# 本学科における数学教育学（算数科教育）の構築（第５報）

## —— 生活・文化の視点からの教材開発についての考察 ——

本　間　俊　宏

概　要　コンピュータの出現により数学の思想が変化してきた。算数・数学教育は現代化に続いて，今日また新しい波に洗われようとしている。すなわち，算数・数学教育は，技術面および生活・文化面から追い上げられてきている。21世紀を迎えるにあたって，数学教育の内容を検討し，再構築を試みる。その第一歩として生活・文化の視点からの教材開発について考察する。

検索語　数学教育学　算数科教育　教材開発　生活・文化の視点　数学の思想　21世紀の数学教育

## Ⅰ　はじめに

工業社会のはじまりにあって，実用数学，たとえば，微積分の導入を提唱した John Perry や Felix Klein などの数学教育の近代化が20世紀初頭からはじまった。高度工業社会のなかにあって，技術革新の原動力たる現代数学の突き上げにはじまった数学教育の現代化が1960年代におこなわれ，そこでは数学の構造性が議論され，集合・ベクトル・行列などが学校数学に取り入れられた。今日は，情報社会といわれ，コンピュータをツールとして活用することにより，数学の思想が変化してきた。生活・技術面からの突き上げとして，グラフ理論，ファジィ理論，フラクタル理論，カオス理論などが発展し，これらの理論には，これまで数学が避けてきたきらいのある思想を含んでいるようにみられる。これらの理論がもつ新しい数学の思想を算数・数学教育に取り込むことにより，算数・数学教育の内容はこれまで以上に豊になろう。しかし，これ

らの新しい数学の思想は２１世紀を展望するとき学校数学としては視野に入れるべき課題であるが，現状では，生活・文化面からの突き上げを検討すべきであろう。

本論文では，生活・文化の視点からの教材開発について考察する。

## Ⅱ　これまでの学校数学の思想について

学校数学では，数・量・形について考察する。その分野としては，底流に集合・論理があり，基礎として数，量，代数，関数，図形，確率・統計などがあり，その発展として微積分，ベクトル，行列などがある。

集合は，範囲の確定したものの集まりを議論の対象とし，論理は真偽のはっきりしたものを対象とし，その意味で集合・論理はともに2値論理である。

微積分は，究極的には微小部分の変化を１次式化し，その上で分析と総合を繰り返している。図形では，１点を表現するのにいくつかの実数の組で行う。ｎ個の実数の組で表される点をｎ次元の点という。すなわち，整数次元である。

確率・統計は大量観察のなかに規則性があらわれる。

このように，これまでは単純化し，確定的なことを数学の対象としてきた。単純化できないもの，確定的でないことは数学の対象から除外されてきたといえよう。すなわち，実在の事象のすべてを数学で表現していたわけではなかった。元来，数学は自由性があり，20世紀の中ごろから，それまで数学の対象外とされていたことが，数学の対象として登場してきた。やがてこれらの思想が学校数学に取り入れられるのは歴史の上でも必定であろう。すなわち，近代化では微積分，現代化では集合・ベクトル・行列などが数学教師たちの努力によって教材化された。

## Ⅲ　これからの学校数学の思想について

Ⅱで述べたように，これまでは数学の対象からはずされていたことが，1960

年代頃から理論として発展し，生活・技術面から応用され，コンピュータの発達に促進され，数学としての地位を確立するようになってきた。

これらの新しい数学の理論がグラフ，ファジィ，フラクタル，カオスなどの諸理論である。

これらの理論に共通する教材化の視点は，実在の事象をほどよく抽象化しているために実在とのかかわりで議論できるところにある。これは，筆者が実在とのかかわりで数学教育の研究をしようとしている方向と一致する。また，これらの理論は，これまで数学の対象外におかれていたことを数学の対象としようとしている。すなわち，数学の自由性を示しており，それらの理論は数学として議論の対象になるプロセスをも示して構築されようとしている。このことは，数学の性格，すなわち，厳密性，形式性，抽象性，論理性，系統性などを浮き彫りにしてくれる。

次に各理論の教材化の方向について考察する。

(1) グラフ理論

事象はそれを構成する要素とそれら要素間の関係から構成されるシステムであるとしてとらえるとき，そのシステムの構造を把握するために，要素を点(vertex)，要素間の関係を辺（edge）として図式化した表現について論じるのがグラフ理論である。この理論は問題解決の手法としての意義がある。現代化では，数学の構造が提唱されたが，それは群がモデルであり，演算の中に埋没した。

