GRUP QUARTENION

TESIS

METRI ANDRI

06215040

PROGRAM PASCASARJANA

UNIVERSITAS ANDALAS

2008

GRUP QUARTENION

Oleh: Metri Andri

(Di bawah bimbingan I Made Arnawa dan Nova Noliza Bakar)

RINGKASAN

Konsep grup mulai dikenal setelah E. Galois, orang Perancis (1811-1832) yang dapat membuktikan suatu teori bahwa persamaan polinom dengan pangkat n ≥ 5 tidak mungkin dapat diselesaikan dengan radikal, yang pembuktiannya memperkenalkan suatu grup permutasi tertentu.

Pada perkembangannya teori grup banyak digunakan pada pengembangan geometri, analisis, dan topologi. Pada abad dua puluhan, Teori grup dipakai di berbagai bidang pada fisika seperti Kristalografi, Quantum Mekanik dan Teori Partikel. Salah satu bentuk grup yaitu grup quartenion Q dimana himpunan dan operasinya didefinisikan secara khusus yaitu : $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ terhadap operasi '$*$'

Tesis ini membahas tentang grup quartenion Q dimana himpunan dan operasinya didefiniskan secara khusus. Pada grup ini yang dicari adalah order dari unsur Q, sub grup dari Q, center dari Q, centraliser dari suatu unsur dalam Q, sub grup siklik dari Q, koset, sub grup normal dari Q, grup faktor, homomorphisma dan isomorphisma.

Hasil pembahasan grup quartenion ini adalah elemen-elemennya mempunyai order 1, 2, 4, sub grup yaitu : H_0, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, center $\{1, -1\}$, centralizer setiap unsurnya H_0, H_1, H_2, H_3, sub grup siklik H_1, H_2, H_3, koset kiri dengan koset kanan sama, semua sub grupnya merupakan sub grup normal, mempunyai grup faktor yaitu : $\{ H_0 \}$,$\{H_1, j * H_2\}$, $\{H_2, i * H_2\}$, $\{H_3, i * H_3\}$, $\{H_4, i * H_4, j * H_4, k * H_4 \}$, $\{ H_0 \}$, dan terdapat pemetaan homomorphisma dari Q ke H_4 dan H_5 serta pemetaan isomorphisma dari Q ke H_0.

Hai orang-orang yang beriman
Berzikirlah (dengan menyebut nama Allah),
Zikir yang sebanyak-banyaknya.
Dan bertasbihlah kepada-Nya diwaktu pagi dan petang
(Q.S. 33. Al-Ahzab. 41 & 42)

Isteriku Ir. Lelis Eprienti, M.Si
Anak-anakku Raziq, Indah dan Luthfi
Keluarga besar di Sawahlunto dan di Bukittinggi
Terimalah ini sebagai ungkapan terima kasih dan rasa sayangku
Yang teramat dalam atas pengorbanan, kasih dan doa yang diberikan
Semoga bermanfaat bagi kita semua

PERNYATAAN

Saya menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa segala pernyataan dalam tesis saya yang berjudul "**GRUP QUARTENION** " merupakan gagasan atau hasil penelitian tesis saya sendiri, dengan arahan Komisi Pembimbing, kecuali yang jelas rujukannya. Tesis ini belum pernah diajukan untuk memperoleh gelar atau capaian akademik lainnya pada program sejenis di Perguruan Tinggi lain. Semua data dan informasi yang digunakan telah dinyatakan secara jelas dan dapat diperiksa kebenarannya.

Padang, Agustus 2008
Yang Membuat Pernyataan

Metri Andri

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Sawahlunto pada tanggal 25 Maret 1966 sebagai anak ke10 dari Bapak Ma'amin dan Ibu Ani. Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar di SDN 05 Sawahlunto tahun 1980, Sekolah Menengah Pertama di SMPN 1 Sawahlunto tahun 1983, dan Sekolah Menengah Atas di SMAN 1 Sawahlunto tahun 1986. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan pada FPMIPA IKIP Padang Jurusan Matematika Diploma 3 selesai tahun 1989 dan tahun 1994 melanjutkan ke FIP UMMY Solok Jurusan Matematika yang diselesaikan pada tahun 1998.

Penulis mulai bekerja sebagai Pegawai Negeri Sipil pada tahun 1990 di SMPN Padang Sibusuk Kabupaten Sawahlunto Sijunjung, dan mulai tahun 2002 bertugas di SMA N 1 Kota Sawahlunto.

Pada tahun 2006, penulis memperoleh kesempatan untuk melanjutkan pendidikan pada Program Studi Matematika Program Pasca Sarjana Universitas Andalas Padang melalui beasiswa dari Dinas Pendidikan Propinsi Sumatera Barat.

KATA PENGANTAR

Puji syukur Penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, karena dengan taufiq dan hidayah-Nya Penulis dapat menyelesaikan penulisan Tesis ini. Selanjutnya sholawat dan salam tercurah kepada Rasulullah SAW beserta keluarga, para sahabat, dan umatnya.

Penulis mengucapkan banyak terimakasih kepada :

1. Prof. Dr. Ir. H. Novirman Jamarun, M.Sc selaku Direktur Program Pascasarjana
2. Jenizon, M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika
3. Dr. I. Made Arnawa, M.Si selaku pembimbing I
4. Nova Noliza Bakar, M.Si selaku Pembimbing II
5. Zul Akmal, M.Si selaku koordinator S.2
6. DR. Susila Bahri, M.Si dan DR. Muhafzan, M.Sc selaku tim penguji.
7. Staf pengajar dan Tata Usaha jurusan Matematika

Atas bantuan dan bimbingan, arahan dan saran-saran sehingga penulisan Tesis yang berjudul "*Grup Quartenion*" dapat penulis selesaikan.

Penulis menyadari bahwa tesis ini masih sangat jauh dari sempurna. kritik dan saran yang bersifat membangun sangat Penulis harapkan.

Padang, Juli 2008

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

P E N D A H U L U A N

1.1. Latar Belakang

Aljabar abstrak adalah hal yang penting dalam matematika. Banyak kekuatan matematika berasal dari sifat abstraknya. Matematika sendiri merupakan hal yang abstrak, misalnya konsep lambang bilangan 1, 2, 3, ... sebenarnya lahir dari keinginan untuk mempermudah dalam menyatakan jumlah anggota suatu himpunan seperti himpunan kerbau, himpunan bunga. Pada pembicaraan tentang aljabar abstrak selalu dihadapkan pada pembicaraan tentang struktur aljabar. Sedangkan teori grup adalah teori yang mengawali dan mendasar dalam mempelajari aljabar abstrak yaitu merupakan teori yang mempelajari struktur aljabar suatu himpunan.

Konsep grup mulai dikenal setelah E. Galois, orang Perancis (1811-1832) yang dapat membuktikan suatu teori bahwa persamaan polinom dengan pangkat $n \geq 5$ tidak mungkin dapat diselesaikan dengan radikal, yang pembuktiannya memperkenalkan suatu grup permutasi tertentu (Mukhlisah Nurul, 2005).

Pada perkembangannya teori grup banyak digunakan pada pengembangan geometri, analisis, dan topologi. Pada abad dua puluhan, Teori grup dipakai di berbagai bidang pada fisika seperti Kristalografi, Quantum Mekanik dan Teori Partikel (Mukhlisah Nurul, 2005).

Untuk lebih memahami tentang konsep grup, Penulis akan membahas suatu grup yaitu grup quartenion Q dimana himpunan dan operasinya didefinisikan secara khusus yaitu : Q = {1, -1, i, -i, j, -j, k, -k} terhadap operasi '∗' dengan operasi :

*	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	I	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	J	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	K	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

1.2. Perumusan Masalah

Rumusan masalah dalam tulisan adalah : " Apa sajakah order, sub grup, center, centraliser, subgrup siklik, koset, sub grup normal, grup faktor, homomorphisma dan isomorphisma dari grup quartenion?".

1.3. Tujuan Penulisan

Tulisan ini bertujuan untuk mengetahui tentang grup quartenion Q dimana himpunan Q dan operasinya didefinisikan secara khusus.

1.4. Manfaat Penulisan

Tulisan ini diharapkan dapat memperluas wawasan penulis maupun pembaca dalam memahami grup terutama tentang grup quartenion.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan dibahas mengenai grup, subgrup, center, centralizer, grup siklik, koset, subgrup normal, grup faktor, homomorphisma, isomorphisma, serta beberapa definisi dan teorema yang berkaitan.

2.1 Grup

Definisi 2.1.1 [Fraleigh, 1994]

Suatu operasi biner '$*$' atas suatu himpunan S adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap pasangan terurut (x,y) dari unsur-unsur di S x S ke tepat satu $z \in S$ dan dinotasikan dengan $x * y = z$.

Ditulis : $S \times S \rightarrow S$

$(x,y) \rightarrow x * y = z$

Definisi 2.1.2 [Herstein, 1975]

Misalkan *G* adalah suatu himpunan tak kosong. *G* dikatakan suatu grup jika pada *G* dapat didefinisikan suatu operasi biner yang ditulis sebagai '$*$' sedemikian sehingga :

1. Setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$. (G bersifat tertutup terhadap operasi biner '$*$').
2. Setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$. (G bersifat asosiatif terhadap operasi biner '$*$').

3. Ada unsur di G yang dilambangkan dengan e, sehingga setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$. (G mempunyai unsur identitas terhadap operasi biner '$*$')
4. Setiap $a \in G$, ada $b \in G$ sehingga berlaku $a * b = b * a = e$. (Setiap unsur di G mempunyai invers. Invers dari a ditulis a^{-1})

Grup G dengan operasi biner '$*$' dilambangkan dengan $(G, *)$.

Definisi 2.1.3 [Herstein, 1975]

Misalkan $(G, *)$ suatu grup. Jika setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$ maka G disebut grup komutatif.

Teorema 2.1.4 Hukum Penghapusan [Erlich, 1991]

Misalkan $(G, *)$ suatu grup dan $a, b, x \in G$.

1. Jika $x * a = x * b$ maka $a = b$. (Hukum penghapusan kiri)
2. Jika $a * x = b * x$ maka $a = b$. (Hukum penghapusan kanan)

Bukti

1. Misalkan $(G, *)$ suatu grup.

   Ambil $a, b, x \in G$ sebarang dengan $x * a = x * b$. Karena G grup dan $x \in G$ maka terdapat $x^{-1} \in G$ sehingga $x * x^{-1} = e$

   Perhatikan bahwa :

   $$x * a = x * b$$

   $$x^{-1} * (x * a) = x^{-1} * (x * b)$$

   $$(x^{-1} * x) * a = (x^{-1} * x) * b$$

   $$e * a = e * b$$

   $$a = b$$

Karena a, b, x $\in$ G diambil sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa setiap a, b, x $\in$ G dengan $x * a = x * b$ berlaku a = b.

