

DOI: 10.5604/01.3001.0010.7259

REKONSTRUKCJA NIEKOMPLETNYCH OBRAZÓW ZA POMOCĄ METOD APROKSYMACJI MODELAMI NISKIEGO RZĘDU

Tomasz Sadowski, Rafał Zdunek

Wydziału Elektroniki, Politechnika Wroclawska

Streszczenie. W pracy badano zadanie rekonstrukcji brakujących pikseli w obrazach poddanych losowym zaburzeniom impulsowym w kanale transmisyjnym. Takie zadanie może być sformułowane w kontekście interpolacji obrazu na nieregularnej siatce lub aproksymacji niekompletnego obrazu za pomocą modeli dekompozycji obrazu na faktory niskiego rzędu. Porównano skuteczność czterech algorytmów opartych na dekompozycjach macierzy lub tensorów: SVT, SmNMF-MC, FCSA-TC i SPC-QV. Badania przeprowadzono na obrazach niekompletnych, otrzymanych z obrazów oryginalnych przez usunięcie losowo wybranych pikseli lub linii tworzących regularną siatkę. Najwyższą efektywność rekonstrukcji obrazu uzyskano gdy na estymowane faktory niskiego rzędu narzucano ograniczenia nieujemności i gładkości w postaci wagowej filtracji uśredniającej.

Słowa kluczowe: rekonstrukcja obrazów, aproksymacja niskiego rzędu, nieujemna faktoryzacja macierzy, dekompozycja tensorowa, uzupełnianie elementów macierzy

IMAGE COMPLETION WITH LOW-RANK MODEL APPROXIMATION METHODS

Abstract. The paper is concerned with the task of reconstructing missing pixels in images perturbed with impulse noise in a transmission channel. Such a task can be formulated in the context of image interpolation on an irregular grid or by approximating an incomplete image by low-rank factor decomposition models. We compared four algorithms that are based on the low-rank decomposition model: SVT, SmNMF-MC, FCSA-TC and SPC-QV. The numerical experiments are carried out for various cases of incomplete images, obtained by removing random pixels or regular grid lines from test images. The best performance is obtained if nonnegativity and smoothing constraints are imposed onto the estimated low-rank factors.

Keywords: image completion, low-rank approximation, nonnegative matrix factorization, tensor decomposition, matrix completion

Wstęp

Zagadnienie rekonstrukcji obrazu występuje w wielu dziedzinach nauki i najczęściej jest rozumiane w sensie rekonstrukcji obrazów tomograficznych za pomocą tzw. operacji rzutowania wstecznego [17, 30]. Ten termin może być również rozumiany w szerszym kontekście, jako zagadnienie rekonstrukcji brakujących lub zaburzonych części obrazu. W takim kontekście należy też rozumieć pojęcie rekonstrukcji obrazu występujące w tytule tego artykułu. Tematyka omawiana tutaj dotyczy zadania rekonstrukcji brakujących pikseli w obrazie, nazywanego czasami zadaniem uzupełniania obrazu (z ang. *image completion*). Polega ono na estymacji wartości brakujących pikseli na podstawie pikseli dostępnych i pewnej apriorycznej wiedzy o cechach rekonstruowanego obrazu. Zwykle jest to zadanie będące częścią złożonego procesu redukcji zakłóceń lub korekcji obrazu.

Obecnie zagadnienie uzupełniania obrazu jest przedmiotem badań w wielu renomowanych ośrodkach badań naukowych, o czym świadczą najnowsze publikacje, np. [8, 14, 27, 34]. Znane są różne podejścia metodologiczne w zależności od wielkości i rozkładu zaburzeń w obrazie. Jeśli zaburzenie powstało przez wycięcie z obrazu zaburzonego pewnego spójnego obszaru/obiektu o relatywnie dużych rozmiarach, wówczas efektywne stają się statystyczne metody parametryczne [16, 28] syntetyzujące strukturę tekstury. Synteza realizowana jest na podstawie parametrycznych modeli statystycznych, które dopasowują statystykę obszaru zaburzonego do pozostałej części na podstawie analizy histogramów rozkładu kolorów w różnych rozdzielczościach lub rozkładu innych parametrów, np. współczynników falek. Takie podejście ma jednak znaczące ograniczenia, ponieważ umożliwia jedynie syntezę tekstur o dużym podobieństwie stochastycznym.

Inne, dość popularne, podejście do zadania uzupełniania obrazu wykorzystuje proces dyfuzyjny [1, 4, 9, 23, 29], w którym następuje rozpraszanie informacji propagowanej od granicy brakującego obszaru do jego wnętrza. Proces ten jest symulowany rozwiązaniem cząstkowego równania różniczkowego, które najczęściej ma postać równania Naviera-Stokesa [5], znanego głównie w dynamice płynów. Takie podejście sprawdza się dość dobrze, jeśli brakujący obszar jest spójny i dość wąski. Metoda ta w podstawowej wersji nie umożliwia syntezy struktury tekstury. Obecnie, znane są również metody hybrydowe [6], łączące proces dyfuzyjny modelujący strukturę obrazu z syntezą tekstury.

Kolejną grupę metod uzupełniania obrazu stanowią metody bazujące na archetypie (ang. *exemplar-based methods*) [1, 7, 12,

18, 22, 25, 32, 33], które wypełniają brakujący obszar kopią pewnego fragmentu obrazu niezaburzonego. Kopiowane są pojedyncze piksele lub tzw. łaty (ang. *patches*) w celu syntezy tekstury. Takie podejście jest najefektywniejsze w syntezie tekstury dużych brakujących obszarów, ale jest złożone obliczeniowo, ponieważ zwykle jest realizowane algorytmami optymalizacji heurystycznej. Zadanie modelowania obrazu łatami może być też wyrażone grafem jednokierunkowym, w którym krawędzie łączące wierzchołki grafu pokazują obszary o koherentnej teksturze. Takie podejście również związane jest z dużym nakładem obliczeniowym.

