlakka boʻlish masalasini ham koʻrish mumkin. Bu masala esa shu yoyga tiralgan burchakni teng uch boʻlakka boʻlish masalasiga kelib qoladi.

Bu masalani faqat geometrik usuldan foydalanib yechib boʻlmagani uchun, algebraik usullardan foydalanishga toʻgʻri keladi.

Tadqiqotning maqsadi – berilgan ixtiyoriy burchakni faqat sirkul va chizgʻich yordamida teng uch boʻlakka boʻlish masalani faqat geometrik usuldan foydalanib yechib boʻlmasligini algebraik usullardan foydalanib koʻrsatishdir.

Tadqiqot ob’ektlari va qoʻllanilgan usullar

Ushbu maqolaning tadqiqot ob’ektlari – yasashga doir boʻlgan uchta klassik masalalar: kubni ikkilantirish, burchak triseksiyasi va doirani kvadratga aylantirish masalalari hamda ularga olib kelinuvchi masalalar hisoblanadi.

Burchakni teng uch boʻlakka boʻlish masalasining sirkul va chizgʻich yordami yechib boʻlmasligi ma’lum boʻlgach, bu masalani yechishning boshqa usullari topilgan. Ana shunday usullardan ba’zilari: Arximed usuli, Dekard usuli E.Paskal usuli va Cheva usulidir.

Olingan natijalar va ularning tahlili

Shunday qilib, sirkul hamda chizgʻich yordamida nima qilinadi? Toʻgʻri chiziq chiziladi, aylana chiziladi, ular kesishish nuqtalari aniqlanadi, bu nuqtalar orqali yana toʻgʻri chiziq yoki aylana chiziladi, aylananing markazi topiladi va hokazo ishlar amalga oshiriladi.

Tekislikda ixtiyoriy nuqta (a,b) koordinataga ega, har bir toʻgʻri chiziq

$$Ax + By + C = 0$$

tenglama bilan, har bir aylana esa $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ tenglama bilan aniqlanadi (Prasolov, 1991).

Bu tenglamaning koeffitsientlari aniq sonlardir. Ikkita toʻgʻri chiziq tenglamasi berilgan boʻlsin:

$$\begin{aligned} &Ax_1 + B_1 y + C_1 = 0 \\ &A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Bu toʻgʻri chiziqlar kesishish nuqtasini topish uchun, bu tenglamalar sistemasini yechimini topish kerak. (1) dan y ni yoʻqotib

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x + (C_1B_2 - C_2B_1) = 0 \qquad (2)$$

ni hosil qilamiz. (2) dan x ni topib (1) dagi ixtiyoriy tenglamadan y ni ham aniqlaymiz. Shunday qilib ikki toʻgʻri chiziq kesishish nuqtasini topish masalasini (1) koʻrinishdagi koeffitsientlari butun sonlardan iborat sistemani yechish masalasiga kelib qoldi.

Endi toʻgʻri chiziq va aylana berilgan boʻlib ularning kesishish nuqtasini topish kerak boʻlsa,

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

sistemaga kelamiz. Birinchi tenglamadan y ni topib ikkinchisiga qoʻyamiz:

$$y = -\frac{A_1 x + C_1}{B_1}, \qquad x^2 + \left(\frac{A_1 x + C_1}{B_1}\right)^2 + A_2 x - B_2 \frac{A_1 x + C_1}{B_1} + C_2 = 0.$$

Buni esa soddalashtirib yozamiz:

$$(A_1^2 + B_1^2)x^2 + (2A_1C_1 + A_2B_1^2 - A_1B_1B_2)x + C_1^2 - C_1B_1B_2 + C_2B_1^2 + 0. \qquad (4)$$

Hosil boʻlgan kvadrat tenglamaning koeffitsientlari butun sonlardan iborat. (4) ni (2) tenglamadan farqi bu yerda koeffitsientlarni kvadratga oshirish amali ham ishlatilgan. (4) ni belgilashlar yordamida

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \qquad (5)$$

koʻrinishida yozib olamiz. (5) ning ildizlari

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \qquad (6)$$

koʻrinishida boʻladi.

Endi ikkita aylana berilgan boʻlsin:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

Ularning kesishgan nuqtasini topish uchun tenglamalarni x va y ga nisbatan yechish kerak.

(7) dagi birinchi tenglamadan ikkinchisini ayirib, uni birinchi tenglama bilan birga olsak

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ (A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2) &= 0 \end{aligned} \qquad (8)$$

ni hosil qilamiz. (8) sistema (7) ga ekvivalent ekanligini koʻrish qiyin emas. Biz natijada (7) koʻrinishidagi sistemani yechishni, (3) koʻrinishdagi sistemani yechishga keltirish mumkin ekan.