2. Misalkan (G, $*$) suatu grup.

Dengan cara serupa dapat ditunjukkan bahwa jika $a * x = b * x$ maka a = b.

Lemma 2.1.5 [Mukhlisah, 2005]

Bila G suatu grup maka berlaku sifat untuk setiap g $\in$ G maka $(g^{-1})^{-1} = g$

Bukti : Bila G suatu grup maka unsur g mempunyai invers g^{-1} yang juga dalam G, dan invers dari g^{-1} dinyatakan dengan $(g^{-1})^{-1}$.

$g^{-1}(g^{-1})^{-1} = e = g^{-1} g$

$g^{-1}(g^{-1})^{-1} = g^{-1} g$. Berdasarkan teorema 2.1.4 diperoleh:

$(g^{-1})^{-1} = g$

Definisi 2.1.6 [Gallian, 1998]

Misalkan (G, $*$) suatu grup. Banyaknya unsur dari suatu grup G (hingga atau tak hingga) disebut order. Order dari grup G dilambangkan dengan |G|.

Contoh :

Himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan , berorder tak hingga.

Definisi 2.1.7 [Gallian, 1998]

Misalkan (G, $*$) suatu grup dan g $\in$ G. Order dari g adalah bilangan bulat positif terkecil n sehingga $g^n = e$. Jika tidak terdapat bilangan bulat terkecil n yang memenuhi $g^n = e$, maka dikatakan g berorder tak hingga. Order dari suatu unsur *g* dilambangkan dengan |g|.

Contoh :

1. Himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan biasa, di mana unsur yang bukan nol berorder tak hingga, karena a, 2a, 3a … tidak pernah bernilai nol dengan $a \neq 0$.
2. Z_5 = {0,1,2,3} dengan operasi penjumlahan (Z_5,+4) dimana unsur-unsurnya berorder hingga

Definisi 2.1.8 [Herstein, 1975]

Misalkan (G, $*$) suatu grup, $H \subseteq G$ dan $H \neq \emptyset$.

H dikatakan subgrup dari grup G jika H membentuk grup terhadap operasi biner yang didefinisikan di G.

Lemma 2.1.9 [Herstein, 1975]

Misalkan (G, $*$) suatu grup, $H \subseteq G$ dan $H \neq \emptyset$. H subgrup dari grup G jika dan hanya jika :

1. Setiap $a, b \in H$ berlaku $a * b \in H$.
2. Setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui G grup $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$ dan H subgrup dari grup G

Adt : 1. $\forall$ a, b $\in$ H berlaku $a * b \in H$.

2. $\forall$ a $\in$ H berlaku $a^{-1} \in H$.

Karena H sub grup dari G, berarti H membentuk grup terhadap operasi biner yang didefinisikan di G, artinya H memenuhi :

1. $\forall$ a, b $\in$ H berlaku a $*$ b $\in$ H.

2. $\forall$ a $\in$ H berlaku $a^{-1} \in$ H.

($\Leftarrow$) Diketahui G grup, H $\subseteq$ G, dan H $\neq \varnothing$ memenuhi

1. $\forall$ a, b $\in$ H berlaku a $*$ b $\in$ H.

2. $\forall$ a $\in$ H berlaku $a^{-1} \in$ H.

Adt : H sub grup G dengan kata lain akan ditunjukan:

1. Karena $\forall$ a, b $\in$ H berlaku a $*$ b $\in$ H dan H $\subseteq$ G, berarti H tertutup terhadap operasi biner yang sama pada G.
2. Karena G grup, operasi biner pada G assosiatif dan H $\subseteq$ G maka H juga assosiatif.
3. $\forall$ a $\in$ H berlaku $a^{-1} \in$ H dan a x a^{-1} = e $\in$ H berarti H punya unsur identitas.

Dari 1), 2), dan 3) berarti H sub grup dari G.

Contoh :

Himpunan semua bilangan bulat dengan operasi penjumlahan adalah subgrup dari himpunan bilangan riil.

Definisi 2.1.10 [Fraleigh, 1994]

Misalkan (G, $*$) suatu grup dan H subgrup dari G. H = { a^n | n $\in$ Z } disebut subgrup siklik dari G yang dibangun oleh a dan dilambangkan dengan H = $\langle a \rangle$

Defenisi 2.1.11 [**Fraleigh, 1994**]

Misalkan $(G, *)$ suatu grup. Grup G dikatakan siklik jika terdapat $a \in G$ sehingga $G = \{a^n \mid n \in Z\} = \langle a \rangle$. Jika $G = \{ a^n \mid n \in Z\} = \langle a \rangle$ maka a disebut generator atau pembangun dari G.

Teorema 2.1.12 [Erlich, 1991]

Setiap grup siklik adalah grup komutatif.

Bukti

Misalkan G grup siklik dengan generator a yaitu $G = \{a^n \mid n \in Z\}$. Akan ditunjukkan G grup komutatif.

Ambil sebarang $x, y \in G$. Karena $G = \{ a^n \mid n \in Z\}$ maka $x = a^r$ dan $y = a^s$, untuk suatu $r, s \in Z$

Perhatikan bahwa :

$$
\begin{aligned}
x * y &= a^r * a^s \\
&= a^{r+s} \\
&= a^{s+r} \quad (r,s \in Z, Z \text{ grup komulatif}) \\
&= a^s * a^r \\
&= y * x
\end{aligned}
$$

Karena $x, y \in G$ diambil sebarang, dan $x * y = y * x$, sehingga G grup komulatif.

Defenisi 2.1.13 [Gallian, 1998]

Misalkan $(G, *)$ suatu grup. Center dari grup G dilambangkan dengan Z(G) didefinisikan sebagai :

$Z(G) = \{ a \in G \mid a * x = x * a, \text{ setiap } x \in G \}$

Teorema 2.1.14 [Gallian, 1998]

Center dari grup G adalah subgrup dari G.

Bukti

Misalkan (G, $\ast$) suatu grup dan tulis $Z(G) = \{ a \in G \mid a \ast x = x \ast a$, setiap $x \in G \}$.

Akan ditunjukkan Z(G) adalah suatu subgrup dari G

1) Karena $e \in G$ dan $e \ast x = x \ast e$ untuk setiap $x \in G$ maka $e \in Z(G)$.

   Jadi $Z(G) \neq \emptyset$.

2) Karena $Z(G) = \{ a \in G \mid a \ast x = x \ast a$, setiap $x \in G \}$ maka $Z(G) \subseteq G$, jelas dari definisi Z(G).

3) Ambil sebarang $a,b \in Z(G)$. Berarti $a,b \in G$ dan $a \ast x = x \ast a$ dan $b \ast x = x \ast b$ untuk setiap $x \in G$.

   Ambil sebarang $x \in G$.

   Perhatikan bahwa :

$$
\begin{aligned}
(a \ast b) \ast x &= a \ast (b \ast x) && \\
&= a \ast (x \ast b) && (b \ast x = x \ast b) \\
&= (a \ast x) \ast b && (\text{G bersifat asosiatif}) \\
&= (x \ast a) \ast b && (a \ast x = x \ast a) \\
&= x \ast (a \ast b) && (\text{G bersifat asosiatif})
\end{aligned}
$$

   Karena $x \in G$ diambil sebarang $a,b \in G$ dan $(a \ast b) \ast x = x \ast (a \ast b)$ maka $a \ast b \in Z(G)$.

4) Ambil sebarang $a \in Z(G)$. Berarti $a \in G$ dan $a \ast x = x \ast a$ untuk setiap $x \in G$. Karena $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$, sehingga $a \ast a^{-1} = a^{-1} \ast a = e$

Ambil sebarang $x \in G$.

Perhatikan bahwa :

$a * x = x * a$

$a^{-1} * (a * x) * a^{-1} = a^{-1} * (x * a) * a^{-1}$

$(a^{-1} * a) x * a^{-1} = a^{-1} * x (a * a^{-1})$

$e * x * a^{-1} = a^{-1} * x * e$

$x * a^{-1} = a^{-1} * x$

Karena $x \in G$ diambil sebarang dan $a^{-1} * x = x * a^{-1}$ maka $a^{-1} \in Z(G)$.

Defenisi 2.1.15 [Gallian, 1998]

Misalkan $(G,*)$ suatu grup dan $a \in G$ *centraliser* dari a dilambangkan dengan C(a) didefinisikan sebagai :

$$C(a) = \{g \in G \mid g * a = a * g\}$$

Defenisi 2.1.16 [Erlich, 1991]

Misalkan $(G, *)$ suatu grup, H subgrup dari G dan setiap $a \in G$ maka

1. $H * a = \{h * a \mid h \in H\}$ disebut koset kanan dari H di G yang memuat a.
2. $a * H = \{a * h \mid h \in H\}$ disebut koset kiri dari H di G yang memuat a.

Teorema 2.1.17 [Erlich, 1991]

Misalkan $(G, *)$ suatu grup, H subgrup dari G. dan setiap $a,b \in G$ maka

1. $a * H = b * H$ jika dan hanya jika $a^{-1} * b \in H$

2. $H * a = H * b$ jika dan hanya jika $a * b^{-1} \in H$

Bukti

1.($\Rightarrow$) Misalkan $(G, *)$ suatu grup, H subgrup dari G, $a,b \in G$, dan $a * H = b * H$.

Akan ditunjukkan $a^{-1} * b \in H$.

Karena $a * H = b * H$ maka $a * h_1 = b * h_2$ untuk suatu $h_1, h_2 \in H$.

Perhatikan bahwa :

$$b * h_2 = a * h_1$$

$$(b * h_2) * h_2^{-1} = (a * h_1) * h_2^{-1}$$

$$b * (h_2 * h_2^{-1}) = (a * h_1) * h_2^{-1}$$

$$b * e = (a * h_1) * h_2^{-1}$$

$$b = a * h_1 * h_2^{-1}$$

$$a^{-1} * b = a^{-1} * a * h_1 * h_2^{-1}$$

$$a^{-1} * b = h_1 * h_2^{-1}$$

Karena H subgrup maka $h_1 * h_2^{-1} \in H$ sehingga $a^{-1} * b \in H$

($\Leftarrow$) Misalkan $(G, *)$ suatu grup, H subgrup dari G, dan $a,b \in G$, dan $a^{-1} * b \in H$.

