ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 1 2014
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.173

В. И. БЕНЕДИКТОВИЧ

О СОВМЕСТИМОСТИ ТРИАНГУЛЯЦИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФОВ

Институт математики НАН Беларуси

(*Поступила в редакцию 27.06.2013*)

Пусть множество точек S находится *в общем положении* на евклидовой плоскости, т. е. никакие три его точки не лежат на одной прямой. *Геометрическим графом* на множестве точек S называется граф, вершинами которого являются все точки множества S, а ребрами – прямолинейные отрезки, соединяющие некоторые пары этих точек. Два ребра геометрического графа *пересекаются,* если они имеют общую внутреннюю (для обоих) точку пересечения. *Триангуляцией* $T(S)$ множества точек S называется максимальный (по числу ребер) геометрический граф на множестве S без пересечений. Нетрудно видеть, что все ее *внутренние* грани являются треугольниками. Кроме того, хорошо известно, что число треугольников в любой триангуляции $T(S)$ множества точек S равно $f = 2(|S|–1)–h$, а число ребер равно $e = 3(|S| – 1) – h$, где h – число *экстремальных* точек множества S, т. е. точек множества S, лежащих на границе $\mathrm{Ch}(S)$ ее выпуклой оболочки $\mathrm{conv}(S)$.

Пусть S_1 и S_2 – два конечных множества точек в общем положении на евклидовой плоскости. Две триангуляции T_1 множества S_1 и T_2 множества S_2 называются *совместимыми*, если существует такой графовый изоморфизм между ними

$$\varphi: T_1 \to T_2,$$

что треугольник ijk триангуляции T_1 не содержит точек множества S_1 тогда и только тогда, когда треугольник $\varphi(i)\varphi(j)\varphi(k)$ триангуляции T_2 не содержит точек множества S_2. Несложно показать [1], что существуют графовые изоморфизмы триангуляций T_1 и T_2, не являющиеся совместимыми (см., напр., рис. 1).

Проблема существования совместимых триангуляций двух заданных множеств точек на плоскости была поставлена в 1987 г. [2] в связи с тем, что она имеет важные приложения как в компьютерной анимации, так и в автоматизированной картографии. Данная проблема может быть рассмотрена в двух вариациях: 1) когда фиксирована биекция между множествами точек S_1 и S_2; 2) когда эта биекция не является фиксированной. В первом случае проблема была рассмотрена в работе [2], где было показано, что совместимые триангуляции не всегда существуют, и предложено несколько эвристических методов их построения. Во втором случае вопрос остается открытым, причем даже неизвестен сложностной статус связанной с ним проблемы распознавания.

Здесь рассматривается проблема нахождения совместимых триангуляций без фиксированного соответствия между множествами точек S_1 и S_2. Другими словами, вопрос состоит в определении: существует ли биекция между множествами точек S_1 и S_2, которая допускает совместимые триангуляции этих множеств. В настоящий момент данная проблема еще довольно мало изучена.