Jeśli zaburzenia w obrazie nie mają charakteru spójnego obszaru, a są np. losowo brakującymi pikselami lub rozszanymi grupami pikseli, wówczas zadanie uzupełniania obrazu można sprowadzić do zadania dekompozycji obrazu zaburzonego na faktory o niskim rzędzie. Ich iloczyn aproksymuje obraz zaburzony według odpowiedniego kryterium. W literaturze można odnaleźć różne algorytmy do realizacji wspomnianego zadania, które zwykle powstały na bazie algorytmów estymacji brakujących elementów w macierzy (ang. *matrix completion*) [15, 20, 24] lub tensorze (ang. *tensor completion*) [10, 13, 26]. W przypadku uzupełniania pikseli w obrazie monochromatycznym, najczęściej stosuje się metody dekompozycji macierzy. W przypadku obrazów kolorowych, metody macierzowe można stosować oddzielnie do każdej mapy rozkładu fundamentalnego koloru (RGB) lub reprezentować obraz kolorowy za pomocą tensora i poddać go bezpośrednio dekompozycji na macierze czynnikowe o niskim rzędzie. Należy zauważyć, że takie podejście do zadania uzupełnienia obrazu jest dość elastyczne ze względu na szeroki wybór: modeli, ograniczeń narzucanych na estymowane faktory, funkcji celu wyrażającej miarę podobieństwa obrazu zaburzonego i modelu, a także algorytmu optymalizacyjnego.

Niniejszy artykuł przedstawia porównanie kilku metod, opartych na dekompozycji obrazu na faktory o niskim rzędzie, które zastosowano do zadania estymacji brakujących pikseli w obrazach o wysokim współczynniku utraty danych. Badano różne algorytmy i podejmowano różne próby ich usprawnienia. Ze względu na jakość wyników, najwięcej uwagi poświęcono jednak algorytmom, które są blisko związane z metodami dekompozycji tensorów, przedstawionymi w pracy [34]. Na podstawie tych metod, opracowano algorytm uproszczony, zakładający dekompozycję „uszkodzonego” obrazu na iloczyn nieujemnych czynników niskiego rzędu. Ze względu na ograniczenia nieujemności, takie podejście jest blisko związane

z modelem nieujemnej faktoryzacji macierzy (ang. *nonnegative matrix factorization* – NMF) [11, 35], który znalazł liczne zastosowania w wielu dziedzinach nauki i nadal jest prężnie rozwijany. Jedną z głównych zalet tego modelu jest jego duża elastyczność w wyborze charakteru pożądanego rozwiązania. Lokalna gładkość estymowanego obrazu implikuje również lokalną gładkość estymowanych czynników. Wymuszanie takiej charakterystyki czynników w modelu NMF najczęściej realizuje się dodatkowym członem kary lub regularyzacji w funkcji celu, który determinuje określony charakter rozwiązania. W tej pracy potwierdzono, że narzucanie gładkości na estymowane czynniki jest celowe, ale zadanie to zrealizowano w inny sposób niż w pracy [34]. Gładkość wymuszano w wektorach cech za pomocą funkcji wagowej filtracji uśredniającej, gdzie niskie współczynniki wagowe przypisywano tym elementom wektora cech, które postrzegane były jako elementy znacznie odstające od zakresu wariancji (ang. *outliers*).

Układ pracy jest następujący: w następnym rozdziale przedstawiono model matematyczny zadania rekonstrukcji obrazu niekompletnego. W kolejnym rozdziale scharakteryzowano wybrane metody rekonstrukcji obrazu oraz omówiono zaproponowaną metodę wygładzania czynników. Następnie przedstawiono wyniki eksperymentów numerycznych. Ostatni rozdział zawiera podsumowanie i wnioski.

1. Sformułowanie problemu

Omawiany problem można matematycznie sformułować w następujący sposób [8, 14]:

$$\min_{\mathbf{X}} \|\text{rank}(\mathbf{X})\|, \quad (1)$$

przy ograniczeniach: $(\mathbf{X})_{ij} = (\mathbf{M})_{ij}$, $(i, j) \in \Omega$, gdzie \mathbf{X} jest aproksymującą macierzą, \mathbf{M} jest oryginalną macierzą niekompletną, a Ω jest zbiorem (macierzą logiczną) indeksów niezaburzonych elementów macierzy \mathbf{M} . Założono, że zbiór Ω jest znany lub może być łatwo estymowany za pomocą metod segmentacji obrazów.

Głównym celem algorytmu uzupełniania brakujących elementów macierzy jest znalezienie takiej macierzy \mathbf{X} o minimalnym rzędzie, która w pozycjach wskazywanych zbiorem Ω ma takie same wartości elementów jak macierz \mathbf{M} . Takie algebraiczne podejście można zastosować do zadania aproksymacji brakujących pikseli w niekompletnym obrazie monochromatycznym (macierz 2D) lub kolorowym (macierz 3D lub tensor).

2. Wybrane metody rekonstrukcji obrazu

Poniżej krótko scharakteryzowano wybrane metody rekonstrukcji obrazów niekompletnych:

2.1. Metoda SVT

Metoda SVT (ang. *Singular Value Thresholding*) [8, 14] bazuje na dekompozycji macierzy względem jej wartości osobliwych. Jest stosunkowo prosta i łatwa w implementacji oraz niezwykle skuteczna w rozwiązywaniu problemów, w których optymalne rozwiązanie ma niski rząd. W metodzie tej zadanie (1) aproksymowane jest następującym zadaniem:

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_*, \quad \text{p.o. } P_{\Omega}(\mathbf{X}) = P_{\Omega}(\mathbf{M}), \quad (2)$$

gdzie $\|\mathbf{X}\|_*$ jest normą nuklearną macierzy \mathbf{X} . Zaczynając od dowolnej macierzy \mathbf{Y}^0 , wykonywana jest procedura iteracyjnego progowania według reguły:

$$\mathbf{X}^k = \text{shrink}(\mathbf{Y}^{k-1}, \tau), \quad (3)$$

$$\mathbf{Y}^k = \mathbf{Y}^{k-1} + \delta_k P_{\Omega}(\mathbf{M} - \mathbf{X}^k), \quad (4)$$

gdzie $\text{shrink}(\cdot)$ jest funkcją progowania z progiem τ . Reguły te zaimplementowano algorytmem iteracyjnym (Alg. 1), który wytwarza sekwencyjnie macierze $\{\mathbf{X}^k, \mathbf{Y}^k\}$ i w każdym kroku wykonuje operację „progowania” (ang. *threshold*) wartości osobliwych macierzy \mathbf{Y}^k .