Shunday qilib masalalarni sirkul hamda chizgʻich yordamida yechimni (2) (chiziqli) yoki (5) (kvadratik) tenglamalarni yechishga keltirish mumkin ekan.

Endi esa topilgan nuqtalardan yana toʻgʻri chiziq yoki aylana oʻtkazish kerak boʻladi. Biz yana (2) yoki (5) koʻrinishdagi tenglamalarga kelamiz, biroq bu tenglamalarning koeffitsientlari endi butun sonlar yoki (6) koʻrinishdagi sonlar kabi boʻladi.

Masalan,

$$\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - a_1c_1}}{a_1}x^2 + \frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - a_2c_2}}{a_2}x + 1 = 0 \qquad (9)$$

koʻrinishidagi tenglamalar hosil boʻlsin. Bu tenglamani shakl almashtirishlar yordamida ildizli ifodalarni bir tomonga oʻtkazib kvadratga oshirishni ikki marta bajarilsa, oxirida

$$p_0x^8 + p_1x^7 + \ldots\ldots + p_7x + p_8 = 0 \qquad (10)$$

koʻrinishidagi 8-darajali tenglamaga kelamiz.

(10) tenglamaning barcha koeffitsientlarini butun sonlar deb hisoblash mumkin.

(10) tenglamani darajasi 2^3 ekanligini eslatib oʻtamiz.

Bu esa (9) kvadrat tenglama ikki marta kvadratga oshirilishdan hosil boʻlgan. Shunday qilib, sirkul hamda chizgʻich yordamida masalani yechish 2^n -darajali butun koeffitsientli algebraik tenglamalarni yechishga keltirilar ekan.

Yana shuni eslatib o‘tish joizki, biror bir masalani yechimi darajasi 2^n ga teng bo‘lmagan tenglamani yechishga kelib qolishi mumkin. Bu hali masalani sirkul va chizg‘ich yordamida yechib bo‘lmaydi degani emas. Agar koeffitsientlari ixtiyoriy butun sonlardan iborat bo‘lgan

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0, \qquad a_0 \neq 0 \qquad (11)$$

tenglama ratsional ildizga ega bo‘lsa, u holda masala sirkul hamda chizg‘ich yordamida yechiladi deyiladi.

Bu holda tenglama ratsional sonlar maydonida keltirilgan tenglama deyiladi.

Shunday qilib, bu masalani sirkul hamda chizg‘ich yordamida yechib bo‘lmasligi uchun darajasi 2^k ko‘rinishida bo‘lmagan tenglama ratsional sonlar maydonida keltirilmas bo‘lishi yetarli ekan.

Endi burchakni teng uch bo‘lakka bo‘lish masalasiga qaytamiz. Teng uch bo‘lakka bo‘lmoqchi bo‘lgan burchagimizni 3α va $\cos 3\alpha = p$ bo‘lsin. $\cos\alpha = x$ deb belgilaymiz. Agar biz x ni qura olsak, α burchakni ham qura olgan bo‘lamiz, ya’ni berilgan burchakni teng uchga ajratgan bo‘lamiz. Haqiqatdan ham, uzunligi x ga teng bo‘lgan *OA* kesmani yasaymiz, *A* nuqtadan esa *OA* ga perpendikulyar *O* nuqtadan bir birlik masofada yotgan *B* nuqtani belgilaymiz (1-расм).

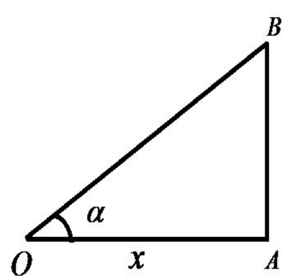
Ikkinchi tomondan,

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha =$$

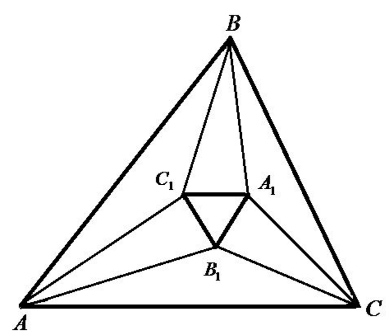
$$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha =$$

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 4x^3 - 3x$$

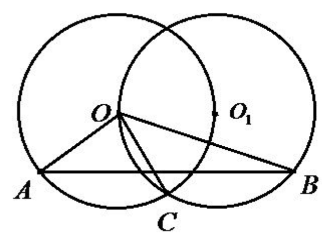
Shunday qilib, $4x^3 - 3x - p = 0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama berilgan burchakni teng uch bo‘lakka bo‘lishdan hosil bo‘lgan tenglamadir. Tenglamaning darajasi $2^k \neq 3$. Shu bilan birga p parametrni ixtiyoriy tanlaganimizda hosil bo‘lgan tenglama ratsional sonlar maydonida har doim ham keltiriladigan bo‘lavermaydi. Bu esa berilgan burchakni sirkul va chizg‘ich yordamida teng uch bo‘lakka bo‘lish mumkin emasligini bildiradi.



