本学科における数学教育学(算数科教育)の構築(第3報)

——学生の関数についての認識の考察——

本　間　俊　宏

概要　数学教育学の構築に際して，学生が数学の内容に対してどのような認識をもっているかを把握することが重要である。本小論では，学生の関数についての認識を考察する。

検索語　　数学教育学　算数科教育　関数教育　関数についての認識

I　はじめに

第1報では，本学科の学生の数学に対する意識についての考察をとおして，本学科における数学教育学の構築の方向性について論じた。学生の数学観は，「問題を解けたときは楽しい」「答えは1つにきまる」という単純明快であり，算数・数学の内容にまでたちいたった見解はみられなかった。そこで，実在の現象を解明する中で子どもたちが生き生きと学んでいる実践例を学生が学ぶことによって，もっと内容のある奥の深いものであると感じとるようになった。

第2報では，情報化社会における教師教育としての教育情報処理の問題点について，筆者の本学における授業実践をとおして考察した。学生はコンピュータ等に関心はあるが，ある程度，例えば，パソコンの画面に絵を描くことができればそれで満足し，すすんで教材開発に挑戦しようという教育利用への問題意識がみられない。情報処理教育が大衆化する時代には，情報処理の学習後をどのように発展させるかが今後の課題である。

数学教育学の構築に際して，学生が数学の内容に対してどのような認識をもっているかを把握することが重要である。第3報では，その1つとして学生の関

数についての認識を考察する。

II　関数教育の内容

筆者のこれまでの関数教育の研究[1)]によれば，関数は式表現を考えない関数と式表現された関数に分けて指導することが望ましい。何故，２段階に分けるかは，関数といえば，式とグラフのイメージしか子どもたちはもたないからである。それは，先ず，２変数の間の関係を表す式が与えられ，それら２変数の対応する数値を表にまとめ，それをグラフに表すという指導がなされているからである。しかし，お湯をわかすときや沸騰したお湯をさますとき，時間の経過とお湯の温度の対応関係は式に表さなくとも，実際の測定によってその変化の様子を表やグラフに表すことができる。関数を式に表すことにこだわらなければ，実在の事象のなかに関数をみいだすことは容易になる。

関数教育のねらいは，実在の事象のなかに２変量をみいだし，それらの変化の様子を対応関係としてとらえ，グラフに表す等をとおして意志決定をするところにある。

従って，関数教育の内容は，先ず，式表現を考えない関数において，

①　２つの変量を抽出する。

②　２変量を対応させ，対応の規則性をみいだす。

③　２変量の対応関係を調べ，数表にまとめる。すなわち，対応表をつくる。

④　対応表から増加・減少などの変化の様子をグラフに表す。

⑤　対応表，グラフから最大・最小をみいだす。

⑥　さらに，区間変化率，瞬間変化率を求めることにより，変化の様子をミクロに調べる。

次に式表現された関数において，式の特性を押さえ，上述の①～⑥を扱う。

関数の指導では，２変量の対応関係が与えられた事象について扱うのが通例であるが，２変量を抽出し，それらの対応関係をみいだすことが実在の事象の解明においては重要である。そのためには，集合の概念を必要とする。

上述の視点にたった関数教育の実践例は別の論文[2)]に述べたので本論文では割愛する。

Ⅲ　学生の関数についての認識の考察——学生のレポートから

1991年度の算数科教育論の受講学生は，1970年４月以降生まれを基準にすると，次のような学習指導要領のもとに学校教育を受けてきた。

・小学校１年　　　「現代化」指導要領（1968年告示）
・小学校２・３年　新指導要領への移行期
・小学校４年以降　「ゆとりと充実」指導要領（1977年告示）

しかし，関数の指導は小学校４年からはじまるので，関数教育について論じるときは，現行の学習指導要領（小学校・中学校は1977年７月告示，高等学校は1978年８月告示）をふまえるだけでよいことになる。

小学校では，関数的な見方・考え方が指導の主流で，２数の和，差，積，商が一定，正比例，反比例など式化が簡単なものだけを扱っている。

中学校では，お風呂に水を入れる，電気の使用料金，ボールの落下などの事象を扱うものの変量の抽出はなく，あらかじめ伴って変わる２変量が与えられている。しかし，一次関数，二乗に比例する関数など式表現された関数が主であり，変化の割合は両者の比較に用いるにすぎない。

高等学校では，定数関数，１次関数，２次関数，３次関数などの整関数，分数関数，無理関数，三角関数，指数関数，対数関数等の式表現された関数のみを扱う。しかも，「数学Ⅰ」は，関数をグラフに表すことが主であり，グラフの平行移動など解析幾何的な扱いに終始している。「数学Ⅱ」や「基礎解析」においてはじめて，微分の考えにより微小部分の変化を扱う。関数の変化の本格的な追究は「微分・積分」において扱うが，「微分・積分」の履修者は本講義の受講学生の30％に満たない。

従って，本講義の受講学生の関数についての認識としては，次のことが予想される。

① 関数は，式，表，グラフに表される。

② 実在の事象から2変量を抽出し，対応づけることは困難である。

③ 関数と方程式が混在している。

以上のことから，Ⅱで述べた観点のもとに，上述の予想をふまえて講義した。以下に，講義資料より抜粋する。

〈伴って変わる2つの量の間の関係――関数〉

身の回りの事象には，伴って変わる2つの量の間の関係としてとらえることのできるものがある。

（例1）遊園地の観覧車

乗り始めはゆっくりであるが，やがて地上からぐんぐん高くなり，頂上になるとゆっくりとなり恐怖すら感じる。やがて地上にぐんぐん落ちていき，一周の旅は終わりとなる。

この現象はどう解明すればよいか。

（例2）日影と日照権

本学の3号館は2号館の1階の研究室にどのような日影をもたらすか。

① 関数の定義

2つの変数 x，y があって，x の各値に対して，y の値が1つずつ決まるような対応の規則が与えられているとき，y は x の関数（function）であるといい，f などで表す。