Akan ditunjukkan $a * H = b * H$, yaitu :

i $a * H \subseteq b * H$

ii $b * H \subseteq a * H$

i Ambil sebarang $x \in a * H$. Akan ditunjukkan $x \in b * H$.

Karena $x \in a * H$ maka $x = a * h_1$ untuk suatu $h_1 \in H$.

Karena $a^{-1} * b \in H$ maka $a^{-1} * b = h_2$ untuk suatu $h_2 \in H$.

Perhatikan bahwa :

$$a^{-1} * b = h_2 \quad \text{untuk suatu } h_2 \in H.$$

$a^{-1} = h_2 * b^{-1}$

$(a^{-1})^{-1} = (h_2 * b^{-1})^{-1}$

$a = (b^{-1})^{-1} * h_2^{-1}$

$a = b * h_2^{-1}$

Karena $x = a * h_1$ dan $a = b * h_2^{-1}$ maka

$x = a * h_1 = b * h_2^{-1} * h_1$

$= b * h_3$, dengan $h_3 = h_2^{-1} * h_1 \in H$.

Ini berarti $x = b * h_3 \in \{ b * h \mid h \in H \} = b * H$.

Karena $x \in a * H$ diambil sebarang maka dapat disimpulkan setiap $x \in a * H$ maka $x \in b * H$ yaitu $a * H \subseteq b * H$.

ii Ambil sebarang $x \in b * H$ akan ditunjukkan $x \in a * H$.

Karena $x \in b * H$ maka $x = b * h_1$ untuk suatu $h_1 \in H$.

Karena $a^{-1} * b \in H$ maka $a^{-1} * b$ h_2 untuk suatu $h_2 \in H$.

Perhatikan bahwa :

$a^{-1} * b = h_2$

$b = a * h_2$

Karena $x = b * h_1$ dan $b = a * h_2$ maka

$x = b * h_1 = a * h_2 * h_1$

$= a * h_3$, untuk suatu $h_3 \in H$

Ini berarti $x = a * h_3 \in \{ a * h \mid h \in H \} = a * H$.

Karena $x \in b * H$ diambil sebarang maka dapat disimpulkan setiap $x \in b * H$ maka $x \in a * H$ yaitu $b * H \subseteq a * H$.

Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan H $*$ a = H $*$ b jika dan hanya jika a $*$ $b^{-1} \in$ H.

Teorema 2.1.18 [Teorama Langrange][Mukhlisah, 2005]

Apabila G suatu grup berhingga dan H sub grup dari G, maka order dari H membagi habis order dari G.

Bukti

Diketahui G grup berhingga. Misal G = $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ dan H sub grup dari G. Misalkan x_1 unsur identitas, sehingga koset-koset dari G adalah Hx_1, Hx_2, Hx_3, ..., Hx_n.

Misalkan $Hx_1, Hx_2, Hx_3, \ldots, Hx_t$, $1 \leq t \leq n$, koset-koset yang berbeda. Jadi

Jadi G = $Hx_1 \cup Hx_2 \cup Hx_3, \cup \ldots, \cup Hx_t$, akibatnya

$$|G| = |Hx_1 + Hx_2 + Hx_3 + \ldots +, Hx_t|$$

$$= |Hx_1| + |Hx_2| + |Hx_3| + \ldots + |Hx_t|$$

Karena x_1 identitas maka Hx_1 = H dan setiap koset pasti mempunyai jumlah unsur yang sama, maka $|G| = t\,|H|$ artinya orde H membagi habis orde G.

Definisi 2.1.19 [Herstein, 1975]

Misalkan G grup.dan N subgrup dari G. N disebut subgrup normal jika untuk setiap $g \in G$ dan $n \in N$ berlaku $g\, n\, g^{-1} \in N$

Lemma 2.1.20 [Herstein, 1975]

N merupakan sub grup normal dari grup G. jika dan hanya jika $g\, N\, g^{-1} = N$ untuk setiap $g \in G$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui N sub grup normal dari grup G

Akan ditunjukkan $g\,N\,g^{-1} = N$ yaitu : i). $g\,N\,g^{-1} \subseteq N$

ii). $N \subseteq g\,N\,g^{-1}$

i) Akan di buktikan $g\,N\,g^{-1} \subseteq N$

ambil $x \in g\,N\,g^{-1}$ sebarang

maka $x = g\,n\,g^{-1}$ untuk suatu $n \in N$ karena $g \in G$, $n \in N$ dan N sub grup normal dari G maka $x = g\,n\,g^{-1} \in N$ jadi setiap $x \in g\,N\,g^{-1}$ suatu $n \in N$

Dengan perkataan lain. $g\,N\,g^{-1} \subseteq N$

ii) Akan dibuktikan $N \subseteq g\,N\,g^{-1}$

Ambil $n \in N$ sebarang

Perhatikan bahwa : $n = e\,n\,e$

$= g\,g^{-1}\;n\;g\,g^{-1}$

$= g\,g^{-1}\;n\;(g^{-1})^{-1}\,g^{-1}$ dimana $g^{-1}\;n\;(g^{-1})^{-1} \in N$

$= g\,g^{-1}\;n\;(g^{-1})^{-1}\,g^{-1} \in g\,N\,g^{-1}$

Jadi untuk setiap $n \in N$, $n \in g\,N\,g^{-1}$ dengan perkataan lain $N \subseteq g\,N\,g^{-1}$

($\Leftarrow$) Diketahui $g\,N\,g^{-1} = N$,setiap $g \in G$

Akan ditunjukkan N sub grup normal dari G

Dari $g\,N\,g^{-1} = N$ berarti $g\,N\,g^{-1} \subseteq N$

Karena $g\,N\,g^{-1} \subseteq N$, maka setiap $g \in G$ dan $n \in N$ berlaku $g\,N\,g^{-1} \in N$ berdasarkan definisi 2.1.19 N sub grup normal dari G

Lemma 2.1.21 (Herstein, 1975).

N merupakan sub grup normal dalam grup G jika dan hanya jika koset kanan dari N dalam G sama dengan koset kiri dalam G.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui N sub grup dari G

Akan ditunjukkan koset dari N sama dengan koset kiri dalam G.

N sub grup normal dalam dari G berarti setiap $g \in G$ berlaku :

$$g N g^{-1} = N$$

$$(g N g^{-1})\, g = N g$$

$$g N = N g$$

Artinya koset kanan sama dengan koset kiri dari N dalam G.

($\Leftarrow$) Diketahui koset kanan dari N dalam G sama dengan koset kiri dari N dalam G.

Akan ditunjukkan N sub grup normal dari G

$$g N = N g$$

$$(g N g^{-1}) = N g g^{-1}$$

$$g N g^{-1} = N$$

Berarti N sub grup normal dalam G

Teorema 2.1.23 [Herstein, 1975]

Misalkan $(G, \ast)$ suatu grup dan N subgrup normal dari G tulis $G/N = \{ g \ast N \mid g \in G \}$. Definisikan operasi biner di G/N sebagai $(g_1 \ast N) \ast (g_2 \ast N) = (g_1 \ast g_2) \ast N)$ untuk setiap $g_1 \ast N, g_2 \ast N \in G/N$, maka G/N membentuk grup terhadap operasi biner tersebut. Grup yang demikian disebut sebagai grup faktor G dengan N.

Bukti

1. Akan ditunjukkan G/N tertutup

   Ambil sebarang $g_1 * N$ dan $g_2 * N \varepsilon G/N$, akan dibuktikan $(g_1 * N) * (g_2 * N) \in G/N$.

   Perhatikan bahwa :

   $(g_1 * N) * (g_2 * N) = (g_1 * g_2) * N$. (defenisi operasi G/N)

   $= g_3 * N$ ($g_1, g_2 \in G$ dan G grup maka $g_2 \in G$)

   Ini berarti $(g_1 * N) * (g_2 * N) \in \{ g * N \mid g \in G\} = G/N$.

2. Akan ditunjukkan G/N asosiatif

   Ambil sebarang $g_1 * N$, $g_2 * N$ dan $g_3 * N \in G/N$.

   Perhatikan bahwa :

   $g_1 * N * ((g_2 * N) * (g_3 * N)) = (g_1 * N) *((g_2 * g_3) * N)$(N subgrup normal)

   $= (g_1 * (g_2 * g_3)) * N$

   $= ((g_1 * g_2) * g_3) * N$ (N subgrup normal)

   $= ((g_1 * N) *(g_2 * N)) * g_3 * N$

   Jadi G/N bersifat asosiatif.

3. Akan ditunjukkan terdapat identitas di G/N.

   Misalkan $b *N$ identitas di G/N.

   Ambil sebarang $g_1 * N \in G/N$. Karena $b * N$ identitas di G/N, maka :

   $(g_1 * N) * (b * N) = g_1 * N$

   $(g_1 * b) * N = g_1 * N$

   $g_1 * b = g_1$

$$g_1^{-1} * g_1 * b = g_1^{-1} * g_1$$

$$e * b = e$$

$$b = e$$

Karena $b = e$ maka $b * N = e * N = N$.

Ini berarti ada unsur identitas $b * N = e * N = N \in \{ g * N \mid g \in G\}$.

4. Akan ditunjukkan setiap unsur di G/N mempunyai invers.

Misalkan $c * N$ invers dari $g * N$, maka

$$(g * N) * (c * N) = N.$$

$$(g * c) * N = N$$

$$(g * c) * N = e * N$$

$$g * c = e$$

$$g^{-1} * g * c = g^{-1} * e$$

$$e * c = g^{-1}$$

$$c = g^{-1}$$

$$c * N = g^{-1} * N$$

Ini berarti $g^{-1} * N$ invers dari $g * N$.

Jadi setiap unsur di G/N mempunyai invers.

2. 2 Homomorphisma dan Isomorphisma

Defenisi 2.2.1 [Herstein, 1975]

Pemetaan φ dari sebuah grup G kedalam sebuah $\bar{G}$ dikatakan homomorphisma grup jika setiap a, $b \in G$ maka $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$.