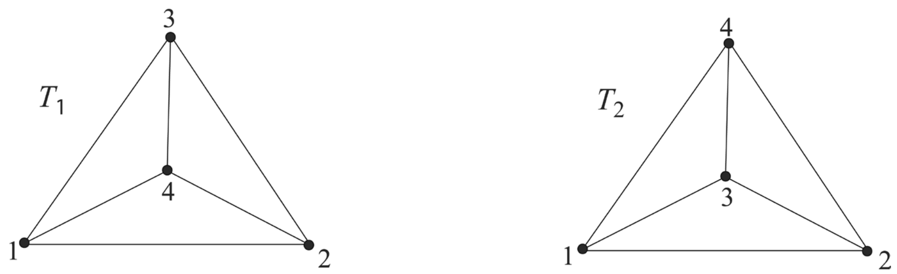


Рис. 1

Основной вопрос заключается в следующем: при каких условиях существуют совместимые триангуляции. Во-первых, очевидно, что $|S_1| = |S_2|$. Во-вторых, из вышеуказанной формулы для числа ребер произвольной триангуляции следует, что граница $\mathrm{Ch}(S_1)$ выпуклой оболочки $\mathrm{conv}(S_1)$ должна биективно отображаться на границу $\mathrm{Ch}(S_2)$ выпуклой оболочки $\mathrm{conv}(S_2)$, причем их циклический порядок должен сохраняться. Последнее следует из третьего известного утверждения [2], что если две триангуляции совместимы, то любые два соответствующих треугольника Δijk и $\Delta\varphi(i)\varphi(j)\varphi(k)$ должны иметь одну и ту же ориентацию (по часовой или против часовой стрелки). Следует отметить, что второе и третье условия не всегда выполняются, если имеется только графовый изоморфизм между триангуляциями T_1 и T_2 (см. рис. 1).

Множество точек U называется *слабо универсальным*, если для каждого множества S с условиями $|S| = |U|$ и $|\mathrm{Ch}(S)| = |\mathrm{Ch}(U)|$ существует триангуляция $T(S)$ множества S, совместимая с триангуляцией $T(U)$ множества U. Множество U называется *универсальным*, если дополнительно установлена биекция между границами $\mathrm{Ch}(S)$ и $\mathrm{Ch}(U)$ выпуклых оболочек, сохраняющая их циклический порядок.

Для произвольного множества точек S можно последовательно определить его *слои*. *Первым слоем* множества S называется граница $\mathrm{Ch}(S)$ его выпуклой оболочки $\mathrm{conv}(S)$; *i-м слоем* множества точек S называется множество точек границы выпуклой оболочки оставшихся элементов множества S после удаления всех элементов предыдущих $(i–1)$ слоев. Говорят, что множество точек *S имеет k слоев*, если этот процесс обрывается на k-м шаге.

Напомним также, что две вершины u и v произвольного геометрического графа G называются *взаимно видимыми*, если соединяющий их отрезок не пересекает никакое ребро графа G.

Пусть первый слой L_1 двуслойного множества точек S содержит вершины $v_1, v_2, ..., v_n$, а второй слой L_2 – вершины $w_1, w_2, ..., w_n$ (в циклическом порядке обхода каждого слоя по часовой стрелке). Тогда назовем эти слои *согласованными*, если каждая точка w_i второго слоя L_2 содержится в пересечении треугольников $\Delta v_i v_{i+1} v_{i+2} \cap \Delta v_{i-1} v_i v_{i+1}$, $i = \overline{1,n}$, (здесь арифметические операции над индексами рассматриваются по модулю n), причем в $2n$-угольнике $M = v_1 w_1 v_2 w_2 v_3 ... v_{n-1} w_{n-1} v_n w_n$ его выпуклые вершины $(v_1, v_2, ..., v_n)$ и рефлексивные вершины $(w_1, w_2, ..., w_n)$ являются взаимно видимыми. Нетрудно показать, например, индукцией по n, что такие согласованные слои всегда существуют.

Далее укажем некоторые универсальные множества точек на плоскости.

Т е о р е м а 1. *Пусть U – множество $2n$ точек в общем положении на евклидовой плоскости, состоящее из двух согласованных слоев мощности n каждое. Тогда множество U является универсальным множеством.*

Для д о к а з а т е л ь с т в а теоремы воспользуемся следующим известным утверждением из работы [3]:

Л е м м а 1 (о р а з б и е н и и). *Пусть S – множество точек в общем положении на евклидовой плоскости, $v_1, v_2, ..., v_n$ – вершины границы выпуклой оболочки* $\mathrm{Ch}(S)$ *и m точек множества S лежат внутри выпуклой оболочки* $\mathrm{conv}(S)$. *Пусть задано некоторое разбиение числа $m = m_1 + m_2 + ... + m_n$, где все m_i – неотрицательные целые числа. Тогда выпуклая оболочка* $\mathrm{conv}(S)$ *может быть разбита на n выпуклых многоугольников $P_1, P_2, ..., P_n$, таких, что каждый многоугольник P_i, $i = \overline{1,n}$, содержит сторону $v_i v_{i+1}$ в качестве своего ребра и ровно m_i внутренних точек множества S.* (*Некоторые внутренние точки могут лежать на границах многоугольников $P_1, P_2, ..., P_n$, и для этих точек мы сами устанавливаем их принадлежность к соответствующему многоугольнику.*)

