

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ КРЫЛА МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Канд. физ.-мат. наук, доц. ГРИБКОВА В. П.,  
канд. техн. наук, доц. КОЗЛОВ С. М.

Белорусский национальный технический университет

В [1] подробно анализируется один из приближенных методов решения уравнения теории крыла конечного размаха, которое описывается сингулярным интегро-дифференциальным уравнением

$$\Gamma(x)/B(x) - (1/2\pi) \int_{-1}^1 \Gamma'(t)/(t-x) dt = f(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (1)$$

где  $f(x)$  и  $B(x)$  – известные функции (функция  $B(x)$  нигде не обращается в нуль, за исключением, может быть, концов промежутка, и на всем промежутке больше нуля);  $\Gamma(x)$  – искомая функция ( $\Gamma(1) = \Gamma(-1) = 0$ ).

Рассмотренный в [1] метод Мультиппа основан на замене точного решения тригонометрическим интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным на узлах  $x_k = \cos(k\pi/(n+1))$ ,  $k = \overline{1, n}$  и выраженным через полиномы Чебышева второго рода:

$$U_n(x) = \sin((n+1)\arccos x) / \sqrt{1-x^2},$$

либо при замене  $x = \cos \theta$ ,  $\theta \in [0, \pi]$   $U_n(\cos \theta) = \sin(n+1)\theta / \sin \theta$ . Аналогичное приближенное решение рассматривается в [2], но для пространства  $L_2$  с нормой

$$\|f\| = \left( \int_{-1}^1 \rho(x) |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

В данной статье предлагается метод, аналогичный рассмотренному в [1], который построен на полиномах Чебышева второго рода, но на других узлах. Этот метод удобен тем, что позволяет для каждого приближенного решения вычислить погрешность для любой точки промежутка  $[-1, 1]$  в виде ряда на основе последовательности линейных функционалов [3], который можно назвать рядом Фурье – Чебышева. Кроме того, если получить решение в виде

многочлена при некотором небольшом значении  $n$  и рассмотреть погрешность в виде этого ряда, то можно определить номер элемента, начиная с которого будет выполняться заданная точность для многочлена любой степени  $n$ .

В [1] искомая функция представлена как произведение  $\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2} \gamma(x)$ . Тогда функция  $\gamma(x)$  обладает теми же аналитическими свойствами, что и  $\Gamma(x)$ . Рассматриваем решение уравнения (1) в пространстве  $C$  с нормой  $\|f\| = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$ . Используем в работе представление любой функции  $f(x)$  в виде асимптотического многочлена  $G_n^f(x)$  и остаточного члена  $R_n(x)$ , рассмотренное в [3]:

$$f(x) = G_n^f(x) + R_n(x) = G_n^f(x) + \sum_{r=n}^{\infty} M_r^f \chi_{r+2}^{(n)}(x),$$

где линейные функционалы функции  $f(x)$

$$M_r^f = (2/(r+3)) \sum_{k=1}^{r-2} (-1)^k f(x_k) (1-x_k^2),$$

а функции  $\chi_{r+2}^{(n)}(x)$  выражаются через полиномы Чебышева второго рода, поэтому такое разложение можно назвать рядом Фурье – Чебышева.

Представим приближенное решение уравнения (1) в виде асимптотического многочлена, умноженного на  $\sqrt{1-x^2}$ :

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{n+1}(x) &= \sqrt{1-x^2} G_n^{\bar{\gamma}}(x); \\ \Gamma(x) &\approx \bar{\Gamma}_{n+1}(x) = \sqrt{1-x^2} G_n^{\bar{\gamma}}(x) = \\ &= \sqrt{1-x^2} \sum_{m=0}^n a_m^{\bar{\gamma}} U_m(x); \\ a_m^{\bar{\gamma}} &= (2/(n+3)) \sum_{k=1}^{n+2} \bar{\gamma}(x_k) \times \\ &\quad \times (1-x_k^2) U_m(x_k), \end{aligned} \quad (2)$$

где узлы, на которых строится многочлен, определяются по формулам:

$$x_k = \cos(k\pi/(n+3)), \quad k = \overline{1, n+2}. \quad (3)$$

Над  $\bar{\Gamma}$  и  $\bar{\gamma}$  ставятся черточки в знак того, что эти функции строятся на ординатах, вычисленных приближенно.

Для решения задачи (1) удобнее перейти от асимптотического многочлена (2) к соответствующему ему интерполяционному многочлену  $\bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x)$  [3], здесь черта сверху означает интерполяционный многочлен, соответствующий асимптотическому  $G_n^{\gamma}(x)$ :

$$\begin{aligned} \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x) &= G_n^{\bar{\gamma}}(x) + M_{nn}^{\bar{\gamma}} U_{n+1}(x); \\ \Gamma(x) &\approx \sqrt{1-x^2} \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x) = \\ &= \sqrt{1-x^2} (G_n^{\bar{\gamma}}(x) + M_{nn}^{\bar{\gamma}} U_{n+1}(x)). \end{aligned} \quad (4)$$

Асимптотический многочлен  $G_n^{\gamma}(x)$  в  $k = \overline{1, n+2}$  узлах (3) отклоняется от интерполяционного на величину линейного функционала  $M_{nn}^{\bar{\gamma}}$

$$\bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x_k) = G_n^{\bar{\gamma}}(x_k) + (-1)^k \nu M_{nn}^{\bar{\gamma}}, \quad (5)$$