Definisi 2.2.2 [Herstein, 1975]

Jika φ sebuah homomorphisma dari G ke $\bar{G}$. Kernel dari φ dilambangkan $K\varphi$ didefinisikan sebagai :

$$K\varphi = \{ x \in G \mid \varphi(x) = e', e' \text{ identitas di } \bar{G} \}$$

Image dari φ atau Im (φ) didefinisikan sebagai : Im (φ) = $\{ \varphi(x) \mid x \in G \}$

Defenisi 2.2.3 [Herstein, 1975]

Sebuah homomorphisma φ dari grup G ke dalam $\bar{G}$ di katakan isomorphisma jika φ bersifat satu-satu

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Waktu dan Tempat

Penelitian ini dilaksanakan mulai bulan Juli 2007 sampai dengan Februari 2008. Tempat penelitian adalah di Perpustakaan Jurusan Matematika FMIPA dan perpustakaan Pasca Sarjana Universitas Andalas Padang.

3.2. Metode Penelitian

Penelitian dilakukan dengan metode studi litetarur yang membahas tentang sifat-sifat grup quartenion Q yaitu,: grup, sub grup, center, centraliser, order, subgrup siklik, koset, sub grup normal, grup faktor, homomorphisma dan isomorphisma. Untuk lebih jelasnya, tahap-tahapnya adalah sebagai berikut :

1. Peneliti akan mengumpulkan beberapa buku yang berkaitan dengan masalah penelitian. Kemudian mengumpulkan konsep-konsep sebagai landasan pemikiran untuk mencari solusi masalah penelitian.
2. Seluruh konsep yang telah dikumpulkan pada tahap pertama, dipelajari kemudian dikelompokkan.
3. Pada tahap Ketiga ini dilakukan pembahasan tentang hal hal yang terkait dengan grup quartenion dengan Q = $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ dan operasinya didefinisikan secara khusus yaitu :

*	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	I	-i	1	-1

4. Pada tahap Keempat ditarik kesimpulan berdasarkan tahap ketiga yaitu kesimpulan tentang hal-hal yang terkait dengan grup quartenion Q dimana Q = $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ dengan operasinya didefinisikan secara khusus.

BAB IV

P E M B A H A S A N

Pada bab ini akan dibahas tentang grup, order dari unsur Q, sub grup dari Q, center dari Q, centrealiser dari suatu unsur dalam Q, sub grup siklik dari Q, koset, sub grup normal dari Q, grup faktor, homomorphisma sam isomorphisma.

4.1. Grup

Grup quartenion Q dengan himpunan Q = {1, -1, i, -i, j, -j, k, -k} dan operasi Q ∗ Q dapat dilihat dari Tabel Cayley berikut :

Tabel 4.1. Operasi Q ∗ Q

∗	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

Dengan memperhatikan tabel diatas tampak bahwa operasi bintang pada Q ∗ Q bersifat tertutup. Asosiatif, terdapat unsur indentitas yaitu 1 (satu) dan setiap unsur Q mempunyai invers yaitu :

- 1 inversnya 1

- -1 inversnya –1
- i inversnya – i dan - i inversnya i
- j inversnya – j dan - j inversnya j
- k inversnya – k dan - k inversnya k

Dengan demikian Q $\cdot$ Q jelas merupakan suatu grup, dan karena tidak setiap $a, b \in Q$, berlaku $a * b = b * a$ maka Q $\cdot$ Q bukan grup kumutatif.

Contoh : $-j * k = -i$

$k * -j = i$

Jadi $-j * k \neq k * -j$

4.2. Order

Berdasarkan definisi, order dari Q adalah 8 atau $|Q| = 8$, sedangkan order dari setiap unsur pada Q adalah sebagai berikut :

Unsur identitas dari Q adalah 1, dan

$|1|$ adalah $1^1 = 1$

$|1| = 1.$

$|-1|$ adalah $-1^? = 1$

$-1^1 = -1$

$-1^2 = -1 * -1 = 1$

$|-1| = 2$

$|i|$ adalah $i^? = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = i * i = -1$

$i^3 = i^2 * i * i = -1 * i = -1$

$i^4 = i^2 * i^2 = -1 * -1 = 1$

$|i| = 4$

$|-i|$ adalah $-i^? = 1$

$-i^1 = -i$

$-i^2 = -i * i = -1$

$-i^3 = -i^2 * -i = -1 * -i = i$

$-i^4 = -i^3 * -i = i * -i = 1$

$|-i| = 4$

$|j|$ adalah $j^? = 1$

$j^1 = j$

$j^2 = j * j = -1$

$j^3 = j^2 * j = -1 * j = -j$

$j^4 = j^3 * j = -j * j = 1$

$|j| = 4$

$|-j|$ adalah $-j^? = 1$

$-j^1 = -j$

$-j^2 = -j * j = -1$

$-j^3 = -j^2 * -j = -1 * -j = j$

$-j^4 = -j^3 * -j = j * -j = 1$

$|-j| = 4$

$|k|$ adalah $k^? = 1$

$k^1 = k$

$k^2 = k * k = -1$

$k^3 = k^2 * k = -1 * k = -k$

$$k^4 = k^3 * k = -k * k = 1$$

$| k | = 4$

$| -k |$ adalah $k^? = 1$

$$-k^1 = -k$$

$$-k^2 = -k * k = -1$$

$$-k^3 = -k^2 * -k = -1 * -k = k$$

$$-k^4 = -k^3 * -k = k * -k = 1$$

$| -k | = 4$

Jadi order setiap unsur di Q adalah

$|1| = 1$, $|-1| = 2$, $|i| = |-i| = |j| = |-j| = |k| = |-k| = 4$.

4.3. Sub Grup – Sub Grup dari Q

Berikut adalah sub grup-sub grup dari grup Q:

Dari Tabel 4.1 dapat dilihat untuk :

1. $H_0 = Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ adalah sub grup dari Q.
2. $H_2 = \{1, -1, i, -i \}$

Tabel 4.2. Operasi dari H_1

*	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

Dengan memperhatikan tabel di atas, terlihat bahwa operasi bintang di H_1 bersifat tertutup dan setiap unsur di H_1 mempunyai invers. Berdasarkan lemma 2.1.9 maka H_1 merupakan sub grup dari Q.

3. $H_2 = \{1, -1, j, -j\}$

Tabel 4.3. Operasi dari H_2

*	1	-1	j	-j
1	1	-1	j	-j
-1	-1	1	-j	j
j	j	-j	-1	1
-j	-j	j	1	-1

Dengan memperhatikan Tabel 4.3 di atas nampak bahwa operasi bintang di H_2 bersifat tertutup dan setiap unsur di H_2 mempunyai invers. Berdasarkan lemma 2.1.9 maka H_2 merupakan sub grup dari Q.

4. $H_3 = \{1, -1, k, -k\}$

Tabel 4.4. Operasi dari H_3

*	1	-1	k	-k
1	1	-1	k	-k
-1	-1	1	-k	k
k	k	-k	-1	1
-k	-k	k	1	-1

Dengan memperhatikan Tabel 4.4 di atas dapat dilihat bahwa operasi bintang di H_3 bersifat tertutup dan setiap unsurnya mempunyai invers. Berdasarkan lemma 2.1.9 maka H_3 merupakan sub grup dari Q.

Sedangkan untuk himpunan H anggotanya 4 yang lainnya misalnya : { i, -i, j, -j }, { i, -i, k, -k }, { j, -j, k, -k }, dstnya tidak merupakan sub grup dari Q.

5. $H_4 = \{1, -1\}$

Tabel 4.5. Operasi dari H_4

*	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Dengan memperhatikan Tabel 4.5 di atas dapat disimpulkan bahwa H_4 merupakan sub grup dari Q.

Untuk himpunan H anggota lainnya seperti {j, -j}, {1, j}, {k, -k} dan seterusnya dapat diperhatikan pada Tabel 4.1 bahwa tidak tertutup pada H dengan operasi bintangnya, dan tidak merupakan sub grup dari Q.

6. $H_5 = \{1\}$

Untuk H yang anggotanya salah sati dari Tabel 4.1 dapat kita lihat pada diagonal utama yang memenuhi syarat suatu suatu grup adalah adalah $H_5 = \{1\}$ sedangkan yang lainnya tidak.

4.4. Center

Center dari grup Q dilambangkan dengan Z (Q) yang didefinisikan sebagai $Z(Q) = \{a \in Q \mid a * x = x * a \text{ setiap } x \in Q\}$.Center dari grup G adalah sub grup dari G. Oleh karena itu untuk menentukan center grup Q cukup diujikan sub grup – sub grupnya saja.

$H_0 = Q$, bukan center dari Q, karena Q bukan grup kumulatif.

$H_1 = \{1, -1, i, -i\}$ dan $H_2 = \{1, -1, j, -j\}$, bukan center dari Q, karena $i * j = k$ dan $j * i = -k$. Jadi $i * j = k \neq j * i$.

$H_3 = \{1, -1, k, -k\}$, bukan center dari Q karena $k * i = j$ dan $i * k = -j$. Jadi $k * i \neq i * k$.

$H_4 = \{1, -1\}$ merupakan center dari Q karena berlaku $a * x = x * a$ untuk setiap $x \in Q$.

Jadi center dari Q adalah $Z(Q) = \{1, -1\}$.

4.5.Centralizer

Centraliser dari $B \in Q$ dilambangkan dengan C (B) yang definisikan sebagai $C(B) = \{A \in Q \mid AB = BA\}$. Berikut akan dicarikan centraliser dari masing-masing elemen dari Q. Perharikan kembali Tabel 4.1.

1. $1 \in Q$, centraliser dari 1 dari Q adalah $C(1) = \{A \in Q \mid A * 1 = 1 * A\}$. Dari tabel 4.1. dapat dilihat hasil kolom 1 sama dengan hasil baris 1 berarti centraliser dari 1 adalah Q.
2. $-1 \in Q$, centraliser dari -1 di Q adalah $C(-1) = \{A \in Q \mid A * -1 = -1 * A\}$. Dari Tabel 4.1 dapat dilihat hasil kolom 2 sama dengan hasil baris 2 berarti centraliser dari -1 adalah Q.