Algorytm 1: SVT

Wejście: \mathbf{M} – obraz zaburzony, Ω – macierz indeksów niezaburzonych elementów w \mathbf{M} , δ – krok, ε – tolerancja, $\tau > 0$ – parametr, l – stała przyrostowa, k_{\max} – maksymalna liczba iteracji

Wyjście: \mathbf{X} – macierz estymowana

```

 $\mathbf{Y}^0 = k_0 \delta P_{\Omega}(\mathbf{M}),$ 
 $r_0 = 0$ 
for  $k = 1, \dots, k_{\max}$ 
     $s_k = r_{k-1} + 1,$ 
    repeat
         $[\mathbf{U}^{k-1}, \mathbf{\Sigma}^{k-1}, \mathbf{V}^{k-1}]_{s_k} = \text{svd}(\mathbf{Y}^k)$ 
         $s_k = s_{k-1} + l$ 
    until  $\sigma_{s_k-1}^{k-1} \leq \tau$ 
     $r_k = \max_j (\sigma_j^{k-1} > \tau)$ 
     $\mathbf{X}^k = \sum_{j=1}^{r_k} (\sigma_j^{k-1} - \tau) \mathbf{u}_j^{k-1} \mathbf{v}_j^{k-1}$ 
    if  $\frac{\|P_{\Omega}(\mathbf{X}^k - \mathbf{M})\|_F}{\|P_{\Omega}(\mathbf{M})\|_F} < \varepsilon$  then break
     $\mathbf{Y}_{ij}^k = \begin{cases} 0 & \text{if } (i, j) \notin \Omega, \\ \{\mathbf{Y}_{ij}^k - \delta(\mathbf{M}_{ij}^k - \mathbf{X}_{ij}^k)\} & \text{if } (i, j) \in \Omega \end{cases}$ 
end if
end for  $k$ 
 $\mathbf{X} = \mathbf{X}^k$ 

```

Macierze $\mathbf{U}^k = [\mathbf{u}_1^k, \dots, \mathbf{u}_{s_k}^k]$ oraz $\mathbf{V}^k = [\mathbf{v}_1^k, \dots, \mathbf{v}_{s_k}^k]$ otrzymano odpowiednio z pierwszych s lewych i prawych wektorów osobliwych macierzy \mathbf{Y}^k , a $\mathbf{\Sigma}^k$ to macierz diagonalna składająca się z s wartości osobliwych $[\sigma_1^k, \dots, \sigma_{s_k}^k]$. W implementacji algorytmu wykorzystano pakiet PROPACK. W odróżnieniu od innych pakietów do wyznaczania SVD, ten pakiet nie wyznacza automatycznie tych wartości osobliwych, które przekraczają zadany próg τ . Należy więc określić liczbę największych wartości osobliwych s_k macierzy \mathbf{Y}^{k-1} , które mają być obliczane w k -tej iteracji. Zadanie to realizowane jest według reguły przyrostowej: $s_k = r_{k-1} + 1$, gdzie $r_{k-1} = \text{rank}(\mathbf{X}^{k-1})$ jest liczbą niezerowych wartości osobliwych macierzy \mathbf{X}^{k-1} z poprzedniej iteracji. Następnie wyznacza się pierwsze s_k wartości osobliwych macierzy \mathbf{Y}^{k-1} . Jeżeli któreś z obliczonych wartości osobliwych są mniejsze niż τ , to s_k jest właściwym wyborem. W przeciwnym razie, należy zwiększyć s_k o ustaloną, całkowitą liczbę l aż wartości osobliwe będą mniejsze od τ . SVT rozpoczyna działanie z $\mathbf{Y}^0 = 0$; τ powinno być odpowiednio dużą liczbą, aby rozwiązać zadanie (1) oraz:

$$k_0 = \frac{\tau}{\delta \|P_{\Omega}(\mathbf{M})\|_2}. \quad (5)$$

Ponieważ $\mathbf{Y}^0 = 0$, to łatwo zauważyć, że $\mathbf{X}^k = 0$ oraz $\mathbf{Y}^k = k\delta P_{\Omega}(\mathbf{M})$ dla $k = 1, \dots, k_0$. Aby zwiększyć szybkość działania algorytmu, obliczanie $\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^{k_0}$ można pominąć i zacząć od wyliczenia \mathbf{X}^{k_0+1} z \mathbf{Y}^{k_0} . Algorytm kończy pracę, gdy

$$\frac{\|P_{\Omega}(\mathbf{X}^k - \mathbf{M})\|_F}{\|P_{\Omega}(\mathbf{M})\|_F} < \varepsilon. \quad (6)$$

2.2. Metoda FCSEA

Metoda FCSEA (ang.: *FCSEA based Tensor Completion*) [19] inaczej podchodzi do zagadnienia aproksymacji obrazu, ponieważ używa tensorów zamiast macierzy. Algorytm FCSEA powstał w wyniku połączenia dwóch algorytmów: CSD (ang. *Composite Splitting Denoising*) oraz FISTA (ang. *Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm*). Jednym z jego głównych cech jest to, że rozkłada główny problem na kilka mniejszych, które będą rozwiązywane równoległe. Jest to własność bardzo użyteczna w przypadku rekonstrukcji tensorów. Obraz kolorowy jest bowiem tensorem trójmodalnym, gdzie dwa pierwsze mody takiego tensora odpowiadają pikselom, a trzeci mod odnosi się do sygnałów R, G i B.