Пусть S – произвольное множество точек в общем положении на плоскости мощности $2n$ с экстремальными точками $v_1, v_2, ..., v_n$ (в циклическом порядке их обхода по часовой стрелке) и n внутренними точками. Для разбиения числа $n = 1 + 1 + ... + 1$ по предыдущей лемме существуют n выпуклых многоугольников $P_1, P_2, ..., P_n$, таких, что каждый многоугольник P_i, $i = \overline{1,n}$, содержит сторону $v_i v_{i+1}$ в качестве своего ребра и ровно одну внутреннюю точку множества S, которую обозначим через u_i. Поставим в соответствие каждой внутренней точке u_i множества S точку w_i второго слоя L_2 множества U. В силу выпуклости многоугольников P_i, $i = \overline{1,n}$, можно построить непересекающийся $2n$-угольник $K = v_1 u_1 v_2 u_2 v_3 ... v_{n-1} u_{n-1} v_n u_n$, лежащий внутри $\mathrm{conv}(S)$, которому соответствует $2n$-угольник $M = v_1 w_1 v_2 w_2 v_3 ... v_{n-1} w_{n-1} v_n w_n$.

Рассмотрим каждый треугольник $\Delta u_i v_{i+1} u_{i+1}$, $i = \overline{1,n}$. Если ни один из них не содержит ни одной внутренней точки множества S, то строим ребра $u_i u_{i+1}$, в результате чего получаем непересекающийся n-угольник $N = u_1u_2...u_{n-1}u_n$, соответствующий выпуклому n-угольнику N' внутри выпуклой оболочки $\mathrm{conv}(U)$ с вершинами из второго слоя L_2. Причем область между n-угольником N и $\mathrm{conv}(U)$ уже триангулирована и совместима с триангуляцией области между слоями L_1 и L_2 выпуклой оболочки $\mathrm{conv}(U)$. Триангулируя теперь произвольным образом n-угольник N, в силу выпуклости n-угольника N' можно воспроизвести эту триангуляцию на последнем, которые будут тоже совместимыми. Таким образом, получим совместимые глобальные триангуляции множеств точек S и U.

Если некоторый треугольник $\Delta u_iv_{i+1}u_{i+1}$ содержит точки множества S, то соединим их отрезками с точкой v_{i+1} и последовательно отрезками каждую из них в порядке обхода против часовой стрелки вокруг вершины v_{i+1}. Например, на рис. 2, *а*, где пунктирными линиями указаны выпуклые многоугольники, на которые разбивается $\mathrm{conv}(S)$, и каждый из которых содержит в точности одну внутреннюю точку множества S, мы соединяем последовательно отрезками вершины u_4, u_1, u_9 и u_5, а вершины u_1 и u_9, лежащие внутри треугольника $\Delta u_4v_5u_5$, соединяем с вершиной v_5. Также соединяем последовательно отрезками вершины u_8, u_7 и u_9, а вершину u_7, лежащую внутри треугольника $\Delta u_8v_9u_9$, соединяем с вершиной v_9. Аналогичную совместимую триангуляцию можно воспроизвести на множестве вершин U в силу взаимной видимости выпуклых и рефлексивных вершин многоугольника M.