где  $\nu = +1$  либо  $\nu = -1$ . В данном случае для простоты примем  $\nu = +1$ . Линейный функционал  $M_{nn}^{\bar{\gamma}}$  вычисляется по формуле

$$M_{nn}^{\bar{\gamma}} = (2/(n+3)) \sum_{k=1}^{n+2} (-1)^k \bar{\gamma}(x_k) (1-x_k^2). \quad (6)$$

Для функции, являющейся полиномом степени, меньшей или равной  $n$ , многочлен (4) будет точным решением. В дальнейшем будут использоваться обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}(x_k) &= \bar{\Gamma}_k; \quad f(x_k) = f_k; \quad B(x_k) = B_k; \\ \bar{\gamma}(x_k) &= \bar{\gamma}_k \quad \text{и} \quad \bar{\Gamma}_k = \sqrt{1-x_k^2} \bar{\gamma}_k. \end{aligned}$$

Учитывая выражения (4)–(6), приближенное решение для  $\gamma(x)$  будем отыскивать в виде (4), где

$$\bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x) = \sum_{m=0}^n a_m^{\bar{\gamma}} U_m(x) + M_{nn}^{\bar{\gamma}} U_{n+1}(x). \quad (7)$$

Уравнение (1) представим как операторное  $F(x, \gamma(x)) = f(x)$ . В [4] рассматривалось аналогичное применение асимптотических много-

членов, построенных на полиномах Чебышева первого рода.

Первое слагаемое уравнения (1) приближенно представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma(x)/B(x) &\approx \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x) = \\ &= \sum_{m=0}^n a_m^{\bar{\gamma}} U_m(x) + M_{nn}^{\bar{\gamma}} U_{n+1}(x); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} a_m^{\bar{\gamma}} &= (2/(n+3)) \sum_{k=1}^{n+2} (\bar{\Gamma}_k/B_k) (1-x_k^2) U_m(x_k) = \\ &= (2/(n+3)) \sum_{k=1}^{n+2} (\bar{\gamma}_k \sqrt{1-x_k^2}/B_k) (1-x_k^2) U_m(x_k); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{nn}^{\bar{\gamma}} &= (2/(n+3)) \sum_{k=1}^{n+2} (-1)^k (\bar{\Gamma}_k/B_k) (1-x_k^2) = \\ &= (2/(n+3)) \sum_{k=1}^{n+2} (-1)^k (\bar{\gamma}_k \sqrt{1-x_k^2}/B_k) (1-x_k^2). \end{aligned}$$

Если многочлен (4) представить через переменную  $\theta$ , продифференцировать его по  $\theta$  и использовать известные равенства (при  $m=0$  интегро-дифференциальный оператор равен нулю):

$$\begin{aligned} (1/\pi) \int_0^\pi \cos m\tau / (\cos \tau - \cos \theta) d\tau &= \\ &= \sin m\theta / \sin \theta = U_{m-1}(x), \quad m=1, \dots; \quad \theta \in [0, \pi] \end{aligned} \quad (9)$$

то для второго слагаемого (1) получим выражение

$$\begin{aligned} (1/2\pi) \int_0^\pi \Gamma'(\tau) / (\cos \tau - \cos \theta) d\tau &\approx (1/2\pi) \times \\ &\times \int_0^\pi \left( \sqrt{1-x^2} \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(\tau) \right)' / (\cos \tau - \cos \theta) d\tau \approx \\ &\approx (1/2) \left( \sum_{m=0}^n a_m^{\bar{\gamma}} (m+1) \sin(m+1)\theta / \sin \theta + \right. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &\left. + M_{nn}^{\bar{\gamma}} (n+2) \sin(n+2)\theta / \sin \theta \right) = \\ &= (1/2) \left( \sum_{m=0}^n (m+1) a_m^{\bar{\gamma}} U_m(x) + M_{nn}^{\bar{\gamma}} (n+2) U_{n+1}(x) \right). \end{aligned}$$

Функцию  $f(x)$  заменим интерполяционным многочленом вида (4)

$$f(x) \approx \bar{G}_{n+1}^f(x) = \sum_{m=0}^n a_m^f U_m(x) + M_{nn}^f U_{n+1}(x), \quad (11)$$

где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_m^f = (2/(n+3)) \sum_{k=1}^{n+2} f_k (1-x_k^2) U_m(x_k), \quad m = \overline{0, n},$$

а линейный функционал

$$M_{nn}^f = (2/(n+3)) \sum_{k=1}^{n+2} (-1)^k f_k (1-x_k^2).$$

Подставляя (7), (8), (10), (11) в уравнение (1), получим равенство для вычисления приближенного решения  $\Gamma(x) \approx \sqrt{1-x^2} \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}$

$$\bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}B} - (1/2\pi) \times \int_1^{-1} (\sqrt{1-x^2} \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(t))' / (t-x) dt = \bar{G}_{n+1}^f(x), \quad (12)$$

или с учетом равенств (7)–(11) от уравнения (12) перейдем к уравнению

$$\left( \sum_{m=0}^n a_m^{\bar{\gamma}B} U_m(x) + M_m^{\bar{\gamma}B} U_{n+1}(x) \right) - (1/2) \left( \sum_{m=0}^n (m+1) a_m^{\bar{\gamma}} U_m(x) + M_m^{\bar{\gamma}} (n+2) U_{n+1}(x) \right) = \sum_{m=0}^n a_m^f U_m(x) + M_m^f U_{n+1}(x). \quad (13)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых полиномах  $U_m(x)$  ( $m = \overline{0, n+1}$ ) в левой и правой частях равенства (13), получим систему  $(n+2)$  уравнений:

$$\begin{cases} a_m^{\bar{\gamma}B} + a_m^{\bar{\gamma}} = a_m^f, & m = \overline{0, n}; \\ M_m^{\bar{\gamma}B} + M_m^{\bar{\gamma}} = M_n^f, & m = n+1 \end{cases}$$

