数学教育の思想性の考察

本 間 俊 宏

概　要　数学教育では，概念，定義，定理，公式や，問題の解法などが指導される。さらに，数学の概念の背景にある思想にまで踏み込むことが望まれる。本稿では，数学教育の思想性について考察する。

検索語　数学教育の思想　アルゴリズム　グラフ　ファジィ　フラクタル

Ⅰ　研究の目的

数学教育（算数教育を含む）では，公式が与えられ，それに基づいて問題を解くという学習形態が多くとられる。その結果，小学生は，面積の公式の学習後には，みかんの皮に広さを認めなくなる。それは，面積の公式が適用できないことに起因する。また，高校生には，導関数を求める計算はできても，その意味することがわかっていない。これらは，数学の概念の背景にある思想にまで踏み込んでいないというところに問題があると考える。本学の学生に数学の印象をたずねると，問題を解けたときの喜びをあげるが，数学の内容そのものの印象がでてこない。学生は公式に当てはめて問題を解いた経験しか持ち合わせていない。そこには，数学の概念とその背景にある思想が欠如していると考えられる。そこで，数学の概念を形成する思想について考察する。

Ⅱ　数学教育の思想性の考察

数学教育の思想性とは何か。それは，数学の概念の背景にある根源的なもの，思想といったものを数学教育としていかに扱うかである。ここでは数学教育の思想性について，具体的な算数・数学の教材で考察する。

1）整数の除法

整数の除法は，数学的には整数の乗法の逆演算として定義される。しかし，数学教育的には，先ず，整数の乗法は，同数累加をもとに，小学校では，

（同じ数）×（いくつ分）＝（全部の数）

として導入する。その結果，整数の除法は，等分除と包含除の2通りの意味がある。除法は，掛け算九九をもとに計算するが，この計算の真意は効率よくいくつに分けるかということにある。それを求めるもとにあるのが掛け算九九である。

例えば，869÷27の場合，先ず，十のかたまり86この中に27がいくつあるか，それは，3こある。その結果，十のかたまりが5こ余る。ここで余りが割る数よりも小さいことを確認する。さらに，十のかたまりを一にばらすと，十のかたまり5は一が50ことなり，次は，59の中に27が2こあり，余りが5となる。ここでも，余りが割る数よりも小さいことを確認する。結局，商は32，余りは5である。この計算を単に計算の仕方として覚えるのが通常であるが，計算ができあがっていく過程の原理を会得することが重要である。すなわち，

① n 位のかたまりが割る数の中にいくつあるか。

② その結果，余りが割る数よりも小さいことを確認する。

③ 余りの n 位のかたまりを $n-1$ 位のかたまりにばらして，$n-1$ 位を加算する。

以下①～③を繰り返す。

これは，アルゴリズムとよばれているものである。このアルゴリズムを会得することによって，整数の除法が獲得される。このように，整数の除法の原理にまで立ち入る，ここまですると思想にまで踏み込んだといえる。

2）実数の構造

実数については四則計算や大小関係がある。実数の性質を実数の構造としてとらえるとき，演算構造，順序構造，位相構造がある。演算構造は加法構造と乗法構造があり，加法構造と乗法構造の共通した演算構造として群の概念がある。

演算構造について，

加法構造は，

A１）$a+b=b+a$

A２）$(a+b)+\mathrm{c}=a+(b+\mathrm{c})$

A３）$a+x=a$　となる x が存在する。（すなわち，$x=0$）

A４）$a+y=0$　となる y が存在する。（すなわち，$y=-a$）

乗法構造は，

M１）$ab=ba$

M２）$(ab)\mathrm{c}=a(b\mathrm{c})$

M３）$ax=a$　となる x が存在する。（すなわち，$x=1$）

M４）$ay=1$　となる y が存在する。（すなわち，$y=1/a$）

群の概念では

G１）$a \circ b=b \circ a$

G２）$(a \circ b) \circ \mathrm{c}=a \circ (b \circ \mathrm{c})$

G３）$a \circ \mathrm{e}=a$　となる e が存在する。

G４）$a \circ y=\mathrm{e}$　となる y が存在する。

これは，実数の加法と乗法に共通した性質，すなわち，交換法則の成立，結合法則の成立，単位元の存在，逆元の存在を抽出することによって，実数の演算の構造を明らかにしようとする。実数の演算の原理や構成に立ち入るところに思想がある。この群の概念は，数学教育の現代化のときに学校数学に導入された。群の概念は操作が主であり，構造をみるには格好の教材であるが，文字情報であり，抽象的でありすぎた。