В результате останется конечное число нетриангулированных многоугольников P_j внутри $\mathrm{conv}(S)$, которым соответствуют выпуклые многоугольники Q_j внутри $\mathrm{conv}(U)$. Например, на рис. 2, *а* у нас остались нетриангулированными два выделенных жирными линиями многоугольника $P_1 = u_1u_2u_3u_4$ и $P_2 = u_5u_6u_7u_9$, которым соответствуют выпуклые многоугольники $Q_1 = u_1u_2u_3u_4$ и $Q_2 = u_5u_6u_7u_9$ на рис. 2, *б*. Триангулируя теперь произвольным образом каждый из этих многоугольников P_j, в силу выпуклости многоугольников Q_j можно воспроизвести совместимые триангуляции на последних многоугольниках. Тем самым получим совместимые глобальные триангуляции множеств точек S и U. Теорема 1 доказана.

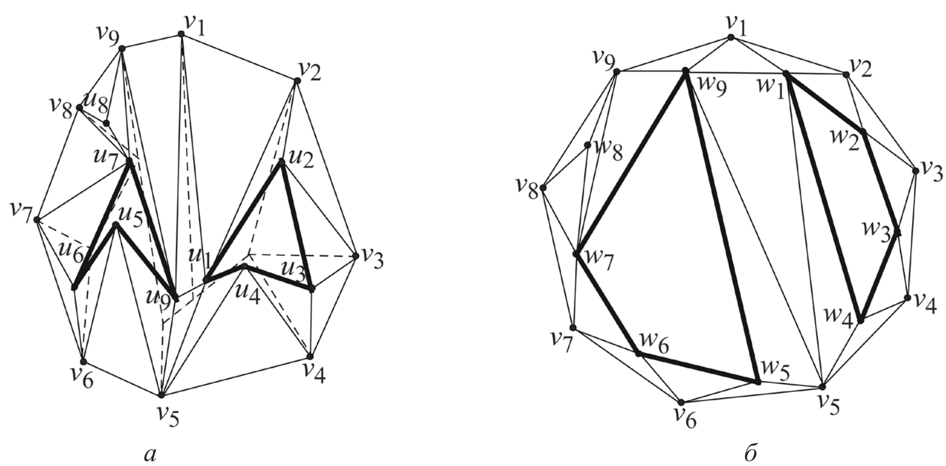
Пусть теперь множество точек U в общем положении на плоскости удовлетворяет следующим условиям:

1) число его внутренних точек четно: $\mathrm{int}(U) = 2n$;

2) если множество его экстремальных точек четно: $\mathrm{Ch}(U) = \{v_1, v_2, ..., v_{2m}\}$ (нумерация задана в порядке обхода $\mathrm{Ch}(U)$ по часовой стрелке), то два подмножества точек U, лежащих как левее, так и правее обеих прямых v_1v_{m+1} и $v_{2m}v_m$, имеют мощность $m + n$ и находятся в выпуклом положении;

2′) если множество его экстремальных точек нечетно: $\mathrm{Ch}(U) = \{v_1, v_2, ..., v_{2m+1}\}$ (нумерация задана в порядке обхода $\mathrm{Ch}(U)$ по часовой стрелке), то подмножество точек U, лежащих левее обеих прямых v_1v_{m+1} и $v_{2m+1}v_m$, имеет мощность $m + n$ и находится в выпуклом положении, а подмножество точек U, лежащих правее обеих прямых v_1v_{m+2} и $v_{2m+1}v_{m+1}$, тоже имеет мощность $m + n$ и находится в выпуклом положении.

Обозначим в обоих случаях подмножество $\mathrm{int}(U)$, лежащее левее обеих соответствующих каждому случаю прямых, через $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ (в порядке их обхода против часовой стрелки),



а *б*

Рис. 2

а подмножество int(U), лежащее правее обеих соответствующих прямых, – через $\{w_{n+1}, w_{n+2}, ..., w_{2n}\}$ (в порядке их обхода по часовой стрелке).