すなわち，関数 $y=f(x)$ という。このとき，x を独立変数（自変数），y を従属変数（従変数）という。

関数 $y=f(x)$ において，独立変数 x のとりうる値の集合，すなわち x の変域を関数の定義域，従属変数 y のとりうる値の集合，すなわち y の変域を関数の値域という。

(注) 関数 f を表す式は1つとは限らない。

② 関数のグラフ

関数 $y=f(x)$ の定義域をDとするとき，

座標平面上の点の集合 $G=\{(x,\ y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$

を関数 $y=f(x)$ のグラフという。

③ 関数の増加・減少

関数 $y=f(x)$ において，ある区間Iに属する任意の値 x_1，x_2 に対して，

(1) $x_1<x_2$ ならば $f(x_1)<f(x_2)$ であるとき，

関数 $f(x)$ は区間Iで単調増加であるという。

(2) $x_1<x_2$ ならば $f(x_1)>f(x_2)$ であるとき，

関数 $f(x)$ は区間 I で単調減少であるという。

④　関数の最大・最小

関数 $y=f(x)$ において，この関数の値域に最も大きい値が存在するとき，それをこの関数の最大値といい，値域に最も小さい値が存在するとき，それをこの関数の最小値という。

⑤　区間変化率の定義

関数 $y=f(x)$ において，独立変数 x の値が x_1 から x_2 まで変化するとき，x_2-x_1 を x の増分といい，Δxで表す。すなわち，$\Delta x=x_2-x_1$

このとき，従属変数 y の値が $f(x_1)$ から $f(x_2)$ まで変化するものとすれば，$f(x_2)-f(x_1)$ を y の増分といい，Δy で表す。すなわち，$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$

さらに，x の増分１当りに対応する y の増分を区間変化率（変化の割合，平均変化率）という。すなわち，$x=x_1$ から $x=x_2$ までの区間変化率は

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

⑥　瞬間変化率の定義

関数 $y=f(x)$ において，$x=a$ から $x=a+h$ までの区間変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が，h が０に限りなく近づくとき，一定値 α に限りなく近づくならば，α を $x=a$ における瞬間変化率（変化率，微分係数）という。

以上の数学の内容の講義後，関数の指導について講義した。再び，講義資料より抜粋する。

⑦　関数的な見方・考え方

いろいろな事象に関数概念をあてはめて，関数の立場でその事象を見たり，考えたりする指導方法である。

（例１）　５個のりんごをＡ，Ｂの２人で分けるときの分け方を調べよ。

（例２）　二等辺三角形について，高さを変えることによって両底角はどうなるかを調べよ。

（例３）　62円の切手と72円の切手をあわせて５枚買って，330円を払った。それぞれ何枚買ったか。

⑧　関数の指導内容

次に述べる関数の指導は，関数的な見方・考え方の指導とは質的に異なるものである。

(1)　変量の抽出

(2) 対応の規則——関数の抽出
(3) 増加・減少——関数の変化
(4) 最大・最小
(5) 区間変化率
(6) 瞬間変化率
(7) グラフ

⑨ 関数の種類
(1) 式表示を考えない関数
(2) 式表示された関数——2つの数量の和，差，積，商が一定，比例と反比例

以上のような講義をした後，「関数の教材例を実際の場面にそくしてつくれ」という課題を出した。以下に，提出されたレポートから受講学生の考えた関数例を列挙する。変量Ａから変量Ｂへの対応関係として筆者が整理し，Ａ→Ｂの形式で表現した。

〈受講学生の考えた関数例〉

(1) 水をいれる，お湯をわかす（25人）
① お風呂に水をいれる　・時間→水面の高さ　(11)
　・時間→水量　(2)
② お風呂の水をぬく　・時間→水量　(1)
③ 洗面台に水をいれる　・時間→水面の高さ　(1)
④ 容器に水をいれる　・時間→水面の高さ　(5)
⑤ 水槽に水をいれる　・水量→水面の高さ　(1)
⑥ ビニール袋に水をいれる　・時間→水量　(1)
⑦ お湯をわかす　・時間→水温　(2)
⑧ 水をこおらす　・時間→水温　(1)

(2) ろうそく，線香をもやす（26人）
① ろうそくをもやす　・時間→ろうそくの長さ　(9)
② 線香をもやす　・時間→線香の長さ　(5)
　・線香の長さ→時間　(1)
③ 渦巻線香をもやす　・時間→中心からの距離 (1)

(3) はかりではかる（9人）
① バネばかり　・重さ→バネの重さ　(3)
　・針金の長さ→重さ　(1)

② ゴムばかり　・重さ→ゴムの長さ　(1)
③ てんびんばかり　・支点からの距離→重さ（1）
④ 台ばかり　・重さ→台支柱の長さ（1）
　・うどんの長さ→重さ（1）
⑤ 電子レンジの計量　・計量スプーンの杯数→重さ（1）

(4) 気温，体温（5人）
① 気温　・時刻→気温　(2)
　・標高→気温　(1)
　・時刻→不快指数　(1)
② 体温　・時刻→体温　(1)

(5) 使用料金（21人）
① 電気使用料金　・電気使用量→金額　(4)
② ガス使用料金　・ガス使用量→金額　(3)
③ 水道使用料金　・水道使用量→金額　(4)
④ 郵便料金　・第一種郵便の重さ→金額（1）
　・第三種郵便の重さ→金額（1）
　・書籍小包の重さ→金額（2）
⑤ 電報・電話料金　・電報字数→金額　(1)
　・ダイヤル通話時間→金額（1）
　・テレフォン・カードの度数→最大通話時間（1）
⑥ 乗車料金　・神戸電鉄の駅→金額（1）
　・タクシー・メーター→金額（1）
⑦ 写真代　・写真のプリント枚数→金額（1）

