DOI: 10.21122/2227-1031-2016-15-4-322–328

УДК 629.7

# Математическое моделирование гибридных электротехнических систем

**Докт. техн. наук, проф. А. А. Лобатый[1], канд. техн. наук, доц. Ю. Н. Петренко[1], аспиранты Эльзейн Аймад[1], А. С. Абуфанас[1]**

[1]Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)



**Реферат.** К электротехническим системам относится большой класс систем, нашедших применение в различных отраслях промышленности и быту, в электрифицированных транспортных объектах и энергетике. Их характерная черта – комбинация непрерывного и дискретного режимов работы, что нашло отражение в появлении относительно нового термина «гибридные системы». Широкий класс гибридных систем – это импульсные преобразователи постоянного тока, работающие в режиме широтно-импульсной модуляции и являющиеся нелинейными системами с переменной структурой. Используя различные приемы линеаризации, можно получить линейные математические модели, которые достаточно точно имитируют поведение таких систем. Однако наличие в математических моделях экспоненциальных нелинейностей создает значительные трудности при реализации системы на цифровых аппаратных средствах. Решение может быть найдено применением аппроксимации показательных функций полиномами первого порядка, что нарушает строгость соответствия аналитической модели характеристикам реального объекта. Существуют два подхода в практике синтеза алгоритмов управления гибридных систем. Первый основан на представлении всей системы дискретной моделью, описываемой разностными уравнениями, и на основе этого – синтез дискретных алгоритмов. Второй подход основан на описании системы дифференциальными уравнениями – синтез непрерывных алгоритмов и дальнейшая реализация их в цифровой вычислительной машине, включенной в контур управления системой. Рассмотрено моделирование гибридной электротехнической системы с помощью дифференциальных уравнений. Пренебрегая длительностью импульсов, поведение компонент вектора фазовых координат гибридной системы предлагается описать стохастическими дифференциальными уравнениями, содержащими в общем случае нелинейные не дифференцируемые случайные функции. Получено векторно-матричное стохастическое уравнение, описывающее динамику процессов, в котором представлены как непрерывная, так и дискретная составляющие, характеризующие амплитудную модуляцию сигналов. На основе математической модели гибридной системы получено уравнение для плотности вероятности распределения фазовых координат системы.

**Ключевые слова:** математическая модель, гибридная система, пространство состояний, стохастические уравнения

**Для цитирования:** Математическое моделирование гибридных электротехнических систем / А. А. Лобатый [и др.] // *Наука и техника.* 2016. Т. 15, № 4. С. 322–328

# Mathematical Modeling of Hybrid Electrical Engineering Systems

**A. A. Lobaty[1], Yu. N. Petrenko[1], Imad Elzein[1], A. S. Abufanas[1]**

[1]Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

**Abstract.** A large class of systems that have found application in various industries and households, electrified transportation facilities and energy sector has been classified as electrical engineering systems. Their characteristic feature is a combination

**Адрес для переписки**
Лобатый Александр Александрович
Белорусский национальный технический университет
ул. Ф. Скорины, 25/3,
220114, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 266-26-61
mido@bntu.by

**Address for correspondence**
Lobaty Alexander A.
Belarusian National Technical University
25/3 F. Skorina str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 266-26-61
mido@bntu.by

of continuous and discontinuous modes of operation, which is reflected in the appearance of a relatively new term "hybrid systems". A wide class of hybrid systems is pulsed DC converters operating in a pulse width modulation, which are non-linear systems with variable structure. Using various methods for linearization it is possible to obtain linear mathematical models that rather accurately simulate behavior of such systems. However, the presence in the mathematical models of exponential nonlinearities creates considerable difficulties in the implementation of digital hardware. The solution can be found while using an approximation of exponential functions by polynomials of the first order, that, however, violates the rigor accordance of the analytical model with characteristics of a real object. There are two practical approaches to synthesize algorithms for control of hybrid systems. The first approach is based on the representation of the whole system by a discrete model which is described by difference equations that makes it possible to synthesize discrete algorithms. The second approach is based on description of the system by differential equations. The equations describe synthesis of continuous algorithms and their further implementation in a digital computer included in the control loop system. The paper considers modeling of a hybrid electrical engineering system using differential equations. Neglecting the pulse duration, it has been proposed to describe behavior of vector components in phase coordinates of the hybrid system by stochastic differential equations containing generally non-linear differentiable random functions. A stochastic vector-matrix equation describing dynamics of the processes has been obtained in the paper. The equation contains both continuous and discrete components, which characterize an amplitude signal modulation. An equation for probability density of phase coordinate distribution in the system has been developed on the basis of a mathematical model for a hybrid system.