Т е о р е м а 2. *Пусть множество точек U удовлетворяет вышеуказанным условиям. Тогда U является слабо универсальным множеством.*

Мы докажем теорему 2 для случая 2), т. е. когда $\mathrm{Ch}(U) = \{v_1, v_2, ..., v_{2m}\}$, так как для случая 2′) доказательство аналогично.

Для д о к а з а т е л ь с т в а теоремы 2 воспользуемся следующим известным утверждением из [4]:

Т е о р е м а (о с э н д в и ч е). *Для заданных множеств R и B, объединение которых находится в общем положении на евклидовой плоскости, существует такая прямая l, что* $|\mathrm{left}(l)\cap R| = |\mathrm{right}(l)\cap R|$, $|l\cap R| \le 1$, $|\mathrm{left}(l)\cap B| = |\mathrm{right}(l)\cap B|$, $|l\cap B| \le 1$, *где* left(l) *и* right(l) *обозначают открытые полуплоскости, определяемые прямой l, которые лежат слева и справа от прямой l соответственно. Кроме того, если обе мощности* $|R|$ *и* $|B|$ *четны, то прямая l не проходит ни через какую точку из их объединения.*

Пусть S – произвольное множество точек в общем положении на плоскости с условиями $\mathrm{Ch}(S) = 2m$ и $\mathrm{int}(S) = 2n$. В силу теоремы о сэндвиче существует прямая l, которая не проходит ни через одну точку из множества U и разделяет пополам оба множества $R = \mathrm{Ch}(S)$ и $B = \mathrm{int}(S)$. Тогда пронумеруем точки множества $R = \mathrm{Ch}(S)$, которые лежат левее прямой l, через $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$, а точки Ch(S), которые лежат правее прямой l, – через $\{u_{m+1}, u_{m+2}, ..., u_{2m}\}$ (в порядке их обхода по часовой стрелке). Поставим им в соответствие точки v_i границы Ch(U): $\varphi(u_i) = v_i$, $i = \overline{1, 2m}$.

Нам понадобится следующее утверждение.

Л е м м а 2. *Пусть даны две точки a, b* $\in$ left(l) *и две точки c, d* $\in$ right(l). *Тогда для произвольных конечных множеств точек* $B^- \subset$ left(l) *и* $B^+ \subset$ right(l), *лежащих между прямыми ac и bd, существуют две такие простые непересекающиеся цепи* L_1 *и* L_2, *что*

1) L_1 *соединяет точки a,* B^-, *b и проходит только через эти точки;*

2) L_2 *соединяет точки c,* B^+, *d и проходит только через эти точки;*

3) *простой многоугольник M, ограниченный цепями* L_1, L_2 *и отрезками ac и bd, можно триангулировать без использования хорд (ребер, соединяющих две несмежные вершины) цепи* L_1 *и цепи* L_2.

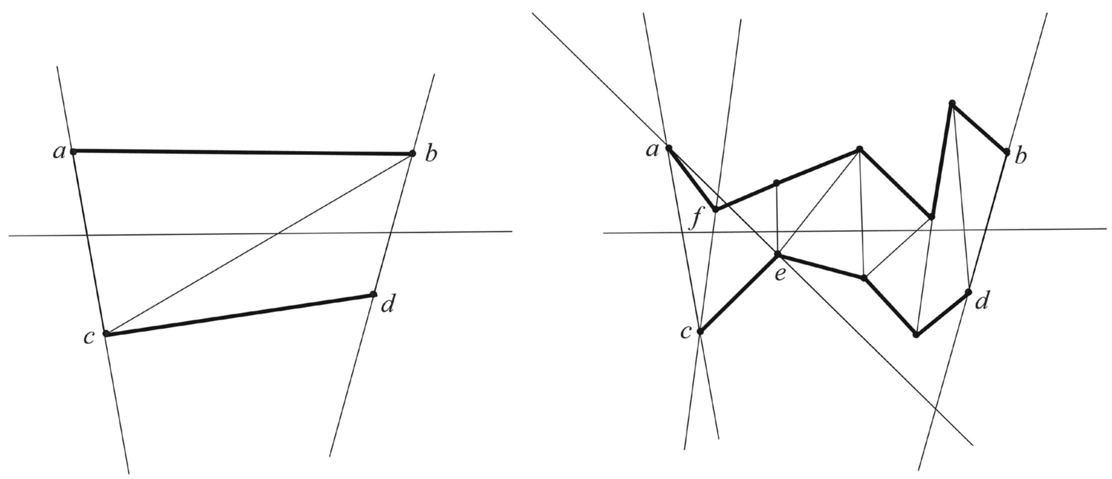
Д о к а з а т е л ь с т в о леммы проведем индукцией по числу $n = |B^-| + |B^+|$. При $n = 0$ утверждение леммы очевидно (рис. 3, *а*). Пусть утверждение верно для $n < k$. Докажем, что оно верно для $n = k$.