(6) 影（5人）
① 棒状のものの影　・時刻→影の長さ（4）
　・時刻→影の方向（1）

(7) 速さに関すること（13人）
① 自動車　・時間→走行距離（2）
　・走行距離→ガソリン消費量（2）
　・時速→衝撃力（1）
② 歩行者　・時間→歩行距離（2）
　・時速→歩行時間（1）
③ ボールの落下　・時間→落下距離（1）
④ 振子　・時間→静止点と振子との間の距離（1）
　・ひもの長さ→振子が10周するまでの時間（1）
⑤ スピードガン　・ボールの方向→ボールの時速（1）

⑥　列車　　　　　　　・時間→走行距離（1）

(8)　数式の利用（5人）

①　シュークリーム　　・個数→金額（1）

②　肉　　　　　　　　・重さ→金額（1）

③　輪　　　　　　　　・個数→結び目の数（1）

④　2数の和が10　　　・一方の数→他方の数（1）

⑤　27個のアメ　　　　・人数→1人分の個数（1）

(9)　図形の利用（4人）

①　正方形　　　　　　・個数→周囲の長さ（1）

②　面積24㎠の長方形　・たての長さ→横の長さ（1）

③　底辺一定の二等辺三角形　・高さ→頂角の角度（1）

④　すいか（球）　　　・人数→1人分のすいかの頂角の角度（1）

(10)　その他の事象（9人）

①　ダイヤル電話　　　・ダイヤルナンバー→音の回数（1）

②　時計　　　　　　　・正時刻→長針と短針との角度（1）

③　地図　　　　　　　・縮尺→地図上の札幌と旭川との距離（1）

④　放射性炭素　　　　・年数→放射能の量（1）

⑤　時差　　　　　　　・日本時刻→ロスアンゼルス時刻（1）

⑥　大観覧車　　　　　・角度→ゴンドラの高さ（1）

⑦　ライン引き　　　　・白線の長さ→タイヤの回転数（1）

⑧　ビデオテープ　　　・時間→テープの長さ（1）

⑨　哺乳動物　　　　　・体重→脳の重さ（1）

(11)　文章題，方程式と混同（5人）

①　時計　　　　　　　・時刻→長針と短針とのなす角（1）

特定の時刻のみ扱っている。

②　周の長さ50㎝の長方形　・たての長さ→横の長さ（1）

たての長さ3㎝のときの，横の長さを求める。

③　3人の所持金（1）

与条件から3人の所持金を求めるという方程式の問題

④　2元1次連立方程式（1）

⑤　バスの分速を求める問題（1）

ここには，受講学生のうち提出された127人のレポートについて列挙した。関数例のうち，水に関するもの（注水，排水，加熱，冷却），ろうそく・線

香に関するもの（燃焼），公共料金に関するもの（電気，ガス，水道，郵便，電話等）などは，中学校以来学習したものであり，72人がとりくんだ。目新しくはないが，実験装置や測定方法を工夫し，２変量の抽出から，対応の規則，変化をグラフに表すなど一連の作業過程をはじめて体験したことが伺える。また，棒状のものの影，遊園地の観覧車など講義の例を扱った例は譴少であった。これは，前者は天候に左右されるのと時間がかかること，後者はデータが得られないことで敬遠したか，あるいは講義の例なので遠慮したのかもしれない。その他，重さとゴムののびの関係を調べたり，日本と外国との時差を調べたり身の回りの事象に目を向けた例もあった。しかし，速さを求めることと関数が混同したり，連立方程式を解くことと関数が混同した例もあった。これらは，いずれも２量の間の関係であるが，変量としてとらえられなかったところに起因すると考えられる。具体例として後述するが，式化を試みた例もあった。しかし，数学に深く関わるところなので文系では限界があった。

次に，提出されたレポートより具体的な関数例をあげてみる。

〈例１〉水２ℓ（水温29℃）をやかんでわかす，そしてさます。

関数：時間→水温

対応表：

時間（分）	0	1	2	3	4	5	6	7	8 *1	9	10	11 *2	12 *3	13	14	15	16	17	18
水温（℃）	29	39	45	51	56	62	66	71	76	80	84	88	90	91	96	97	98	98	98

注）＊１　湯気が立つ　＊２　しんしんと音がしだす　＊３　ボコボコと泡がでだす

湯気が立ってから温度の上がり方が少なくなった。100℃までなかなか達しない。いままで沸騰したらそれが100℃のお湯だと思っていたので，98℃で上昇がストップしたのには驚いた。沸騰までの記録で終っていたが，果してこれが関数なのかと不安になり，今度は元の水温に戻るまでを続けて計測した。しかし，上昇の時と比べると，変化率が少なく１時間を超える大仕事となり，蒸し暑さと戦いながらの計測となった。

時間（分）	1	2	3	4	5……10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110……140	150
水温（℃）	94	92	89	87	85……80	65	59	54.5	49.5	46.5	44	42	40	38	37……34	33

〈例２〉お風呂の水をいっぱいにする。

関数：時間→水位の高さ

対応表：

時間（分）	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
高さ（cm）	0	4.2	8.4	11.4	14.4	18.4	21.4	25.4	28.6	31.2	34.2	37.2	41.7	44.4	47.4	50.4

風呂に一定の水を入れながら２分毎に鉛筆で印をつけ，10分毎に数字をつける。１分～４分の間は風呂の底のカーブになっている部分のところぐらいに水位がくるので実際に高さをはかったのは４分からにした。水位の高さは水を抜いてから，ものさしではかった。