1-расм.



2 – rasm.



3 – rasm.

Qisqacha tarixiy ma'lumot. Burchak triseksiyasi (ya'ni, burchakni teng uch bo'lakka bo'lish) masalasining rivojlanishi haqida hech qanday qiziqarli afsonalar yo'q. Taxminlarga ko'ra, bu masala matematikaning ichida, muntazam ko'pburchak qurish masalasining yechilish jarayonida vujudga kelgan (Prasolov, 1992).

Sirkul va chizg'ich yordamida $n=6$ va $n=8$ bo'lganda muntazam $n-$ burchak qurish mumkin. Ammo, $n=7$ va $n=9$ bu ishni qilib bo'lmaydi. Muntazam yettiburchakni yasash qiziqarli masala, uni "qo'yish" usuli bilan yechish mumkin. Muntazam to'qqizburchakni yasash masalasi bevosita burchak triseksiyasi masalasiga kelib taqaladi, chunki muntazam to'qqizburchakni yasash uchun, $\frac{360°}{9}=\frac{120°}{3}$ burchakni yasash kerak bo'ladi, ya'ni $120°$ li burchakni uchta teng qismga bo'lish kerak bo'ladi.

Burchak triseksiyasi (ya'ni, burchakni teng uch bo'lakka bo'lish) masalasining sirkul va chizg'ich yordami yechib bo'lmasligi ma'lum bo'lgach, bu masalani yechishning boshqa usullari topilgan (Prasolov, 1992). Ana shunday usullardan ba'zilari: mashhur fransuz matematigi Rene Dekardga va mashhur italiyalik geometr Cheva Djovanniga tegishli (Prasolov, 1992).

Yana suni ta'kidlab o'tish joizki, uchburchak burchaklarining triseksiyalari ajoyib xossalarga ega.

ABC uchburchak BC tomonidan D va E nuqtalarni shunday tanlaymizki, $\angle BAD=\angle DAE=\angle EAC=\frac{1}{3}\angle BAC$ bo'lsin. AD va AE kesmalar ABC uchburchak A burchagi *trisektrisalari* deb ataladi. Trisektrisalarning eng ajoyib xossasi bu – Morli teoremasi hisoblanadi. Morli teoremasi quyidagicha: ABC uchburchak B va C burchaklarining BC tomoniga yaqin trisektrisalari A_1 nuqtada kesishsin (2-rasm). B_1 va C_1 nuqtalar ham xuddi shunday aniqlanadi. U holda $A_1B_1C_1$ uchburchak tengtomonlidir (Prasolov, 1991).

Uchburchakning nafaqat ichki burchak trisektrisalari, balki tashqi burchak trisektrisalari ham ajoyib xossalarga ega (Sharigin, 1986).

Qiziqarli masala. Bir xil R radiusli aylanalarning O va O_1 markazlari orasidagi masofa R ga teng bo'lsin. Aytaylik, A va B nuqtalar aylanalardan shunday tanlanganki, $OO_1 \parallel AB$ (3-rasm). OC kesma AOB burchak trisektrisasi ekanligini isbotlang.

Xulosa

Ushbu maqola yasashga doir uch klassik masalalardan biriga, ya'ni burchak trisektsiyasi (burchakni teng uch bo'lakka bo'lish) masalasiga bag'ishlangan. Ishda bu masalani faqat sirkul va chizg'ich yordamida yechib bo'lmasligi algeraik usulda ko'rsatildi.

Shuningdek, uchburchak burchaklari trisektsiyalari – trisektrisalarning ajoyib xossalaridan ba'zilari keltirib o'tildi.

Adabiyotlar ro'yxati

Prasolov V.V. Zadachi po planimetrii. - M.: Nauka, 1991. -172 s.
Sharigin I.F. Planimetriya. - M.: Nauka, 1986. -137 s.
Prasolov V.V. Tri klassicheskie zadachi na postroenie. - M.: Nauka, 1992. - 80 s.