3. $i \in Q$ centraliser dari i di Q adalah $C(i) = \{A \in Q \mid A * i = i * A\}$ dari Tabel 4.1 dapat dilihat hanya berlaku untuk $\{1,-1, i, -i\}$. Jadi centraliser untuk i adalah $H_1 = \{1,-1, i, -i\}$.
4. $i \in Q$ centraliser dari -i di Q adalah $C(-i) = \{A \in Q \mid A * -i = -i * A\}$ dari Tabel 4.1 dapat dilihat hanya berlaku untuk $\{1,-1, i, -i\}$. Jadi centraliser untuk -i adalah $H_1 = \{1,-1, i, -i\}$.
5. $j \in Q$ centraliser dari j di Q adalah $C(j) = \{A \in Q \mid A * j = j * A\}$ dari Tabel 4.1 dapat dilihat hanya berlaku untuk $\{1,-1, j, -j\}$. Jadi centraliser untuk j adalah $H_2 = \{1,-1, j, -j\}$.
6. $-j \in Q$ centraliser dari -j di Q adalah $C(-j) = \{A \in Q \mid A * -j = -j * A\}$ dari Tabel 4.1 dapat dilihat hanya berlaku untuk $\{1,-1, j, -j\}$. Jadi centraliser untuk -j adalah $H_2 = \{1,-1, j, -j\}$.
7. $k \in Q$ centraliser dari k di Q adalah $C(k) = \{A \in Q \mid A * k = k * A\}$ dari Tabel 4.1 dapat dilihat hanya berlaku untuk $\{1,-1, k, -k\}$. Jadi centraliser untuk k adalah $H_3 = \{1,-1, k,-k\}$.
8. $-k \in Q$ centraliser dari -k di Q adalah $C(-k) = \{A \in Q \mid A * k = k * A\}$ dati Tabel 4.1 dapat dilihat hanya berlaku untuk $\{1,-1, k, k\}$. Jadi centraliser untuk -k adalah $H_3 = \{1,-1, k,-k\}$.

4.6. Sub Grup Siklik dari Q

Q bukan grup siklik. Hal ini dikarenakan tidak ada $a \in Q$, sehingga $Q = \{a^n \mid n \in Z\}$. Meskipun Q bukan grup siklik, namun Q mempunyai sub grup siklik yaitu :

1. $H_1 = \{1,-1, i,-i\}$, sebelumnya telah dibuktikan bahwa H_1 adalah sub grup dari Q. Dibawah ini akan dibuktikan bahwa H_1 adalah sub grup siklik dari Q dan orde $|1| = |-1| = 1$, $|i| = |-i| = 4$

Bukti : Untuk membutikan diambil yang ordenya 4 yaitu i dan –i

$i^1 = i$

$i^2 = i * i = -1$

$i^3 = i * i * i = -i$

$i^4 = i * i * i * i = 1$

$$H_1 = \langle i \rangle$$

$-i^1 = -i$

$-i^2 = -i * -i = -1$

$-i^3 = -i * -i * -i = i$

$-i^4 = -i * -i * -i * -i = 1$

$$H_1 = \langle -i \rangle$$

Jadi terbukti H_1 adalah sub grup siklik dengan generator i dan –i.

2. $H_2 = \{1,-1, j,-j\}$, sebelumnya telah dibuktikan bahwa H_2 adalah sub grup dari Q dan orde $|j| = |-j| = 4$. Dibawah ini akan dibuktikan bahwa H_2 adalah sub grup siklik dari Q.

Bukti :

$j^1 = j$

$j^2 = j * j = -1$

$j^3 = j * j * j = -j$

$j^4 = j * j * j * j = 1$

$H_2 = < j >$

$-j^1 = -j$

$-j^2 = -j * -j = -1$

$-j^3 = -j * -j * -j = j$

$-j^4 = -j * -j * -j * -j = 1$

$H_2 = < -j >$

Jadi terbukt H_2 adalah sub grup siklik dengan generator j dan –j.

3. $H_3 = \{1,-1, k,-k\}$, sebelumnya telah dibuktikan bahwa H_3 adalah sub grup dari Q dan orde $|k| = |-k| = 4$. Dibawah ini akan dibuktikan bahwa H_3 adalah sub grup siklik dari Q.

Bukti :

$k^1 = k$

$k^2 = k * k = -1$

$k^3 = k * k * k = -k$

$k^4 = k * k * k * k = 1$

$H_3 = < k >$

$-k^1 = -k$

$-k^2 = -k * -k = -1$

$-k^3 = -k * -k * -k = k$

$-k^4 = -k * -k * -k * -k = 1$

$H_3 = < -k >$

Jadi terbukti H_3 adalah sub grup siklik dengan generator k dan –k.

4.7. Koset-Koset di Q

Berikut ini akan dicari koset-koset di Q.

1. Koset-koset kanan dari H_0 = Q

   Koset kanan dari H_0 adalah Q sendiri, begitu juga untuk koset kirinya. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 4.1.