３）微積分

微積分は，高等学校数学の大きな柱である。数学教育の現代化では，微積分と確率統計に線形代数が加わり，これら３つの柱があった。しかし，近年は，線形代数がオプションとなり，微積分と確率統計の２つの柱に戻った。

微積分については，先ず，導関数が導入される。

関数 $y=f(x)$ において，$x=a$ から $x=a+h$ までの平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が，h を 0 に限りなく近づけるとき，一定値 α に限りなく近づくならば，α を $x=a$ における変化率（微分係数）という。

これは，微小区間では平均変化率が一定，すなわち，1次式で近似することを意味する。このことは，関数を微小区間ごとに1次式で近似することであり，それら1次式のグラフの右上がりと右下がりがもとの関数の増減を表すことになる。このように，関数の変化を解析するのに，微小区間の1次式化が中心となる。このような微積分の思想にまで立ち入ることが重要である。

4）座標と次元

空間の点は座標軸を設定することにより表すことができる。n 本の座標軸では，n 個の実数の組で1点を表現する。これは，n 次元とよばれる。いわゆる，整数次元の存在である。空間認識や図形を議論するときは次元の概念は重要な思想である。

5）集合

範囲の確定した集まりを集合として議論する。これは，共通な特徴をもつものを同じ仲間として意識させるところに集合を扱う意義がある。これが集合の思想である。

6）不確定事象

不確定事象は，大量観察により規則性を見いだし，その事象の特性を解明する。さらに，予測などに適用している。これが確率統計の思想である。

このように数学教育の教材から，アルゴリズム，実数の演算構造，微積分，整数次元，集合，確率統計などにある思想について考察した。数学教育では，各教材の中にある根源的なもの，思想といったものまで立ち入って扱われることが望まれる。

Ⅲ　これからの数学教育の思想

Ⅱで述べたような数学教育の思想に対して，コンピュータの発達と関連して，また，1960年代頃から数理科学の理論として発展してきた諸理論には，新しい数学教育の思想を形成するものがある。

次に新しい数学教育の思想について考察する。

1)アルゴリズム

Ⅱ1)で述べたように，整数の計算はアルゴリズムを会得することが，計算の習熟に必要なことである。ここでは，アルゴリズムそのものを学習することをコンピュータ科学との関連で考察する。

6人の子どもの背比べを考える。子どもは，実際に6人の子どもを見れば，簡単に背比べができる。しかし，コンピュータは，2人の子どもの背比べしかできない。そこで，子どももコンピュータと同じ条件で背比べを考える。実際の授業は小学校5年生で行われ[1)]，比べる回数をできるだけ減らすという条件が追加された。子どもたちには，勝ち抜きを考えるもの，トーナメントを考えるもの，総当たりをするものなどがあり，それらを図や線で表現していた。これは，背比べのアルゴリズムを子ども自身の手で創出しようというものである。背比べを完成するプロセスは効率を度外視すればいろいろあり，その表現も記号や図を用いていろいろあることがわかる。これは，結果にだけ着目する従来の学習とは異なる側面を提供することになる。このようなアルゴリズムの授業の後で文章題を解かせたところ，これまでは答えしか出さなかった子どもたちが，記号や図や線を用いて解答のプロセスを表現していたという報告がある[2)]。これは，子どもたちが，アルゴリズムの学習（背比べ）により，解答のプロセスに関心を示し，その方法が会得できたといえよう。

2)グラフ

事象を構造として把握することは問題解決の手法としての意義がある。現代化では，数学の構造が提唱され，群がそのモデルであった。

近年は，点とそれらを連結する線の間の関係を議論の対象とするグラフ理論

が注目されている。

例えば，10個の都市があり，それら都市の間に航空路を開設するとき，効率の良い方法は何か。都市を点とし，航空路を線としたグラフに表現する。従来は何通りあるかといったことが議論されたが，ここでは，航空路そのものがどのように開設すべきかが議論の対象となる。10個の都市が相互に航空路を開設したのでは，時間的には一番早いが航空機が一番多く必要とする。また，10個の都市を環状に結ぶ航空路を開設すると航空機は少なくてすむが時間がかかりすぎる。そこで，拠点の都市を設け，他の９都市との間に航空路を開設すると，拠点都市を経由すれば他のどの都市とも結ばれ，時間的にも航空機の数もある程度節約できる。このようなことは，グラフに表現することで，問題解決が促進される。