Problem optymalizacji w FCSA można przedstawić jako:

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{P}_\Omega(\mathbf{X}) - \mathbf{M}\|_F^2 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \|B_i \mathbf{X}\|_*, \quad (7)$$

gdzie $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{p \times q \times m}$ – aproksymowany tensor trójmodalny, \mathbf{M} – tensor danych niekompletnych, $B_i \mathbf{X}$ jest operacją zamieniającą tensor w macierz (ang. *unfolding*) t.j. $B_i \mathbf{X} = \mathbf{X}_i$ dla $i = 1, 2, 3$ ($\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{p \times qm}$, $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{R}^{q \times pm}$, $\mathbf{X}_3 \in \mathbb{R}^{m \times pq}$). Funkcja $\text{prox}(g_i)(x)$ realizuje przekształcenie proksymalne i jest definiowana według zależności:

$$\text{prox}(g_i)(x) = \arg \min_u (g(u) + \frac{1}{2\rho} \|u - x\|^2). \quad (8)$$

Algorytm 2: FCSA

Wejście: $\mathbf{X}^0 = \mathbf{R}^0 = \mathbf{M}$, L – stała Lipschitza

Wyjście: \mathbf{X}

```
repeat
  for k = 1, ..., K
    for i = 1, ..., m
       $\mathbf{Y}_i^k = \text{prox}(g_i)(B_i(\mathbf{R}^{k-1} - \frac{1}{L} \nabla f_i(\mathbf{R}^{k-1})))$ ;
    end for i
     $\mathbf{X}^k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m B_i^{-1}(\mathbf{Y}_i^k)$ ;
     $t^{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t^{2k}}}{m}$ ;
     $\mathbf{R}^k = \mathbf{X}^k + \frac{t^k - 1}{t^{k+1}}(\mathbf{X}^k - \mathbf{X}^{k-1})$ ;
  end for k
until Kryterium stopu spełnione
 $\mathbf{X} = \mathbf{X}^k$ 
```

Metoda FCSA również aproksymuje obraz zaburzony za pomocą modelu dekompozycji niskiego rzędu, jednakże w odróżnieniu od metody SVT, zadanie minimalizacji normy nuklearnej jest tutaj realizowane za pomocą członu regularyzującego w funkcji celu – zadanie (7). Funkcja $g(\cdot)$ w (8) jest zatem normą nuklearną.

2.3. Metoda SPC-QV

Algorytm SPC-QV (ang.: *Smooth PARAFAC Tensor Completion – Quadratic Version*) [34] bazuje na modelu dekompozycji tensora CANDECOMP/PARAFAC (CP) [11], który ma postać:

$$\mathbf{Z} = \sum_{r=1}^R (g_r \mathbf{u}_r^{(1)} \circ \mathbf{u}_r^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{u}_r^{(N)}), \quad (9)$$

gdzie $\mathbf{u}_r^{(n)}$ jest r -tym wektorem cechy wzdłuż n -tego modu tensora \mathbf{Z} , g_r jest mnożnikiem skalującym, a R jest rzędem dekompozycji. Zadanie optymalizacji dla rekonstrukcji wielomodalnego obrazu wyrażonego tensorem \mathbf{T} może być zdefiniowany jako:

$$\min_{g_r, \mathbf{u}_r^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_r^{(N)}} \|\mathbf{X} - \mathbf{Z}\|_F^2 + \sum_{r=1}^R \rho^{(n)} \|\mathbf{L}^{(p)} \mathbf{u}_r^{(n)}\|_p^p, \quad (10)$$

gdzie $\mathbf{L}^{(p)}$ – operator pochodnej p -tego rzędu, $\|\mathbf{u}_r^{(n)}\|_2 = 1$, \mathbf{X} jest tensorem wyjściowym, \mathbf{T} jest niekompletnym tensorem wejściowym, a \mathbf{Z} jest modelem wyrażonym za pomocą (9). Zatem:

$$\mathbf{X}_{i_1, i_2, \dots, i_N} = \begin{cases} \mathbf{T}_{i_1, i_2, \dots, i_N} & (i_1, i_2, \dots, i_N) \in \Omega \\ \mathbf{Z}_{i_1, i_2, \dots, i_N} & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \quad (11)$$

W algorytmie SPC-QV człon kary w zadaniu (10) jest realizowany funkcją wymuszającą lokalną gładkość estymowanych czynników, gdzie współczynniki kary określono wektorem $\boldsymbol{\rho} = [\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(N)}]^T$ dla wszystkich modów tensora. W badaniach przyjęto $p = 2$, co definiuje normę l_2 . Minimalizacja takiej normy wymusza gładkość rozwiązania i dodatkowo stabilizuje zadanie źle uwarunkowane (standardowa regularyzacja Tichonowa).

Algorytm 3: SPC-QV

Wejście: \mathbf{T} – niekompletny tensor wejściowy, Ω – tensor indeksów elementów niezaburzonych, p – parametr metryki, $\boldsymbol{\rho}$ – wektor współczynników regularyzujących, $\mathbf{L}^{(p)}$ – macierz operatora wygładzania obrazu, SDR – współczynnik definiujący maksymalny poziom mocy sygnału do zaburzeń [dB], α – długość kroku aktualizacji, ν – parametr stagnacji błędu.