グラフ理論は雑多であり，体系化されていない。したがって，トピックス的な扱いにならざるをえない。

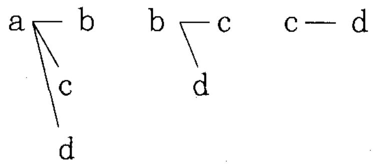
完全グラフ，連結グラフ（閉路と木），有向グラフ，平面的グラフなどを身のまわりの事象とからめて教材化することになる。

例えば，完全グラフについての教材化を考えてみる。

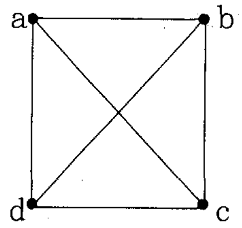
完全グラフは，どの点も互いに１つの辺で結ばれるようなグラフである。１つの辺で結ばれる両端の点を対とすれば，これは２つのものを選ぶ組合せであり，その個数は辺の数に一致する。樹形図（ツリー構造）で考えるよりも，視覚的

で考えやすくなる。

a,b,c,d から2つを選ぶ組合せを考えるとき，樹形図は1図，グラフは2図で表される。




1図




2図

教育としては，グラフ理論の問題を組合せの公式で解決するのではなく，小学校6年程度の導入段階でグラフ理論の手法を用いて組合せの公式を導くことに意義がある。

(2) ファジィ理論

範囲の確定したものの集まりである集合にかわって，範囲があいまいなものを数学の対象とする。あいまいなものをどうすれば数学の対象となるか。その過程を学ぶことになる。ここでも，数学は確定的なことを対象とするという思想は貫かれている。論理は，2値論理にかわって多値論理になる。

ファジイ理論はファジィ集合，ファジィ論理，ファジィ測度の3分野から構成される。

ファジィ集合ではメンバーシップ関数をどう同定するかが問題である。ファジィ論理ではファジィ推論を中心に扱う。ファジィ測度については検討をくわえることにする。

若い人の集まりということばはあっても，範囲の確定した概念としては認められず，「集合」の対象にならなかった。しかし，若い人の集まりはなんとなく存在する。それを数学として認知するには，そのなんとなくのところをきちんと定義する必要がある。ある人が若い人の集まりに所属する度合を決めることで，この若い人の集まりが確定する。このとき，対象になっている人の集まりを考え（全体集合），その集まりのどの人も若い人の集まりに所属する度合

が決まっているときに，若い人の集まりをファジィ集合とよぶ。こうしてできたファジィ集合は通常の集合（範囲の確定した集まりでこれをクリスプ集合という）と同じような演算体系をもつ。

教育的には，ファジィ集合がクリスプ集合と同じように演算体系をもつこと，そこへ到達するための数学化のプロセスを考察することである。

さらに，対象となる集合の各要素にある集まりの所属の度合を対応させる対応の規則をメンバーシップ関数という。このとき，所属の度合を決めることがきわめて主観的である。これを子どもが納得するようにどこまで客観化できるか，その方法を確立することが教育としての課題である。このようにメンバーシップ関数の同定に工夫がいるにせよ，あることがらがどうやって数学として認知されるかというプロセスが議論の対象になるところに教育的な意義がある。このようなことはこれまでの学校数学では扱われていたとはいえないだろう。数学の対象があってそれを理論として構築することがすべてであり，数学の対象になるかどうかの議論が抜けていたといえよう。

推論はものごとを論理的に考察する上で大切である。ことがらＡからことがらＢをみちびくとき，ルールとして「ＡならばＢである」があるとき，今ことがらＡであれば，ルールによって，Ｂであることが帰結される。このことは，あらためていわれるまでもなく，子どもの潜在的な論理として存在する。すなわち，子どもには当り前のこととしてうつっている。ここで，Ａらしいであれば，上のルールによって，Ｂらしいと帰結できるかは当然のようであって，とまどいがある。ここに推論とは何かを考察する切口があり，教育的な意義があると考える。