с  $(n+2)$  неизвестными  $\bar{\gamma}_k$ , которые можно определить, подставив все выражения для коэффициентов  $a_m^{\bar{\gamma}B}$ ,  $a_m^{\bar{\gamma}}$  и  $a_m^f$ , а также соответствующие линейные функционалы  $k = \overline{1, n+2}$ :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n+2} \bar{\gamma}_k \left( \sqrt{1-x_k^2} / B_k - \frac{m+1}{2} \right) U_m(x_k) (1-x_k^2) = \\ = \sum_{k=1}^{n+2} f_k U_m(x_k) (1-x_k^2), & m = \overline{0, n}; \\ \sum_{k=1}^{n+2} (-1)^k \bar{\gamma}_k \left( \sqrt{1-x_k^2} / B_k - (1/2)(n+2) \right) \times \\ \times (1-x_k^2) = M_n^f, & m = n+1. \end{cases} \quad (14)$$

Существование решения системы (14) и его единственность следуют из общих теорем для проекционных методов, рассмотренных в [5], а также в [1] для метода Мультиппа. В [1] доказана ограниченность оператора, описывающего второе слагаемое уравнения (1), что дает возможность сделать вывод о сходимости метода последовательных приближений при решении рассматриваемой системы уравнений (14) от какого бы начального значения не исходили.

Однако система уравнений (14) может быть решена и любым другим методом.

После вычисления приближенных ординат  $\bar{\gamma}_k$  и линейного функционала  $M_m^{\bar{\gamma}}$  (6) приближенное решение окончательно может быть записано либо с помощью асимптотического (2), либо с помощью интерполяционного многочлена (4). Решение (2) отличается от решения (4) на слагаемое  $\sqrt{1-x^2} M_m^{\bar{\gamma}} U_{n+1}(x)$ . Рассмотрим, при каких условиях многочлен  $\bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x)$  будет стремиться к точному решению  $\gamma(x)$  или  $\sqrt{1-x^2} \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x)$  к  $\Gamma(x)$ .

Разность между выражениями (1) и (11) имеет вид

$$\begin{aligned} & (\Gamma(x)/B(x) - (1/2\pi) \times \\ & \times \int_{-1}^1 \Gamma'(t)/(t-x) dt - f(x)) - (\bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}B}(x) - (1/2\pi) \times \\ & \times \int_1^{-1} (\sqrt{1-x^2} \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(t))' / (t-x) dt - \bar{G}_{n+1}^f(x)) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Представим ее следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma(x)/B(x) - \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}B}(x) &= 1/(2\pi) \int_1^{-1} \Gamma'(t)/(t-x) dt - \\ & - (1/2) \sum_{m=0}^{n+1} \bar{\gamma}_k (1-x_k^2) (m+1) U_m(x_k) U_m(x) + \\ & + f(x) - \bar{G}_{n+1}^f(x). \end{aligned}$$

Левую часть равенства преобразуем

$$\begin{aligned} \Gamma(x)/B(x) - \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}B} &= \\ & = \left( \Gamma(x)/B(x) - \sqrt{1-x^2} \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x)/B(x) \right) + \\ & + \left( \sqrt{1-x^2} \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x)/B(x) - \sqrt{1-x^2} \gamma(x)/B(x) \right) + \\ & + \left( \sqrt{1-x^2} \gamma(x)/B(x) - \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}B}(x) \right). \end{aligned}$$

Тогда разность (15) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \left( \Gamma(x) - \sqrt{1-x^2} \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x) \right) / B(x) = \\ & = \left( \sqrt{1-x^2} \gamma(x) - \sqrt{1-x^2} \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x) \right) / B(x) - \\ & - \left( \sqrt{1-x^2} \gamma(x) / B(x) - \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}B}(x) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{1}{2\pi} \int_1^1 \Gamma'(t)/(t-x) dt - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n+1} \bar{\gamma}_k (1-x_k^2)(m+1) U_m(x_k) U_m(x) \right) + \\
 & + \left( f(x) - \bar{G}_{n+1}^f(x) \right).
 \end{aligned}$$

Умножим правую часть на функцию  $B(x)$

$$\begin{aligned}
 & \Gamma(x) - \sqrt{1-x^2} \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x) = \\
 & = \left( \sqrt{1-x^2} \gamma(x) - \sqrt{1-x^2} \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x) \right) + \\
 & + B(x) \left( - \left( \sqrt{1-x^2} \gamma(x) / B(x) - \bar{G}_{n+1}^{\Gamma B}(x) \right) + \right. \\
 & \left. + \left( 1/(2\pi) \int_1^1 \Gamma'(t)/(t-x) dt - \right. \right. \\
 & \left. \left. - (1/2) \sum_{m=0}^{n+1} \bar{\gamma}_k (1-x_k^2)(m+1) U_m(x_k) U_m(x) \right) + \right. \\
 & \left. + \left( f(x) - \bar{G}_{n+1}^f(x) \right) \right) = R_{n+1}(x).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Кроме того, можно от разности между точным решением и интерполяционным многочленом (4)

$$\begin{aligned}
 & \Gamma(x) - \sqrt{1-x^2} \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x) = \\
 & = \Gamma(x) - \sqrt{1-x^2} \left( G_n^{\bar{\gamma}}(x) + M_{nn}^{\bar{\gamma}} U_{n+1}(x) \right)
 \end{aligned}$$