**Keywords:** mathematical model, hybrid system, state space, stochastic equations

**For citation:** Lobaty A. A., Petrenko Yu. N., Imad Elzein, Abufanas A. S. (2016) Mathematical Modeling of Hybrid Electrical Engineering Systems. *Science & Technique*. 15 (4), 322–328 (in Russian)

## Введение

Широкое распространение в различных областях промышленности, на транспорте, в энергетике и других отраслях имеют электротехнические системы, работа которых основана на использовании как непрерывной, так и дискретной обработки сигналов. К таким системам относятся преобразователи постоянного тока в постоянный или переменный ток, имеющие значительное многообразие схемно-технических решений. В соответствии с принятой в настоящее время терминологией данные системы относятся к классу непрерывно-дискретных или гибридных систем, у которых важнейшими являются две характеристики: эффективность преобразования и стабильность.

Многие исследования посвящены оптимизации электротехнических преобразователей [1–5]. По своей природе импульсные преобразователи постоянного тока (ИППТ), работающие в режиме широтно-импульсной модуляции (ШИМ), являются нелинейными системами с переменной структурой [1]. Приемы линеаризации нелинейностей математических моделей, предложенные рядом авторов [2, 3, 6], позволили получить линейные инвариантные модели, которые достаточно адекватно характеризуют поведение таких систем. Основные задачи, возлагаемые на регулятор (контроллер) дискретной части гибридной системы, можно сформулировать следующим образом:

1) минимизация статической ошибки на выходе;

2) минимизация чувствительности при изменении нагрузки;

3) обеспечение стабильности замкнутой системы;

4) обеспечение линейности характеристик «вход – выход».

Наиболее значимыми работами в области исследования ИППТ являются публикации Middlebrook (CalTech, Pasadena, California) и Б. П. Соустина (Красноярский политехнический институт), которые были вызваны вполне практическими задачами обеспечения электропитанием космических аппаратов на основе солнечных батарей. Эта задача до сих пор остается актуальной, поскольку солнечная энергетика приобрела глобальное значение как по объему исследований, так и по географии применения. Помимо этого, ИППТ значительно расширили область своего применения за счет необходимости преобразования энергии топливных элементов в электрифицированных транспортных средствах, в том числе в электромобилях различного класса (гибридных, автономных), где необходим обмен энергией в системах «источник – накопитель – потребитель» (электродвигатели приводов колес).

Традиционные методы проектирования контроллеров для ИППТ [3, 7] предусматривают линеаризацию математических моделей и основаны на частотных методах анализа и синтеза. С другой стороны, при рассмотрении динамических характеристик системы необходимо учитывать, что ИППТ являются устройствами с переменной структурой, работа которых основана на применении теории скользящего управления [1]. Главное достоинство скользящего управления в ИППТ заключается в том, что оно обладает свойством робастности к параметрическим изменениям. Так как системы управления ИППТ в настоящее время реализуются на цифровых (дискретных) компонентах, при разработке и исследовании математической модели ИППТ возникает проблема анализа прохождения аналоговых сигналов в системе.

### Математическая модель электротехнической системы

Для наиболее распространенных ИППТ (повышающие, понижающие и комбинированные), имеющих два устойчивых состояния, в промежутках положения силового ключа «включен – выключен» модель пространства состояний имеет вид [2, 3]

$$x = \left\{ \begin{matrix} B_1 X + b_1 U, & t \in \left[ nT_s, \left(n + D\right) T_s \right] \\ B_2 X + b_2 U, & t \in \left[ \left(n + D\right) T_s, \left(n + 1\right) T_s \right] \end{matrix} \right\}, \quad (1)$$

где $X$ – вектор фазовых координат ИППТ, зависящий от конкретной схемы преобразователя; $U$ – вектор входных сигналов; $D$ – скважность силового ключа; $B_1$, $B_2$, $b_1$, $b_2$ – матрицы коэффициентов.