Wyjście: \mathbf{X} , \mathbf{Z}

Inicjalizacja: $\mathbf{X}_\Omega = \mathbf{T}_\Omega$, $\mathbf{X}_{\bar{\Omega}} = \text{mean}(\mathbf{T}_\Omega)$, $\mathbf{u}_r \sim \mathbf{U}[0, 1]$, $R = 1$

```
 $\varepsilon = 10^{(-\frac{\text{SDR}}{10})} \|\mathbf{T}\|_F^2$ ;
 $g_r = \langle \mathbf{X}, \mathbf{u}_r^{(1)} \circ \mathbf{u}_r^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{u}_r^{(N)} \rangle$ ;
 $\mathbf{E} = \mathbf{X} - \sum_{r=1}^R (g_r \mathbf{u}_r^{(1)} \circ \mathbf{u}_r^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{u}_r^{(N)})$ ;
 $\mathbf{E}_{\bar{\Omega}} = \mathbf{0}$ ;
 $t = 0$ ;
 $\mu_t = \|\mathbf{E}\|_F^2$ ;
repeat
  for r = 1, ..., R
     $\mathbf{Y}_r = \mathbf{E} + g_r \mathbf{u}_r^{(1)} \circ \mathbf{u}_r^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{u}_r^{(N)}$ ;
    for n = 1, ..., N
       $\mathbf{u}_r^{(n)} = \frac{\mathbf{u}_{r-1}^{(n)} - \alpha \mathbf{v}_{r-1}^{(n)}}{\sqrt{1 - 2\alpha (\mathbf{u}_{r-1}^{(n)})^T \mathbf{v}_{r-1}^{(n)} + \alpha^2 (\mathbf{v}_{r-1}^{(n)})^T \mathbf{u}_{r-1}^{(n)}}}$ ;
    end for
     $g_r = \frac{\langle \mathbf{Y}_r, \mathbf{u}_r^{(1)} \circ \mathbf{u}_r^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{u}_r^{(N)} \rangle}{(1 + \sum_{n=1}^N \rho^{(n)} \|\mathbf{L}^{(p)} \mathbf{u}_r^{(n)}\|_p^p)}$ ;
     $\mathbf{E} = \mathbf{Y}_r - g_r \mathbf{u}_r^{(1)} \circ \mathbf{u}_r^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{u}_r^{(N)}$ ;  $\mathbf{E}_{\bar{\Omega}} = \mathbf{0}$ ;
  end for
   $\mu_{t+1} = \|\mathbf{E}\|_F^2$ ;
  if  $|\frac{\mu_t - \mu_{t+1}}{\mu_{t+1} - \varepsilon}| \leq \nu$ ;
    R = R + 1
     $\mathbf{u}_r \sim \mathbf{U}[0, 1]$ 
     $g_r = \langle \mathbf{E}, \mathbf{u}_r^{(1)} \circ \mathbf{u}_r^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{u}_r^{(N)} \rangle$ ;
     $\mathbf{E} = \mathbf{E} - \sum_{r=1}^R (g_r \mathbf{u}_r^{(1)} \circ \mathbf{u}_r^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{u}_r^{(N)})$ ;
     $\mathbf{E}_{\bar{\Omega}} = \mathbf{0}$ ;
  end if
  t = t + 1;
until  $\mu_t < \varepsilon$ 
 $\mathbf{Z} = \sum_{r=1}^R (g_r \mathbf{u}_r^{(1)} \circ \mathbf{u}_r^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{u}_r^{(N)})$ ;
 $\mathbf{X}_\Omega = \mathbf{Z}_\Omega$ 
```

2.4. Metoda SmNMF-MC

Metoda SmNMF-MC (ang. *Smooth NMF based Matrix Completion*) powstała na podstawie algorytmu SPC-QV. Nie wykorzystuje jednak dekompozycji CP, a jedynie model NMF. Zadanie optymalizacji ma postać:

$$\min \frac{1}{2} \|\sum_{r=1}^R \lambda_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T - \mathbf{Y}\|_F^2 + \sum_{r=1}^R \frac{\lambda_r}{2} \|\rho_1 \|\mathbf{L}_1 \mathbf{u}_r\|_{p_1}^{p_1} + \rho_2 \|\mathbf{L}_2 \mathbf{v}_r\|_{p_2}^{p_2}\|_p^p, \quad (12)$$

gdzie \mathbf{u}_r i \mathbf{v}_r są odpowiednimi nieujemnymi wektorami cech, które odpowiadają kierunkowi pionowemu i poziomemu w obrazie \mathbf{Y} . Do rozwiązania zadania (12) wykorzystano algorytm HALS (ang. *Hierarchical Alternating Least Squares*) [11], podobnie jak w algorytmie SPC-QV. W zadaniu (12) występują również podobne funkcje wymuszające gładkość estymowanych czynników (człony kary). Oprócz nich, w tym algorytmie zaimplementowano funkcje dodatkowe. Zastosowano przesuwały się wagowy filtr uśredniający, realizowany funkcją

$smooth(\mathbf{u}, 5, 'rlowess')$ w Matlabie. Przyjmując $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = \mathbf{I}$, człony kary spełniają zatem funkcje stabilizujące rozwiązanie w przypadku złego uwarunkowania, a wygładzanie realizowane jest przez bezpośrednią filtrację.