Без ограничения общности можно считать, что множество B^+ непусто. Будем вращать прямую ac против часовой стрелки вокруг точки a, пока она не пройдет через первую встретившуюся точку e множества B^+.

Если $\mathrm{right}(ae)\cap B^- = \varnothing$, то для множеств B^- и $B^+\setminus\{e\}$ применимо индукционное предположение, согласно которому существует требуемая триангуляция для многоугольника M', ограниченного цепью L_1, цепью L_2, соединяющей точки B^+, d, и отрезками ae и bd. Добавляя к данной триангуляции треугольник Δace, получим триангуляцию $T(M)$ для искомого многоугольника M без хорд цепи L_1 и цепи L_2.

Если $\mathrm{right}(ae)\cap B^- \ne \varnothing$, то будем вращать прямую ac по часовой стрелке вокруг точки c, пока она не пройдет через первую встретившуюся точку f множества B^- (рис. 3, *б*). Тогда для множеств $B^-\setminus\{f\}$ и B^+ применимо индукционное предположение, согласно которому существует требуемая триангуляция для многоугольника M', ограниченного цепью L_2, цепью L_1, соединяющей точки B^-, b, и отрезками cf и bd. Добавляя к данной триангуляции треугольник Δacf, получим требуемую триангуляцию $T(M)$ для искомого многоугольника M (на рис. 3, *б* цепи L_1 и L_2 выделены жирными линиями). Лемма доказана.

Теперь нетрудно завершить д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Построим для $B^- = \mathrm{left}(l)\cap B$ и $B^+ = \mathrm{right}(l)\cap B$ простые цепи L_1 и L_2, соединяющие точки a, b и точки c, d соответственно, а также триангуляцию $T(M)$ многоугольника M, ограниченного цепями L_1, L_2, и отрезками ac и bd, которая существует по лемме 2. Поставим в биективное соответствие внутренним вершинам цепей L_1, L_2, последовательно вершины $w_1, w_2, ..., w_n$ и $w_{2n}, w_{2n-1}, ..., w_{n+1}$ соответственно. Поскольку триангуляция $T(M)$ обладает указанным в 3) свойством, она может быть воспроизведена на многоугольнике $M' = w_1w_2...w_nw_{n+1}w_{n+2}...w_{2n}$. Осталось заметить, что произвольные триангуляции двух многоугольников: P_1, ограниченного цепью $v_1v_2...v_m$ и цепью L_1, и P_2, ограничен-



а *б*

Рис. 3

ного цепью $v_{m+1}v_{m+2}...v_{2m}$ и цепью L_2, могут быть также воспроизведены на двух выпуклых многоугольниках $P_1 = v_1v_2...v_mw_nw_{n-1}w_2w_1$ и $P_2 = v_{m+1}v_{m+2}...v_{2m}w_{2n}w_{2n-1}w_{n+2}w_{n+1}$. В результате получим совместимые глобальные триангуляции множеств точек S и U. Теорема 2 доказана.