Положим, что входной сигнал ИППТ является медленно изменяющейся функцией по сравнению с остальными переменными. Обозначим скважность ключа на $n$-м интервале как $D(n)$. Тогда можно записать переменные состояния для начала цикла коммутации в виде [3]

$$\begin{gathered} x\left(n+1\right) = \exp\left(B_2\left(1 - D_n\right)T_s\right) \times \\ \times \left(\exp(B_1 D_n T_s) X\left(n\right) + Q_1 U\right) + Q_2 U, \end{gathered} \quad (2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \int\limits_0^{D_n T_s} (\exp(b_1 t)) b_1 dt; \\ Q_2 &= \int\limits_0^{(1-D_n)T_s} (\exp(b_2 t)) b_2 dt. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

При наличии в системе обратной связи скважность $D(n)$ определяется работой регулятора. В этом случае в дискретную модель ИППТ вводится переменная, характеризующая изменение скважности $D(n)$, которая является входом преобразователя. Граничное значение скважности может быть определено из выражения [6]

$$i_1\left(\left(n + D\right) T_s\right) = i^*. \quad (4)$$

Переменные состояния в момент выключения ключа ИППТ можно определить как функции скважности и состояния в начале цикла переключения из выражения

$$\begin{gathered} x\left(n + D\right) = \exp(B_1 D_n T_s) X\left(n\right) + \\ + \exp(B_1 D_n T_s - i) X\left(n\right) B_1^{-1} b_1 U. \end{gathered} \quad (5)$$

Это позволяет определить ограничение скважности на основе переменных состояния только в начале цикла [7, 8]

$$\sigma\left(X\left(nT_s\right), D_n\right) = 0. \quad (6)$$

Заметим, что аппроксимация нелинейностей в (2) и (6) отсутствует. Эти выражения достаточно строго представляют характеристики силовой части ИППТ. В свою очередь, реализация представленной модели из-за наличия в ней экспоненциальных составляющих представляет значительные трудности.

Упрощение реализации данной модели средствами цифровой техники в [3] предлагается производить путем линейной аппроксимации показательных функций. Однако при этом теряется аналитическая строгость модели ИППТ в смысле соответствия реальным характеристикам. Поэтому рассмотрим альтернативный подход, заключающийся в построении усредненной модели в пространстве состояний [3, 4]. Этот подход основан на линеаризации «малых» сигналов преобразования, имеющих место при работе ИППТ. Принципиальное отличие заключается в том, что ШИМ-сигнал, характеризуемый временем «включенного состояния» и временем «отключенного состояния», рассматривается как совокупность независимых входных переменных. Это позволяет представить динамическую модель ИППТ при переменной частоте, рассматривая частоту как входной сигнал. Здесь уместно упомянуть о возможности применения контроллеров различной архитектуры построения: на основе ПИД-контроллера или на линейно-квадратичной гауссовой аппроксимации нелинейностей [6]. Заслуживает внимания также подход, основанный на рассмотрении стохастических свойств системы.

### Математическая модель гибридной стохастической системы

Существуют два подхода в практике синтеза гибридных систем. Первый основан на представлении всей системы дискретной моделью, описываемой разностными уравнениями, и на основе этого – синтез дискретных алгоритмов. Второй подход основан на описании системы дифференциальными уравнениями – синтез непрерывных алгоритмов и дальнейшая реализация их в цифровой вычислительной машине, включенной в контур управления. Оба подхода широко используются, имея при этом свои достоинства и недостатки.

Рассмотрим описание гибридной стохастической системы с помощью дифференциальных уравнений. Пренебрегая длительностью импульсов, поведением компонент вектора фазовых координат системы $X = [x_1, \ldots, x_n]^T$, гибридную электротехническую систему в общем случае можно описать стохастическими дифференциальными уравнениями вида [9]

$$\dot{x}_i(t) = a_i(X, t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(X, t)\nu_j(X, t) + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t)\xi_j(t) \quad (i = \overline{1, n}), \qquad (7)$$

где $a_i, b_{ij}, h_{ij}$ – в общем случае нелинейные функции; $\xi_j(t)$ – случайные функции времени (шумы); $\nu_j(X, t)$ – последовательность δ-функций, моменты времени появления которых $t_{ik}$ зависят от *X*,

$$\nu_j(X, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{jk}\delta(t - t_{jk}), \qquad (8)$$

где $\delta(t - t_{jk})$ – δ-функции с амплитудами $c_{jk}$, возникающие в моменты времени $t_{jk}$.