2. Koset-koset dari $H_1 = \{1,-1, i,-i\}$

   Koset kanan

   $H_1*1 = \{1*1, -1*1, i*1, -i*1\}$

   $= \{1,-1, i, -i\}$

   $H_1*-1 = \{1*-1, -1*-1, i*-1, -i*-1\}$

   $= \{-1,1, -i, i\}$

   $H_1*i = \{i*i, -1*i, i*i, -i*i\}$

   $= \{i,-i, -1, 1\}$

   $H_1*-i = \{1*-i, -1*-i, i*-i, -i*-i\}$

   $= \{-i, i, 1, -i\}$

   $H_1*j = \{1*j, -1*j, i*j, -i*j\}$

   $= \{j,-j, k, -k\}$

   $H_1*-j = \{1*-j, -1*-j, i*-j, -i*-j\}$

   $= \{-j,j, -k, k\}$

   $H_1*k = \{1*k, -1*k, -i*k, -i*k\}$

   $= \{k,-k, -j, j\}$

   $H_1*-k = \{1*-k, -1*k, -i*-k, -i*-k\}$

   $= \{-k,k, j, -j\}$

Koset kiri

$1 * H_1 = \{1*1, 1*-1, 1 * i, 1 *-i\}$

$= \{1, -1, i, -i\}$

$-1 * H_1 = \{-1*1, -1*-1, -1 * i, -1 *-i\}$

$= \{-1, 1, -i, i\}$

$i * H_1 = \{i*1, i*-1, i * i, i *-i\}$

$= \{i, -i, -i, 1\}$

$-i * H_1 = \{-i*1, -i*-1, -i * i, -i *-i\}$

$= \{-i, i, 1, -1\}$

$j * H_1 = \{j*1, j*-1, j * i, j *-i\}$

$= \{j, -j, -k, k\}$

$-j * H_1 = \{-j*1, -j*-1, -j * i, -j *-i\}$

$= \{-j, j, k, -k\}$

$k * H_1 = \{k*1, k*-1, k * i, k *-i\}$

$= \{k, -k, j, -j\}$

$-k * H_1 = \{-k*1, -k*-1, -k * i, -k *-i\}$

$= \{-k, k, -j, j\}$

Jadi koset kanan dan kiri dari H_1 adalah $\{1,-1, i, -i\}$, $\{j,-j, k, -k\}$

3. Koset-koset dari $H_2 = \{1, -1, j, -j\}$

Koset kanan

$H_2 * 1 = \{1*1, 1*-1, j * 1, -j *1\}$

$= \{1, -1, j, -j\}$

$H_2*-1 = \{1*-1, -1*-1, j*-1, -j*-1\}$

$= \{-1, 1, -j, j\}$

$H_2*i = \{1*i, -1*i, j*i, -j*i\}$

$= \{i, -i, -k, k\}$

$H_2*-i = \{1*-i, -1*-i, j*-i, -j*-i\}$

$= \{-i, i, k, -k\}$

$H_2*j = \{1*j, -1*j, j*j, -j*j\}$

$= \{j, -j, -1, -1\}$

$H_2*-j = \{1*-j, -1*-j, j*-j, -j*-j\}$

$= \{-j, j, 1, -1\}$

$H_2*k = \{1*k, -1*k, j*k, -j*k\}$

$= \{k, -k, -i, -i\}$

$H_2*-k = \{1*-k, -1*-k, j*-k, -j*-k\}$

$= \{-k, k, -i, i\}$

Jadi koset kanan dari H_2 adalah : $\{1, -1, j, -j\}$ dan $\{i, -i, k, -k\}$

Koset kiri

$1*H_2 = \{1*1, 1*-1, 1*j, 1*-j\}$

$= \{1, -1, j, -j\}$

$-1*H_2 = \{-1*1, -1*-1, -1*j, -1*-j\}$

$= \{-1, 1, -j, j\}$

$i*H_2 = \{i*1, i*-1, i*j, i*-j\}$

$= \{i, -i, k, -k\}$

$-i*H_2 = \{-i*1, -i*-1, -i*j, -i*-j\}$

$= \{-i, i, k, -k\}$

$j*H_2 = \{j*1, j*-1, j*j, j*-j\}$

$= \{j, -j, -1, 1\}$

$-j*H_2 = \{-j*1, -j*-1, -j*j, -j*-j\}$

$= \{-j, j, 1, -1\}$

$k*H_2 = \{k*1, k*-1, k*j, k*-j\}$

$= \{k, -k, -i, i\}$

$-k*H_2 = \{-k*1, -k*-1, -k*j, -k*-j\}$

$= \{-k, k, i, -i\}$

koset kiri dari H_2 adalah $\{1,-1, j, -j\}$ dan $\{i,-i, k, -k\}$

4. Koset-koset dari $H_3 = \{1, -1, k, -k\}$

Koset kanan

$H_3*1 = \{1*1, -1*1, k*1, -k*1\}$

$= \{1,-1, k, -k\}$

$H_3*-1 = \{1*-1, -1*-1, k*-1, -k*-1\}$

$= \{-1,1, -k, k\}$

$H_3*i = \{1*i, -1*i, k*i, -k*i\}$

$= \{i,-i, j, -j\}$

$H_3*-i = \{1*-i, -1*-i, k*-i, -k*-i\}$

$= \{-i, i, j, j\}$

$H_3*j = \{1*j, -1*j, k*j, -k*j\}$

$= \{j,-j, -i, i\}$

$H_3 * -j \;= \{1*-j, -1*-j, k *-j, -k *-j\}$

$= \{-j, j, i, -i\}$

$H_3 * k \;= \{1*k, -1*k, k *k, -k *k\}$

$= \{k, -k, -1, 1\}$

$H_3 * -k \;= \{1*-k, -1*-k, k *-k, -k *-k\}$

$= \{-k, k, 1, -1\}$

Koset kanan dari H_3 adalah : $\{1, -1, k, -k\}$ dan $\{i, -i, j, -j\}$

Koset kiri

$1 * H_3 \;= \{1*1, 1*-1, 1 * k, 1 *-k\}$

$= \{1, -1, k, -k\}$

$-1 * H_3 = \{-1*1, -1*-1, -1 * k, -1 *-k\}$

$= \{-1, 1, -k, k\}$

$i * H_3 \;= \{i*1, i*-1, i * k, i *-k\}$

$= \{i, -i, -j, j\}$

$-i * H_3 \;= \{-i*1, -i*-1, -i * k, -i *-k\}$

$= \{i, i, j, -j\}$

$j * H_3 \;= \{j*1, j*-1, j * k, j *-k\}$

$= \{j, -j, i, -i\}$

$-j * H_3 \;= \{-j*1, -j*-1, -j * k, -j *-k\}$

$= \{-j, j, i, i\}$

$k * H_3 \;= \{k*1, k*-1, k * k, k *-k\}$

$= \{k, -k, -1, 1\}$

$-k*H_3 = \{-k*1, -k*-1, -k*k, -k*-k\}$

$= \{-k, k, 1, -1\}$

Jadi koset kiri dari H_3 adalah $\{1,-1, k, -k\}$, $\{1,-1, j, -j\}$

5. Koset-koset dari $H_4 = \{1, -1\}$

Koset kanan

$H_4*1 = \{1*1, -1*1\}$

$= \{1,-1\}$

$H_4*-1 = \{1*-1, -1*-1\}$

$= \{-1,1\}$

$H_4*i = \{1*i, -1*i\}$

$= \{i,-i\}$

$H_4*-i = \{1*-i, -1*-i\}$

$= \{-i, i\}$

$H_4*j = \{1*j, -1*j\}$

$= \{j, -j\}$

$H_4*-j = \{1*-j, -1*-j\}$

$= \{-j, j\}$

$H_4*k = \{1*k, -1*k\}$

$= \{k, -k\}$

$H_3*-k = \{1*-k, -1*-k\}$

$= \{-k, k\}$

Koset kanan dari H_4 adalah : $H_4 = \{1, -1\}$, $\{i, -i\}$, $\{j, -j\}$, $\{k, -k\}$

Koset kiri

$1 * H_4 = \{1 * 1, 1 * -1\}$

$= \{1, -1\}$

$-1 * H_4 = \{-1 * 1, -1 * -1\}$

$= \{-1, 1\}$

$i * H_4 = \{i * 1, i * -1\}$

$= \{i, -i\}$

$-i * H_4 = \{-i * 1, -i * -1\}$

$= \{-i, i\}$

$j * H_4 = \{j * 1, j * -1\}$

$= \{j, -j\}$

$-j * H_4 = \{-j * 1, -j * -1\}$

$= \{-j, j\}$

$k * H_4 = \{k * 1, k * -1\}$

$= \{k, -k\}$

$-k * H_4 = \{-k * 1, -k * -1\}$

$= \{-k, k\}$

Jadi koset kiri dari H_4 adalah $\{1,-1\}$, $\{i,-i\}$, $\{j, -j\}$, $\{k, -k\}$

6. Koset-koset dari $H_5 = \{1\}$

   Karena 1 unsur identitas maka koset kanan dan kirinya sama yaitu $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{i\}$, $\{-i\}$, $\{j\}$, $\{-j\}$, $\{k\}$, $\{-k\}$.

4.8. Sub Grup Normal dari Q

Sebelumnya telah dicari sub grup dari Q yaitu :

1. $H_0 = \{1,-1, i, -i, j,-j, k,-k\}$
2. $H_1 = \{1,-1, i,-i\}$
3. $H_2 = \{1,-1, j,-j\}$
4. $H_3 = \{1,-1, k,-k\}$
5. $H_4 = \{1,-1\}$
6. $H_5 = \{1\}$

Karena koset kanan dan kirinya sama dan berdasarkan defenisi 2.1.21,maka semua sub grup dari Q merupakan sub grup normal.

4.9. Grup Faktor dari Q

1. Untuk $H_0 = \{1,-1, i, -i, j,-j, k,-k\}$ grup faktornya adalah

   $Q/ H_0 = \{g * H_0 \mid g \in G\}$

   $= \{1* H_0, -1 * H_0, i * H_0, -i * H_0, j * H_0, -j * H_0, k * H_0, -k * H_0 \}$

   $= H_0$

2. Untuk $H_1 = \{1,-1, i, -i\}$ grup faktornya adalah

   $Q/ H_1 = \{g * H_1 \mid g \in G\}$

   $= \{1* H_1, -1 * H_1, i * H_1, -i * H_1, j * H_1, -j * H_1, k * H_1, -k * H_1 \}$

   $= \{1,-1, i, -i, j,-j, k,-k\}$

   $= \{H_1, j * H_1 \}$

3. Untuk $H_2 = \{1,-1, j, -j\}$ grup faktornya adalah

   $Q/ H_2 = \{1* H_2, -1 * H_2, i * H_2, -i * H_2, j * H_2, -j * H_2, k * H_2, -k * H_2 \}$

$= \{1,-1, j,-j, i, -i, k,-k\}$

$= \{H_2, i * H_2\}$

4. Untuk $H_3 = \{1,-1, k, -k\}$ grup faktornya adalah

   $Q/H_3 = \{1* H_3, -1 * H_3, i * H_3, -i * H_3, j * H_3, -j * H_3, k * H_3, -k * H_3\}$

   $= \{1,-1, k,-k, i, -i\ j,-j\}$

   $= \{H_3, i * H_3\}$

5. Untuk $H_4 = \{1,-1\}$ grup faktornya adalah

   $Q/H_4 = \{1* H_4, -1 * H_4, i * H_4, -i * H_4, j * H_4, -j * H_4, k * H_4, -k * H_4\}$

   $= \{1,-1, i, -i, j,-j, k,-k\}$

   $= \{H_4, i * H_4, j * H_4, k * H_4\}$

6. Untuk $H_5 = \{1\}$ grup faktornya adalah

   $Q/H_5 = \{1* H_5, -1 * H_5, i * H_5, -i * H_5, j * H_5, -j * H_5, k * H_5, -k * H_5\}$

   $= \{1,-1, i, -i, j,-j, k,-k\}$

   $= \{Q\}$

4.10. Homomorphisma dan Isomomorphisma

Berikut adalah pemetaan homomorphisma dari grup Q.

$\varphi : Q \rightarrow H_4$ dengan $H_4 = \{1,-1\}$ didefinisikan :