Напомним, что два непересекающихся геометрических графа G_1 и G_2 на одном и том же множестве вершин V называются *совместимыми*, если их объединение $G = (V, E(G_1) \cup E(G_2))$ является тоже непересекающимся геометрическим графом. Если дополнительно выполняется условие: $E(G_1) \cap E(G_2) = \varnothing$, то графы G_1 и G_2 называются *дизъюнктно совместимыми.*

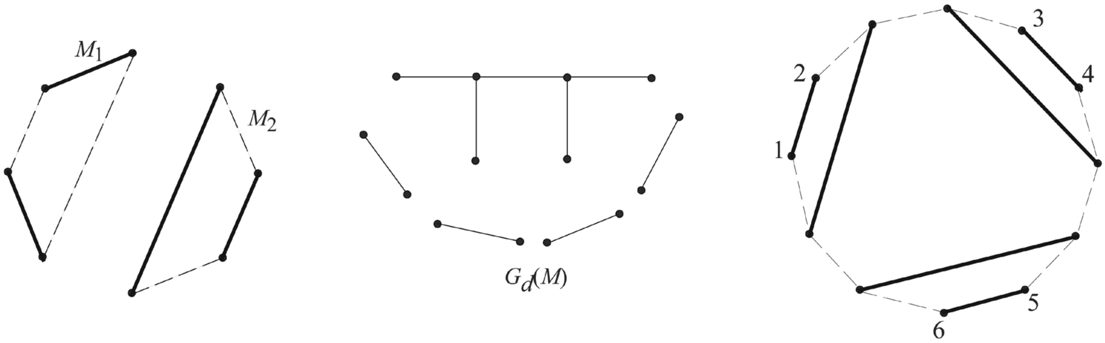
Совсем недавно в [5] была подтверждена гипотеза авторов работы [6] о том, что для каждого *четного* (имеющего четное число ребер) совершенного паросочетания M существует дизъюнктно совместимое совершенное паросочетание. Причем первоначально эта гипотеза была подтверждена в [6] для двух частных случаев: совершенное паросочетание M состоит из вертикальных и горизонтальных отрезков и в случае, когда отрезки совершенного паросочетания M находятся *в выпукло независимом положении*, т. е. по крайней мере один конец каждого отрезка лежит на выпуклой оболочке всех вершин совершенного паросочетания M.

Можно определить *граф $G(M)$ совместимых совершенных паросочетаний* (или граф $G_d(M)$ *дизъюнктно совместимых совершенных паросочетаний*), вершинами которого являются все непересекающиеся совершенные геометрические паросочетания M_i на фиксированном множестве из $n = 2m$ точек, лежащих в общем положении на евклидовой плоскости, при этом две вершины графа $G(M)$ (или графа $G_d(M)$) являются смежными тогда и только тогда, когда соответствующие совершенные паросочетания являются совместимыми (дизъюнктно совместимыми). Ранее было показано, что граф $G(M)$ совместимых совершенных паросочетаний является связным [7]. Кроме того, в работе [6] показано, что диаметр такого графа равен $O(\log n)$.

С другой стороны, установление справедливости гипотезы [6] показывает, что граф $G_d(M)$ дизъюнктно совместимых совершенных паросочетаний не имеет изолированных вершин. Однако оставалась открытой проблема, является ли этот граф связным.

Мы приводим пример, показывающий, что это не так: граф $G_d(M)$ дизъюнктно совместимых совершенных паросочетаний не является, вообще говоря, связным. На рис. 4, *а* показаны два дизъюнктно совместимых паросочетания M_1 и M_2 (отрезки из жирных и пунктирных линий соответственно) на множестве из восьми точек, лежащих в выпуклом положении, каждое из которых не является дизъюнктно совместимым ни с каким другим совершенным паросочетанием на заданном множестве точек. Более того, нетрудно проверить, что сам граф $G_d(M)$ дизъюнктно совместимых совершенных паросочетаний состоит из пяти компонент связности и представлен на рис. 4, *б*.