ここには，文字情報から画像情報への転換がみられる。構造をグラフとして把握することが重要になってきた。ネットワークの問題もグラフで考えられる。

３)ファジィ

不確定な事象，すなわち，「あいまいさ」には，大量観察によって規則性が見いだされる蓋然的な事象と定義や解釈のあいまいさによる事象がある。

前者は確率統計として数学教育に取り入れられてきた。しかし，後者はファジィ理論として，近年，とくに注目されてきた。

ファジィ理論は，地下鉄の運転制御，洗濯機，ルームエアコンの自動制御など身近なところで応用されており，「ファジイ」は「あいまい」という意味で日常会話にも登場する。従って，子どもたちにも親しみのある言葉である。しかし，子どもたちはその本質を理解しているといえるだろうか。

ファジィ理論の数学教育への導入に際して，筆者たちはファジィネスについて子どもの認識を調査した。以下は金谷・寺田による調査・教育実験である．対象は電気部の生徒（中１～高２，毎年30人程度）であった[3)]。

①「ファジィ」ということばについて

全員がテレビのＣＭで知っていると答え，その意味は，「あいまい」といい，掃除機，クーラー，洗濯機などに利用されていると答えた。

②「ファジィ利用の効果」について
「あいまい」からくることばのひびきとして，従来の機械にかわって人間らしい判断，すなわち，融通が利くだろうという期待をよせている。しかし，低学年には，わからないという回答も多い。

以上より，「ファジィ」は日常的なことばとして定着し，電化製品に応用されていることがよく知られていることがわかる。しかし，「ファジィ」が何を意味するのかは，その本質のところはわかっていない。低学年ほど意味不明である。

③所属度について

実例は０～１までの数値を示したが，1.3 として１をこえるもの，大多数が０～１へ所属度を決めるときに，逆に１～０へとする子どもがいた。
その後の調査では，所属度の実例を与えずに生の認識をさぐったところ，A，B，C；60，80，90；4～7，8～10，1～3などと表現した。「あいまいさ」の量化に多様な考えがあることがわかる。また，所属度の決め方には客観性を要請する意見が半数あった。

④「およそ２」について

グラフ化（X軸を実数値，Y軸を所属度を表す実数値）させたところ，２を頂点とする上に凸のグラフをかき，グラフの両端は，X軸に限りなく近づくもの，負の値になるもの，振動するものなど「あいまいさ」からくる工夫もあったが，とまどいもみられた。

⑤ファジィ集合の演算（または，かつ）について

金谷は大相撲力士のデータ（年齢，身長，体重）を例として指導した。「背の高い力士の集まり」「太っている力士の集まり」については，各力士の所属度を付加することでファジィ集合を構成した。次に，「背が高いかまたは太っている力士の集まり」「背が高くかつ太っている力士の集まり」について，各力士の所属度を決めさせたが誰もできなかった。そこで，通常の集合の和集合，共通集合を指導し，再び，「または」については，「要素をたくさんとるように

するにはどうすべきか，max，min をとればどうなるか」と示唆したところ，「maxをとればよい」と答えた。「かつ」については，「要素を制限するようにするにはどうすべきか」と示唆したところ，「min をとればよい」と答えた。これらのことから，max，min によるファジィ集合の演算は理解されることがわかる。

⑥ファジィ推論について

調査では，「いちごは赤い→甘いだろう→美味しそうだ→今すぐ摘み取ろう」という推論において，「いちごはすこし赤い」としたら，どのような推論を続けるかというものであった。筆者たちは，制限的量として「すこし」が付加されたとき，以後の推論も制限的量が付加されると予想した。

子どもは，「甘いかなあ→どうしょうかなあ→もうすこしおこう」「まだうれていない→もうちょいまとう→置いとこ」のように前提の推論とは関係ない推論が多数みられた。「少し甘いだろう→少し美味しそうだ→ちょっと置いておこう」のように筆者たちの予想した推論は少数であった。これらのことから，推論の形式についての指導が必要になることがわかる。