Algorytm 4: **SmNMF-MC**

Wejście: $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{I \times J}$, Ω , R , $\theta = [(\rho_1, \rho_2), (p_1, p_2), (L_1, L_2)]$

Wyjście: \mathbf{X}^{out}

Inicjalizacja: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{1 \times J}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{I \times 1}$

$\mathbf{X} = \lambda \mathbf{u} \mathbf{v}^T$;

$\mathbf{Y} = \begin{cases} \mathbf{M} & \text{if } \Omega = 1 \\ \mathbf{X} & \text{if } \Omega = 0 \end{cases}$

$\mathbf{Z} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}$;

while $\|E_2 - E_1\|_F \geq 10^4$

for $r = 1, \dots, R$

$E_1 = \|\mathbf{Z}\|_F$

$\mathbf{Y}_r = \mathbf{Z} + \lambda_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T$;

$\mathbf{u}_r = (\mathbf{I}_1 + \rho_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1^T)^{-1} \mathbf{Y}_r \mathbf{v}_r$; $\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{u}_r}{\|\mathbf{u}_r\|_2}$;

$\mathbf{u}_r = smooth(\mathbf{u}_r, 5, 'rlowess')$;

$\mathbf{v}_r = (\mathbf{I}_2 + \rho_2 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_2^T)^{-1} \mathbf{Y}_r^T \mathbf{u}_r$; $\mathbf{v}_r = \frac{\mathbf{v}_r}{\|\mathbf{v}_r\|_2}$;

$\mathbf{v}_r = smooth(\mathbf{v}_r, 5, 'rlowess')$;

$\lambda = \frac{\mathbf{u}_r^T \mathbf{Y}_r \mathbf{v}_r}{1 + \rho_1 \|\mathbf{L}_1 \mathbf{u}_r\|_{p_1}^{p_1} + \rho_2 \|\mathbf{L}_2 \mathbf{v}_r\|_{p_2}^{p_2}}$;

$\mathbf{Z} = \begin{cases} \mathbf{Y}_r - \lambda_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T & \text{if } \Omega = 1 \\ 0 & \text{if } \Omega = 0 \end{cases}$

$E_2 = \|\mathbf{Z}\|_F$

end for

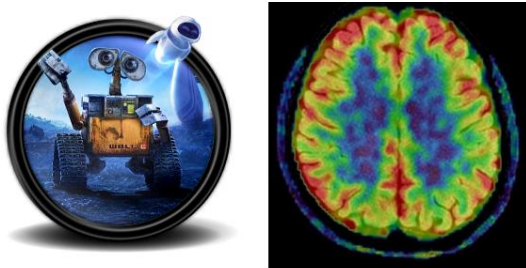
end while

3. Eksperymenty numeryczne

Testy przeprowadzono dla dwóch, kolorowych obrazów: wall-e (256×256 pikseli) oraz wybranego obrazu z pozytonowej tomografii emisyjnej (PET) o rozdzielczości 285×277 pikseli. Oba testowe obrazy pokazano na rys. 1.

Eksperymenty wykonano na komputerze o następujących parametrach: Windows 7 SP1, Intel i7-4790K 4.00 GHz, 8 GB, Matlab R2012a.

Algorytmy SVT, FCSA-TC i SPC-QV zostały pobrane ze stron autorów [36–38]. Testy algorytmów zostały przeprowadzone na niekompletnych obrazach, które wygenerowano przez usunięcie z obrazów oryginalnych: (a) losowo wybranych pikseli, odpowiednio w ilości 50%, 70% i 90%, (b) linii o szerokości pojedynczego piksela, tworzących regularną siatkę o boku 10 pikseli.

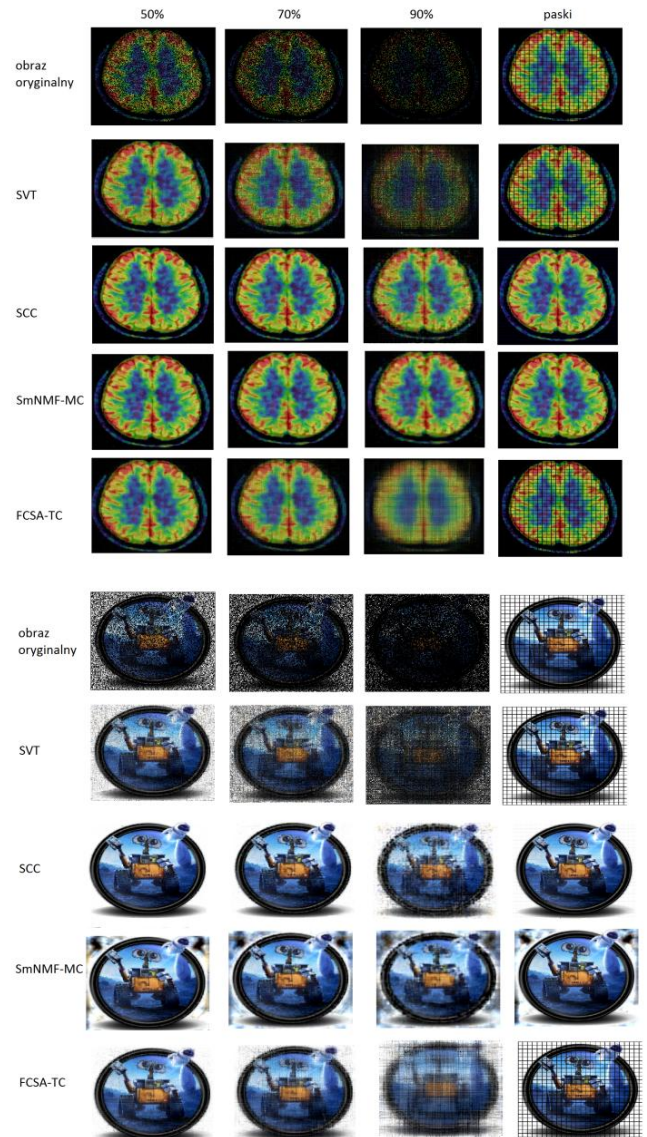


Rys. 1. Obrazy poddane testom: wall-e i PET-Scan

Oryginalne i estymowane obrazy pokazano na rys. 2. Do oceny jakości estymacji zastosowano miarę SIR (ang. *Signal-to-Interference Ratio*) [11]. Wyniki badań zaprezentowano w tabeli 1.