$\varphi(1) = 1$ $\varphi(j) = 1$

$\varphi(-1) = 1$ $\varphi(-j) = 1$

$\varphi(i) = -1$ $\varphi(k) = -1$

$\varphi(-i) = -1$ $\varphi(-k) = -1$

Untuk memahami langkah berikut ,kita perhatikan kembali tabel 4.1

1). $\varphi(1 \ast 1) = \varphi(1) = 1$

$\varphi(1) \ast \varphi(1) = 1 \ast 1 = 1$

Jadi $\varphi(1 \ast 1) = \varphi(1) \ast \varphi(1)$

2). $\varphi(1 \ast -1) = \varphi(-1) = 1$

$\varphi(1) \ast \varphi(-1) = 1 \ast 1 = 1$

Jadi $\varphi(1 \ast -1) = \varphi(1) \ast \varphi(-1)$

3). $\varphi(1 \ast i) = \varphi(i) = -1$

$\varphi(1) \ast \varphi(i) = 1 \ast -1 = -1$

Jadi $\varphi(1 \ast i) = \varphi(1) \ast \varphi(i)$

4). $\varphi(1 \ast -i) = \varphi(-i) = -1$

$\varphi(1) \ast \varphi(-i) = 1 \ast -1 = -1.$

Jadi $\varphi(1 \ast -i) = \varphi(1) \ast \varphi(-i)$

5). $\varphi(1 \ast j) = \varphi(j) = 1$

$\varphi(1) \ast \varphi(j) = 1 \ast 1$

Jadi $\varphi(1 \ast j) = \varphi(1) \ast \varphi(j)$

6). $\varphi(1 \ast -j) = \varphi(-j) = 1$

$\varphi(1) \ast \varphi(-j) = 1 \ast 1 = 1$

Jadi $\varphi(1 \ast -j) = \varphi(1) \ast \varphi(-j)$

7). $\varphi(1 \ast k) = \varphi(k) = -1$

$\varphi(1) \ast \varphi(k) = 1 \ast -1 = -1$

Jadi $\varphi(1 \ast k) = \varphi(1) \ast \varphi(k)$

8). $\varphi(1 \ast -k) = \varphi(-k) = -1$

$\varphi(1) \ast \varphi(-k) = 1 \ast -1 = -1$

Jadi $\varphi(1 \ast -k) = \varphi(1) \ast \varphi(-k)$

9). $\varphi(-1 \ast 1) = \varphi(-1) = 1$

$\varphi(-1) \ast \varphi(1) = 1 \ast 1 = 1$

Jadi $\varphi(-1 \ast 1) = \varphi(-1) \ast \varphi(1)$

10). $\varphi(-1 \ast -1) = \varphi(1) = 1$

$\varphi(-1) \ast \varphi(-1) = 1 \ast 1 = 1$

Jadi $\varphi(-1 \ast -1) = \varphi(-1) \ast \varphi(-1)$

11). $\varphi(-1 \ast i) = \varphi(-i) = -1$

$\varphi(-1) \ast \varphi(i) = 1 \ast -1 = -1$

12). $\varphi(-1 \ast -i) = \varphi(i) = -1$

$\varphi(-1) \ast \varphi(-i) = 1 \ast -1 = -1$

Jadi $\varphi(-1\cdot i) = \varphi(-1)\cdot\varphi(i)$

Jadi $\varphi(-1\cdot -i) = \varphi(-1)\cdot\varphi(-i)$

13). $\varphi(-1\cdot j) = \varphi(-j) = 1$

$\varphi(-1)\cdot\varphi(j) = 1\cdot 1 = 1$

Jadi $\varphi(-1\cdot j) = \varphi(-1)\cdot\varphi(j)$

14). $\varphi(-1\cdot -j) = \varphi(j) = 1$

$\varphi(-1)\cdot\varphi(-j) = 1\cdot 1 = 1$

Jadi $\varphi(-1\cdot -j) = \varphi(-1)\cdot\varphi(-j)$

15). $\varphi(-1\cdot k) = \varphi(-k) = -1$

$\varphi(-1)\cdot\varphi(k) = 1\cdot -1 = -1$

Jadi $\varphi(-1\cdot k) = \varphi(-1)\cdot\varphi(k)$

16). $\varphi(-1\cdot -k) = \varphi(k) = -1$

$\varphi(-1)\cdot\varphi(-k) = 1\cdot -1 = -1$

Jadi $\varphi(-1\cdot -k) = \varphi(-1)\cdot\varphi(-k)$

17). $\varphi(i\cdot 1) = \varphi(i) = -1$

$\varphi(i)\cdot\varphi(1) = -1\cdot 1 = -1$

Jadi $\varphi(i\cdot 1) = \varphi(i)\cdot\varphi(1)$

18). $\varphi(i\cdot -1) = \varphi(-i) = -1$

$\varphi(-i)\cdot\varphi(-1) = -1\cdot 1 = -1$

Jadi $\varphi(i\cdot -1) = \varphi(-i)\cdot\varphi(-1)$

19). $\varphi(i\cdot i) = \varphi(-1) = 1$

$\varphi(i)\cdot\varphi(i) = -1\cdot -1 = 1$

Jadi $\varphi(i\cdot -i) = \varphi(i)\cdot\varphi(i)$

20). $\varphi(i\cdot -i) = \varphi(i) = 1$

$\varphi(i)\cdot\varphi(-i) = -1\cdot -1 = 1$

Jadi $\varphi(i\cdot -i) = \varphi(i)\cdot\varphi(-i)$

21). $\varphi(i\cdot j) = \varphi(k) = -1$

$\varphi(i)\cdot\varphi(j) = -1\cdot 1 = -1$

Jadi $\varphi(i\cdot j) = \varphi(i)\cdot\varphi(j)$

22). $\varphi(i\cdot -j) = \varphi(-k) = -1$

$\varphi(i)\cdot\varphi(-j) = -1\cdot 1 = -1$

Jadi $\varphi(i\cdot -j) = \varphi(i)\cdot\varphi(-j)$

23). $\varphi(i\cdot k) = \varphi(-j) = 1$

$\varphi(i)\cdot\varphi(k) = -1\cdot -1 = 1$

24). $\varphi(i\cdot -k) = \varphi(j) = 1$

$\varphi(i)\cdot\varphi(-k) = -1\cdot -1 = 1$

Jadi $\varphi(i \cdot k) = \varphi(i) \cdot \varphi(k)$

Jadi $\varphi(i \cdot -k) = \varphi(i) \cdot \varphi(-k)$

25). $\varphi(-i \cdot 1) = \varphi(-i) = -1$

$\varphi(-i) \cdot \varphi(1) = -1 \cdot 1 = -1$

Jadi $\varphi(-i \cdot 1) = \varphi(-i) \cdot \varphi(1)$

26). $\varphi(-i \cdot -1) = \varphi(i) = -1$

$\varphi(-i) \cdot \varphi(-1) = -1 \cdot 1 = -1$

Jadi $\varphi(-i \cdot -1) = \varphi(-i) \cdot \varphi(-1)$

27). $\varphi(-i \cdot i) = \varphi(1) = 1$

$\varphi(-i) \cdot \varphi(i) = -1 \cdot -1 = 1$

Jadi $\varphi(-i \cdot i) = \varphi(-i) \cdot \varphi(i)$

28). $\varphi(-i \cdot -i) = \varphi(-1) = 1$

$\varphi(-i) \cdot \varphi(-i) = -1 \cdot -1 = 1$

Jadi $\varphi(-i \cdot -i) = \varphi(-i)\ \varphi \cdot \varphi(-i)$

29). $\varphi(-i \cdot j) = \varphi(-k) = -1$

$\varphi(-i) \cdot \varphi(j) = -1 \cdot 1 = -1$

Jadi $\varphi(-i \cdot j) = \varphi(-i) \cdot \varphi(j)$

30). $\varphi(-i \cdot -j) = \varphi(k) = -1$

$\varphi(-i) \cdot \varphi(-j) = -1 \cdot 1 = -1$

Jadi $\varphi(-i \cdot -j) = \varphi(-i) \cdot \varphi(-j)$

31). $\varphi(-i \cdot k) = \varphi(j) = 1$

$\varphi(-i) \cdot \varphi(k) = -1 \cdot -1 = 1$

Jadi. $\varphi(-i \cdot k) = \varphi(-i) \cdot \varphi(k)$

32). $\varphi(-i \cdot -k) = \varphi(-j) = 1$

$\varphi(-i) \cdot \varphi(-k) = -1 \cdot -1 = 1$

Jadi $\varphi(-i \cdot -k) = \varphi(-i) \cdot \varphi(-k)$

33). $\varphi(j \cdot 1) = \varphi(j) = 1$

$\varphi(j) \cdot \varphi(1) = 1 \cdot 1 = 1$

Jadi $\varphi(j \cdot 1) = \varphi(j) \cdot \varphi(1)$

34). $\varphi(j \cdot -1) = \varphi(-j) = 1$

$\varphi(j) \cdot \varphi(-1) = 1 \cdot 1 = 1$

Jadi $\varphi(j \cdot -1) = \varphi(j) \cdot \varphi(-1)$

35). $\varphi(j \cdot i) = \varphi(-k) = -1$

$\varphi(j) \cdot \varphi(i) = 1 \cdot -1 = -1$

36). $\varphi(j \cdot -i) = \varphi(k) = -1$

$\varphi(j) \cdot \varphi(-i) = 1 \cdot -1 = -1$

Jadi $\varphi(j \cdot i) = \varphi(j) \cdot \varphi(i)$

Jadi $\varphi(j \cdot -i) = \varphi(j) \cdot \varphi(-i)$

37). $\varphi(j \cdot j) = \varphi(-1) = 1$

$\varphi(j) \cdot \varphi(j) = 1 \cdot 1 = 1$

Jadi $\varphi(j \cdot j) = \varphi(j) \cdot \varphi(j)$

38). $\varphi(j \cdot -j) = \varphi(1) = 1$

$\varphi(j) \cdot \varphi(-j) = 1 \cdot 1 = 1$

Jadi $\varphi(j \cdot -j) = \varphi(j) \cdot \varphi(-j)$

39). $\varphi(j \cdot k) = \varphi(i) = -1$

$\varphi(j) \cdot \varphi(k) = 1 \cdot -1 = -1$

Jadi $\varphi(j \cdot k) = \varphi(j) \cdot \varphi(k)$

40). $\varphi(j \cdot -k) = \varphi(-i) = -1$

$\varphi(j) \cdot \varphi(-k) = 1 \cdot -1 = -1$

Jadi $\varphi(j \cdot -k) = \varphi(j) \cdot \varphi(-k)$

41).$\varphi(-j \cdot 1) = \varphi(-j) = 1$

$\varphi(-j) \cdot \varphi(1) = 1 \cdot 1 = 1$

Jadi.$\varphi(-j \cdot 1) = \varphi(-j) \cdot \varphi(1)$

42). $\varphi(-j \cdot -1) = \varphi(j) = 1$

$\varphi(-j) \cdot \varphi(-1) = 1 \cdot 1 = 1$

Jadi $\varphi(-j \cdot -1) = \varphi(-j) \cdot \varphi(-1)$

43).$\varphi(-j \cdot i) = \varphi(k) = -1$

$\varphi(-j) \cdot \varphi(-1) = 1 \cdot -1 = -1$

Jadi $\varphi(-j \cdot -1) = \varphi(-j) \cdot \varphi(-1)$

44). $\varphi(-j \cdot -i) = \varphi(-k) = -1$

$\varphi(-j) \cdot \varphi(-i) = 1 \cdot -1 = -1$

Jadi $\varphi(-j \cdot -i) = \varphi(-j) \cdot \varphi(-i)$

45).$\varphi(-j \cdot j) = \varphi(1) = 1$

$\varphi(-j) \cdot \varphi(j) = 1 \cdot 1 = 1$

Jadi $\varphi(-j \cdot j) = \varphi(-j) \cdot \varphi(j)$

46). $\varphi(j \cdot -j) = \varphi(1) = 1$

$\varphi(-j) \cdot \varphi(-j) = 1 \cdot 1 = 1$

Jadi $\varphi(j \cdot -j) = \varphi(-j) \cdot \varphi(-j)$

47).$\varphi(-j \cdot k) = \varphi(-i) = -1$

$\varphi(-j) \cdot \varphi(k) = 1 \cdot -1 = -1$

48). $\varphi(-j \cdot -k) = \varphi(i) = -1$

$\varphi(-j) \cdot \varphi(-k) = 1 \cdot -1 = -1$

Jadi. $\varphi(-j \ast k) = \varphi(-j) \bullet \varphi(k)$

Jadi $\varphi(-j \ast -k) = \varphi(-j) \bullet \varphi(-k)$

49). $\varphi(k \ast 1) = \varphi(k) = -1$

$\varphi(k) \bullet \varphi(1) = -1 \bullet 1 = -1$

Jadi $\varphi(k \ast 1) = \varphi(k) \bullet \varphi(1)$

50). $\varphi(k \ast -1) = \varphi(-k) = -1$

$\varphi(k) \bullet \varphi(-1) = -1 \bullet 1 = -1$

Jadi $\varphi(k \ast -1) = \varphi(k) \bullet \varphi(-1)$

51). $\varphi(k \ast i) = \varphi(j) = 1$

$\varphi(k) \bullet \varphi(i) = -1 \bullet -1 = 1$

Jadi $\varphi(k \ast i) = \varphi(k) \bullet \varphi(i)$

52). $\varphi(k \ast -i) = \varphi(-j) = 1$

$\varphi(k) \bullet \varphi(-i) = -1 \bullet -1 = 1$

Jadi $\varphi(k \ast -i) = \varphi(k) \bullet \varphi(-i)$

53). $\varphi(k \ast j) = \varphi(-i) = -1$

$\varphi(k) \bullet \varphi(j) = -1 \bullet 1 = -1$

Jadi $\varphi(k \ast j) = \varphi(k) \bullet \varphi(j)$

54). $\varphi(k \ast -j) = \varphi(i) = -1$

$\varphi(k) \bullet \varphi(-j) = -1 \bullet 1 = -1$

Jadi $\varphi(k \ast -j) = \varphi(k) \bullet \varphi(-j)$

55). $\varphi(k \ast k) = \varphi(-1) = 1$

$\varphi(k) \bullet \varphi(k) = -1 \bullet -1 = 1$

Jadi $\varphi(k \ast k) = \varphi(k) \bullet \varphi(k)$

56). $\varphi(k \ast -k) = \varphi(-1) = 1$

$\varphi(k) \bullet \varphi(-k) = -1 \bullet -1 = 1$

Jadi $\varphi(k \ast -k) = \varphi(k) \bullet \varphi(-k)$

57). $\varphi(-k \ast 1) = \varphi(-k) = -1$

$\varphi(-k) \bullet \varphi(1) = -1 \bullet 1 = -1$

Jadi $\varphi(-k \ast 1) = \varphi(-k) \bullet \varphi(1)$

58). $\varphi(-k \ast -1) = \varphi(k) = -1$

$\varphi(-k) \bullet \varphi(-1) = -1 \bullet 1 = -1$

Jadi $\varphi(-k \ast -1) = \varphi(-k) \bullet \varphi(-1)$

59). φ (-k∗i) = φ (-j) = 1

φ (-k) ∗ φ (i) = -1∗-1 =1

Jadi φ (-k∗i) = φ (-k) ∗ φ (i)