перейти к разности между точным решением и асимптотическим многочленом (2)

$$\begin{aligned}
 & \Gamma(x) - \sqrt{1-x^2} G_n^{\bar{\gamma}}(x) = \Gamma(x) - \sqrt{1-x^2} G_n^{\gamma}(x) = \\
 & = \sqrt{1-x^2} M_{nn}^{\bar{\gamma}} U_{n+1}(x) + R_{n-1}(x) = R_n(x).
 \end{aligned}$$

Необходимо доказать сходимость приближенного решения  $\sqrt{1-x^2} \bar{G}_n^{\bar{\gamma}}(x)$  к точному  $\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2} \gamma(x)$ .

*Теорема.* Пусть для уравнения (1) получено приближенное решение в виде многочлена  $\sqrt{1-x^2} G_n^{\bar{\gamma}}(x)$  (2). Тогда для приближенного решения имеет место равномерная сходимость к точному решению  $\Gamma(x)$  в том случае, когда функции  $f(x)$  и  $B(x)$  ( $B(x) > 0$ ) имеют производные порядка  $p$ , а искомая функция – поряд-

ка  $(p+1)$ , принадлежащие классу  $Lip\alpha$ , если  $p > 2$ , а  $0 < \alpha < 1$ .

*Доказательство.* Интерполяционный многочлен  $\bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x)$  будет являться точным решением для всех функций, которые являются многочленами степени  $(< n)$ . Предположим, что для функции  $\gamma(x)$  существует полином наилучшего равномерного приближения  $P_n(x)$  степени  $n$  с величиной наименьшего уклонения  $E_n^{\gamma}$ . Тогда представим разность между точным и приближенным решениями в виде

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{1-x^2} (\gamma(x) - \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x)) = \sqrt{1-x^2} \times \\
 & \times \left( (\gamma(x) - P_n(x)) + (P_n(x) - \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x)) \right).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Первое слагаемое правой части (17) равно

$$\sqrt{1-x^2} (\gamma(x) - P_n(x)) = \sqrt{1-x^2} E_n^{\gamma}.$$

Для вычисления и оценки второго слагаемого полином наилучшего приближения представим в виде

$$\begin{aligned}
 & P_n(x) = (2/(n+3)) \times \\
 & \times \sum_{k=1}^{n+2} P_n(x_k) (1-x_k^2) \sum_{m=0}^n U_m(x_k) U_m(x)
 \end{aligned}$$

и составим разность

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{1-x^2} (P_n(x) - \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x)) = \sqrt{1-x^2} (P_n(x) - \\
 & - G_n^{\bar{\gamma}}(x) - M_{nn}^{\bar{\gamma}} U_{n+1}(x)) = (2/(n+3)) \times \\
 & \times \left( \sqrt{1-x^2} \sum_{k=1}^{n+2} (P_n(x_k) - \bar{\gamma}_k) \sum_{m=0}^n U_m(x_k) U_m(x) + \right. \\
 & \left. + \sqrt{1-x^2} M_{nn}^{\bar{\gamma}} U_{n+1}(x) + B(x) \times \right. \\
 & \times \left( - \sum_{k=1}^{n+2} (\sqrt{1-x_k^2} / B_k) (P_n(x_k) - \bar{\gamma}_k) (1-x_k^2) \times \right. \\
 & \times \sum_{m=0}^n U_m(x_k) U_m(x) + M_{nn}^{\Gamma B} U_{n+1}(x) + (1/2) \times \\
 & \times \sum_{k=1}^{n+2} (P_n(x_k) - \bar{\gamma}_k) (1-x_k^2) \sum_{m=0}^n U_m(x_k) (m+1) \times \\
 & \times U_m(x) + M_{nn}^{\bar{\gamma}} (n+2) U_{n+1}(x) / 2 + \sum_{k=1}^{n+2} (P_n(x_k) - f_k) \times \\
 & \left. \left. \times (1-x_k^2) \sum_{m=0}^n U_m(x_k) U_m(x) + M_{nn}^f U_{n+1}(x) \right) \right).
 \end{aligned}$$

Считаем, что функция  $B(x)$  является непрерывной, поэтому имеет верхнюю  $\bar{B} = \|B\| =$

$= \max_{x \in [-1,1]} |B(x)|$  и нижнюю  $\underline{B} = \|1/B\| = \max_{x \in [-1,1]} |1/B(x)|$  грани. Введем постоянную  $C = 1 + \overline{B}(\underline{B} + 1)$ . Норма полинома  $\|U_m\| = m + 1$ . Она не улучшается, так как в точках  $x = -1$  и  $x = 1$  полином достигает значений  $m + 1$ .