(3) フラクタル理論

究極においても自己相似を崩さない事象が存在する。これは脱ニュートンの思想である。ニュートンの思想，すなわち，微積分の思想は１次式近似である。これは，変化を微細化していくと，究極的には１次式近似，すなわち，直線で近似できるということである。また，２次元，３次元といった整数次元では表現できない事象が存在する。これが有理数次元，すなわち，フラクタル次元で

ある。これは，次元の概念の拡張である。このような事象に対処するのがフラクタル理論である。さらに，複素平面が高校数学に復活したことから縮小写像に関する自己相似集合は格好の教材となろう。

点を表すのにいくつかの実数の組を用い，実数がいくつあるかで，その個数を次元とよんでいた。しかし，ある正方形を埋めつくすような曲線（ペアノ曲線）が存在し，その次元を実数の個数で表すと，曲線だから１次元，正方形になるから２次元では，どの次元か判断ができない。さらに，自己相似の縮小写像を繰り返すと平面が埋まっていくようにみえる。これらの次元をどうみるか。そこで，発想をかえて，曲線ならばその曲線を覆いつくすような線分の和がつくられる。閉曲線の内部はその図形を覆いつくすような正方形の和がつくれる。同様に，ある図形を覆いつくすような図形の和が存在して，その図形を $d^k$ と表すときkの値を次元とする。図形を測るのにどのような尺度が必要かという議論に教育的な意義を認める。

かっての高校数学の数学ⅡＢに登場した「複素平面」（昭和35年改訂の高等学校学習指導要領）は，その後の学習指導要領の改訂では削除され，再び平成元年の改訂で数学Ｂに復活した。当時も複素平面上で図形の回転を扱ったが，入試問題の域をでなかったし，今回でもその傾向は続くと考える。しかし，以前と異なる環境としては，パソコンとフラクタル理論の登場があり，それによって，複素平面が実在感をもったものとして扱いうる。それが，縮小写像に関する自己相似集合によるフラクタル図形である。自己相似集合を複素平面上で考え，その点（要素）を複素数 $z$ で表す。縮小率 $k$ の縮小写像は $kz$ で表され，実軸に関する対称移動の写像は $\bar{z}$ で表され，原点Oを中心とする $\theta$ の回転移動の写像は $ze^{\theta i}$ で表される。これらの合成写像によって自己相似集合が構成される。これをパソコンの画面にかくことによってフラクタル図形として表現される。このように複素平面に関する理論を統合的に扱うところに教育的な意義がある。

(4) カオス理論

簡単な規則に支配された不規則な振動が現れる。これをカオス現象という。

生物の増殖率は，ある時点 $t$ での増殖の量 $y$ に比例するといわれ，線形微分方程式 $\dfrac{dy}{dt}=ky$ で表される。

これより，$y=y_0 e^{kt}$ というtの指数関数を得る。

さらに，飽和に達すれば増殖率は0として，次のような非線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt}=\frac{k(r-y)}{r}y$$ を得る。

この解をもとにカオス現象が得られる。微分方程式の解をパソコンを用いてグラフ化し，微分方程式を事象とのかかわりで議論するところに教育的な意義がある。

群は演算中心で具体性に欠けたので実験の域をでなかった。現代化の象徴であった集合は数学者からの批判もあり，定着しなかった。しかし，底流にある集合の思想は生き続けている。これらグラフ，ファジィ，フラクタル，カオスなどの諸理論の教材化では，それらの思想を重視し，生活・文化への応用を定着させるという視点を採用したい。

Ⅱで述べた学校数学の思想は基礎理論を形成するものであり，その上に応用理論としてⅢで述べた新しい学校数学の思想がある。これらⅢで述べた理論は数学としてまとまった理論であり，その理論の中で実在の事象とのかかわりで応用もあり，それ自身が閉じているというマイクロワールド（小世界）を形成している。

従って，これらの諸理論の教材化の方向としては，諸理論そのものを学ぶのではなく，それらの思想を学ぶようにする。そこではマイクロワールドが形成されるように教材を構成する。

## Ⅳ　生活・文化の視点からの教材開発についての考察

算数・数学を計算中心の問題解きから開放し，生活・文化に根ざすものとし

たい。そのために，現実の生活の中でどのように算数・数学が活用されているか。第4報の分数に引き続いて小数について学生に調査させた。これは，Ⅲで述べた新しい学校数学の思想を射程に入れつつ，現在定着している学校数学の思想のなかでマイクロワールドが形成されているかいないかを考察するという目的がある。