〈例３〉ろうそくに火をつける。

関数：時間→ろうそくの長さ

対応表：

時間（分）	0	10	20	30	40
長さ（cm）	32.3	32.0	31.7	31.4	31.1

ろうそくに火をつけてから10分毎にその長さを測った。火をつけてからx分後のろうそくの長さを$y$cmとすると$y=3x+32.3$である。

〈例４〉線香に火をつける。

関数：時間→線香の長さ

対応表：

時間（分）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
長さ（cm）	12.0	11.7	11.3	10.9	10.5	10.1	9.7	9.3	8.8	8.4	8.1	7.7	7.2	6.8	6.4	5.9	5.4	5.1	4.8	4.4	3.9

線香の長さと時間というよりも，ここでは線香の燃えた長さと時間が比例しているということになる。というのは１分間における線香の燃えた長さ（変化量）はほぼ同じであるからである。線香のはじめの長さ12.0cm，20分後の長さ3.9cmであるから，１分間に燃える長さは(12.0-3.9)÷20＝0.41(cm）。従って，x分後の線香の長さを$y$cmとすると$y=-0.41x+12$という一次関数で表される。

〈例５〉輪ゴムがのびる。

関数：紙ねんどの重さ→輪ゴムののびた長さ

対応表：

重さ（g）	0	50	100	150	200	250	300
長さ（cm）	0	1.0	3.2	5.8	8.3	11.7	15.4

衣紋掛けに輪ゴムを掛け，それにひっかけるものをつけ，紙ねんどで50g毎におもりをつくり，ぶらさげる。ゴムの“のび”は正比例に近いことがわかる。

〈例６〉電気料金

関数：電気使用量→電気料金

従量電灯甲について，

最初の15kwhまで		312円00銭
15kwh超過120kwhまで	１kwhにつき	19円17銭
120kwh超過250kwhまで	１kwhにつき	25円39銭
250kwh超過	１kwhにつき	27円91銭

〈関西電力・電気料金単価表より〉

電気使用量と電気料金の関数の式化

使用量を$x$kwh，料金をy円とすると120kwhまでは，

$y=312+19.17\times(x-15)$

故に　$y=19.17x+24.45$　定義域は $\{x \mid 15\leqq x\leqq 120,\ x$は自然数$\}$

ただし，料金は１円未満を切り捨てる。

また，実際の使用量は小数もとりうるが，1kwh未満は切り捨てて検針する。

従って，$y=19.17[x]+24.45$　定義域は $\{x \mid 15\leqq x\leqq 120,\ x$は実数$\}$

ただし，$[x]=n$（$n\leqq x<n+1$，nは自然数）

電気料金と電気使用量について調べてみましたが，電気料金単価表を見て，実際に計算してみると金額がどうしても合いませんでした。そして計算の仕方を教えてもらおうと思い関西電力に電話して尋ねてみると，とても詳しく教えて下さいました。電気料金の支払いが遅れると遅収料金を支払わなければならないので期限は必ず守って支払おうと思いました。使用量が120kwhを超えてからの関数とグラフが考えられなかったのが残念です。電気は大切なエネルギー資源なので節電に心がけようと思います。

〈例７〉鉛筆の影

関数：時刻→鉛筆の影の長さ，時刻→鉛筆の影の方向

対応表：

時刻	9：00	10：30	11：30	12：00	12：30	13：00	13：30	14：00	14：30
長さ（cm）	19.5	12.5	10.7	10.5	11.0	12.0	12.5	14.5	19.0
方向（度）	40	60	90	105	125	135	150	155	165

測定不能の時間があり，１時間ごとに祈るような気持ちでしたよ。

〈例８〉ひもをつるし，振る。

関数：ひもの長さ→振子が10周するまでの時間

対応表：

長さ（cm）	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
時間（秒）	7.0	9.8	11.6	13.2	14.8	16.0	17.2	18.0	19.0	20

天井からひもをつるし，そのひもの長さと周期を調べた。時間はひもが10周するまで測った。

〈例９〉遊園地の観覧車

関数：ゴンドラの乗車地点からの回転角→ゴンドラの地上からの高さ

オーストリアの首都ウィーンにあるプラター遊園地の大観覧車について

大観覧車は最高点が地上64.75m，車輪の直径61m，車輪の中心は地上34.2m，回転速度は毎秒0.75mである。

ゴンドラの回転角をx，ゴンドラの地上からの高さをyとすると

$$y = sinx + 34.2$$

ただし，乗車地点は$x = -\frac{\pi}{2}$　降車地点は$x = \frac{3}{2}\pi$

本当はxを時間にしたかったのですが，よくわかりません。

レポート全般については，身の回りの事象から関数の例を何とかみつけようという努力はあるが，関数関係をみいだすことによって，その事象の何かが解明され，人間の行動様式として意志決定するまでには至っていない。関数の例を単にみいだすだけで終るところには関数教育の限界を感じる。

以下，上述の具体例について考察をすすめる。

〈例１〉では，お湯が沸騰するのが常識では100℃となっているが，実際の測定では98℃で沸騰したことに驚いている。理科の実験では沸騰石なるものを入れ，しかも変化は直線的である。しかし，筆者の実験でもただやかんに水を入れて加熱するだけでは（これが日常生活そのものの事象である），変化には凹凸があり，水銀柱が膨張するのか中の水銀が少し落ちて水温は上昇しているはずなのに，数値は減少するというハプニングを経験した。報告者は量的な変化の中に質的な変化にも着目しており，湯気が立つ，しんしんと音がしだす，ボコボコと泡がでだすと観察している。これこそがお湯をわかすときの行動様