子どもたちは「ファジィ」ということばとどこで利用されているかは情報としてもっている。ファジィ→あいまい→人間的という連想はきわめて情緒的であり，科学的ではない。

このように，「あいまい」をファジィネスの観点でその思想性を含めて数学教育として扱いうることは上述の教育実験から確認できた。

4）フラクタル

II 3）で考察したように微積分の思想，すなわち，ニュートンの思想は変化を微細化していくと，究極的には1次式近似，すなわち，直線で近似できるということである。しかし，究極においても自己相似を崩さない事象が存在する。これは脱ニュートンの思想である。また，2次元，3次元といった整数次元では表現できない事象が存在する。これが有理数次元，すなわち，フラクタル次元である。これは，次元の概念の拡張である。このような事象に対処するのが

フラクタル理論である。

フラクタルは図形の変換の発展として扱いうる。図形の変換の表現としては行列表現と複素数表現がある。複素数表現については高等学校数学のオプションである数学Bの「複素数と複素数平面」の発展として扱いうる。

とくに，工業高等学校の電気科の電気・交流理論の学習では複素数を用いて図形的に表現する。その延長でフラクタルを扱うことができる。

フラクタルとしては，縮小写像を用いて自己相似性を扱うこととする。そこでは図形の変換が要請される。この図形の変換を複素数を用いて表現する。

河辺の教育実験[4]では，図形の変換を行列表現と複素数表現の２通りを扱った。

例えば，X軸の対称変換$(x,y)\rightarrow(x,-y)$について

行列表現では

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

複素数表現では

$$z=x+iy\rightarrow z'=x-iy$$

行列表現は機械科２年生６名で数学の成績上位の生徒，複素数表現は電気科１年生２名で数学の成績中位の生徒であったが，行列表現はオペレータなのでわかりにくく，複素数表現は複素数と点の座標が対応するのでわかりやすかった。

自己相似な図形をコンピュータ・グラフィックスとして表現する。その際，再帰的処理を行う。フラクタルの特性である自己相似な縮小写像を扱うが，どこまでいっても自己相似性はくずれないところに，究極では１次式で近似できることとは異なった現象があることにいきあたる。有理数次元については，これからの課題として残されている。

Ⅳ　今後の課題

小学校算数・中学校数学では，教材の背景にある数学の内容を子どもに学ばすにはいたっていない。さらに数学の概念を形成する思想を学ばすことはいまだである。これらのことは，これまでは少数の子どもが自分流に解釈していたにすぎない。また，高等学校数学では，数学の内容は比較的学習されているが，その背景にある数学の概念を形成する思想にまではいたっていない。これらのことは，子どもと教師の両面から教育していく必要がある。教員養成では，数学の内容とその背景にある数学の概念を形成する思想にまで言及する必要がある。

コンピュータの発達により，世界がマルチメディア化，ネットワーク化をめざし，情報が文字情報だけでなく画像情報が発展するなかで，数学教育も変容することが必至である。この状況のなかで，Ⅲで述べた新しい思想を数学教育としてどのようにカリキュラム化するかが課題となってくる。その際，アルゴリズム，グラフ，ファジィ，フラクタルの理論そのものやその体系を学習させるのではなく，それらがもっている思想性を学ばすことが肝要である。

（注）

1）1994年12月1日に第5回5か国数学教育国際会議の学校見学の参観授業として，大阪教育大学教育学部附属天王寺小学校5年生に同校の井上義則教諭が行った授業である。

2）柳本朋子(1994)のグループが報告している。

3）筆者のグループの金谷博史・寺田幹治が1991年9月から1994年7月にかけて，清風中・高等学校の電気部の生徒に調査・教育実験した。

4）筆者のグループの河辺有希生が1992年12月～1993年2月に兵庫県立東播工業高等学校機械科2年生6名，また，1994年7月～8月に同校電気科1年生2名に教育実験をした。

（参考文献）

本間俊宏・寺田幹治・金谷博史(1994)「ファジィ理論の学校数学への導入」
1994年度数学教育学会秋季例会発表論文集 PP.155-158

本間俊宏・金谷博史・寺田幹治・須田宏・山下元(1994)
「ファジィ理論の数学教育への導入」
教育工学関連学協会連合第4回全国大会発表論文集　PP.537-538
本間俊宏・河辺有希生(1994)「フラクタル数学の教材化」
1994年度数学教育学会秋季例会発表論文集 PP.159-162
柳本朋子(1994)「小学校におけるアルゴリズムの教育について」
1994年度数学教育学会春季年会発表論文集 PP.60-63