Wyniki badań nie pokazują jednoznacznie, która z metod jest bezwzględnie najlepsza. Metody tensorowe w większości przypadków wykazują się szybszą zbieżnością niż macierzowe. Aby uzyskać tę samą jakość rekonstrukcji, SmNMF-MC wymaga ok. 5000 iteracji, SPC-QC ok. 800, a FPCA-LRTC zaledwie 50

Metoda SmNMF-MC pozwala uzyskać rekonstrukcje obrazu „wall-e” o najwyższym współczynniku SIR. Metoda SPC-QC, która zazwyczaj jest skuteczniejsza niż SmNMF-MC dla danych silnie niekompletnych, nie radzi sobie z rekonstrukcją tą i wprowadza swoiste zakłócenia.



Rys. 2. Rekonstrukcja obrazów różnymi algorytmami

Tabela 1. Współczynniki SIR [dB] dla zrekonstruowanych obrazów

PET-Scan				
Typ obrazu	SmNMF-MC	SVT	SPC-QC	FPCA-LRTC
50%	26.11	22.81	24.43	19.83
70%	22.71	15.24	21.72	15.41
90%	15.38	7.32	17.12	9.38
siatka	11.4	-	28.46	-
wall-e				
Typ obrazu	SmNMF-MC	SVT	SPC-QC	FPCA-LRTC
50%	24.58	13.35	10.65	20.36
70%	21.41	7.23	10.10	15.70
90%	14.65	2.27	8.18	9.93
siatka	23.89	-	11.74	-

Bardzo ciekawie wygląda również test z zaburzeniami, typu siatka. Metody SVT oraz FCSA-TC nie pozwalają uzyskać zadawalających wyników dla takich obrazów. Metoda SmNMF-MC usuwa linie siatki, jednak można dostrzec ich cień na zrekonstruowanym obrazie. W przypadku SPC-QC linie zostają usunięte, lecz również zostają wprowadzone zakłócenia tła. W przypadku zaburzeń typu (a) metody SVT oraz FCSA-TC są skuteczne tylko dla obrazów o niewielkim stopniu utraty informacji.

4. Wnioski

W pracy porównano cztery metody rekonstrukcji obrazów niekompletnych. Implementacje różnią się również sposobem w jakim dany problem optymalizacji jest rozwiązywany np. użycie odpowiedniej funkcji celu, użycie różnego typu dekompozycji macierzy/ tensora, itd., co wpływa z kolei na ich wydajność. Dla zastosowanych danych testowych najlepsze wyniki uzyskano zaproponowaną metodą SmNMF-MC z wygładzaniem cech wagowymi filtrami uśredniającymi. Zaawansowane prace nad jej dalszą optymalizacją wciąż trwają. Badane metody mogą znaleźć zastosowanie i okazać się użyteczne w wielu różnych dziedzinach nauki, poczynając od kompresji czy rozpoznawania obrazów [8], przez ich rekonstrukcję, po analizę łańcuchów DNA [31].