式につながるものである。

〈例2〉では，お風呂に水を入れる事象を扱っている。しかし残念なのは時間の経過に伴って水位が上昇するようすを観察しているにすぎない。これこそ典型的な関数の例といえる。すなわち，実在の中にこんな関数があるというだけで，関数のモデルを紹介したにすぎない。私たちが，お風呂に水を入れるときどんな行動様式をとるか。それは，あるところで水を入れるのを止めることである。そのためにはどんな生活の知恵をだすか。それこそ水位の上昇という量的な変化を調べることによって行動の意志決定がなされることになる。人はこれを問題解決学習と称するかもしれないが，問題解決学習という手法を学ぶのではない。生活の知恵をどのように科学化するかであり，そこには数学をどのようにもちこむかである。その1つが関数ということである。

同様なことが〈例3〉，〈例4〉でもいえる。ろうそくをつける，線香をもやすという行動様式は何か。それは，何時間で燃え尽きるかということが気がかりであろう。そう考えると単なる一次関数の例では済まされないものがある。燃え方が一定であれば，計算で燃え尽きる時間が求められる。

〈例5〉では，輪ゴムの伸び方を扱っている。どこまで伸びるか，そこで切れるか，そのときのおもりの重さはいくらか，限界にまで挑戦してもらいたかった。

下宿学生にとっては，毎月支払う電気料金，ガス料金等なので，これらに着目し関数例をみいだしたものが多い。多くの例は，毎月の使用量と料金の対応関係になっている。しかし，〈例6〉は，使用量に対する料金の関係を公式化しようと試みている。そして，自分がつくった公式により自分の支払った料金を計算し，疑問点を業者にまで問い合わせていることである。消費者の行動様式としてはモデルとなるものである。報告者は，電気使用量が120kwhを越える分についての公式化ができなかったと報告している。

そこで，資料より従量電灯甲について公式化してみよう。ひと月の使用電力量が0kwhの場合の基本料金は半額となることに注意して，電気使用量$x$kwhに対する料金をy円とすると，

$x=0$ のとき $y=312\div 2=156$

$0<x\leqq 15$ のとき $y=312$

$15<x\leqq 120$ のとき $y=f(x)=312+19.17(x-15)=19.17x+24.45$

$120<x\leqq 250$ のとき $y=g(x)=f(120)+25.39(x-120)=25.39x-721.95$

$250<x$ のとき $y=g(250)+27.91(x-250)=27.91x-1351.95$

ここでxは実数とし，$[x]=n$ （$n\leqq x<n+1$，nは自然数）とすると

$x=0$ のとき $y=156$

$0<x\leqq 15$ のとき $y=312$

$15<x\leqq 120$ のとき $y=19.17[x]+24.45$

$120<x\leqq 250$ のとき $y=25.39[x]-721.95$

$250<x$ のとき $y=27.91[x]-1351.95$

〈例７〉は，日影を扱っているが，天候に左右されて測定不能な時間帯がでている。これも，１日のうちで建物の影がどう変わるかへと発展させるとよい。

〈例８〉は，物理的事象としてはよいが，ひもの先端におもりをつけて振子のように振ることがどんな行動様式につながるか。それがはっきりしないと，単なる関数のモデルにすぎない。

〈例９〉は，遊園地の観覧車を扱っている。報告者は式化を試みている。ゴンドラの回転角xを乗車地点では$x=0$，降車地点では$x=2\pi$とし，ゴンドラの地上からの高さをyとすると，

$$y=30.5\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+34.25$$

報告者の式では，半径30.5を$\sin x$に掛けるのが抜けている。また，報告者はxを時間にとりたいといっているので，回転速度が毎秒0.75mを用いて式化する。半径rの円において，中心角θに対する円弧の長さをxとすると，$x=r\theta$である。ここで，x，θは時間tの関数とすると，

$\dfrac{dx}{dt}=r\dfrac{d\theta}{dt}$ となり，$\dfrac{dx}{dt}=0.75$，$r=30.5$であるから，

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}=\frac{0.75}{30.5}=\frac{3}{122}$$

従って，乗車地点からt秒後のゴンドラの地上からの高さをymとすると，

$$y=30.5\sin\left(\frac{3}{122}t-\frac{\pi}{2}\right)+34.25$$

式化を試みるには，三角関数の素養を必要とするが，作図によりグラフをかくことは容易である。観覧車における行動様式は講義の例の中で述べている。しかし，この例の関数は三角関数で表現できることから，三角関数の理論を用いてこの事象は解明しうることになる。換言すれば，三角関数という基礎理論が生かされることになる。

以上に紹介した9例は，身の回りの事象から抽出された関数のモデルとしては申し分がない。関数の定義があって，それに実在の事象をあてはめたにすぎない。実在の事象に対しての人間の行動様式を考察し，関数を抽出し，関数の理論を構築することをとおして解明し，意志決定に至るという過程が欠けている。また，式化を試みているが，数学の内容を相当に伴うため，完全ではない。

次に，講義と課題を完成することによって，学生の関数についての認識がこれまでとどう変化したか，上述の各例の報告者について考察する。

A：関数について高校時代を振り返ってみると，「公式さえ覚えれば，あとは機械的に解くだけだ。」「例題の解き方を暗記しておけばテストで何とか点はとれるだろう。」という気持ちで取り組んでいた様に思います。
また，$y=f(x)$，$y=a(x-p)^2+q$が，すなわち関数であり，それが何を意味しているかなど考えたことがありませんでした。大学で再び関数を学ぶということで，まず「嫌だなあ，公式をすっかり忘れているのに。」という感想をもちました。ところが，関数の講義に入って，いきなり公式はでてきませんでした。遊園地の観覧車が一周するときの現象をどう解明すればよいかというものでした。身近な現象だったので，観覧車が一周する様子を思い浮かべながら時間と地上からの高さの関係について考えることができました。ここで，関数とは伴って変わる2つの量の関係であるということが十分に理解できました。これまで，関数は実生活とはかけ離れた教科書の中でのこと