В векторно-матричной форме стохастическое уравнение, описывающее динамику процессов, происходящих в системе управления, имеет вид

$$\dot{X}(t) = A(X, t) - B(X, t)\nu(X, t, T) + H(t)\xi(t), \qquad (9)$$

где $A(X, t)$ – в данном случае векторная функция, отображающая наличие непрерывной составляющей процесса $X(t)$; $B(X, t)$ – матричная функция, отображающая дискретную составляющую с амплитудной модуляцией; $H(t)$ – матрица коэффициентов; $\nu(X, t, T)$ – вектор дискретных воздействий, отображающий дискретную составляющую с частотной модуляцией; $T$ – период следования импульсов (период дискретизации).

В частном случае, если $B(X, t) = 0$ и $\xi(t)$ – вектор белых шумов, процесс $X(t)$ будет непрерывным марковским. Из (9) следует, что математическая модель системы с амплитудной модуляцией имеет вид

$$\dot{X}(t) = A(X, t) + B(X, t)\nu(t, T) + H\xi(t). \qquad (10)$$

Соответственно система с фазовой модуляцией описывается уравнением вида

$$\dot{X}(t) = A(X, t) + B\nu(X, t, T) + H\xi(t). \qquad 11)$$

Заметим, что для описания системы с ШИМ в уравнениях (7) и (9) необходимо учесть последовательность как положительных, так и отрицательных δ-функций, отстоящих друг от друга на ширину модулируемого импульса.

Наиболее полной характеристикой процесса $X(t)$ является плотность распределения вероятности (ПРВ) $f(X, t)$. Если в уравнении (4) $B(X, t) = 0$, то $f(X, t)$ при отсутствии поглощающих границ удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка – Колмогорова вида [9]

$$\dot{f}(X,t) = -\nabla_x^T \pi(X,t). \quad (12)$$

Здесь $\nabla_x^T = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right]$ – векторный оператор дифференцирования; $\pi(X, t)$ – вектор плотности потока вероятности с составляющими

$$\pi_k(x,t) = a_k(X,t) f(X,t) - \\ -\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[h_{k\nu}(t) f(X,t)\right], \quad (13)$$

где $a_k(X, t)$ – составляющие вектора $A(X, t)$; $h_{k\nu}(t)$ – элементы матрицы $H(t)$.

Если в уравнении (9) $B(X, t) \neq 0$, то при условии рассмотрения стохастических интегралов в симметризованной форме Стратоновича это означает, что каждый δ-импульс в момент $t_k$ вызывает скачкообразные изменения амплитуды $x_k(t)$ на величину $c_{jk}$.

Компоненты векторно-матричного уравнения (9) описывают кусочно-непрерывные марковские процессы со скачком в моменты времени $t_k$. Для таких процессов в [10] получено уравнение для ПРВ, которое как при амплитудной, так и при частотной модуляции имеет вид

$$\dot{f}(X,t) = -\nabla_x^T \pi(X,t) - \nu(X,t) f(X,t) + \\ +\sum_{j=1}^{n}\nu_j[w_j(X,t)]\left|\frac{\partial w_j(X,t)}{\partial X}\right| f(w_j(X,t)). \quad (14)$$

Здесь $\nu(X,t) = \sum_{j=1}^{n}\nu_j(X,t)$ – суммарная интенсивность (частота) квантования; $\nu_j$ – интенсивность квантования в потоках входных дискретных воздействий; $w_j(X,t) = X(t) - b_j(X,t)$, где $b_j(X,t) = \left[b_{1j}(X,t), b_{2j}(X,t), \ldots, b_{nj}(X,t)\right]^T$ – совокупность векторных функций, столбец с индексом $j$ матрицы $B(t)$ $(j = \overline{1,n})$.

Таким образом, матричная функция $B(X, t)$ с элементами $b_{ij}(X,t)$ $(i, j = \overline{1,n})$ разбита на совокупность векторных функций $b_j(X,t)$; $\left|\frac{\partial w_j(X,t)}{\partial X}\right|$ – якобиан функции $w_j(X,t)$.