Literatura

- [1] Ashikhmin M.: Synthesizing natural textures. I3D'01 Proceedings of the 2001 symposium on Interactive 3D graphics, 217–226, [doi: 10.1145/364338.364405].
- [2] Ballester C., Bertalmio M., Caselles V., Sapiro G., Verdera.: Filling-in by joint interpolation of vector fields and gray levels. IEEE Transactions on Image Processing 8/2001, 1200–1211, [doi: 10.1109/83.935036].
- [3] Beck A., Teboulle M.: Fast Gradient-Based Algorithms for Constrained Total Variation Image Denoising and Deblurring Problems. IEEE Trans. Image Process. 11/2009, [doi: 10.1109/TIP.2009.2028250].
- [4] Bertalmio M., Sapiro G., Caselles V., Ballester C.: Image inpainting. SIGGRAPH'00 Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, 2000, 417–424, [doi: 10.1145/344779.344972].
- [5] Bertalmio M., Bertozzi A., Sapiro G.: Navier-Stokes, fluid dynamics, and image and video inpainting. CVPR 1, 2001, 355–362, [doi: 10.1109/CVPR.2001.990497].
- [6] Bertalmio M., Vese L., Sapiro G., Osher S.: Simultaneous structure and texture image inpainting. CVPR 8, 2003, 707–712, [doi: 10.1109/TIP.2003.815261].
- [7] Bonet J.: Multiresolution sampling procedure for analysis and synthesis of texture images. Computer Graphics, Annual Conference Series, 1997, 361–368, [doi: 10.1145/258734.258882].
- [8] Cai J.-F., Candes E., Shen Z.: A singular value thresholding algorithm for matrix completion. SIAM J. Optim 4/2010, 1956–1982, [doi: 10.1137/080738970].
- [9] Chan T., Shen J.: Non-texture inpaintings by curvature-driven diffusions. J. Visual Comm. Image Rep. 4/2001, 436–449, [doi: 10.1006/jvci.2001.0487].
- [10] Chen Y.-L., Hsu C.-T., Liao H.-Y.: Simultaneous tensor decomposition and completion using factor priors. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 3/2014, 577–591, [doi: 10.1109/TPAMI.2013.164].
- [11] Cichocki A., Zdunek R., Phan A., Amari S.: Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations: Applications to Exploratory Multi-way Data Analysis and Blind Source Separation. Wiley and Sons, Chichester 2009.
- [12] Efros A., Leung T.: Texture synthesis by non-parametric sampling. Proc. IEEE Int. Conf. Comput. Vis., 1999, 1033–1038, [doi: 10.1109/ICCV.1999.790383].
- [13] Gandy S., Recht B., Yamada I.: Tensor completion and low-rank tensor recovery via convex optimization. Inverse Problems 27, 2011, 025010, [doi: 10.1088/0266-5611/27/2/025010].
- [14] Guo X., Ma Y.: Generalized Tensor Total Variation Minimization for Visual Data Recovery. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) 2015, 3603–3611, [doi: 10.1109/CVPR.2015.7298983].
- [15] Han X., Wu J., Wang L., Chen Y., Senhadji L., Shu H.: Linear Total Variation Approximate Regularized Nuclear Norm Optimization for Matrix Completion. Abstract & Applied Analysis 2014, 765782, [doi: 10.1155/2014/765782].
- [16] Heeger D., Bergen J.: Pyramid-based texture analysis/synthesis. SIGGRAPH'95 Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques, 229–238, [doi: 10.1145/218380.218446].
- [17] Herman G.: Fundamentals of computerized tomography: Image reconstruction from projection (2nd edition). Springer, New York 2009.
- [18] Hertzmann A., Jacobs C., Oliver N., Curless B., Salesin D.: Image analogies. SIGGRAPH '01 Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, 327–340, [doi: 10.1145/383259.383295].
- [19] Huang J., Zhang S., Dimitris Metaxas D.: Fast Optimization for Mixture Prior Models. Computer Vision – ECCV 2010. ECCV 2010. Lecture Notes in Computer Science 6313, 2010, 607–620, [doi: 10.1007/978-3-642-15558-1_44].
- [20] Ji H., Liu C., Shen Z., Xu Y.: Robust video denoising using low rank matrix completion. Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) 2010, 1791–1798, [doi: 10.1109/CVPR.2010.5539849].
- [21] Komodakis N., Tziritas G.: Image completion using global optimization. CVPR 2006, 442–452, [doi: 10.1109/CVPR.2006.141].
- [22] Kwatra V., Schödl A., Essa I., Turk G., Bobick A.: Graphcut textures: Image and video synthesis using graph cuts. SIGGRAPH 2003, 277–286, [doi: 10.1145/1201775.882264].
- [23] Levin A., Zomet A., Weiss Y.: Learning how to inpaint from global image statistics. Proc. 9th IEEE Int. Conf. Comput. Vis. 2003, 305–312, [doi: 10.1109/ICCV.2003.1238360].
- [24] Li W., Zhao L., Lin Z., Xu D., Lu D.: Non-local image inpainting using low-rank matrix completion. Computer Graphics Forum 2014, 111–122, [doi: 10.1111/cgf.12521].
- [25] Liang L., Liu C., Xu Y., Guo B., Shum H.: Real-time texture synthesis by patch-based sampling. ACM Tran. Graph. 3/2001, 127–150, [doi: 10.1145/501786.501787].
- [26] Liu J., Musialski P., Wonka P., Ye J.: Tensor completion for estimating missing values in visual data. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 1/2013, 208–220, [doi: 10.1145/501786.501787].
- [27] Phan A., Cichocki A., Tichavsky P., Luta G., Brockmeier A.: Tensor Completion Through Multiple Kronecker Product Decomposition. ICASSP, 2013, 3233–3237, [doi: 10.1109/ICASSP.2013.6638255].
- [28] Portilla J., Simoncelli E.: A parametric texture model based on joint statistics of complex wavelet coefficients. IJCV, 1/2000, 49–70, [doi: 10.1023/A:1026553619983].
- [29] Roth S., Black M.: Fields of experts: A framework for learning image priors. Proc. IEEE Comput. Vis. Pattern Recog., 2005, 860–867, [doi: 10.1109/CVPR.2005.160].
- [30] Sikora J., Wójtowicz S. (eds): Industrial and Biological Tomography: Theoretical Basis and Applications. Wydawnictwo Książkowe Instytutu Elektrotechniki, Warszawa 2010.
- [31] Troyanskaya O., Cantor M., Sherlock G., Brown P., Hastie T., Tibshirani R., D. Botstein, Altman R.: Missing value estimation methods for DNA microarrays. Bioinformatics 6/2001, 520–525, [doi: 10.1186/1471-2105-7-32].
- [32] Wei L., Levoy M.: Fast texture synthesis using tree-structured vector quantization. SIGGRAPH'00 Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, 479–488, [doi: 10.1145/344779.345009].
- [33] Wu Q., Yu Y.: Feature matching and deformation for texture synthesis. ACM Trans. Graph. 3/2004, 364–367, [doi: 10.1145/1186562.1015730].
- [34] Yokota T., Zhao Q., Cichocki A.: Smooth PARAFAC Decomposition for Tensor Completion. IEEE Transactions on Signal Processing 64(20), 2016, 5423–5436, [doi: 10.1109/TSP.2016.2586759].
- [35] Zdunek R.: Nieujemna faktoryzacja macierzy i tensorów: zastosowanie do klasyfikacji i przetwarzania sygnałów. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2014.
- [36] http://perception.csl.illinois.edu/matrix-rank/sample_code.html#MC, [25.04.2016]
- [37] http://ranger.uta.edu/~huang/R_LSI.htm, [25.04.2016]
- [38] <https://sites.google.com/site/yokotatsuya/home/software/smooth-parafac-decomposition-for-tensor-completion>, [25.04.2016]

Mgr inż. Tomasz Sadowski
e-mail: tomasz.sadowski@pwr.edu.pl



Dr hab. inż. Rafał Zdunek, prof. PWR
e-mail: rafal.zdunek@pwr.edu.pl



Stopień doktora i doktora habilitowanego w dziedzinie nauk technicznych otrzymał na Wydziale Elektroniki Politechniki Wrocławskiej, odpowiednio w latach 2002 i 2015. W Politechnice Wrocławskiej zatrudniony od 2001 roku na stanowiskach: asystenta n-d (2001 – 2002), adiunkta (2002 – 2016), profesora nadz. (od 2016 r.). W latach 2005 – 2007 pracował w RIKEN Brain Science Institute w Japonii na stanowisku Research Scientist. Jego zainteresowania naukowe obejmują metody przetwarzania sygnałów i uczenia maszynowego. Jest autorem lub współautorem ponad 100 recenzowanych publikacji naukowych. Jego prace są cytowane w bazie WoS ponad 950 razy, a jego indeks Hirscha wynosi 14.

otrzymano/received: 15.06.2016

przyjęto do druku/accepted: 22.11.2017