Учитывая, что выполняются неравенства  $|P_n(x_k) - \overline{\gamma}_k| < E_n^\gamma$ ,  $|P_n(x_k) - f_k| < E_n^\gamma$  и  $M_m^\gamma < E_n^\gamma$ ,  $M_m^{\Gamma B} < E_n^\gamma$ , можно сделать оценку погрешности

$$\|P_n - \gamma\| < (2/(n+3))E_n^\gamma \times \left( C \sum_{k=1}^{n+2} |1-x_k^2| \left| \sum_{m=0}^{n+1} U_m(x_k) \right| \cdot \|U_m\| + (\overline{B}/2) \sum_{k=1}^{n+2} |1-x_k^2| \sum_{m=0}^{n+1} (m+1) |U_m(x_k)| \cdot \|U_m\| \right). \quad (18)$$

Если перейти от переменной  $x$  к переменной  $\theta$ , то неравенство (18) преобразуется к виду

$$\|P_n - \gamma\| < (2/(n+3))E_n^\gamma \times \left( C \sum_{k=1}^{n+2} |\sin \theta_k| \left| \sum_{m=0}^{n+1} \sin(m+1)\theta_k \right| \times \|\sin(m+1)\theta / \sin \theta\| + (\overline{B}/2) \sum_{k=1}^{n+2} |\sin \theta_k| \times \sum_{m=0}^{n+1} (m+1) |\sin(m+1)\theta_k| \cdot \|\sin(m+1)\theta / \sin \theta\| \right).$$

Оценка сверху:

– для первого слагаемого

$$\sum_{k=1}^{n+2} |\sin \theta_k| \left| \sum_{m=0}^{n+1} \sin(m+1)\theta_k \right| \times \|\sin(m+1)\theta / \sin \theta\| < (n+2)^2(n+3)/2;$$

– для второго

$$\sum_{k=1}^{n+2} |\sin \theta_k| \sum_{m=0}^{n+1} (m+1) |\sin(m+1)\theta_k| \times \|\sin(m+1)\theta / \sin \theta\| < (n+2) \sum_{m=0}^{n+1} (m+1)^2 \leq (n+1)(n+2)^3/3.$$

Таким образом, для неравенства (18) будет справедливо

$$\|P_n - \gamma\| < (2/(n+3))E_n^\gamma \times \left( C(n+2)^2(n+3)/2 + \overline{B}(n+1)(n+2)^3/3 \right) < E_n^\gamma (C(n+2)^2 + (\overline{B}/3)(n+1)(n+2)^2).$$

Здесь использовали известный результат суммирования  $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ . Тогда, возвращаясь к (16), можно сделать оценку

$$\|\Gamma - \sqrt{1-x^2} G_n^\gamma\| < \|\gamma - G_n^\gamma\| < E_n^\gamma + E_n^\gamma (C(n+2)^2 + (\overline{B}/3)(n+1)(n+2)^2) \quad (19)$$

или

$$\|\gamma - G_n^\gamma\| < E_n^\gamma (C(n+2)^2 + (\overline{B}/3)(n+2)^3). \quad (20)$$

Оценка для равенства (17) будет следующей

$$\|\Gamma - \sqrt{1-x^2} G_n^\gamma\| < E_n^\gamma + E_n^\gamma (C(n+2)^2/2 + \overline{B}(n+2)^3/3). \quad (21)$$

Если величина  $E_n^\gamma < c^\gamma / n^{p+\alpha}$  [6], где постоянная  $c^\gamma$  зависит от функции  $\gamma(x)$ ,  $p > 3$ ,  $0 < \alpha < 1$ , то для сходимости приближенного решения к точному необходимо, чтобы производная  $p > 3$  функции  $\gamma(x)$  принадлежала классу  $Lip\alpha$ . Причем для первого слагаемого неравенства (20) достаточно, чтобы функции  $B(x)$  и  $f(x)$  имели производные порядка  $p > 2$ , принадлежащие классу  $Lip\alpha$ . Теорема доказана.

Обозначим правую часть равенства (16) – остаточный член  $R_{n+1}(x)$  – как сумму

$$R_{n+1}(x) = R_{n+1}^{(1)}(x) + R_{n+1}^{(2)}(x) + R_{n+1}^{(3)}(x) + R_{n+1}^{(4)}(x),$$

где

$$R_{n+1}^{(1)}(x) = \sqrt{1-x^2} \gamma(x) - \sqrt{1-x^2} \overline{G}_{n+1}^\gamma(x);$$

$$R_{n+1}^{(2)}(x) = B(x) \left( \sqrt{1-x^2} \gamma(x) / B(x) - \overline{G}_{n+1}^{\Gamma B}(x) \right);$$

$$R_{n+1}^{(3)}(x) = B(x) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n+1} \overline{\gamma}_m (1-x_m^2) (m+1) U_m(x_m) U_m(x) \right);$$

$$R_{n+1}^{(4)}(x) = B(x) \left( f(x) - \overline{G}_{n+1}^f(x) \right).$$

Каждое из слагаемых можно представить в виде бесконечной суммы, выраженной через соответствующие линейные функционалы и функции  $\chi_{r+2}^{(n)}(x)$ ,  $r = n, \dots, \infty$ , способ вычисле-

ния которых через полиномы Чебышева второго рода приведен в [3]. К этим функциям при вычислении третьего слагаемого (16) применяется преобразование (9). Введем обозначение

$$\bar{\chi}_{r+2}^{(n)}(x) = (1/\pi) \int_{-1}^1 \left( \sqrt{1-x^2} \chi_{r+2}^{(n)}(t) \right)' dt / (t-x).$$

Для остаточных членов соответственно получим:

$$R_{n+1}^{(1)}(x) = \sqrt{1-x^2} \gamma(x) - \sqrt{1-x^2} \bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{r=n+1}^{\infty} M_{nr}^{\gamma} \chi_{r+2}^{(n)}(x)$$