Если имеет место только амплитудная модуляция, то входящие в уравнение (14) функции ν не зависят от $X$, т. е. $\nu(X) = \nu$. Для систем с частотной модуляцией третье слагаемое в правой части уравнения (14) имеет вид $\sum_{j=1}^{n}\nu_j(X+b_j) f(X+b_j)$.

Уравнения для вероятностных моментов первого и второго порядков определяются из (14). Умножив обе части (14) на $x_i$ и проинтегрировав их по всем составляющим вектора $X$ в бесконечных пределах, получим дифференциальное уравнение для математического ожидания $i$-й фазовой координаты гибридной системы

$$\dot{m}_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\pi_i(X,t)dX - \nu(X,t)m_i(t) + \\ +\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\nu_j[w_j(X,t)]\left|\frac{\partial w_j(X,t)}{\partial X}\right| f(w_j(X,t))dX. \quad (15)$$

В (15) учтено, что:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_i \dot{f}(X,t)dX = \dot{m}_i(t); \quad (16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_i \nabla_x^T \pi(X,t)dX = -\int_{-\infty}^{\infty}\pi_i(X,t)dX. \quad (17)$$

Уравнения для корреляционных моментов фазовых координат гибридной системы получаются умножением обеих частей (14) на произведение $(x_i - m_i)(x_r - m_r)$ и интегрированием в бесконечных пределах:

$$\dot{\Theta}_{ir}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}(x_i - m_i)\pi_i(X,t)dX - \\ -\int_{-\infty}^{\infty}(x_r - m_r)\pi_i(X,t)dX - \nu(X,t)\Theta_{ir}(t) + \\ +\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\nu_j(x_i - m_i)(x_r - m_r)\left|\frac{\partial w_j(X,t)}{\partial X}\right| \times$$

$$\times f(w_j(X,t))dX. \qquad (18)$$

В (18) обозначены:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-m_i)(x_r-m_r)\dot{f}(X,t)dX=\dot{\Theta}_{ir}(t); \qquad (19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-m_i)(x_r-m_r)\nabla_x^T\pi(X,t)dX=$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-m_i)\pi_r(X,t)dX-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}(x_r-m_r)\pi_i(X,t)dX. \qquad (20)$$

Решая дифференциальные уравнения (15) и (18) с заданными начальными условиями, можно определить математические ожидания и корреляционные моменты гибридной системы. Так как для вычисления входящих в (15) и (18) интегралов необходимо знать функцию ПРВ $f(X, t)$, приходится применять ее аппроксимацию. В большинстве практических задач лучше всего подходит гауссова двухмоментная аппроксимация $f(X, t)$. В некоторых случаях для вычисления интегралов приходится раскладывать $f(X, t)$ в функциональный ортонормированный ряд по центральным моментам высших порядков или по кумулянтам (семиинвариантам) случайного процесса на основе полиномов, соответствующих некоторой производящей функции [11]. Если выполняется разложение ПРВ по центральным моментам на основе нормального распределения, то получается ряд Грама – Шарлье, состоящий из членов, убывающих неравномерно. Быстро сходящимся рядом является ряд Эджворта, представляющий собой разложение ПРВ по семиинвариантам.

## ВЫВОДЫ

1. Предложенная аналитическая математическая модель гибридной системы, представляющая собой марковский стохастический процесс разрывного типа, отражает основные свойства такой системы при различной форме модуляции сигнала и позволяет учесть как динамические свойства, так и воздействие случайных факторов.