60). φ (-k∗-i) = φ (i) = 1

φ (-k) ∗ φ (-i) = -1∗-1= 1

Jadi φ (-k∗-i) = φ (-k) ∗ φ (-i)

61).φ (-k∗j) = φ (i) = -1

φ (-k) ∗ φ (j) = -1∗1= -1

Jadi φ (-k∗j) = φ (-k) ∗ φ (j)

62). φ (-k∗-j) = φ (-i) = -1

φ (-k) ∗ φ (-j) = -1∗1 = -1

Jadi φ (-k∗-j) = φ (-k) ∗ φ (-j)

63).φ (-k∗k) = φ (1) = 1

φ (-k) ∗ φ (k) = -1∗-1 =1

Jadi φ (-k∗k) = φ (-k) ∗ φ (k)

64). φ (-k∗-k) = φ (-1) = 1

φ (-k) ∗ φ (-k) = -1∗-1 = 1

Jadi φ (-k∗-k) = φ (-k) ∗ φ (-k)

Dari 64 persamaan diatas nampak bahwa untuk setiap $a,b \in Q$ berlaku φ (a∗b) = φ (a) ∗ φ (b). Jadi terbukti φ homomorphisma. Karena pemetaan φ tidak satu-satu maka homomorphisma pemetaan $\varphi : Q \rightarrow H_4$ tidak isomorphisma.

Pemetaan homomorphisma Q yang lain adalah :

1. $\varphi_2 : Q \rightarrow H_5$ dengan $H_5 = \{1\}$, dengan semua anggota Q dipetakan ke 1.
2. $\varphi_3 : Q \rightarrow H_0$ dengan $H_0 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$, yang didefinisikan :

φ (1) = 1	φ (j) = j
φ (-1) = -1	φ (-j) = -j
φ (i) = i	φ (k) = k
φ (-i) = -i	φ (-k) = -k

Karena pemetaan φ_3 satu-satu maka pemetaan φ_3 adalah isomorphisma.

Berdasarkan Teorema 22.2

$K\varphi = \{ x \in G \mid \varphi(x) = e', e' \text{ identitas di } \bar{G} \}$

$Im(\varphi) = \{ \varphi(x) \mid x \in GG\}$

maka

1. $\varphi_1 : Q \rightarrow H_4$ dengan definisi :

$\varphi(1) = 1$	$\varphi(j) = 1$
$\varphi(-1) = 1$	$\varphi(-j) = 1$
$\varphi(i) = -1$	$\varphi(k) = -1$
$\varphi(-i) = -1$	$\varphi(-k) = -1$

   $K\varphi = \{ 1, -1, j, -j \} = H_2$

   $Im(\varphi) = \{ 1, -1 \} = H_4$

2. $\varphi_2 : Q \rightarrow H_5$

   $K\varphi_2 = \{ 1, -1, i, -i, j, -j, k, -k \} = Q$

   $Im(\varphi_2) = \{ 1 \} = H_5$

3. $\varphi_3 : Q \rightarrow H_0$

   $K\varphi_3 = \{ 1 \}$

   $Im(\varphi_2) = \{ 1, -1, i, -i, j, -j, k, -k \} = Q$

BAB V

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada Bab IV, dapat disimpulkan bahwa :

1. Order

Order dari Q adalah 8 dan order setiap unsurnya adalah

$| 1 | = 1$

$| -1 | = 2$

$|i| = |-i| = |j| = |-j| = |k| = |-k| = 4.$

2. Sub Grup – Sub Grup dari Q

Sub grup normal dari Q adalah :

$H_0 = Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}.$

$H_1 = \{1, -1, i, -i \}.$

$H_2 = \{1, -1, j, -j \}$

$H_3 = \{1, -1, k, -k \}$

$H_4 = \{1, -1\}$

$H_5 = \{1\}$

3. Center

Center dari Q adalah $Z(Q) = \{1, -1\}$.

4. Centraliser

- Centraliser dari 1 adalah Q.
- Centraliser dari -1 adalah Q.
- Centraliser dari i adalah H_1
- Centraliser dari -i adalah H_1
- Centraliser dari j adalah H_2
- Centraliser dari -ji adalah H_2
- Centraliser dari k adalah H_3
- Centraliser dari -k adalah H_3

5. Grup Siklik

Q bukan grup siklik. Meskipun Q bukan grup siklik, namun Q mempunyai sub grup siklik yaitu :

- $H_1 = \{1,-1, i,-i\}$ dengan generator i dan –i
- $H_2 = \{1,-1, j,-j\}$ dengan generator j dan –j
- $H_3 = \{1,-1, k,-k\}$ dengan generator k dan –k

4. Koset-Koset di Q

Koset-koset di Q adalah sebagai berikut :

Sub Grup	Koset Kiri	Koset Kanan
$H_0 = \{1,-1, i,-i, j, -j, j, k, -k\}$	Q	Q
$H_1 = \{1,-1, i,-i\}$	$H_1 = \{1,-1, i,-i\}$	$H_1 = \{1,-1, i,-i\}$
	$j*H_1 = \{j,-j, k,-k\}$	$H_1*j = \{j,-j, k,-k\}$

$H_2 = \{1, -1, j, -j\}$	$H_2 = \{1,-1, j,-j\}$	$H_2 = \{1,-1, j,-j\}$
	$i*H_2 = \{i,-i, k,-k\}$	$H_3*i = \{i,-i, k,-k\}$
$H_3 = \{1, -1, k, -k\}$	$H_3 = \{1,-1, k,-k\}$	$H_3 = \{1,-1, k,-k\}$
	$i*H_3 = \{i,-i, j,-j\}$	$H_3*i = \{i,-i, j,-j\}$
$H_4 = \{1, -1\}$	$H_4 = \{1,-1\}$	$H_4 = \{1,-1\}$
	$i*H_4 = \{i,-i\}$	$H_4 * i = \{i,-i\}$
	$j*H_4 = \{j, -j\}$	$H_4*j = \{j, -j\}$
	$k*H_4 = \{k,-k\}$	$H_4*k = \{k,-k\}$
$H_5 = \{1\}$	$H_5 = \{1\}$	$H_5 = \{1\}$
	$-1*H_5 = \{-1\}$	$H_5 * -1 = \{-1\}$
	$i*H_5 = \{i\}$	$H_5 * i = \{i\}$
	$-i*H_5 = \{-i\}$	$H_5 * -i = \{-i\}$
	$j*H_5 = \{j\}$	$H_5* j = \{j\}$
	$-j*H_5 = \{-j\}$	$H_5* -j = \{-j\}$
	$k*H_5 = \{k\}$	$H_5*k = \{k\}$
	$-k*H_5 = \{-k\}$	$-k*H_5 = \{-k\}$

7. Sub Grup Normal dari Q

Semua sub grup dari Q merupakan sub grup normal.

8. Grup Faktor dari Q

- Grup faktor dari H_0 adalah $\{H_0\}$
- Grup faktor dari H_1 adalah $\{H_1, j*H_2\}$

- Grup faktor dari H_2 adalah $\{H_2, i*H_2\}$
- Grup faktor dari H_2 adalah $\{H_3, i*H_3\}$
- Grup faktor dari H_4 adalah $\{H_4, i*H_4, j*H_4, k*H_4, \}$
- Grup faktor dari H_5 adalah $\{Q\}$

9. Homomorphisma dan Isomomorphisma

	Homomorphisma	Kernel	Image
a.	$\varphi : Q \rightarrow H_4$	$K\varphi = H_2$	$Im\ (\varphi) = H_4$
	$\varphi\ (1) \rightarrow 1$		
	$\varphi\ (-1) \rightarrow 1$		
	$\varphi\ (i) \rightarrow -1$		
	$\varphi\ (-i) \rightarrow -1$		
	$\varphi\ (j) \rightarrow 1$		
	$\varphi\ (-j) \rightarrow 1$		
	$\varphi\ (k) \rightarrow -1$		
	$\varphi\ (-k) \rightarrow 1$		
b.	$\varphi : Q \rightarrow H_5$	$K\varphi = Q$	$Im\ (\varphi) = H_5$
	$\varphi\ (1) \rightarrow 1$		
	$\varphi\ (-1) \rightarrow 1$		
	$\varphi\ (i) \rightarrow 1$		
	$\varphi\ (-i) \rightarrow 1$		
	$\varphi\ (j) \rightarrow 1$		
	$\varphi\ (-j) \rightarrow 1$		
	$\varphi\ (k) \rightarrow 1$		
	$\varphi\ (-k) \rightarrow 1$		

Isomorphisma

c. $\varphi : Q \to H_0$ $\quad$ $K\varphi = \{ 1 \}$ $\quad$ $Im(\varphi) = H_0$

$\varphi(1) \to 1$

$\varphi(-1) \to -1$

$\varphi(i) \to i$

$\varphi(-i) \to -i$

$\varphi(j) \to j$

$\varphi(-j) \to -j$

$\varphi(k) \to k$

$\varphi(-k) \to -k$

DAFTAR PUSTAKA

Arifin, A. 2000. *Aljabar.* 2000. ITB, Bandung.

Erlich.1991. *Fundamental Concept Abstract Aljebra.* PWS – Kent Publishing Company, Boston.

Fraleigh, J.B, 1994. *A First Course in Abstract Algebra.* Addision – Wesley Publishing Company, New York.

Gallian, J. 1998. *Contemporary Abstract Algebra.* New York, Houghton Mifflin Company.

Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra 2nd edition.* New York, John Wiley & Sons.

Muchlisah, Nurul. 2005. *Teori Group dan Terapannya.* Lembaga Pengembangan Pendidik. UPT UNS, Surakarta.