Хорошо известно [8], что дополнение произвольного непересекающегося совершенного паросочетания M содержит непересекающуюся гамильтонову цепь H. Однако эти геометрические графы – паросочетание M и цепь H, вообще говоря, не являются совместимыми. Например, нетрудно видеть, что совершенное паросочетание M, представленное на рис. 4, *в* на множестве из 12 точек, лежащих в выпуклом положении на плоскости, не имеет никакой совместимой гамиль-



а *б* *в*

Рис. 4

тоновой цепи, поскольку два конца этой цепи должны совпадать с тремя вершинами – 1 или 2, 3 или 4, 5 или 6, что невозможно.

Однако справедливо следующее утверждение:

Т е о р е м а 3. *Любое непересекающееся совершенное паросочетание имеет дизъюнктно совместимое остовное дерево, которое может быть построено за время* $O(n\log n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M – произвольное непересекающееся совершенное паросочетание на $2n$ вершинах. С помощью обобщенной триангуляции Делоне [9] за время $O(n\log n)$ можно построить триангуляцию $T(M)$ множества точек – вершин ребер, входящих в совершенное паросочетание M, причем все ребра M являются ребрами триангуляции $T(M)$. Каждая внутренняя грань триангуляции $T(M)$ является треугольником Δ_i, содержащим не более одного ребра из совершенного паросочетания M, удалив которое получим связный граф $\overline{\Delta_i}$. Нетрудно видеть, что связным будет остовный граф

$$G = T(M) - E(M) = \bigcup_i \overline{\Delta_i}.$$

Выбросив, если необходимо, лишние ребра из графа G, получим остовное дерево $\overline{G}$, которое является непересекающимся, как подграф триангуляции $T(M)$, и дизъюнктно совместимым с совершенным паросочетание M по своему построению. Отметим, что выбрасывание лишних ребер можно выполнить за время $O(2n + e) = O(n)$ поиском в глубину или ширину, поскольку $e = 3(2n - 1) - h$, где h – число экстремальных точек множества из $2n$ точек на плоскости, поэтому общее время построения остовного дерева $\overline{G}$, совместимого с совершенным паросочетанием M, равно $O(n\log n)$. Теорема 3 доказана.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция» и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований № Ф12РА–006.

Литература

1. *Krasser H.* // Master Thesis, Institute for Theoretical Computer Science, Graz University of Technology. Graz, Austria, 1999.
2. *Saarfeld A.* // Proc. 3-rd Ann. ACM Sympos. Comput. Geometry. 1987. P. 195–204.
3. *García A., Tejel J.* // Actas VI Encuentros de Geometría Computacional. Barcelona, 1995. P. 169–174.
4. Handbook of Discrete and Computational Geometry/ ed. by J. Goodman and O'Rourke. CRC Press, 1997. Vol. 211.
5. *Ishaque M., Souvaine D. L., Toth C. D.* // Proc. 27th Annual Symp. On Comput. Geometry. Paris, 2011.
6. *Aichholzer O., Bereg S., Dumitrescu A.* et al. // Comp. Geometry. 2009. N 42. P. 161–167.
7. *Houle M. E., Hurtado F., Noy M., Rivera-Campo E.* // Graphs Combin. 2005. Vol. 21, N 3. P. 325–331.
8. *Černý J., Dvořák Z., Jelínek V., Kára J.* // Discrete Applied Mathematics. 2007. Vol. 115, N 9. P. 1096–1105.
9. *Lee D. T., Lin A. K.* // Discrete Comput. Geom. 1986. Vol. 1. P. 201–217.

V. I. BENEDIKTOVICH

ON THE COMPATIBILITY OF TRIANGULATIONS AND GEOMETRIC GRAPHS

Summary

In this article universal sets of points in the plane for compatible triangulations have been found; it is shown that the disjoint compatible matching graph, in general, is not connected; it has been proved that an arbitrary perfect matching has a disjoint compatible spanning tree.