1993年度の本学の「教材研究Ⅲ(算数)」(3年次・後期)および夙川学院短大の「教科教育法・算数」(1年次・後期)の受講学生合わせて190人に，「小数が実際に用いられている場面を調べよ。さらに，演算にまで立ち入って調べよ。」という課題を出した。この課題の目的は，第一に小数が生活・文化のなかに根付いているか，第二に子どもにとって生活・文化との関連で算数を学ぶことがいかに重要であるか，を確認することであった。

第一の小数が生活・文化のなかに根付いているかについて，学生のレポートから考察する。以下に示すように消費税，身体，バーゲンセール，商品，食品成分，金利など学生の関心事・行動範囲が顕著にでている。

学生の調べた小数の活用例の項目は以下のようである。

消費税(28)　身体(25)　バーゲンセール(23)　商品(19)　食品成分(14)
金利(9)　割合(8)　統計(6)　アルバイト給料(5)　野球(5)　料金(4)
競馬(3)　濃度(3)　視聴率(3)　体操(3)　円周率(3)　薬成分(3)
敷地(2)　周波数(2)　競技(2)　円レート(1)　クレジット(1)　気温(1)
製作(1)　料理(1)　計175　(　)内の数値はレポートの数を表す。

これらの小数の活用例は次の2つに分類することができる。

a) 表示された数値をもとに，計算することにより目的が達成される。

b) 表示された数値に目的があり，計算は必要に応じて付随する。

これらの各場合の例を次にあげる。

a) の場合

① 消費税

関心事が一番高く，どのレポートにも登場しているといっても過言ではない。

実際のレシートを例にあげ，計算して確認しているものが多い。

筆者の経験によれば，書籍を定価（消費税込み）で売る書店と本体価（消費税抜き）にその消費税を加算して売る書店とがある。

定価650円（本体631円）の雑誌を購入するとき，

本体631円の消費税は　631×0.03＝18.93ここで小数第1位を四捨五入すると19円，切り捨てると18円となる。

従って，四捨五入のときは631＋19＝650となり定価と一致するが，切り捨てるときは631＋18＝649となり定価より1円安くなる。

消費税の円未満を切り捨てる書店では1円安く売ることになる。筆者はこのような書店で定価よりも1円安く雑誌を購入したことがあった。

消費税3％を求めるには，小数の演算が必要である。子どもに消費税に関心をもたせ，小数の計算を定着させるには格好の教材である。

② 身体

次に関心の高いのが身体に関することである。身長，体重，視力，体温，靴のサイズなどである。とくに，ダイエットに関係して標準体重をあげている。標準体重には，次のような公式がある。

・Broca法　（標準体重）＝（身長－100）×0.9

（肥満度）＝{(実測体重）－（標準体重)}÷（標準体重）×100

| やせ型 | やせぎみ | 正常 | 太りぎみ | 肥満 |
|---|---|---|---|---|
| | -20 | -10 | 10 | 20 |

・ローレル指数　（体重）÷（身長)$^3$×$10^7$

| やせすぎ | やせぎみ | ふつう | 太りぎみ | 太りすぎ |
|---|---|---|---|---|
| | 100 | 115 | 145 | 160 |

身長170cm，体重67kgの成人男性の場合，Broca法では，

標準体重＝(170-100)×0.9＝63.0(kg)，肥満度＝(67-63)÷63×100＝6.35

となり正常である。

ローレル指数$=67 \div 170^3 \times 10^7 = 136.37$　となりふつうである。

③　バーゲンセール

次に関心の高いのがバーゲンセールすなわち商品の割引である。広告のチラシや実際のレシートを例にあげ，計算して確認している。広告に掲載している割引価格と実際に計算した割引価格が違っているものがあり，広告用に価格を目だつように切捨てなどの操作をしていると指摘したレポートもある。

石油ファンヒーター46800円が4.6割引で24900円という広告のチラシがある。

割引価格$=46800 \times (1-0.46) = 25272$（円）

これは広告の割引価格24900円と異なるので，どうして計算していいのかわからないとあきらめた学生と広告効果をねらってインパクトのありそうな数値をだしたと推察した学生がいた。ここで4.7割引とすると，