ととらえていたけれど，私たちは身の回りに起こるいろいろな事象に関数概念をあてはめて関数の立場でその事象をとらえているということを知り，関数を学ぶことの必要性を感じました。これは一度関数（数学）から離れ，再び教科としてではなく，教養として関数（数学）を学習することができたからこそ抱くことができた感想だと思っています。

B：高校時代までは関数に対する印象といえばx，yがありそれらによる式からグラフをかく。とにかく関数といえばグラフ，グラフといえば関数という感じだった。x座標にy座標，直線や放物線などが描かれている。これが関数だという印象しかない。しかも，関数自体そのものをよく知らずただ問題があったらすぐグラフをかいて問題を解く。そのことを関数の授業の間繰り返し行っていた。また，私は自分自身関数に対して苦手意識をもっていた。いつも問題をする前から「難しい問題だな」と思っていた。文字や数字が多くなればなるほどグラフが複雑になればなるほど一層苦手意識は高まっていった。こうした苦手意識がある中，私は大学の算数科教育論の講義で再び関数を学ぶことになった。最初「小学校の算数の授業で関数を習ったことがあったかな」と思った。今まではグラフがあるのが関数だと思っていたからそういう考えがでたのだと思う。しかし，この講義の中でグラフももちろん関数であるが，グラフがないのも関数であるということを知った。講義の中で行ったいくつかの問題を解けば解くほどこういう考えは強くなっていった。文字や数字やグラフだけが関数ではなく身の回りの事象にも多くの関数があることがわかった。大学の講義の後，私の関数に対する印象は関数はグラフという考えは全くないことはないがそういう印象プラス日常生活からも考えることのできるおもしろいものだなという印象がうまれた。（でもやはり苦手意識はなくなるものではないと思った）

C：関数とは伴って変わる２つの量の間の関係であり，定義としては「２つの変数x，yがあり，xの各値に対してyの値が１つずつ決まるような対応の規則が与えられているとき，yはxの関数であるという」とあります。身の回りにもxとyに置き換えれば関数で表せる事象はたくさんあります。しかし，高校までの印象ではそのように身近なものだという感じはかけらもなく，試験に出る難しいものとか，xとyでわかっている方の数字を入れれば答えが出るものという印象しかありませんでした。そして今，算数科教育論を通して関数が生活に近いものだと思うようになりました。特に遊園地の観覧車についての問題例では，そのようなことまでが関数で表せるのかと一気に親近感をもちました。今までxやyという文字に振り回されてきましたが考えてみれば関数というのは身の回りの事象をわかりやすく表せたり，実験できないような大きな数でも答えを出せたりする便利なもので，またそのためにxやyがあるのだと思うようになったのです。

D：中学校の数学のなかで最もとっつきにくく，わかりにくいのが関数だと思うのです。小学校までは算数はとてもわかりやすく好きだったが，中学校に入り数学嫌いになる

子のほとんどが，この関数のところで理解できなくなるのではないでしょうか。私の場合もそうなのですが，教えることが多いせいか，関数の授業といっても頭ごなしにこういう式で表されるのだと教えこまれ，とてもはやいスピードで授業をすすめていくのです。私はそういうもんなんだと思い，ただ関数の問題をこなしていただけで，身近な関数で表される事象といっても教材例として授業中に説明を受けたりしたこともなく，問題集の中でこういう場面も関数で表したりするんだと思っていたぐらいです。しかし，大学の授業をうけて，わかりにくくて，とっつきにくい関数を身近な具体物を用いてゆっくりと，簡単な問題からとりくむことによって，いきいきとしたたのしい授業にすることができ，おちこぼれをつくることもなく，子どもたちに関数を身につけることができるんだと知りました。私の場合は数学の教授における悪い例だと思うのです。これからはやはり私たちが大学で学んだような進め方で教えてやるべきなのではないでしょうか。そうすれば，数学ときくだけで毛嫌いしていた子が少しでも減るのではないでしょうか。

E：高校までの印象はというと私はまるっきりの文系でしたので，3年間のブランクがあり，ほんど覚えていないというのが正直なところです。私にとって数学とは難しいばかりで近寄りにくい存在でした。もちろん関数に関しても例外ではありませんが，わりとグラフなどが出てきたり，作業が多い分，ただただ計算のややこしいものよりは好きだったように思います。前回の講義以後の印象ですが，今までの印象とはまた違って様々な所に関数が存在することにおどろき，数学というか算数をやってきて久しぶりに「わあ楽しい」と思えました。子どもたちにもその楽しさを伝えられるようにこれからも努力していきたいと思います。

F：関数の学習は一言でいって，変量の間にある法則の追求といってもよいだろう。変化するものの間でいつも不変に成り立つ一般的な関係を追求するわけです。関数とは量の変化の法則から出発して一般の写像にまで発展した概念である。高校時代までに一次関数，二次関数と勉強してきましたが，一次関数ではグラフは直線になり，xが増加すればyも増加して比例の関係になる。二次関数ではグラフは放物線になると習ってきました。関数と一言にいっても分数関数，無理関数というように奥がとても深い分野であると思います。授業のはじめに関数の理論を勉強しますが，一度式などを覚えると機械的に数字をはめこんで計算していたような気がします。前回までの講義を受けて，身近なところにも関数は存在していることに気づきました。遊園地の観覧車や日影と日照権の関係のように探せば自然の中に関数が埋もれていると思います。関数的にいろいろなものを見ていくとまた違った世界を発見できると思います。高校時代に比べて少し関数に対する考えが変わったような気がします。

G：だいぶ前だったと思うが，この算数科教育論の授業の時に，「この授業をうけるにあたってどう思うか」というような質問をうけたような気がする。その時にも書いたのだが，私は算数という言葉を聞くことさえ嫌で，ましてや「関数」なんて鳥肌が立