или

$$R_{n+1}^{(1)}(x) = \sqrt{1-x^2} \gamma(x) - \sqrt{1-x^2} (G_{n+1}^{\gamma}(x) - M_{nn}^{\bar{\gamma}} U_{n+1}(x)) \Rightarrow R_n^{(1)}(x) = \sqrt{1-x^2} M_{nn}^{\bar{\gamma}} U_{n+1}(x) + R_{n+1}^{(1)}(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{r=n}^{\infty} M_{nr}^{\gamma} \chi_{r+2}^{(n)}(x).$$

Слагаемые с линейными функционалами можно включить в остаточные члены, которые таким образом приобретут еще по одному слагаемому, и суммы будут изменяться не от  $(n+1)$ , а от  $n$ , то есть

$$R_n^{(1)}(x) = \sqrt{1-x^2} \gamma(x) - \sqrt{1-x^2} \bar{G}_n^{\bar{\gamma}}(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{r=n}^{\infty} M_{nr}^{\bar{\gamma}} \chi_{r+2}^{(n)}(x),$$

аналогично для всех остальных  $R_{n+1}^{(i)}(x)$ ,  $i=2, 3, 4$ :

$$R_n^{(2)}(x) = B(x) M_{nm}^{\bar{\Gamma}B} U_{n+1}(x) + R_{n+1}^{(2)}(x) = B(x) \sum_{r=n}^{\infty} M_{nr}^{\bar{\Gamma}B} \chi_{r+2}^{(n)}(x);$$

$$R_n^{(3)}(x) = (B(x) M_{nm}^{\bar{\gamma}} (n+1) U_{n+1}(x) + B(x) \sum_{r=n+1}^{\infty} M_{nr}^{\bar{\gamma}} \bar{\chi}_{r+2}^{(n)}(x)) / 2 = (B(x)/2) \sum_{r=n}^{\infty} M_{nr}^{\bar{\gamma}} \bar{\chi}_{r+2}^{(n)}(x);$$

$$R_n^{(4)}(x) = B(x) M_n^f U_{n+1}(x) + R_{n+1}^{(4)}(x) = B(x) \sum_{r=n}^{\infty} M_r^f \chi_{r+2}^{(n)}(x).$$

Следовательно, окончательно остаточный член примет вид:

$$R_n(x) = \sum_{r=n}^{\infty} \left( -M_{nr}^{\gamma} \sqrt{1-x^2} + B(x) (M_{nr}^{\bar{\Gamma}B} + M_r^f) \right) \times \chi_{r+2}^{(n)}(x) + B(x) M_{nr}^{\bar{\gamma}} \bar{\chi}_{r+2}^{(n)}(x). \quad (23)$$

Для того чтобы производная приближенного решения наибольшего третьего порядка  $(G_n^{\gamma}(x))''' \in Lip\alpha$ , необходимо, чтобы многочлен  $(G_n^{\gamma}(x))'''$  имел кривизну, отличную от нуля, следовательно, был бы не менее второго порядка. Тогда многочлен  $G_n^{\gamma}(x)$  будет иметь степень пятого порядка. Он основан на семи ординатах  $-\bar{\gamma}_k$ ,  $k=1, 7$ , для определения которых необходимо решить систему уравнений (14) седьмого порядка. Таким образом, наименьшая степень асимптотического многочлена, являющегося приближенным решением уравнения (1), не может быть меньше пятой.

Для слагаемых  $R_n^{(1)}(x)$ ,  $R_n^{(2)}(x)$  и  $R_n^{(4)}(x)$  рассмотрено стремление к нулю при  $n \rightarrow \infty$  в [3], для всех функций, у которых производная порядка  $p > 2$  принадлежит классу  $Lip\alpha$ . Функции  $\chi_{r+2}^{(n)}(x)$  выражаются через полиномы Чебышева второго рода

$$\chi_{r+2}^{(n)}(x) = \sum_{m=n(2)}^{\infty} k_{rm} \dot{h}_{m+2}^{(n)}(x),$$

где  $k_{rm}$  – элементы  $(k+2)$  строки матрицы  $K$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix};$$

$$\dot{h}_{m+2}^{(n)}(x) = \begin{cases} (2\lambda+1)(n+3); \\ U_{m+1}(x), & \text{если } m+2 = \begin{cases} 2\lambda(n+3); \\ (2\lambda(n+3) \pm (n+2)); \end{cases} \\ U_{m+1}(x) \pm U_{h-1}(x), & \text{если } m+2 = 2\lambda(n+3) \pm h; \\ & 1 < h < n+1. \end{cases}$$

Следует учесть, исходя из вида матрицы  $K$ , что номера  $r$  и  $m$  одинаковой четности, и для нечетных номеров сумма (16) вычисляется только для слагаемых с нечетными номерами, а

для четных – лишь для слагаемых с четными номерами  $m$ , и номер  $m$  меняется через две единицы. Элементы матрицы  $K$  вычисляются через функцию Мебиуса, что более подробно приведено в [3]. Функции  $\bar{\chi}_{r+2}^{(n)}(x)$  с учетом формул (9) и (24) принимают вид

$$\bar{\chi}_{r+2}^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=n(2)}^{r+2} K_{r-2} \int_{-1}^1 (\sqrt{1-t^2} \times \\ \times h_{m+2}^{(n)}(t))' dt / (t-x) = \frac{1}{2} \sum_{m=n(2)}^{r+2} K_{r+2} \bar{h}_{m+2}^{(n)}(x),$$