割引価格$=46800 \times (1-0.47) = 24804$（円）

となる。割引価格を25000円とするよりも100円安い24900円の方が，消費者には24000円代か，安いなという印象を与え，割引率をその価格に近い4.6を採用したのではないか。それを4.7とすると96円高く表示したことになり価格の不当表示になる。

割引率と表示価格があわず，いかに安くみせるかという消費者の心理をついた広告は日頃目にすることが多い。子どもには広告をとおして社会の一端がわかる教材である。

④　金利

金利への関心も高く，郵便局，銀行，証券会社などの金融機関の金利を比較している。種類としては，普通貯金（郵便局），普通預金（銀行），定額貯金（郵便局），ニュー定期（郵便局），スーパー定期（銀行），ヒット（信託銀行），中期国債ファンド（証券会社）などをあげている。

年利率，期間，単利，複利など計算は複雑であるが，単利法で簡単に計算するような表示が多くみられる。

⑤　アルバイト給料

アルバイトの給料は時間給であるから，時間を単位として計算する。

時間給850円で45.5時間働くと，850×45.5＝38675　従って38675円の支給。

b）の場合

①　商品

商品の分量やサイズの表示に小数が用いられる。普段なにげなく見ている商品であるが，よく見るとペットボトル 1.5ℓ，ドッグフード 3.3kg，棚付学習机110×69.5×142.6cmという表示がある。これらは，小数を用いた表示にすぎないが，必要とならば小数の計算に発展する。

②　食品成分

食品に含まれる成分の分量は小数を用いて表すことが多い。

成分無調整3.6牛乳には，無脂乳固形分8.3％以上，乳脂肪分3.6％以上の表示があり，また，その牛乳100g中にはエネルギー65kcaℓ，たんぱく質3.2g，脂質3.7g，炭水化物（糖質）4.6g，灰分0.7g，カルシウム108mgの成分が含まれていると表示されている。これも表示された数値に意味があるが，必要ならば小数の計算が展開される。

③　野球の成績

野球の成績には，打率，勝率，防御率などがあり，これらは小数で表示される。

打率＝安打数÷打数であるから，打数394，安打数125の選手は，125÷394＝0.317の打率である。通常は３割１分７厘とよんでいる。

防御率＝自責点の合計×9÷全イニング数

第二に，生活・文化との関連で算数を学ぶことの重要性については，次のような学生の課題作成の感想から分かる。

A：レポートを書くために，日常生活の中で使われている小数を探したところ意外にもあまり見つからなくて，小数は生活にかかわりの薄いものだと思っていた。そのうち，毎日，頭の中で「小数，小数」と唱えながら暇さえあれば，小数が使われているところを探していると，日頃，はいている靴のサイズも小数があるのだと気づいたり，ガソリンスタンドで小数を見つけたり，

だんだん小数の見方が広がってきた。すると，小数を見つけるのもおもしろくなった。レポートをしたことで，日常生活の中で気づかないうちに使っている小数をあらためて見つめ直して，算数という教科の大事さがわかった。「計算や問題を解くときにしか使わない算数」ではなく，「自分の知らないところで生活に深くかかわっている算数」なのだと思った。

B：はじめ課題のプリントを見たときに「小数が日常生活に使われている場面を調べよ」と書いてあり，「そんなの簡単簡単」とたかをくくっていたら，痛い目にあった。いざその気になって探してみるとないものである。だけど実際は表だっていないだけでひっそりと小数は世間に存在しているのである。算数というものはそういうものなのだと，私はそのときはじめて気がついた。

C：「小数が実際に用いられている場面を見つけよ」という課題の作成にあたり，今までなにげなく当然のごとく用いていた小数という数が，とても見つけにくいものとなりました。どうしようかと色々探してみて，いざ見つけても，具体的な使い方となると困ってしまいました。妹の成績表を見ているときに「これだ」と思ったものが「平均点」でした。(偏差値もあったのですが，だし方がわからないのでやめました)。平均点ならば教材として使えると思い，これを課題としました。数を考えてみると，小数だけでなく色々な種類の数があることで，私たちの生活は成立ち，道路や橋から靴のサイズまであらゆるところで使用されていることをあらためて認識しました。