2. Полученное обобщенное уравнение для плотности вероятности фазовых координат является основой для корреляционного анализа гибридных систем. На основе этого выражения можно найти обобщенное уравнение для апостериорной плотности вероятности фазовых координат, которое дает возможность при разработке гибридных систем определять их оптимальную структуру и параметры при заданном критерии качества.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Utkin, V. I., Sliding Mode Control in Electromechanical Systems / V. I. Utkin, V. J. Guldner, J. X. Shi. London, U.K.: Taylor & Francis, 1999. 350 p.
2. Мелешин, В. И. Транзисторная преобразовательная техника / В. И. Мелешин. М.: Техносфера, 2005. 632 с.
3. Application of Neural Networks and State-Space Averaging to a DC/DC PWM Converters in Sliding-Mode Operation / J. Mahdavi [et al.] // IEEE/ASME Trans. Mechatron. 2005. Vol. 10, No 1. P. 60–67.
4. Modeling, Control and Implementation of DC-DC Converters for Variable Frequency Operation / R. Priewasser [et al.] // IEEE Transactions on Power Electronics. 2014. Vol. 29, No 1. P. 287–301.
5. Белов, Г. А. Структурные модели и исследование динамики импульсных преобразователей / Г. А. Белов // Электричество. 2008. № 4. С. 47–49.
6. Bass, R. M. Switching Frequency Dependent Averaged Models for PWM DC-DC Converters / R. M. Bass, B. Lehman // IEEE Transactions on Power Electronics. 1996. Vol. 11, No 3. P. 89–98.
7. Shen, Z. A Multimode Digitally Controlled Boost Converter with PID Autotuning and Constant Frequency/Constant Off-Time Hybrid PWM Control / Z. Shen, N. Yan, H. Min // IEEE Transactions on Power Electronics. 2011. Vol. 26, No 9. P. 2588–2598.
8. Rajasekaran, V. Bilinear Discrete-Time Modeling for Enhanced Stability Prediction and Digital Control Design / V. Rajasekaran, J. Sun, B. S. Heck // IEEE Transactions on Power Electronics. 2003. Vol. 18, No 1. P. 381–389.
9. Казаков, И. Е. Анализ систем случайной структуры / И. Е. Казаков, В. М. Артемьев, В. А. Бухалев. М.: Наука, 1993. 270 с.
10. Лобатый, А. А. Аналитическое моделирование дискретных систем с фазовым управлением / А. А. Лобатый, В. Л. Бусько, Л. В. Русак // Доклады БГУИР. 2008. Т. 33, № 3. С. 103–110.
11. Пугачев, В. С. Теория стохастических систем / В. С. Пугачев, И. Н. Синицын. М.: Логос, 2004. 1000 с.


Поступила 25.05.2015
Подписана в печать 28.07.2015
Опубликована онлайн 28.07.2016

REFERENCES

1. Utkin V. I., Guldner V. J., Shi J. X. (1999) *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems.* London, U.K.: Taylor & Francis. 350.
2. Meleshin V. I. (2005) *Transistor Converters.* Moscow, Tekhnosfera. 632 (in Russian).
3. Mahdavi J., Nasiri M. R., Agah A., Emadi A. (2005) Application of Neural Networks and State-Space Averaging to DC/DC PWM Converters in Sliding-Mode Operation. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics,* 10 (1), 60–67. DOI: 10.1109/TMECH.2004.842227.
4. Priewasser R., Agostinelli M., Unterrieder C., Marsili S., Huemer M. (2014) Modeling, Control and Implementation of DC-DC Converters for Variable Frequency Operation. *IEEE Transactions on Power Electronics,* 29 (1), 287–301. DOI: 10.1109/TPEL.2013.2248751.
5. Belov G. A. (2008) Structure Modeling and Study of Pulse Converter Dynamics. *Elektrichestvo* [Electricity], (4), 47–49 (in Russian).
6. Bass R. M., Lehman B. (1996) Switching Frequency Dependent Averaged Models for PWM DC-DC Converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 11 (3), 89–98. DOI: 10.1109/63.484421.
7. Shen Z., Yan N., Min H. (2011) A Multimode Digitally Controlled Boost Converter with PID Autotuning and Constant Frequency/Constant Off-Time Hybrid PWM Control. *IEEE Transactions on Power Electronics,* 26 (9), 2588–2598. DOI: 10.1109/TPEL.2011.2111464.
8. Rajasekaran V., Sun J., Heck B. S. (2003) Bilinear Discrete-Time Modeling for Enhanced Stability Prediction and Digital Control Design. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 18 (1), 381–389. DOI: 10.1109/TPEL.2002.807167.
9. Kazakov I. E., Artemiev V. M., Bukhalev V. A. (1993) *Analysis of Random Structure Systems.* Moscow, Nauka. 270 (in Russian).
10. Lobaty A. A., Busko V. L., Rusak L. V. (2008) Analytical Modeling of Discrete Systems with Phase Control. *Doklady BGUIR* [Proceedings of Belarusian State University of Informatics and Electronics], 33 (3), 103–110 (in Russian).
11. Pugachev V. S., Sinitsyn I. N. (2004) *Theory of Stochastic Systems.* Moscow, Logos. 1000 (in Russian).



Received: 25.05.2015
Accepted: 28.07.2015
Published online: 28.07.2016