つほど嫌いで筋がね入りの算数嫌いである。もちろん高校までの「関数」に対する印象は最悪なものであり，私にとっては，まったく意味をもたない分野だった。暗い過去を思い返せば，関数のおかげで，再試験という貴重な体験もさせてもらった。私にとって「関数に対する高校までの印象」など，その問題内容にあるはずがなく，少し言いすぎかもしれないが，その存在自体に嫌悪を感じるほどだった。が，しかし，これからが大事である。この講義を受けて，関数の何たるかがわかったとは言えるわけがない。でも，「関数」という問題が存在する理由というか，意味がほんの少しだけわかったような気がする。高校時代の印象が「存在自体に嫌悪を感じる」だったのだから，かなりの進歩だと思うのですが，そうは思いませんか？

H：中学2年生で一次関数を，中学3年生で二次関数を習ったわけでありますが，一次関数と聞けば$y=ax+b$，二次関数と聞けば$y=ax^2$と思い，そして何よりもすぐにグラフというものが頭に浮かんできました。ただグラフをかければいいというふうに思っていました。しかし，この講義を受けて，関数とはただ単にグラフをかければよいというものではないんだということが分かり，関数のおもしろさというものを少し体験できたように思いました。そして，自分で実際に関数をつくってみて，何かとははっきりと言えないが，中学，高校の時とはちがうものを関数の中に見つけたように思い，いろいろな実験をしてみたいと思いました。

I：高校時代までで考えてみると，小学校でグラフというものを知り，中学校で正比例，反比例を習いとても驚きました。身近にある相対する2つの事象に何らかの関係があり，比例していることです。正比例であったり，反比例であったりするが，それには法則があり，数字をあてはめたらわかるきちんとした公式があることにとても興味を持ち，中学校では教科の名称が算数から数学とかわったけれども，特別に難しくなることもなく楽しいと思いました。それは主に文章問題を読み，何が何に比例しているか考え，公式にあてはめ，式をつくり，グラフ化するものが多かったように思います。中学校の頃はあえて言えば反比例より正比例の方がはっきりとわかりやすいので好きでした。それに比べ反比例は横軸あるいは縦軸にそって1点ずつ基準となる点をとっていかなければならないので少しわかりにくかったです。また高校になり二次方程式，三次方程式，三角関数と次々と高度な問題となり，だんだんと理解するのに時間がかかるようになり苦手になりました。二次関数，三次関数にはそれぞれ公式があり，解の方程式がありました。私はそれがなかなか覚えることができず，いつまでも教科書を見ていたため，テストのたびにわからなくて困りました。三角関数ともなると，角度，sin，cos，tanが関わり，$y=f(x)$の式をつくるのもできず，グラフがかけませんでした。関数は私にとってはだんだんと苦手分野にはいっていきました。そして，大学に入り，講義で関数を習いましたが，高校とかでしたときとは違うと思いました。大学まではすべて受験のための新幹線のような授業で関数とは何か理解できぬままに進んだのでわかりそうな問題も気分的なものでよけいにわからなくなったように思い

ます。やはり大学で聞く講義の方がわかりやすかったです。関数はそんなに深く考えないでも身近なものでも関数となり教材となることもわかり関数に対しての見方，考え方も少しやわらかくなったように思います。

上述の９人の証言は，先に紹介した関数例の報告者に対応している。これらの証言から，高等学校までの関数教育の実態，その背景にある算数・数学教育の実態が伺える。

Ａの証言のなかにある，「公式さえ覚えれば，あとは機械的に解くだけだ。例題の解き方を暗記しておけばテストで何とか点はとれるだろう。」に高校時代までの数学の学習の典型的な姿勢がみられる。そして，Ｂの証言「高校時代までは関数に対する印象といえばx，yがありそれらによる式からグラフをかく。とにかく関数といえばグラフ，グラフといえば関数という感じだった。」に関数に対する認識の典型的な実態がみられる。また，Ｃは，「高校までの印象ではそのように身近なものだという感じはかけらもなく，試験に出る難しいものとか，xとyでわかっている方の数字を入れれば答えが出るものという印象しかありませんでした。」と証言している。これは，Ａの述べた数学の学習姿勢に通じるところがある。さらに，Ｄは，「小学校までは算数はとてもわかりやすく好きだったが，中学校に入り数学嫌いになる子のほとんどが，この関数のところで理解できなくなるのではないでしょうか。私の場合もそうなのですが，教えることが多いせいか，関数の授業といっても頭ごなしにこういう式で表されるのだと教えこまれ，とてもはやいスピードで授業をすすめていくのです。私はそういうもんなんだと思い，ただ関数の問題をこなしていただけで，身近な関数で表される事象といっても教材例として授業中に説明をうけたりしたこともなく，問題集の中でこういう場面も関数で表したりするんだと思っていたぐらいです。」と証言している。それによると，関数は抽象的で難解で数学を嫌いになる単元だということになる。そのなかでも，Ｅのように，「私にとって数学とは難しいばかりで近寄りにくい存在でした。もちろん関数に関しても例外ではありませんが，わりとグラフなどが出てきたり，作業が多い分，