D：数学の計算上小数を使うことはあるが，生活の中で小数を使うというのは，あまりないように思っていた。しかし，1より小さな数ということで小数を用いている場面がけっこうあることに気づいた。「小数を探せ」といわれて，電車の中できょろきょろすることが多くなった。広告なんかに小数の使われている場面はないかなと探してしまう。「あっ，小数だ！」と思って，よく見てみると，時間の表示（4：02など）だったり，千の単位の印（1,980円など）だったりしてがっかりした。単なる小数の計算問題でなく，このような課題を子どもたちに与えたら，きっとおもしろいだろう。子どもは本当にたくさん小数を探してくるだろう。私が探すよりもたくさん発見しそうな

気がする。こんな風に小数に慣れさせる方法もあるのだなと感じた。

E：案外小数といってもないものだと思った。ほとんどのものは整数化されている。レポートが出されてから，心に「小数のつくもの」を留めておいたが，視力や靴のサイズなど本当に身近なものには全く気づかなくて，両親に「小数のつくものなんかそうそうないわ」とこぼしたら，「靴のサイズとか視力とか体重とかいっぱいあるのに」とあっさりいわれてしまった。小数を難しく考えていてデジタルものばかりに気をとられていたと思う。いろいろな方面から小数を考えるつもりでいたのに，結局，算数的・数学的にしか考えられなかった。まだまだ探せばあるのかもしれない。きっとこのレポートを提出した後で「あれもあった，これもあった」と気づいてくやしがると思う。まだ，ありそうなのにみつけられなくて，はがゆい思いをしている。

F：日常生活で小数が用いられている場面を調べてレポートを書くようにいわれたとき，「そんなんあるかな，できないのでは」と思いました。そのときはいくら考えても1つも思いつかず，「どうすれば見つけれるのだろう」などと思いましたが，意識しながら何気なく日常生活をおくっていくうちに，少しずつ小数を見つけられるようになりました。今まで気にせずに流していたものも実は小数だったなどということがよくありました。そして，今までどれだけぼーとして数字を見ていたかということが身にしみて分かりました。そして，小数と分数では明かに小数が多く，分数が意外と少ないのにも不思議に思いました。

G：自分の生活の中の小数をいざ探そうと思うと見つからず，ふとしたときにあったというように見つかるという気がしました。私でもこのように小数を探すことに一生懸命になったのだから，ただ「これが小数です」という導入より，子どもたちの身近な小数を探すようにすれば，きっと一生懸命探すと思います。そして，興味の持ち方も変わってくるのではないかと考えました。小数の計算を教える場合でも，子どもたちが経験したことのあることなどを使って教えていくことができれば，進んで学んでくれると思います。

学生の課題作成の感想から分かることは，日常生活では小数の存在に気がつかない，むしろ気にしていないといえる。いざ小数を見つけるとなると戸惑いがみられる。小数がないかと意識することによって，じわじわと小数の存在が見えてくる。それだけ身のまわりに注意深い目を向けることになる。これは子どもの教育において，教室の中に閉じ込めないで身のまわりに目を向けさせるという視点の必要性を示唆している。

## V　今後の課題

21世紀をめざす算数・数学教育において，計算中心の知識としての数学を学ぶのではなく，学んだことが価値の実現となることが大切である。そのためには，実在の現象とのかかわりでマイクロワールドが形成されるような教材化をすすめる必要がある。そこへ，新しい思想（アイデア）として，グラフ，ファジィ，フラクタル，カオスなどがコンピュータとのかかわりをもって登場した。それらの教材としての価値は子どもへの実践の中で明らかにしたい。

一方では，従来からの学校数学の成果として，数学が生活・文化と深くかかわっていることは事実である。例えば，子どもにとっては，教室の中だけに存在すると考えていた，分数・小数が身のまわりに広く存在し，社会はむしろそれらを積極的に用いる傾向さえある。そこには文化が形成されつつあるともいえる。教師をめざす学生が問題意識をもって身のまわりを注意深くみることはⅣで述べたような課題をとおして訓練されることは明かである。このことを，子どもにまで拡大していくことが重要である。子どもへの実践の中で明らかにしたい。

**＜参考文献＞**

(1) オア，ウイルソン（大石康彦訳）(1993)「やさしくくわしいグラフ理論入門」日本評論社
(2) 坂和正敏（1989)「ファジィ理論の基礎と応用」森北出版
(3) 石村貞夫，石村園子（1990)「フラクタル数学」東京図書
(4) 長島弘幸，馬場良和（1992)「カオス入門－現象の解析と数理－」培風館