где

$$\bar{h}_{m+2}^{(n)}(x) = (1/\pi) \times \\ \times \int_{-1}^1 (\sqrt{1-t^2} h_{m+2}^{(n)}(t))' dt / (t-x).$$

Оценки сверху для функций в общем случае будут такими

$$\|h_{m+2}^{(n)}\| < |\sin(m+3)\theta/\sin\theta| + |\sin(m+1)\theta/\sin\theta| < \\ < (m+3) + (m+1) = 2(m+2),$$

тогда для

$$\|\bar{\chi}_{r+2}^{(n)}\| \leq \sum_{m=n}^{\infty} K_{r+2} \|h_{m+2}^{(n)}\| 2(m+2) < \\ \leq \sum_{m=n}^{\infty} K_{r+2} 2(m+2)^2.$$

Учитывая равенство  $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1) \times (2n+1)/6$  и то, что коэффициенты  $K_{r+2}$  можно оценить сверху величиной  $\zeta(r+3)$ , которая обозначает число делителей  $d_j$  целого числа  $(r+3)$ , больших либо равных  $(n+3)$  и допускающих представление  $r+3 = (2s_j+1)d_j$ . Для этой функции справедлива оценка [7] –  $\zeta(r+3)/r^{\varepsilon/2} < c_1$ , где  $c_1$  – постоянная, а  $\varepsilon > 0$  – некоторая бесконечно малая величина

$$\|\bar{\chi}_{r+2}^{(n)}\| \leq 2c_1 \sum_{m=0}^{r+2} (r+3)^2 < 2c_1 (r+3)^3 \zeta(r+3)/3.$$

В предположении, что существует полином наилучшего равномерного приближения  $P_n(x)$  степени  $n$  для функции

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2} \gamma(x) \approx \sqrt{1-x^2} P_n(x),$$

с величиной наибольшего уклонения  $E_n^\gamma$ , выполняются условия [3]:

$$M_n^{\bar{\gamma}} < E_n^\gamma \text{ и } M_n^f < E_n^\gamma, \quad E_n^\gamma < c/n^{p+1+\alpha+\varepsilon/2}. \quad (25)$$

Откуда можно сделать вывод, что при выполнении неравенства (25), где  $0 < \alpha < 1$ ,  $p > 3$  и  $\varepsilon > 0$  – любая бесконечно малая, будет иметь место равномерная сходимость ряда (23) приближенного решения  $\sqrt{1-x^2} G_n^{\bar{\gamma}}(x)$  к точному  $\Gamma(x)$ , так как будет выполняться условие

$$\|\Gamma - \sqrt{1-x^2} G_n^{\bar{\gamma}}\| < \|\gamma - G_n^\gamma\| < \\ < \bar{B} E_{n+1}^\Gamma c / (n+1)^{p+3+\alpha+\varepsilon/2} = \bar{B} c_2 / (n+1)^\alpha.$$

Таким образом, справедлива теорема.

**Теорема 2.** Если линейные функционалы  $M_{nr}^\gamma$  и  $M_r^f$  удовлетворяют условию (25), то остаточный член ряда (23) стремится к нулю во всех случаях, когда функции  $f(x)$  и  $B(x)$  имеют производные порядка  $p$ , а функция  $\gamma(x)$  – производную порядка  $(p+1)$ , принадлежащие классу  $Lip\alpha$ , если  $p > 2$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\varepsilon > 0$  – любая бесконечно малая, и функция  $B(x)$  на рассматриваемом промежутке не обращается в нуль.

Следует отметить, если  $f(x)$  и  $B(x)$  четные функции, то ввиду симметрии искомой функции система уравнений (14) будет иметь порядок вдвое меньший, чем в общем случае, и все четные линейные функционалы будут равны нулю. Что существенно облегчает решение.

Рассмотрим более подробно приближенное решение при  $n=5$  в самом общем случае. После определения приближенного решения в виде (2) можно записать равенство

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2} \gamma(x) = \sqrt{1-x^2} G_5^{\bar{\gamma}} + R_5(x),$$

где

$$R_5(x) = R_5^{(1)}(x) + R_5^{(2)}(x) + R_5^{(3)}(x) + R_5^{(4)}(x),$$

то есть

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2} G_5^{\bar{\gamma}}(x) + \sqrt{1-x^2} \sum_{r=5}^{\infty} M_{5r}^{\bar{\gamma}} \chi_{r+2}^{(5)}(x) + \\ + B(x) \left( - \sum_{r=5}^{\infty} M_{5r}^{\bar{B}} \chi_{r+2}^{(5)}(x) + \right. \\ \left. + (1/2) \sum_{r=5}^{\infty} M_{5r}^{\bar{\gamma}} \bar{\chi}_{r+2}^{(5)}(x) + \sum_{r=5}^{\infty} M_r^f \chi_{r+2}^{(5)}(x) \right) = \quad (26)$$

$$= \sqrt{1-x^2} G_5^{\bar{y}}(x) + \sum_{r=n}^{\infty} \left( -M_{5r}^{\gamma} \sqrt{1-x^2} + B(x)(M_{5r}^{TB} + M_r^f) \chi_{r+2}^{(5)}(x) + M_{5r}^{\bar{y}} \bar{\chi}_{r+2}^{(5)}(x) \right).$$