ただただ計算のややこしいものよりは好きだったように思います。」と，計算よりもグラフをかく楽しさをみいだしている。もっと具体的にＦは，「関数と一言にいっても分数関数，無理関数というように奥がとても深い分野であると思います。授業のはじめに関数の理論を勉強しますが，一度式などを覚えると機械的に数字をはめこんで計算していたような気がします。」と述べているが，Ａの証言に通じている。そして，関数例では式化に挑戦していた。しかし，Ｇのように，「私は算数という言葉を聞くことさえ嫌で，ましてや「関数」なんて鳥肌が立つほど嫌いで筋がね入りの算数嫌いである。もちろん高校までの「関数」に対する印象は最悪なものであり，私にとっては，まったく意味をもたない分野だった。」と算数・数学に苦痛を訴えながらも，天候に左右されつつ５時間にもわたって測定していた。そして振子の実験をしたＨは「一次関数と聞けば$y=ax+b$，二次関数と聞けば$y=ax^2$と思い，そして何よりもすぐにグラフというものが頭に浮かんできました。ただグラフをかければいいというふうに思っていました。」と述べ，関数例では式化を試みている。関数＝グラフ　という図式はＢの証言にも通じている。Ｉは「二次関数，三次関数にはそれぞれ公式があり，解の方程式がありました。私はそれがなかなか覚えることができず，いつまでも教科書を見ていたため，テストのたびにわからなくて困りました。三角関数ともなると，角度，sin，cos，tanが関わり，$y=f(x)$の式をつくるのもできず，グラフがかけませんでした。関数は私にとってはだんだんと苦手分野にはいっていきました。」といいつつも，未完然であったが関数例では三角関数による式化に挑戦していた。

公式にあてはめて問題を解く，関数＝グラフ，実在と関わらない抽象的な世界とみていた関数が，講義と課題によってどう認識が変化したかを上述の証言から考察する。

Ａは「関数とは伴って変わる２つの量の関係であるということが十分に理解できました。これまで，関数は実生活とはかけ離れた教科書の中でのことととらえていたけれど，私たちは身の回りに起こるいろいろな事象に関数概念をあてはめて関数の立場でその事象をとらえているということを知り，関数を学ぶ

ことの必要性を感じました。」と証言し，実在の中に関数の存在を認め，関数の学習の必要性を実感している。公式を覚えて意味も考えずに問題を解くという姿勢から変化している。そして，関数＝グラフ　であったＢは「この講義の中でグラフももちろん関数であるが，グラフがないのも関数であるということを知った。講義の中で行ったいくつかの問題を解けば解くほどこういう考えは強くなっていった。文字や数字やグラフだけが関数ではなく身の回りの事象にも多くの関数があることがわかった。」と述べ，関数とグラフを切り離すようになった。しかし，関数をグラフに表現する意義が分かっていたか疑問である。やはり，グラフは関数の変化のようすをみるには欠かせないものである。また，Ｃは関数の式についての意義をみいだしている。すなわち，「今までxやyという文字に振り回されてきましたが考えてみれば関数というのは身の回りの事象をわかりやすく表せたり，実験できないような大きな数でも答えを出せたりする便利なもので，またそのためにxやyがあるのだと思うようになったのです。」Ｄは「大学の授業をうけて，わかりにくくて，とっつきにくい関数を身近な具体物を用いてゆっくりと，簡単な問題からとりくむことによって，いきいきとしたたのしい授業にすることができ，おちこぼれをつくることもなく，子どもたちに関数を身につけることができるんだと知りました。私の場合は数学の教授における悪い例だと思うのですが，これからはやはり私たちが大学で学んだような進め方で教えてやるべきなのではないでしょうか。」と述べ，授業のあり方にまで言及している。また，Ｅは「様々な所に関数が存在することにおどろき，数学というか算数をやってきて久しぶりに「わあ楽しい」と思えました。子どもたちにもその楽しさを伝えられるようにこれからも努力していきたい」と述べている。そして，Ｅはゴムの伸びを調べるという実験にとりくんでいた。電気料金の式化に挑戦したＦは「身近なところにも関数は存在していることに気づきました。遊園地の観覧車や日影と日照権の関係のように探せば自然の中に関数が埋もれていると思います。関数的にいろいろなものを見ていくとまた違った世界を発見できると思います。高校時代に比べて少し関数に対する考えが変わったような気がします。」と述べている。算数嫌いのＧが「

「関数」という問題が存在する理由というか，意味がほんの少しだけわかったような気がする。高校時代の印象が「存在自体に嫌悪を感じる」だったのだから，かなりの進歩だと思うのですが，そうは思いませんか？」と述べたように，実在との関わりで関数を扱うことは重要であることがわかる。自分で工夫して実験したＨは「自分で実際に関数をつくってみて，何かとははっきりと言えないが，中学，高校の時とはちがうものを関数の中に見つけたように思い，いろいろな実験をしてみたい」と述べている。そして，Ｉは「大学まではすべて受験のための新幹線のような授業で関数とは何か理解できぬままに進んだのでわかりそうな問題も気分的なものでよけいにわからなくなったように思います。やはり大学で聞く講義の方がわかりやすかったです。関数はそんなに深く考えないでも身近なものでも関数となり教材となることもわかり関数に対しての見方，考え方も少しやわらかくなった」と述べ，受験準備の数学から教える立場にたって学ぶ数学へと目的が変化したところで心のゆとりがでたようである。

Ⅳ　おわりに――今後の課題

関数についての認識を考察してきたが，今の学校教育の問題点があらためて伺えた。上級学校受験の準備教育の実態が再確認されたばかりでなく，学生が望むわかりやすい授業の方法だけを大学で講義すると，公式にあてはめて問題を解くことが算数・数学だということを再生産しかねない危機さえ感じる。

算数・数学を実在とのかかわりでじっくり考えて学ぶ態度を養うことが文系大学の教師教育として重要である。その際，算数だけ学べばよいという学生に相当つっこんだ数学の内容を学ばせることは至難の業である。算数といわずに小学校から数学に統一することを提案したい。

関数については，人間の行動様式まで考えて，その意志決定の情報を提供するという視点での教材開発をすすめたい。

〈注〉

1）本間俊宏　「関数教育」

大阪教育大学紀要第Ⅴ部門第32巻vol 1，1969, pp. 123－134

2）同上