Для  $n = 5$  функции  $h_{m+2}^{(5)}(x)$  соответственно  $\chi_{r+2}^{(5)}(x)$  и  $\bar{\chi}_{r+2}^{(5)}(x)$  будут иметь вид:

$$h_7^{(5)}(x) = U_6(x), \quad h_8^{(5)}(x) = U_8(x),$$

$$h_{11}^{(5)}(x) = U_{10}(x), \quad h_{13}^{(5)}(x) = U_{12}(x) - U_2(x),$$

$$h_{15}^{(5)}(x) = U_{14}(x) - U_0, \quad h_{17}^{(5)}(x) = U_{16}(x) + U_0,$$

$$h_{19}^{(5)}(x) = U_{18}(x) + U_2(x), \quad h_{21}^{(5)}(x) = U_{20}(x) + U_4(x),$$

$$h_{23}^{(5)}(x) = U_{22}(x) \text{ и т. д.};$$

$$\chi_7^{(5)}(x) = h_7^{(5)}(x) = U_6(x),$$

$$\chi_9^{(5)}(x) = h_9^{(5)}(x) + h_{11}^{(5)}(x) = U_{10}(x) + U_8(x),$$

$$\begin{aligned} \chi_{11}^{(5)}(x) &= h_{11}^{(5)}(x) + h_{13}^{(5)}(x) + h_{15}^{(5)}(x) = \\ &= U_{14}(x) + U_{12}(x) + U_{10}(x) - U_2(x) - U_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{13}^{(5)}(x) &= h_{13}^{(5)}(x) + h_{15}^{(5)}(x) + h_{17}^{(5)}(x) + h_{19}^{(5)}(x) = \\ &= U_{18}(x) + U_{16}(x) + U_{14}(x) + U_{12}(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{15}^{(5)}(x) &= h_{15}^{(5)}(x) + h_{17}^{(5)}(x) + h_{19}^{(5)}(x) + h_{21}^{(5)}(x) + \\ &+ h_{23}^{(5)}(x) = U_{22}(x) + U_{20}(x) + U_{18}(x) + \\ &+ U_{16}(x) + U_{14}(x) + U_4(x) \text{ и т. д.}; \end{aligned}$$

$$\bar{\chi}_7^{(5)}(x) = 7U_6(x), \quad \bar{\chi}_9^{(5)}(x) = 11U_{10}(x) + 9U_8(x),$$

$$\bar{\chi}_{11}^{(5)}(x) = 15U_{14}(x) + 13U_{12}(x) + 10U_{10}(x) - 2U_2(x),$$

$$\bar{\chi}_{13}^{(5)}(x) = 19U_{18}(x) + 17U_{16}(x) + 15U_{14}(x) + 13U_{12}(x),$$

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{15}^{(5)}(x) &= 23U_{22}(x) + 21U_{20}(x) + 19U_{18}(x) + \\ &+ 17U_{16}(x) + 15U_{14}(x) + 5U_4(x) \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Пусть решение уравнения (1) на основе ряда (23) представлено в виде суммы

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2} G_5^{\bar{y}}(x) + R_5(x).$$

Далее можно действовать следующим образом.

1. Вычислить многочлен (2)  $G_5^{\bar{y}}(x)$ , определив ординаты приближенного решения из системы уравнений (14).

2. Вычислить определенное количество слагаемых остаточного члена  $R_5(x)$  (26). По ним установить степень  $n$  многочлена  $G_n^{\gamma}(x)$ , для которого необходимая точность будет удовлетворяться.

3. Вычислить многочлен найденной степени, снова решив систему уравнений (14)  $(n+2)$ -го порядка.

4. Уточнить оценку погрешности, определив некоторое число слагаемых нового остаточного члена (23), для чего вычислить новые последовательности  $\{M_m^{TB}\}_{r=n, n+1, \dots}$ ,  $\{M_r^f\}_{r=n, n+1, \dots}$ ,  $\{M_m^{\gamma}\}_{r=n, n+1, \dots}$  и соответствующие функции  $\chi_{r+2}^{(n)}(x)$ ,  $\bar{\chi}_{r+2}^{(n)}(x)$ . Поскольку эти функции основаны на полиномах Чебышева второго рода, то оценка сверху для них не представляет затруднений.

## ВЫВОД

Предлагаемый для решения уравнения теории крыла метод асимптотических полиномов является эффективным и простым при составлении алгоритма для реализации его с помощью вычислительной техники.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Каландия, А. И. Математические методы теории упругости / А. И. Каландия. – М.: Наука, 1973.
2. Ермолаева, Л. Б. Решение одного интегродифференциального уравнения / Л. Б. Ермолаева // Сб. тр. XXIII Междунар. науч. конф. ММТТ-23. – Т. 1. – 2010. – С. 68–71.
3. Грибкова, В. П. Равномерные приближения, основанные на полиномах Чебышева / В. П. Грибкова, С. М. Козлов // Сб. тр. XXIII Междунар. науч. конф. ММТТ-24. – Т. 1. – 2011. – С. 31–36.
4. Грибкова, В. П. Решение операторных уравнений одним из приближенных методов / В. П. Грибкова // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1970. – № 6. – С. 68–76.
5. Габдулхаев, Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач / Б. Г. Габдулхаев. – Казань: КГУ, 1980.
6. Натансон, И. П. Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М.; Л.: ГТТЛ, 1949.
7. Этерман, И. И. К вопросу восстановления функции по некоторой характеристической последовательности / И. И. Этерман // Известия вузов. – 1966. – № 2. – С. 148–157.

Поступила 02.05.2012